



# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА С УСЛОВИЯМИ КОНТАКТА НА ГРАНИЦАХ

А.В.Шубин

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Носов Вячеслав Николаевич, к.ф.-м.н., доц. Лобода Ольга Сергеевна

## Тема работы

Магистерская работа посвящена исследованию задачи о движении системы объектов, состоящих из нескольких звеньев, при наличии упругих связей между ними в среде с сухим трением.

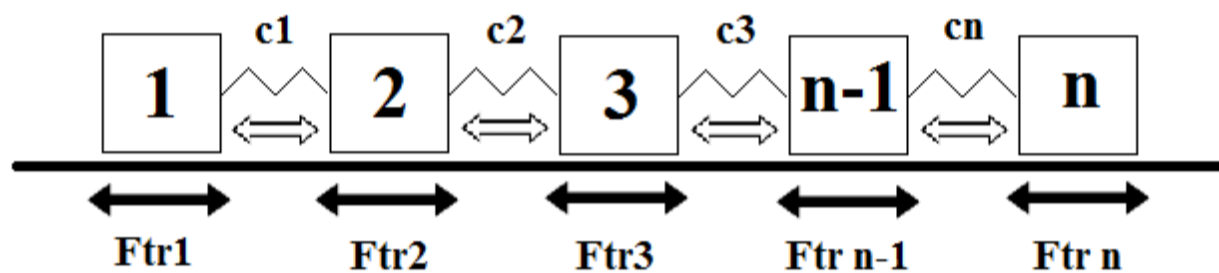
Основные направления работы:

- **Механика:** Постановка задачи, в которой реализуется движение системы, состоящей из цепи твердых тел, соединенных упругими связями.
- **Математическое моделирование:** Создание модели алгоритма описания механической задачи для численного решения заданных уравнений; представление эмпирической силы трения.

Рассмотренная в работе задача описывает возможные режимы движения в некоторых живых организмах (бионика).

## Описание математической модели движения

### дискретной системы со связями



Система дифференциальных уравнений движения звеньев:

$$P = \begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = cU_{12} - Ftr_1(t), \\ m\ddot{x}_2(t) = cU_{23} - cU_{12} - Ftr_2(t), \\ m\ddot{x}_3(t) = cU_{34} - cU_{23} - Ftr_3(t), \\ \dots \\ m\ddot{x}_{n-1}(t) = cU_n - cU_{n-1} - Ftr_{n-1}(t), \\ m\ddot{x}_n(t) = -cU_n - Ftr_n(t), \end{cases}$$

Условные обозначения:  
 $c$  - коэффициент жесткости пружины,  
 $m$  - масса звена,  
 $U$  - перемещение звеньев, относительно друг друга  
 $Ftr$  - сила трения,  
 $d$  - расстояние между звеньями.

Граничные условия:

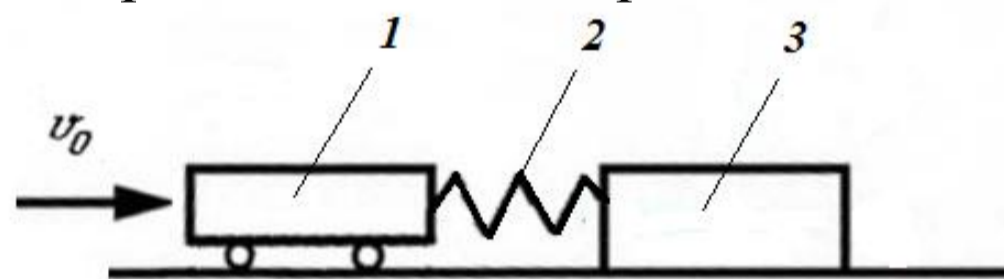
$$x_1(0) = 0, x_2(0) = d, x_3(0) = 2d, x_{n-1}(0) = (n-2)d, x_n(0) = (n-1)d, \\ \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \dot{x}_3(0) = 0, \dot{x}_{n-1}(0) = 0, \dot{x}_n(0) = 0.$$

Ограничения на максимальное растяжение, равное  $2d$  и максимальное сжатие пружины ( $0$ ).

