Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

директор ВШТМ, д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН

А. М. Кривцов

«___»_____2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ МЕЖДУ МОДАМИ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЯТОРОВ

По направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

по образовательной программе

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой

Выполнил

студент гр. 3630103/60101 *<подпись>* Шпетный Д.Н.

Руководитель

Доц. ВШТМ,

Научн. сотр. НОЦ, к. ф-м. н. *<подпись>* Бабенков М. Б.

Санкт-Петербург

2020

РЕФЕРАТ

На 32 стр., 26 рисунков

УРАВНЕНИЕ ДИНАМИ, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДИМОСТИ, ОДНОМЕРНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ С ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ, ОДНОМЕРНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ С ВЯЗКОСТЬЮ

В данной работе было рассмотрено два подхода описания распространения энергии: уравнение динамики и уравнение теплопроводности. Был проведен анализ частотного спектра каждой модели, а именно: одномерного гармонического кристалла с линейным взаимодействием, одномерного гармонического кристалла с нелинейным взаимодействием, одномерного гармонического кристалла с вязкостью, уравнение теплопереноса и распространения тепла в нелинейном кристалле. Сравнение основных параметров, которые характеризуют данные модели.

THE ABSTRACT

32 pages, 26 pictures

DYNAMIC EQUATION, EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY, ONE-DIMENSIONAL HARMONIC CRYSTAL WITH LINEAR AND NONLINE-AR INTERACTION, ONE-DIMENSIONAL HARMONIC CRYSTAL WITH VISCOSITY

In this paper, two approaches to describing the energy distribution were considered: the dynamics equation and the heat equation. An analysis was made of the frequency spectrum of each model, namely: a one-dimensional harmonic crystal with linear interaction, a one-dimensional harmonic crystal with nonlinear interaction, a one-dimensional harmonic crystal with viscosity, the heat transfer equation and heat propagation in a nonlinear crystal. Comparison of the main parameters that characterize the models.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

Глава 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 6

Глава 2. МОДЕЛИ ОДНОМЕРНОГО КРИСТАЛЛА С ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ТИПОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, МОДЕЛЬ С ВЯЗКОСТЬЮ 7

2.1 Модель одномерного кристалла с линейным взаимодействием 7

2.1.1 Проверка сходимости (начальная задача) 8

2.1.2 Решение задачи 11

2.2 Модель одномерного кристалла с нелинейным взаимодействием 12

2.2.1 Проверка сходимости (начальная задача) для модели с нелинейным взаимодействием 12

2.2.2 Решение задачи 15

2.3 Модель одномерного кристалла с вязкостью 16

2.3.1 Проверка сходимости (начальная задача) для модели с вязкостью 16

2.3.2 Решение задачи 19

2.4 Сравнение амплитуды колебаний разных моделей 20

Глава 3. АНАЛИЗ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА РАССМАТРЕВАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ 22

3.1 Сравнение частотного спектра для первых частиц 22

3.2 Сравнение частотного спектра для всей цепочки 24

Глава 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В НЕЛИНЕЙНОМ КРИСТАЛЛЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ 26

4.1 Распространение тепла в линейной среде 26

4.1.1 Проверка сходимости 26

4.1.2 Решение задачи 26

4.2 Анализ частотного спектра уравнения теплопроводности и распространения тепла в нелинейном кристалле 28

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 31

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 32

ВВЕДЕНИЕ

Механика структуры материалов на атомарном уровне имеет значительные особенности, связанные с дискретностью строения вещества. Из-за дискретности материала появляется дисперсия, которая влияет на распространение механических волн.

Такие процессы можно описывать и наблюдать благодаря модели одномерного кристалла. На основе модели одномерного кристалла можно наблюдать физические процессы: распространение волн, фазовые переходы, перенос тепла и разрушение. Существует множество видов подобных систем: цепочка масс с линейным взаимодействием (линейный гармонический одномерный кристалл), цепочка масс с нелинейным взаимодействием (нелинейный гармонический одномерный кристалл), цепочка масс на упругом основании (описывается телеграфным уравнением в волновом приближении).

Линейный гармонический одномерный кристалл имеет более узкую область применения. В основном, эту модель применяют для наблюдения процесса распространения волн.

Классическим примером является цепочка масс на упругом основании, которая может служить, например, моделью углеродных нановолокон.

Более широкую область применения имеет цепочка масс с нелинейным взаимодействием между частицами, которая может использоваться для моделирования распространения тепла в наноструктурах.

В данной работе будет проведено сравнение частотного спектра каждой модели, чтобы проанализировать как распространяется энергия по модам колебаний (собственным частотам).

Глава 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При описании физических процессов внутренняя структура материала играет важнейшую роль на макро – и наномасштабном уровне. В то же время при дискретизации системы могут возникать значительные неточности при вычислении, не позволяющие моделировать точные физические процессы. Поэтому необходимо построить модель, которая точно учитывает микроструктуру материала и корректно описывает его механические свойства. А именно распространение энергии. В нелинейном кристалле процесс распространения энергии описывается в рамках двух различных подходов: уравнение динамики среды и уравнение теплопереноса.

Представим одномерный кристалл в виде цепочки частиц, расположенных горизонтально и имеющих одну степень свободы

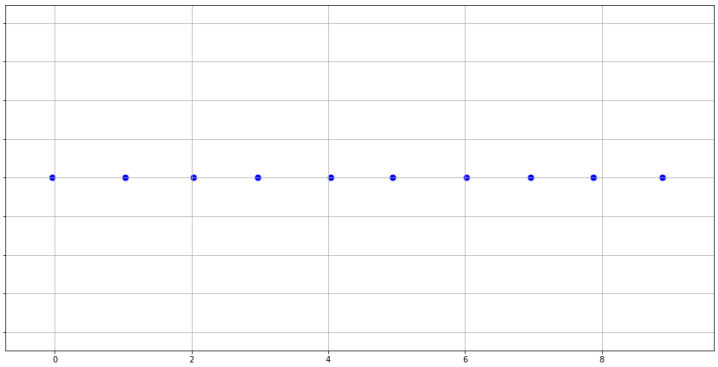

Рис. 1 Одномерная цепочка

Для наглядности, на Рис. 1 используется только 10 частиц, в дальнейшем расчеты будут проводиться на значении 100. Так же, стоит отметить, что частицы – это тела-точки и они имеют массу, но не имеют размера. Масса имеет значение 1.

Для трех типов моделей начальные и граничные будут одинаковые:

$$u_n|_{t=0} = 0,\ \ \dot{u}_n|_{t=0} = 0$$

$$f_n = A\cos(\omega t)\,\delta_{1n}, \text{ где } \delta \text{ – символ Кронекера}$$

То есть: все частицы покоятся в начальные момент времени, к крайней слева частице приложена гармоническая сила, а правый конец свободный.

Глава 2. МОДЕЛИ ОДНОМЕРНОГО КРИСТАЛЛА С ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ТИПОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, МОДЕЛЬ С ВЯЗКОСТЬЮ

2.1 Модель одномерного кристалла с линейным взаимодействием

Динамика одномерного гармонического кристалла с линейным взаимодействием описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка:

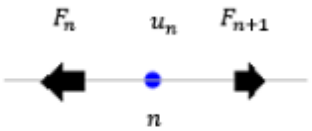

Рис. 2.1.1 Частица с силами взаимодействия

Запишем второй закон Ньютона для частицы n [2]:

$$m\ddot{u}_n = F_{n+1} - F_n$$

Введем силы, действующие с каждой стороны частицы n, где C – это жесткость связи. Выражается из уравнения частоты $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$:

$$F_{n+1} = C(u_{n+1} - u_n)$$

$$F_n = C(u_n - u_{n-1})$$

Подставим их во второй закон Ньютона и упростим:

$$m\ddot{u}_n = C(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

Таким образом было получено линейной дифференциальное уравнение второго порядка описывающие динамику одномерного кристалла. Также введем возмущающую силу и уравнение примет вид:

$m\ddot{u}_n = C(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + f_n,$ где f_n – возмушающая сила

2.1.1 Проверка сходимости (начальная задача)

