

*На правах рукописи*



Бабенков Михаил Борисович

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В  
СРЕДЕ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО  
ПОТОКА**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2013

**Работа выполнена** в Федеральном Государственном Бюджетном Учреждении Науки Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук  
Иванова Елена Александровна

Официальные оппоненты: Муратиков Кирилл Львович  
доктор физико-математических наук,  
ФГБУН ФТИ им.Иоффе РАН, вед. науч. сотр.  
Отделения твердотельной электроники

Еремеев Виктор Анатольевич  
доктор физико-математических наук, доцент  
Южный научный центр РАН, зав. лаб.  
Механики активных материалов

Ведущая организация: ФГБУН Институт Проблем Машиностроения  
Российской Академии Наук

Защита состоится 19 декабря 2013 г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ ИПМаш РАН.

Автореферат разослан «14» ноября 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д.т.н., профессор



В.В. Дубаренко

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Исследование волнового переноса тепла актуально для многих развивающихся технологий. Внутренние источники наноразмерного масштабного уровня (например, размер современного транзистора составляет всего несколько нанометров) вызывают более интенсивный рост температуры, чем предсказывает классическая теория, что повышает требования к будущим системам охлаждения. Температурные эффекты вносят значительные изменения в механические свойства нанопластин, так как чем тоньше пластина, тем она чувствительнее к изменениям температуры. Исследования процессов волнового переноса тепла могут быть полезны для изучения термомеханических характеристик объектов микро- и нано- масштабного уровня: тонких пластин и стержней, используемых в микро- и нано- электромеханических устройствах (MEMS и NEMS).

Область применимости классического уравнения теплопроводности ограничена тем, что оно не позволяет учесть конечную скорость распространения температурных возмущений. Широко известно, что классическому уравнению теплопроводности свойственны некоторые парадоксы, например: бесконечная скорость распространения тепла и бесконечный поток тепла в начальный момент времени.

Для получения более точных результатов в задачах, где учет скорости распространения тепла становится актуальным, например: в задачах нагрева металлов короткими лазерными импульсами, высоких скоростей движения источников тепла и быстрого движения границ фазового перехода, при рассмотрении систем, размеры которых сопоставимы с расстоянием свободного пробега частиц (например электронов, фононов) или если характерные времена процессов имеют порядок величины релаксации теплового потока в среде, используют гиперболическое уравнение теплопроводности на основе обобщенного закона Фурье.

Обобщенный закон Фурье был предложен в работах авторов: С. Cattaneo, Р. Vernotte, А.В. Лыкова. В отличие от классического закона, он учитывает инерционность процессов теплопереноса, которая характеризуется постоянной релаксации теплового потока.

Экспериментальным определением величин релаксации теплового потока занимались: R.H. Matsunaga, I. Santos, W. Kaminski, K. Mitra et. al., A. Grabmann, F. Peters, H. Herwig, K. Beckert, W. Roetzela et. al.

На основании обобщенного закона Фурье в работе Е.Б. Попова впервые получено гиперболическое уравнение связанной термоупругости, в линейном приближении учитывающее конечность скорости распространения тепла. Более общая модель термоупругости была предложена в работе авторов Н. Lord, А. Shulman. Термоупругость Лорда-Шульмана (LS) является предметом изучения в данной работе. Обзор по теоретическим основам неклассической тер-

моупругости и теплопроводности представлен в статьях и книгах авторов: А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский, В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон, J. Ignaczak, D.S. Chandrasekharaiiah.

Исследованием плоских гармонических волн, распространяющихся в термоупругой среде с релаксацией теплового потока занимались: А.Н. Nayfeh, S. Nemat-Nasser, Ю.К. Энгельбрехт, Р. Puri, И.М. Штер, Ф.В. Семерак, Ц. Иванов, Ю.К. Энгельбрехт, Р.Х. Швец, А.А. Лопатьев. Результаты некоторых из перечисленных исследований приводятся в книгах авторов: А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский, А.Д. Коваленко, Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно.