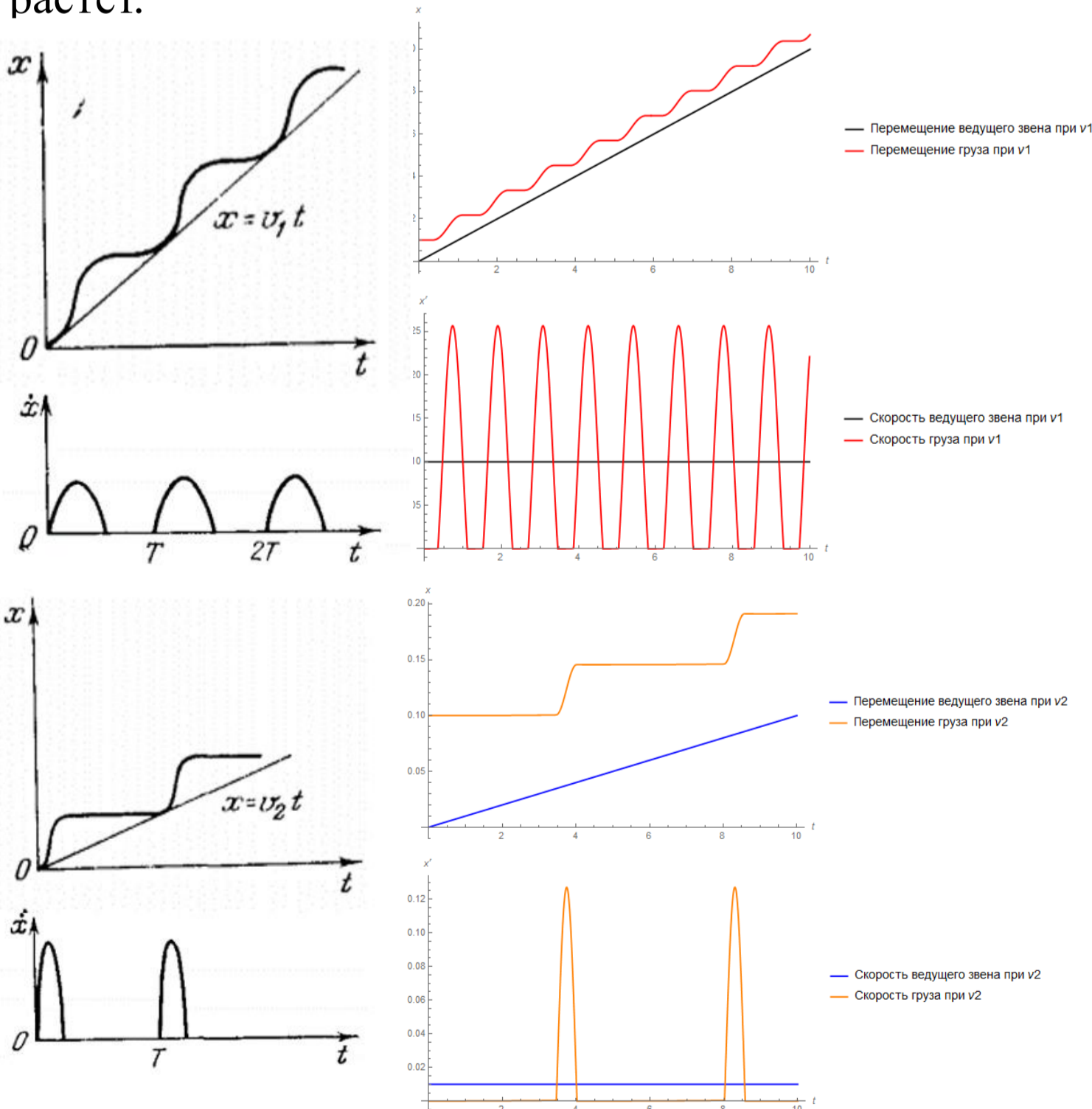
$$U_n = \begin{cases} -d, x_n(t) - x_{n-1}(t) < 0, \\ d, x_n(t) - x_{n-1}(t) > 2d, \\ x_n(t) - x_{n-1}(t) - d. \end{cases}$$

### Тестовая задача

Механическая система состоит из равномерно движущегося ведущего звена 1, приводящего через пружину 2 в движение груз 3. Между грузом и поверхностью, по которой он движется, развивается сила сухого трения.