Чтобы убедиться в том, что наша модель работает корректно, проведем расчеты и выведем графики энергий. В начальной задаче не учитывается вынуждающая гармоническая сила. Движение цепочки осуществляется за счет случайных перемещений частиц в начальный момент времени, следовательно начальные и граничные условия примут вид:

$$u_n|_{t=0} = \mathrm{U_n} \;\; \dot{u}_n|_{t=0} = 0$$

$$f_n = 0$$

Также численное решение должно удовлетворять условию сходимости по Куранту [4]:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \, ,$$

где Δx – по пространсву, он равен единице

Время вводится в систему как период свободных колебаний частиц:

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\Delta x} \text{ , где } \Delta \text{ x = 1}$$

А оптимальные период колебаний для расчета по выбирается исходя из данного условия:

$$\Delta t = 0.02\tau_0$$

Расчет энергий проводился при данных параметрах:

N = 100, N – количество частиц;

Δt = 0.1, Δt – шаг по времени;

C = 1, C – жесткость свзяи;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 900, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

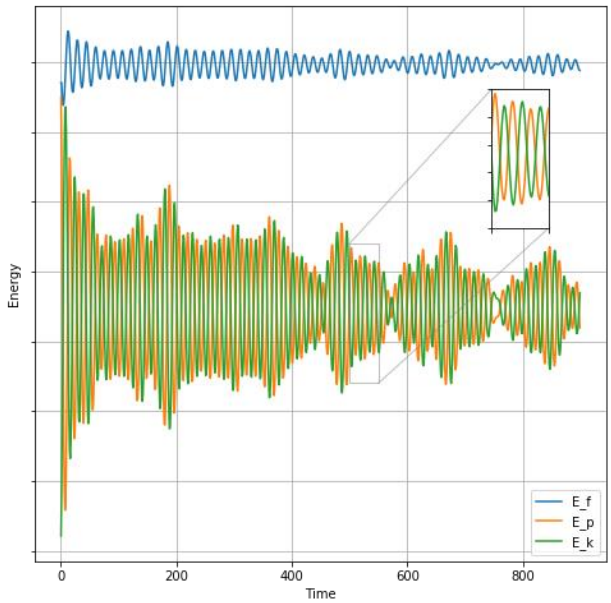

Рис. 2.1.2 Графики полной, потенциальной и кинетической энергий, где dt = 0.1

Обращая внимание на рисунок 2.1.2, можно заметить, что в начальный момент времени амплитуда колебаний самая большая. Это свзяано с начальным возмущением частиц. Также, заметим, что полная энергия сохраняется, но ее колебания так стационарны, как хотелось бы, а потенциальная и кинетическая энергия движутся в противофазе.

Проведем аналагочные расчеты для меньшего шага по времени:

N = 100, N – количество частиц;

Δt = 0.06, Δt – шаг по времени;

C = 1, C1 – жесткость свзяи;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 900, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

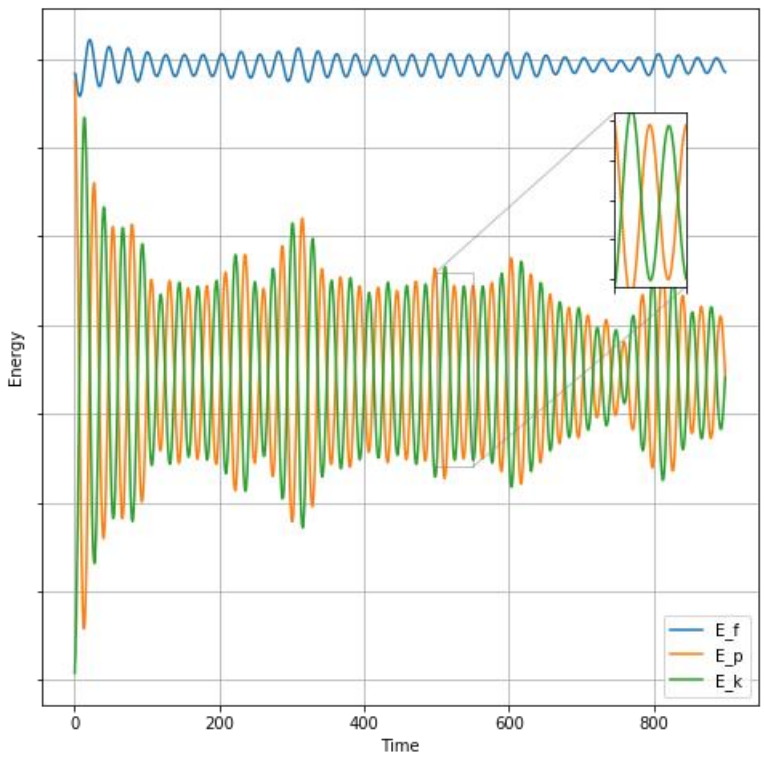

Рис. 2.1.3 Графики полной, потенциальной и кинетической энергий, где dt = 0.06

Обращая внимание на рисунок 2.1.3, можно заметить, что колебания полной энергии вышли на колбеательный режим с более меньшим отклонениями чем при Δt = 0.1. Аналогично предыдущим расчетам, заметим что полная энергия сохраняется, а потенциальная и кинетическая энергия движутся в противофазе. Из перечисленных фактов следует, что данная модель работает корректнее при Δt =0.06.

2.1.2 Решение задачи

Решением задачи является график распределения волны по цепочке:

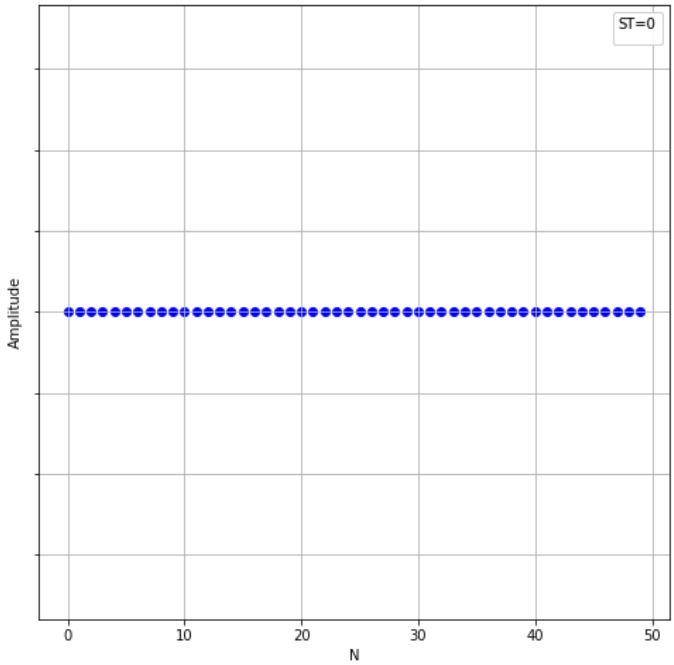

Рис. 2.1.4 Положение частиц в цепочке в начальны момент времени (для наглядности N=50)

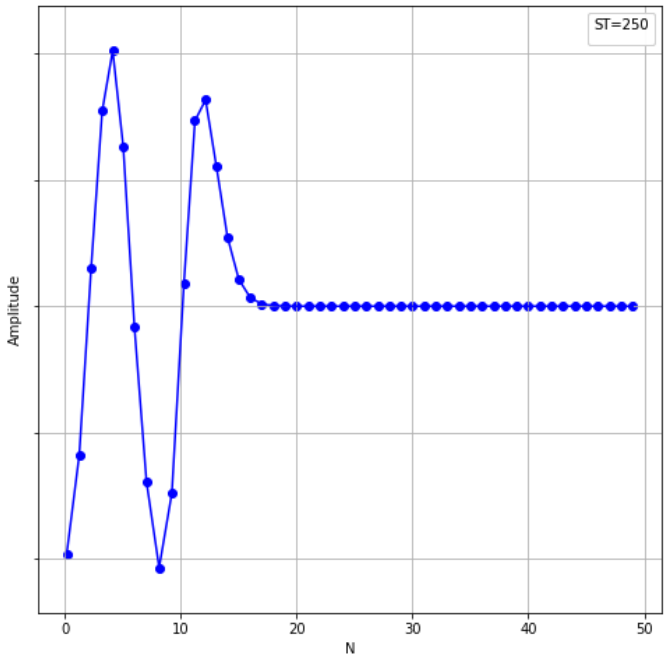

Рис. 2.1.5 Положение частиц в цепочке на 250 шаге (для наглядности N=50)

Обращая внимание на рисунок 2.1.5 видим изменение амплитуды колбаний частиц при наличии возмущающей силы. Для наглядного распространения волны в цепочки, частицы были соединены линией.