В исследование гиперболической задачи теплопроводности значительный вклад внесли: А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский, В.А. Кудинов, Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон, К.Л. Baumeister, Т.Д. Hamill, М.Н. Özisik, М. Lewandowska, D. Zhang, B.S. Yilbas.

Следующие авторы исследовали задачи распространения термоупругих волн LS типа в среде, подверженной воздействию теплового импульса: F.R. Norwood, W.E. Warren, Г.А. Кильчинская, А.Н. Nayfeh, S. Nemat-Nasser, M. Balla, P.M. Jordan, P. Puri, I.A. Abdallah, N. Sarkar, E.F. Henain, J.C. Strikwerda, A.M. Scott, H.M. Youssef, A.S. Al-Felali.

Экспериментальным исследованием термоупругих напряжений при неравновесных процессах теплообмена занимались: Н.В. Вовненко, Б.А. Зимин, Ю.В. Судьенков, К.В. Poletkin, G.G. Gurzadyan, J. Shang, V. Kulish, O.B. Wright, V.E. Gusev и др.

**Целью** данной работы является изучение поведения термоупругой среды, описываемой уравнениями Лорда-Шульмана, под воздействием периодических и импульсных возмущений.

#### **Задачи исследования:**

1. Исследовать распространение термоупругих волн в широком диапазоне значений постоянной релаксации теплового потока. Данная задача представляется актуальной, поскольку теоретическая оценка постоянной релаксации в металлах, согласно фононной теории, составляет несколько пикосекунд ( $10^{-12}$ с). В то время как экспериментальные данные дают разброс результатов, отличающихся от теоретической оценки на несколько порядков: от  $10^{-8}$ с до  $10^{-11}$ с.
2. Дать рекомендации по экспериментальному определению постоянной релаксации теплового потока, основываясь на результатах проведенного исследования. По причине расхождения экспериментальных данных между собой, можно предположить, что существующие методы экспериментального определения релаксации теплового потока нуждаются в дальнейшем усовершенствовании.

3. Сравнить две модели импульсного лазерного воздействия на среду. Первая модель: среда нагревается источниками тепла, заданными на границе, вторая модель: среда нагревается источниками тепла распределенными в объеме.
4. На примере высокоскоростного теплового воздействия установить насколько заметные поправки вносит учет связанности в решения динамических задач гиперболической термоупругости.

**Научную новизну** работы представляют следующие **положения, выносимые на защиту**:

1. В задаче гиперболической термоупругости впервые предложена параметрическая форма представления выражений для зависимости волнового числа, коэффициента затухания, фазовых и групповых скоростей от частоты. Получены аналитические формулы для горизонтальных и наклонных асимптот дисперсионных кривых.
2. В результате анализа характера поведения дисперсионных соотношения в зависимости от времени релаксации  $\tau$  обнаружено, что существует такое  $\tau_0$ , что при  $\tau < \tau_0$  и при  $\tau > \tau_0$  характер дисперсионных соотношений качественно отличается. Величина  $\tau_0$  выражена через термомеханические параметры среды.
3. В задаче гиперболической теплопроводности для полупрозрачного слоя, облучаемого коротким лазерным импульсом, найдено условие существования участка охлаждения.
4. Установлено, что в задаче гиперболической термоупругости могут быть два участка охлаждения, в то время как в гиперболической теплопроводности и классической термоупругости — не больше одного участка охлаждения.
5. Обнаружено, что если постоянная релаксации теплового потока меньше установленного значения, то квазитермические составляющие распространяются быстрее квазиакустических. Если релаксация теплового потока больше данного значения, то квазиакустические составляющие распространяются быстрее.
6. Установлено, что при скоростях воздействия, при которых необходим учет гиперболичности, принципиально важным является учет связанности.