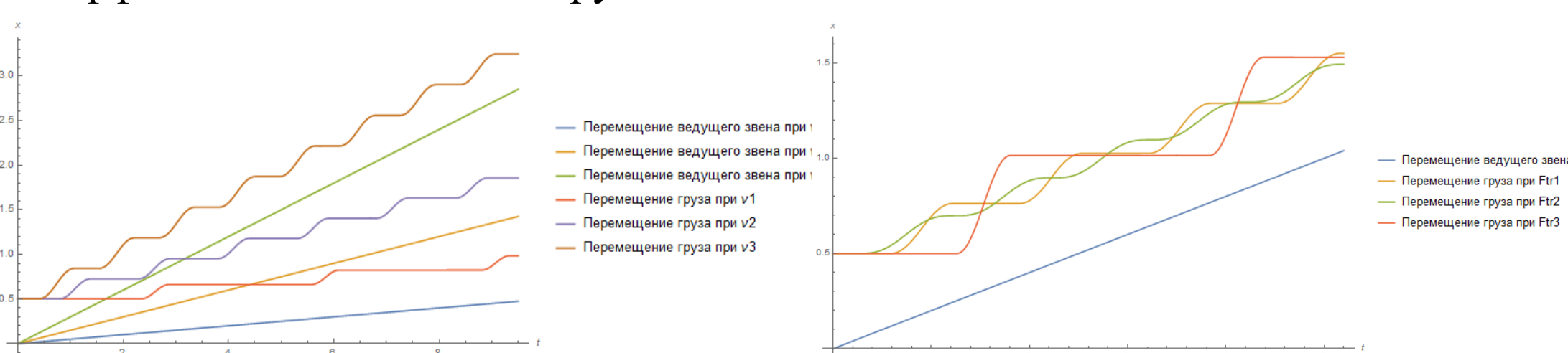
Законы изменения перемещения и скорости, стоит заметить, что с уменьшением постоянной скорости ведущего звена период автоколебаний растет.



С помощью математической модели был протестирован аналогичный режим движения системы и найдено численное решение для перемещения груза. Использовалось качественное сравнение результатов. Численно решив такую же задачу, был обнаружен стационарный режим автоколебаний систем при малых скоростях  $v_1$  и  $v_2$ .

### Исследование характеристик системы

Механическая система была исследована на влияние изменения постоянной скорости ведущего звена, различных значений параметров силы трения, коэффициентов жесткости пружины и количества звеньев.