2.2 Модель одномерного кристалла с нелинейным взаимодействием

Динамика одномерного гармонического кристалла с нелинейным взаимодействием описывается данным уравнением [2]:

$$\ddot{u}_n = C_1(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + C_2((u_{n+1} - u_n)^3 - (u_n - u_{n-1})^3) + f_n,$$

где C_1 – линейный коэффициент, а C_2 – нелинейный коэффициент.

Данное уравнение получается из разложения в ряд Тейлора уравнения динамики одномерного гармонического кристалла с линейным взаимодействием.

2.2.1 Проверка сходимости (начальная задача) для модели с нелинейным взаимодействием

Чтобы убедиться в том, что наша модель работает корректно, проведем расчеты и выведем графики энергий. В начальной задаче не учитывается вынуждающая гармоническая сила. Движение цепочки осуществляется за счет случайных перемещений частиц в начальный момент времени, следовательно начальные и граничные условия примут вид аналогичные в модели с линейным взаимодействием:

$$u_n|_{t=0} = \mathrm{U_n} \;\; \dot{u}_n|_{t=0} = 0$$

$$f_n = 0$$

Также численное решение должно удовлетворять условию сходимости по Куранту [4]:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \, ,$$

где Δx – по пространсву, он равен единице

Время вводится в систему как период свободных колебаний частиц:

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\Delta x} \text{ , где } \Delta \text{ x = 1}$$

А оптимальные период колебаний для расчета по выбирается исходя из данного условия:

$$\Delta t = 0.02\tau_0$$

Расчет энергий проводился при данных параметрах:

N = 100, N – количество частиц;

Δt = 0.1, Δt – шаг по времени;

C_1= 1, C_1 – линейный коэффициент;

C_2 = 0.04, C_2 – нелинейый коэффициент;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 900, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

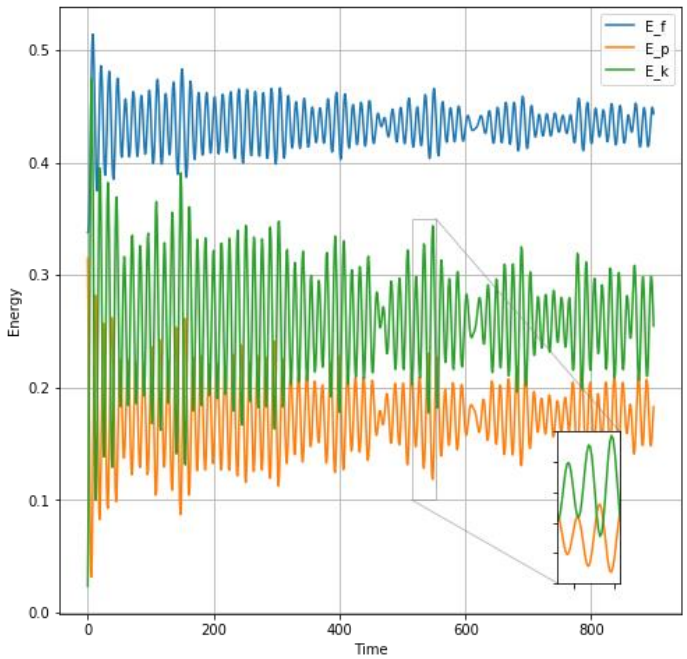

Рис. 2.2.1 Графики полной, потенциальной и кинетической энергий, где dt = 0.1

Обращая внимание на рисунок 2.2.1, можно заметить, что в начальный момент времени амплитуда колебаний самая большая. Это свзяано с начальным возмущением частиц. Также, заметим, что полная энергия

сохраняется, но ее колебания не так стационарны, как хотелось бы. Следует отметить, что видно характерное отличие от рисунка 2.1.2 – потенциальная энергия сместилась вниз по значению амплитуды. Это связано с учетом нелинейного коэффициента. Но он не влияет на движения в противофазе потенциальной и кинетической энергии.

Проведем аналогичные расчеты для меньшего шага по времени:

N = 100, N – количество частиц;

Δt = 0.06, Δt – шаг по времени;

C_1= 1, C_1 – линейный коэффициент;

C_2 = 0.04, C_2 – нелинейый коэффициент;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 900, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

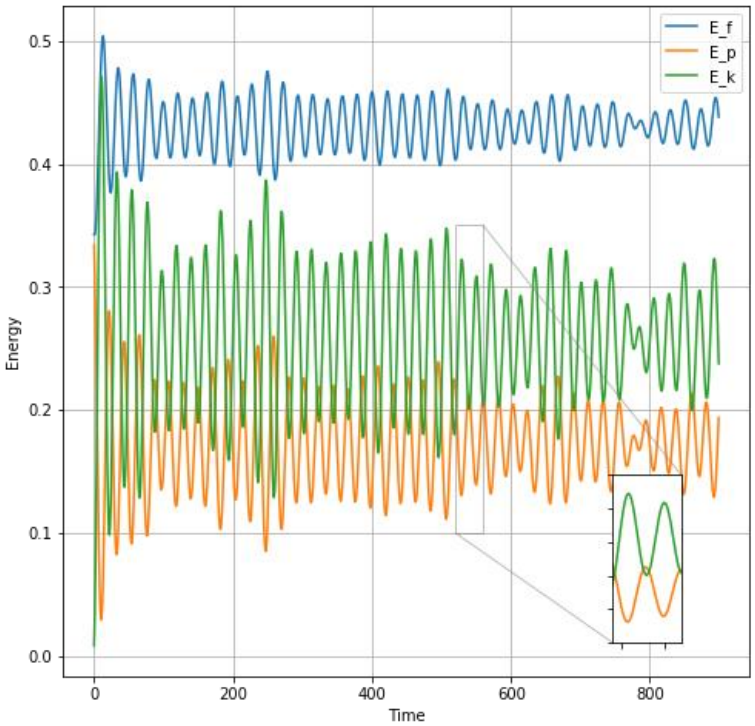

Рис. 2.2.2 Графики полной, потенциальной и кинетической энергий, где dt = 0.06

На рисунке 2.2.2 видно, что колебания полной энергии вышли на колбеательный режим с меньшими отклонениями чем при Δt = 0.1. Аналогично предыдущим расчетам, заметим что полная энергия сохраняется, а потенциальная и кинетическая энергия движутся в противофазе. Из перечисленных фактов следует, что данная модель работает корректнее при Δt =0.06.

2.2.2 Решение задачи

Решением задачи является график распределения волны по цепочке:

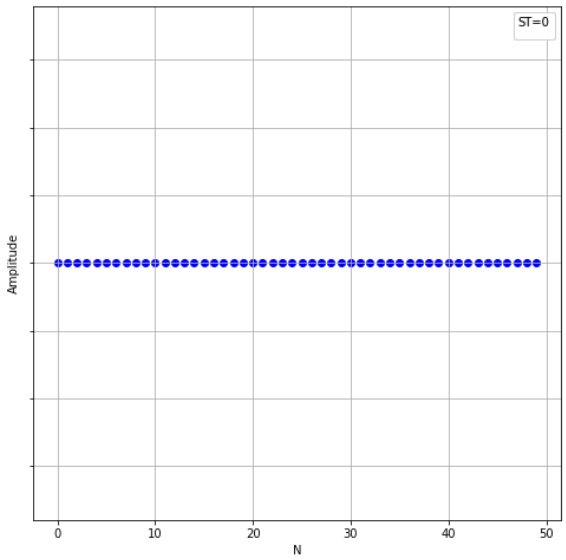

Рис. 2.2.3 Положение частиц в цепочке в начальны момент времени (для наглядности N=50)