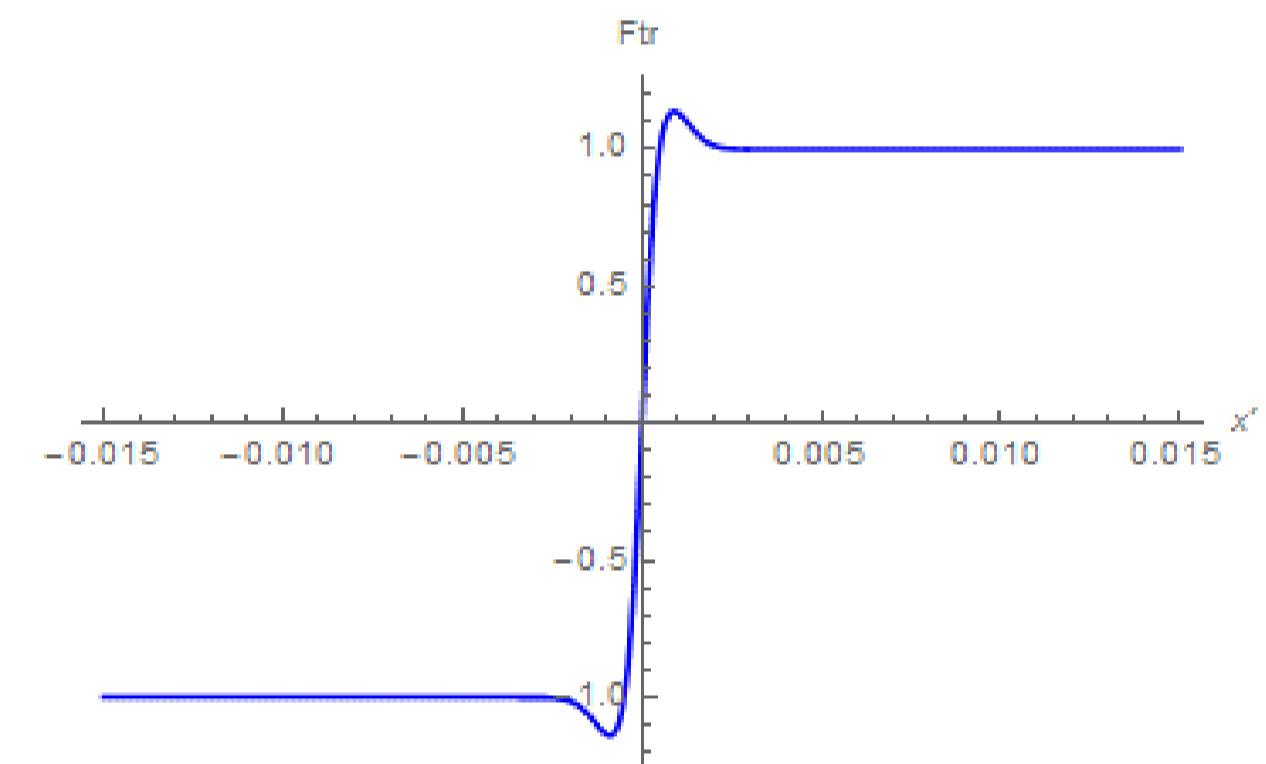
## Представление силы трения

В данной работе формула и форма сухого трения среды получена эмпирическим путем на основе s-образной силы трения, как наиболее подходящая по постановке задачи. Введены численные коэффициенты  $K, L$  и  $M$  для варьирования формы и подбора оптимальной силы трения.

$$F_{tr} = K(xe^{-Lx})^2 + \tanh(Mx).$$

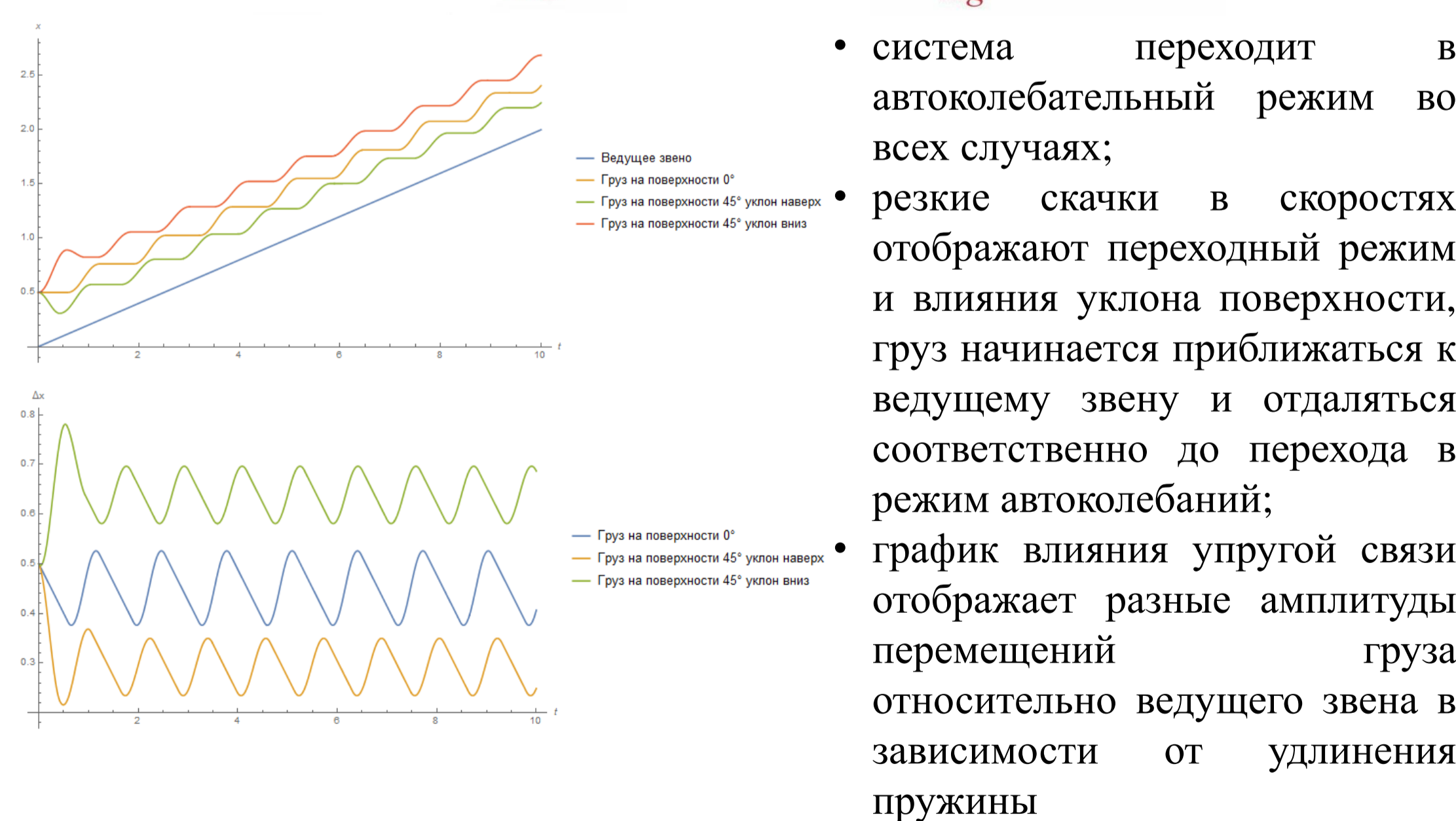
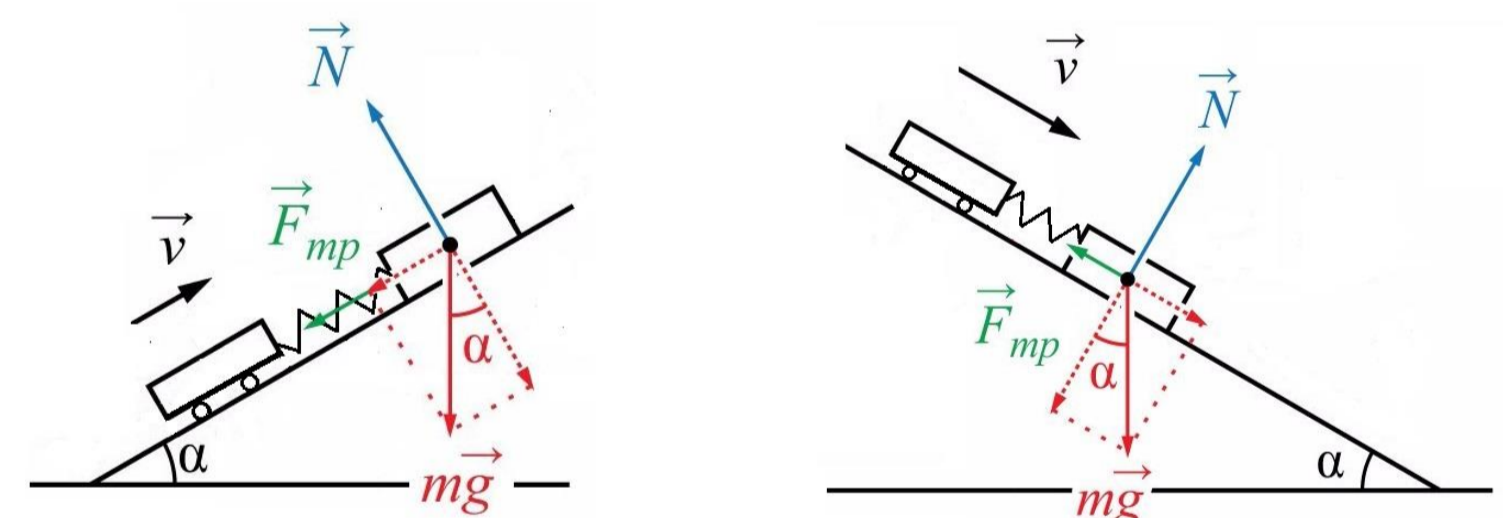
Данная форма была взята, так как удовлетворяет условиям гладкости и непрерывности функции, что дает возможность более точно численно решать дифференциальные уравнения.