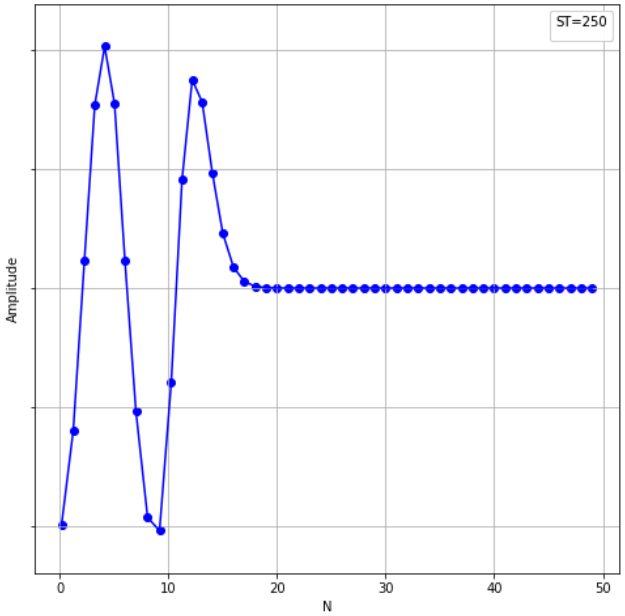

Рис. 2.2.4 Положение частиц в цепочке на 250 шаге (для наглядности N=50)

Обращая внимание на рисунок 2.2.4 видим изменение амплитуды колбаний частиц при наличии возмущающей силы. Для наглядного распространения волны в цепочки, частицы были соединены линией.

2.3 Модель одномерного кристалла с вязкостью

Динамика одномерного гармонического кристалла с вязкостью описывается данным уравнением [1]:

$$\ddot{u} = C(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - v\dot{u}_n + f_n,$$

где v – коэффициент вязкости, а f_n – вынуждающая гармоническая сила.

Данное уравнение получается из телеграфного уравнения при волновом приближении.

2.3.1 Проверка сходимости (начальная задача) для модели с вязкостью

Чтобы убедиться в том, что наша модель работает корректно, проведем расчеты и выведем графики энергий. В начальной задаче не учитывается вынуждающая гармоническая сила. Движение цепочки осуществляется за счет случайных перемещений частиц в начальный момент времени, следовательно начальные и граничные условия примут вид аналогичные в модели с линейным взаимодействием:

$$u_n|_{t=0} = \mathrm{U_n} \;\; \dot{u}_n|_{t=0} = 0$$

$$f_n = 0$$

Также численное решение должно удовлетворять условию сходимости по Куранту [4]:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \, ,$$

где Δx – по пространсву, он равен единице

Время вводится в систему как период свободных колебаний частиц:

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\Delta x} \text{ , где } \Delta \text{ x = 1}$$

А оптимальные период колебаний для расчета по выбирается исходя из данного условия:

$$\Delta t = 0.02\tau_0$$

Расчет энергий проводился при данных параметрах:

N = 100, N – количество частиц;

Δt = 0.1, Δt – шаг по времени;

C = 1, C – линейный коэффициент;

v = 0.9, v –коэффициент вязкости;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 900, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

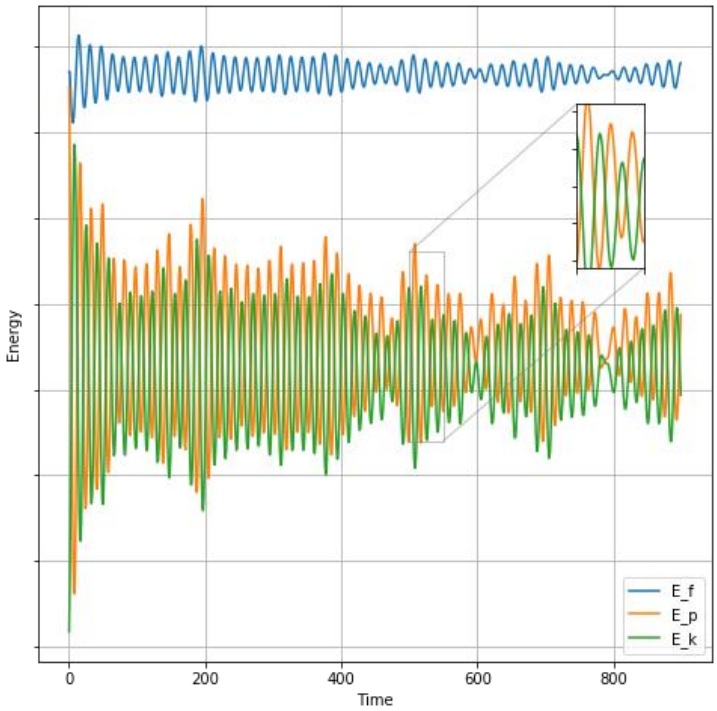

Рис. 2.3.1 Графики полной, потенциальной и кинетической энергий, где dt = 0.1

Обращая внимание на рисунок 2.3.1, можно заметить, что в начальный момент времени амплитуда колебаний самая большая. Это свзяано с

начальным возмущением частиц. Также, заметим, что полная энергия сохраняется, но ее колебания не так стационарны, как хотелось бы. Следует отметить, что видно характерное отличие от рисунка 2.2.1 – кинетическая энергия сместилась вниз по значению амплитуды из-за учета коэффициента вязкости. Но он не влияет на движения в противофазе потенциальной и кинетической энергии.

Проведем аналогичные расчеты для меньшего шага по времени:

N = 100, N – количество частиц;

Δt = 0.06, Δt – шаг по времени;

C = 1, C – линейный коэффициент;

v = 0.9, v –коэффициент вязкости;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 900, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

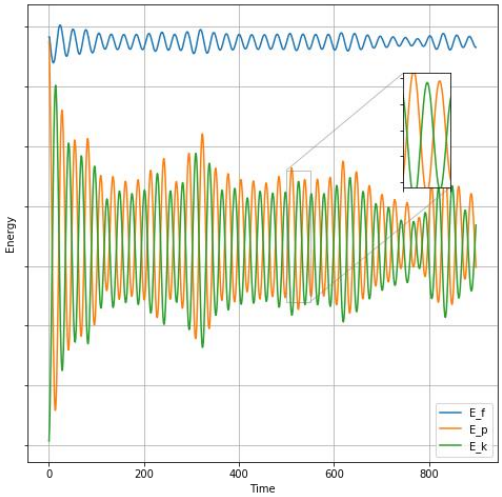

Рис. 2.3.2 Графики полной, потенциальной и кинетической энергий, где dt = 0.06

На рисунке 2.3.2 видно, что колебания полной энергии вышли на колбеательный режим с меньшими отклонениями чем при Δt = 0.1. Аналогично предыдущим расчетам, заметим что полная энергия сохраняется,

а потенциальная и кинетическая энергия движутся в противофазе. Из перечисленных фактов следует, что данная модель работает корректнее при Δt =0.06.

2.3.2 Решение задачи

Решением задачи является график распределения волны по цепочке:

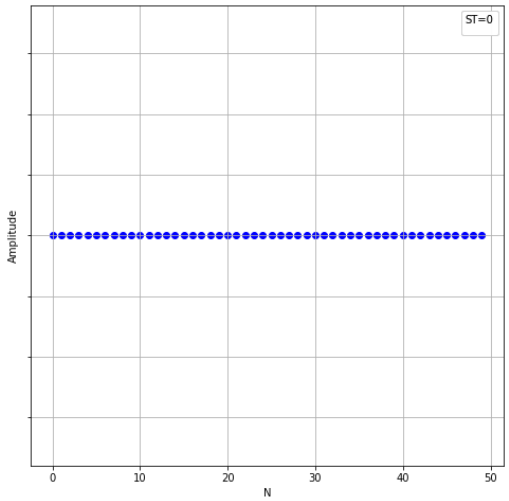

Рис. 2.3.3 Положение частиц в цепочке в начальны момент времени (для наглядности N=50)

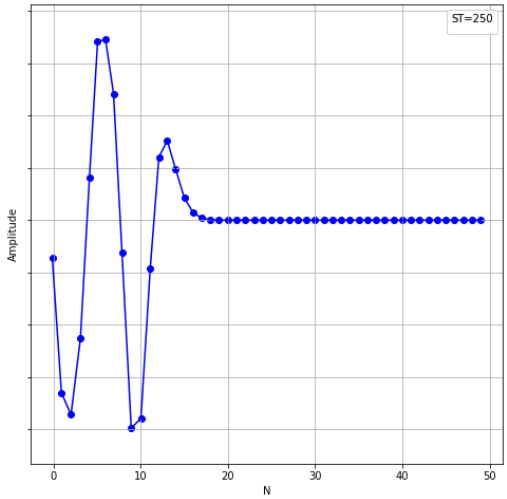

Рис. 2.3.4 Положение частиц в цепочке на 250 шаге (для наглядности N=50)

Обращая внимание на рисунок 2.2.4 видим изменение амплитуды колбаний частиц при наличии возмущающей силы. Для наглядного распространения волны в цепочки, частицы были соединены линией.

2.4 Сравнение амплитуды колебаний разных моделей

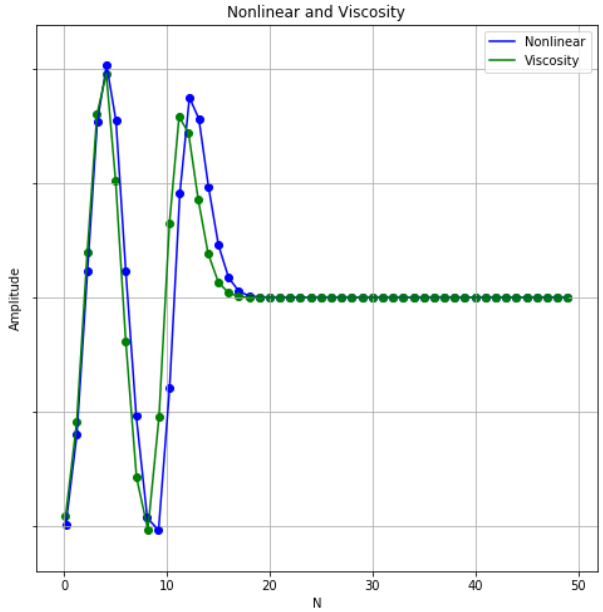

Рис. 2.4.1 сравнение амплитуды колебаний цепочки с нелинейным взаимодейсвием и цепочки с вязкостью

На рисунке 3.1.1 представлены амплитуды колебаний цепочки с нелинейным взаимодейсвием и цепочки с вязкостью на шаге равным 250. В цепочке с нелинейым взаимодейсвием волна распространяется быстрее чем в цепочке с вязкостью начиная с самой первой частицы.

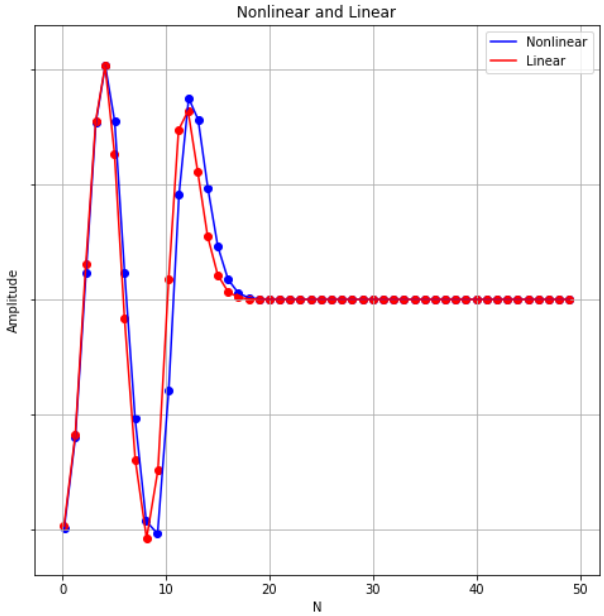

Рис. 2.4.2 сравнение амплитуды колебаний цепочки с нелинейным взаимодейсвием и цепочки с линейным взаимодействием

На рисунке 2.4.2 представлены амплитуды колебаний цепочки с нелинейным взаимодейсвием и цепочки с линейным взаимодействием на шаге равным 250. До десятой частицы волна в линейной цепочке распространяется быстрее, чем в нелинейной, но после – наоборот. В нелинейной цепочке после десятой частицы волна распростроняется быстрее.

Таким образом было получено графическое сравнение амплитуд колебаний разных моделей. Но по данным графикам нельзя сказать, что конктретно происходит с энергией.

Глава 3. АНАЛИЗ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА РАССМАТРЕВАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Переход от временного спектра к частотному спектру осуществляется применением быстрого преобразования Фурье [6].

3.1 Сравнение частотного спектра для первых частиц

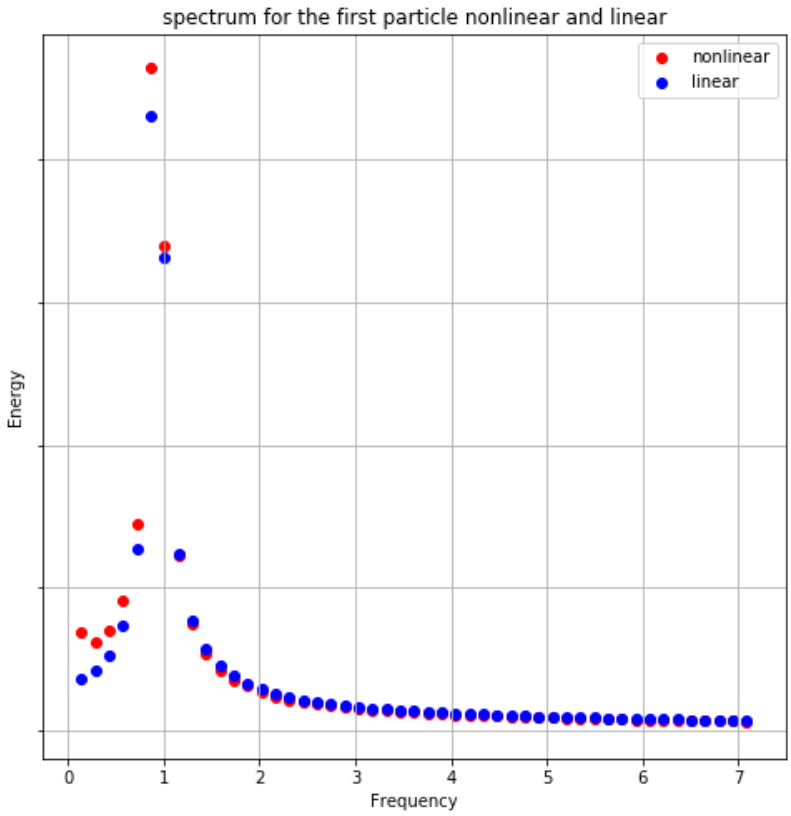

Рис. 3.1.1 спектр для первой частицы линейной и нелинейной модели

На рисунке 3.1.1 представлены спектры первой частицы для линейной и нелинейной модели. В линейной модели энергия растет равномерно до пикового значения (пик находится на частоте вунждающей силы), а после равномерно распределяется по средним и высоким частотам. В нелинейной же модели, заметно, что энергия концентрируется в области низких частот, а после немного пропадает в области средних частот и равномерно распределяется по высоким частотам.