Преимуществом такой формы является то, что одной функцией задаются 2 типа взаимодействия – сила трения покоя и сила трения движения.



## Ввод угла наклона поверхности

Для осуществления реализации задачи движения системы по наклонной поверхности были добавлены характеристики влияния условной силы притяжения. Введена зависимость от угла наклона, рассматривалось 3 случая: ровная поверхность  $\alpha = 0^\circ$ , поверхность с уклоном вверх  $\alpha = 45^\circ$ , поверхность с уклоном вниз  $\alpha = -45^\circ$ .



- система переходит в автоколебательный режим во всех случаях;
- резкие скачки в скоростях отображают переходный режим и влияния уклона поверхности, груз начинается приближаться к ведущему звену и отдаляться соответственно до перехода в режим автоколебаний;
- график влияния упругой связи отображает разные амплитуды перемещений груза относительно ведущего звена в зависимости от удлинения пружины

## Основные результаты

- Успешно описана математическая модель движения дискретной системы, состоящей из цепи твердых тел, соединенных упругими связями. Математическое моделирование выполнялось в программном пакете Wolfram Mathematica
- Найдено оптимальное представление силы трения
- Успешно проведена проверка работоспособности модели на основе качественного сравнения с аналитическим решением
- Произведено исследование влияния различных параметров на характер движения системы
- Создан алгоритм визуализации процесса движения системы в программном пакете на языке Delphi