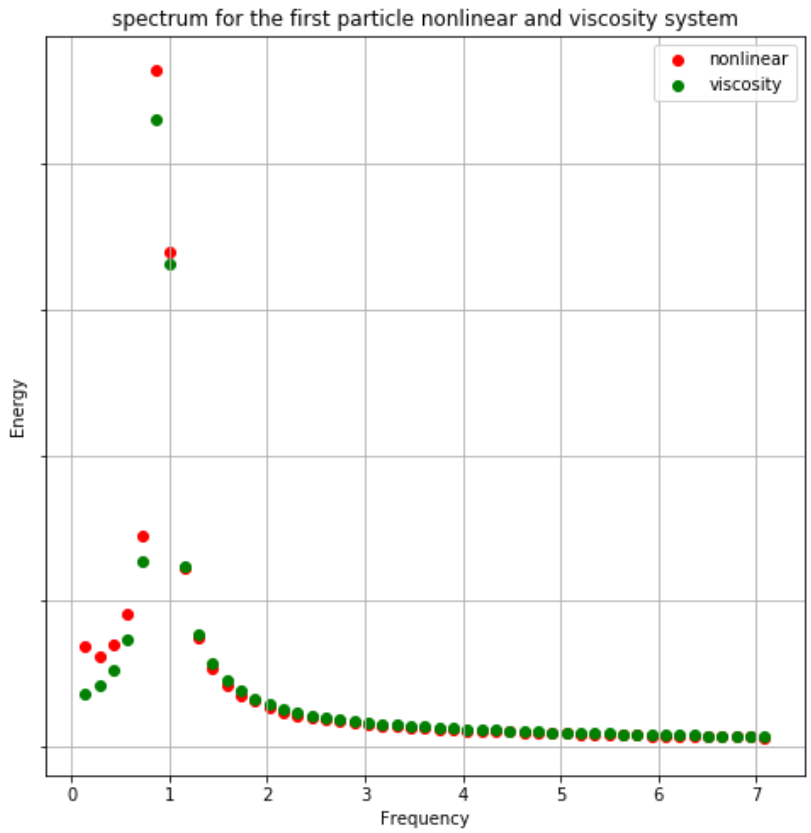

Рис. 3.1.2 спектр для первой частицы нелинейной модели и модели с вязкостью

На рисунке 3.1.2 представлен спектр нелинейной модели и модели с вязкостью. Спектр нелинейной модели такой же как и на рисунке 3.1.1, а спектр первой частицы модели с вязкостью ведет себя аналогично спектру линейной модели для первой частицы.

3.2 Сравнение частотного спектра для всей цепочки

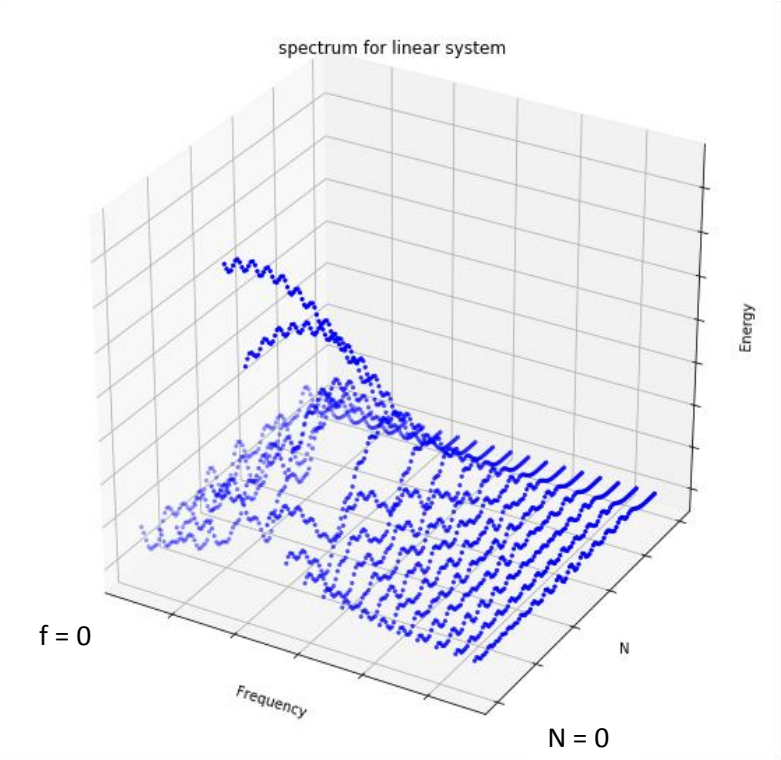

Рис. 3.2.1 Частотный спектр модели с линейным взаимодействием

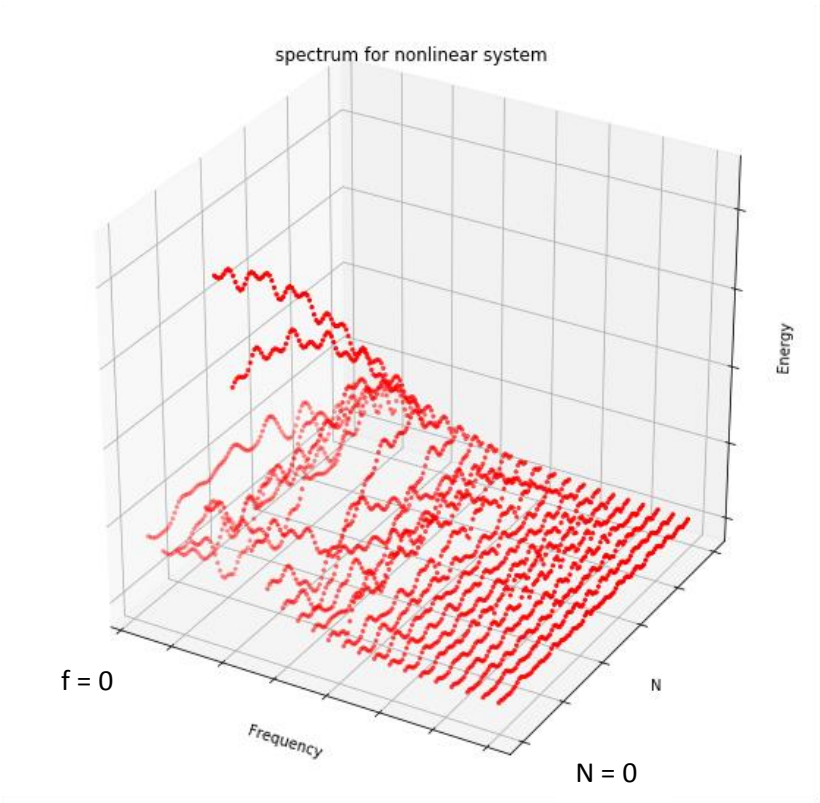

Рис. 3.2.2 Частотный спектр модели с нелинейным взаимодействием

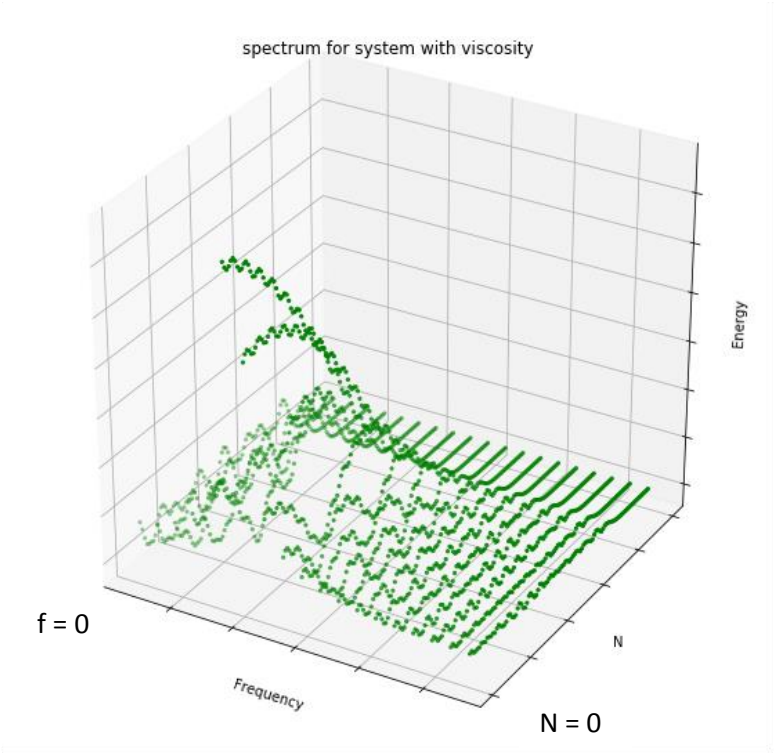

Рис. 3.2.3 Частотный спектр модели с взякостью

На рисунках 3.2.1, 3.2.2 и 3.2.3 представлены частотные спектры для трех моделей. На рисунке 3.2.1 заметно, что поведение частотного спектра каждой частицы в модели с линейным взаимодействием аналогично певедению частотного спектра для первой частицы. На рисукнке 3.2.2 заметна область, в пределах нижних частот, где концентрируется энергия. На рисунке 3.2.3 заметно, что энергия не переносится в области последних номеров частиц – это на прямую связано с наличем вязкости в данной системе. Таким образом был рассмотрен перенос энергии в рамках уравнения динамики.

Глава 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В НЕЛИНЕЙНОМ КРИСТАЛЛЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

4.1 Распространение тепла в линейной среде

Распространение температуры в линейной среде с постоянным источником тепла описывается классическим уравнением теплопроводности [10]:

$$0 = \lambda \Delta^2 T - v\dot{T},$$

где λ – коэффициент теплопроводности, v – плотность среды, умноженная на теплоемкость среды

Начальные и граничные условия:

$$T|_{t=0} = 0,\ \ T'|_{\mathrm{x}=l} = 0,\ \ T'|_{\mathrm{x}=0} = 1$$

4.1.1 Проверка сходимости

Также численное решение должно удовлетворять условию сходимости по Куранту:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1\ ,$$

где Δx – по пространсву, он равен единице

Время вводится в систему как период свободных колебаний частиц:

$$\tau_0 = \pi\sqrt{\Delta x}\ , \text{ где } \Delta \text{ x} = 1$$

А оптимальные период колебаний для расчета по выбирается исходя из данного условия:

$$\Delta t = 0.02\tau_0$$

4.1.2 Решение задачи

Решение данной задачи является график распространения тепла по цепочке

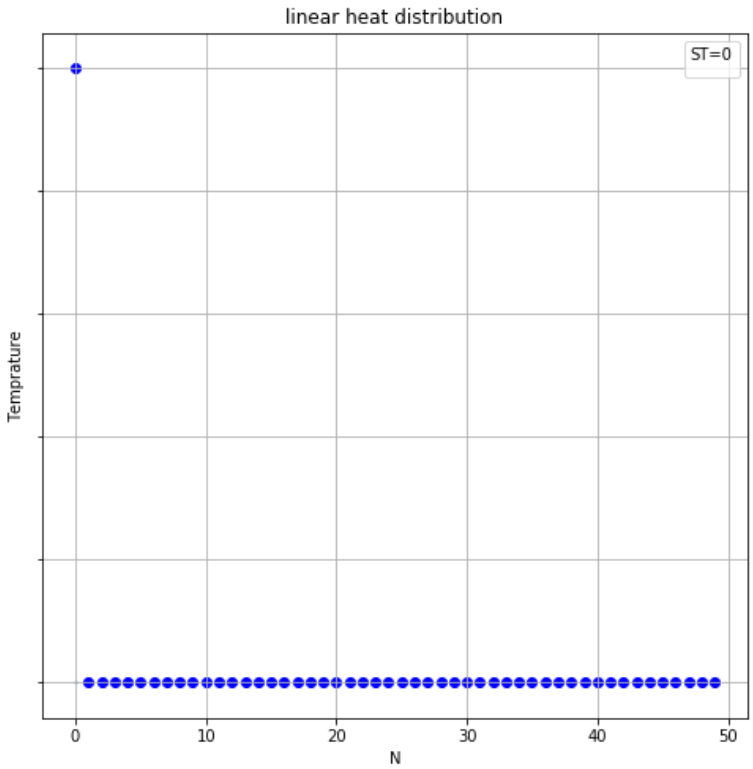

Рис. 4.1.1 Распростране тепла в цепочке на нулевом шаге

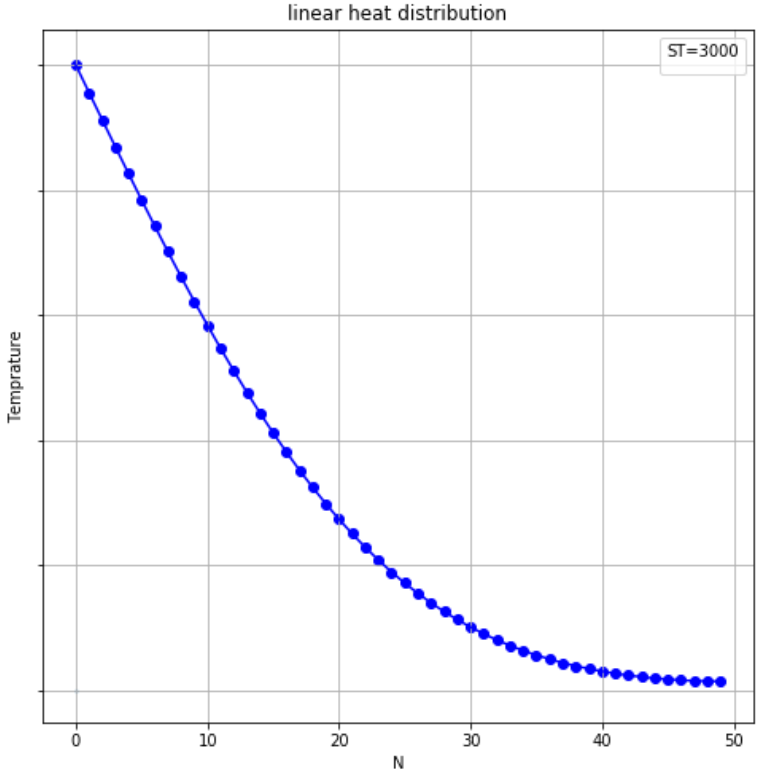

Рис. 4.1.2 Распростране тепла в цепочке на шаге равным 3000

4.2 Анализ частотного спектра уравнения теплопроводности и распространения тепла в нелинейном кристалле

Распространение тепла в нелинейном кристалле описывается усреднённым значением квадрата скорости по частицам, то есть уравнением принимает вид [3] :

$$K = m\langle \dot{u}_k^2 \rangle$$

А связь энергии и температуры происходит через константу Больцмана, таким образом уравнение принимает вид:

$$T_i = \frac{1}{2} k_b K_i,$$

где k_b- константа Больцмана

Переход к частотному спектру осуществляется с помощью быстрого проеброзования Фурье.

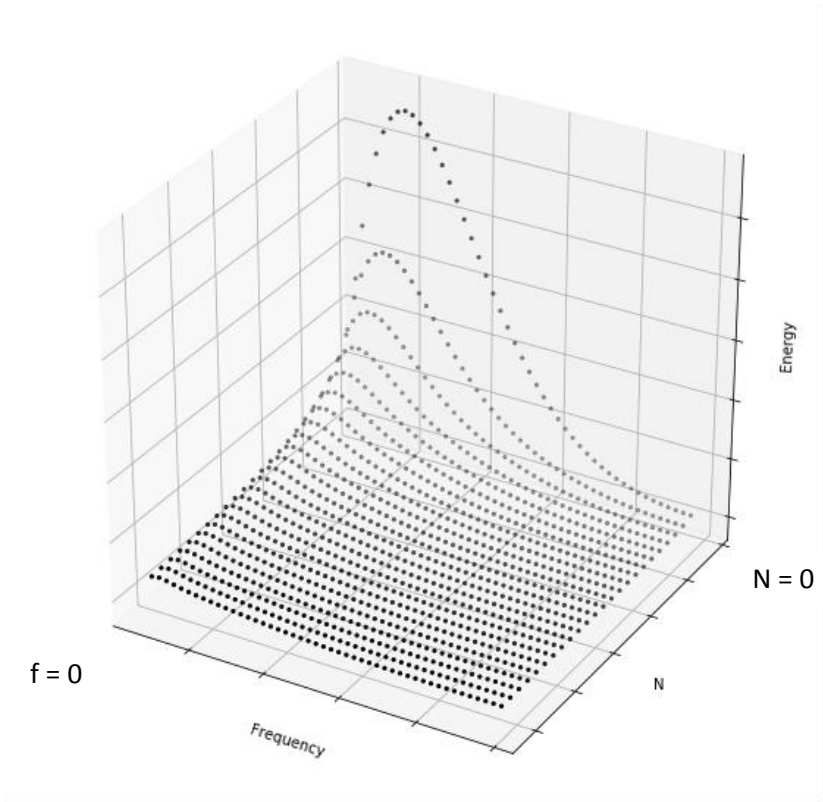

Рис. 4.2.1 Частотный спектр классического уравнения теплопроводности

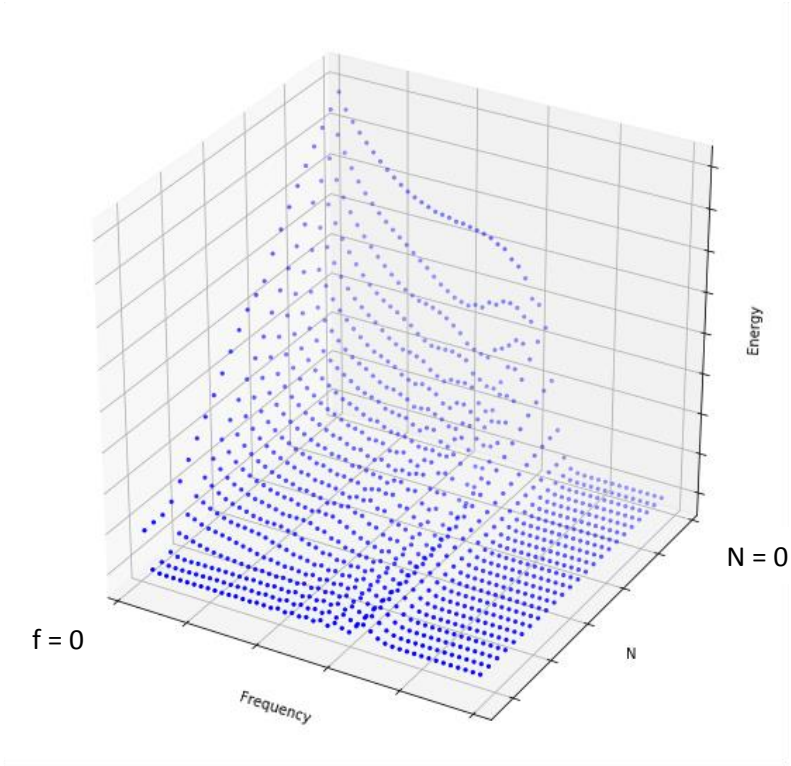

Рис. 4.2.2 Частотный спектр распределения температуры в нелинейном кристалле, где C_2 = 0.1

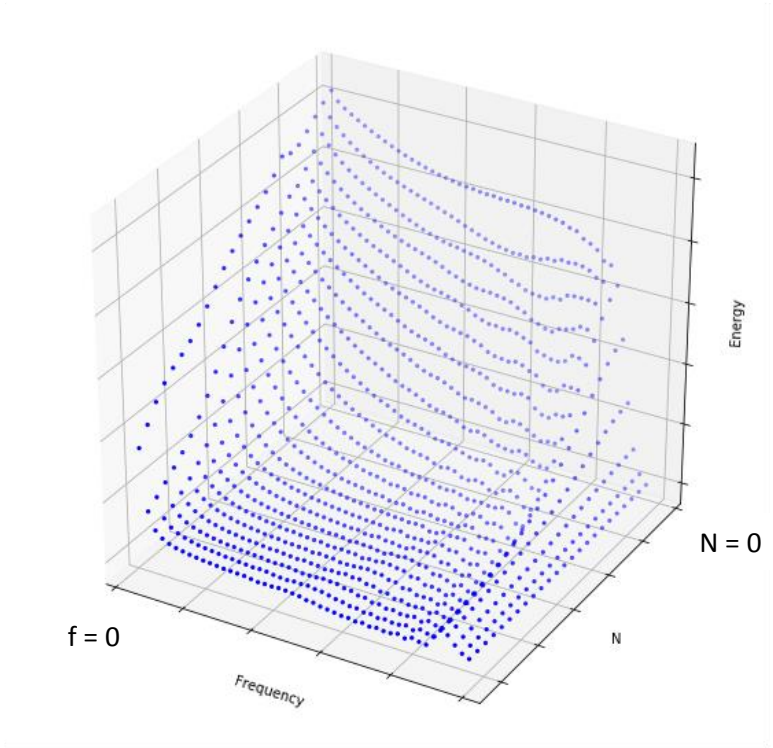

Рис. 4.2.3 Частотный спектр распределения температуры в нелинейном кристалле, где C_2 = 0.5

На рисунках 4.2.1, 4.2.2 и 4.2.3 изабражен частотный спектр классического уравнения теплопроводности и частотный спектр для разных коэффицентов нелинейности в нелинейном кристалле. Сравнивая полученные графики, в нелинейном кристалле энергия концентрируется в области нижних частотах. В спектре классического уравнения теплопроводности видно, что в области низких частот энергия равна нулю. Область высоких частот на начальных частицах, при малом коэффициенте нелинейности, не задействуется при распространении энергии в отличее от спектра классического уравнения теплопереноса. При увеличении коэффициента нелинейности, увеличивается область распространения тепла. Область малых частиц реагирует на высокие частоты.

Параметры при которых проводились расчеты:

N = 50, N – количество частиц;

Δt = 0.01, Δt – шаг по времени;

λ = 5, λ – коэффициент теплопроводности;

v= 0.9, v – плотность среды, умноженная на теплоемкость среды;

A = 0.1, A – амплитуда вынуждающей силы;

ST = 3000, ST – количество итераций

ω = 0.04, ω – частота вынуждающей силы

Следует отметить, что при решении задачи нелинейного кристалла, шаг по времени был заничательно уменьшен, чтобы не нарушалась сходимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были решены различные задачи уравнений динамики и уравнения теплопереноса. Для анализа распространия энергии использовалось быстрое преобразование Фурье, как для уравнений динамики, так для уравния теплопроводности. В результате сравнения частотных спектров было получено:

- В нелинейном кристалле наблюдается более интенсивный перенос энергии от частоты вынуждающей силы в сторону низких частот, чем в линейном кристалле и кристалле с вязкостью.
- В сторону высоких частот энергия переносится примерно с той же интенсивностью, что и в линейных моделях.
- Спектры линейных моделей с вязкостью и без различаются только в области достаточно больших значений номеров частиц.
- В спектрах моделей с вязкостью и нелинейными слагаемыми наблюдаются бОльшие значения энергий в области высоких частот, чем в линейной модели.
- Уравнение теплопереноса, которое описывает распространение тепла в линейной среде, также может быть использовано для описания распространения тепла в нелинейном кристалле
- При увеличении коэффициента нелинейности энергия распространяется по области высоких частот и задействуется большее число частиц

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривцов А.М., Бабенков М.Б., Цветков Д.В., Распространение тепла в одномерном гармоническом кристалле на упругом основании, УДК 539.3:539.4
2. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
3. Кривцов А.М. Колебания энергий в одномерном кристалле ДАН. 2014, том 458, № 3, с. 279–281.
4. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики — 1941. — № 8. — С. 125—160.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2004. 224 с
6. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. — М.: Радио и связь, 1985
7. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления / А.А. ... Москва, издательство «Наука»,. Главная редакция ... М: Высш. шк., 1986. 103 с. 6.
8. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И., Нелинейные волны, Известия вузов. ПНД, 2017, том 25, выпуск 1, 94–97
9. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993.— 352 с.
10. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Вычислительная теплопередача. — М : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с
11. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейный колебания волны. Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
12. Bonetto F., Lebowitz J.L., Rey-Bellet L. Fourier's law: a challenge to theorists. Mathematical Physics (2000), Imperial College Press, London, 128-150.

13. Dhar A., Dandekar R., Heat transport and current fluctuations in harmonic crystals**.** Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (2015), Volume 418, 49-64.
14. Rieder Z., Lebowitz J.L. and Lieb E. Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State**.** J. Math. Phys. (1967), Volume 8, Issue 5, 1073.
15. Wierling A. Dynamic structure factor of linear harmonic chain – A recurrence relation approach. The European Physical Journal B (2012), Volume 85, Issue 1, Article number 20