**Практическая и теоретическая значимость работы.** Практическую значимость представляет исследование задач гиперболической термоупругости и теплопроводности с распределенными источниками тепла и интенсивным тепловым потоком на границе, что может помочь прогнозировать

процессы теплообмена на наноразмерном масштабном уровне, осуществлять эффективное охлаждение логических элементов (нанотранзисторов). Исследование связанных задач термоупругости дает возможность предсказывать реакцию деталей MEMS и NEMS на термическое воздействие, оценивать их работоспособность. Результаты исследования задачи связанной гиперболической термоупругости о взаимодействии лазера и слоя конечной толщины могут быть использованы для бесконтактного определения термомеханических свойств нанообъектов.

Теоретическую значимость представляет исследование волновых эффектов в широком диапазоне термомеханических параметров, что позволяет описывать динамические явления термоупругости в метаматериалах. Результаты исследования зависимости волнового числа и коэффициентов затухания термоупругих волн от частоты могут быть полезны для экспериментального определения постоянной релаксации теплового потока.

**Методы исследования.** Основные результаты работы получены аналитически с использованием широко известных методов математической физики: метода Эйлера, метода функций Грина, метода преобразования Лапласа и метода Гринберга.

**Достоверность и апробация результатов.** Достоверность изложенных в работе результатов обусловлена строгостью формулировок задач математической физики, использованием фундаментальных принципов механики, а также сравнением с результатами, полученными ранее. Основные результаты работы доложены на: XLI, XL и XXXVIII International Summer School Conference «Advanced Problems in Mechanics» (Россия, С.-Петербург, 2013, 2012 и 2010 гг.), International Conference «Days on Diffraction» (Россия, С.-Петербург, 2013 и 2012 гг.), VI Поляховские чтения (Россия, С.-Петербург, 2012), 2nd International Conference on Material Modelling (Франция, Париж, 2011), на Санкт-Петербургском Семинаре по Вычислительной и Теоретической Акустике Научного Совета РАН по Акустике (руководитель проф. Д.П. Коузов, С.-Петербург, 2009, 2010, 2011 и 2012 гг.), на Городском семинаре по механике (руководитель чл.-корр. РАН, проф. Д.А. Индейцев, С.-Петербург, 2013 г.)

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 7 — в сборниках тезисов докладов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации **102** страницы текста с **26** рисунками и **3** таблицами. Список литературы содержит **93** наименований.

## Содержание работы.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме. Формулируются цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В **первой главе** приводится сравнительный анализ решений задач гиперболической теплопроводности для бесконечного слоя, находящегося под воздействием короткого лазерного импульса при различных граничных условиях. Лазерное воздействие моделируется через задание теплового потока на границе или в объеме. Решения исследуются в широком диапазоне значений постоянной релаксации теплового потока  $\tau$ .

Для моделирования лазерного воздействия можно задать распределение источников тепла на границе или в объеме среды. Для непрозрачных сред задание распределения источников тепла на границе является обоснованным приближением, поскольку глубина проникновения лазерного излучения в материал (толщина скин-слоя) будет небольшой, для металлов порядка  $10^{-6} - 10^{-7}$  м при частотах лазерного излучения от 10 ГГц до 1 ТГц (инфракрасный спектр). Но данная глубина проникновения может оказаться существенной при рассмотрении быстро протекающих процессов. В таком случае необходимо задавать распределение источников тепла в объеме и рассматривать неоднородную задачу теплопроводности. Подобное усложнение задачи должно привести к появлению новых эффектов. Система дифференциальных уравнений<sup>1</sup>, позволяющая найти распределение температуры при заданных начальных и граничных условиях, состоит из уравнения баланса энергии и обобщенного закона Фурье (закон Каттанео-Вернотте):

$$\rho C_v \dot{T} = -\nabla \cdot \mathbf{h} + \rho q \quad (1)$$

$$\mathbf{h} + \tau \dot{\mathbf{h}} = -\lambda \nabla T \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{h}$  — вектор теплового потока,  $\nabla$  — оператор набла,  $q$  — мощность источников тепла, распределенных в объеме.

Рассмотрим распространение тепловых волн в полупространстве вдоль координаты  $s$ . Пусть  $q(s, t) = 0$  и тепловой поток задан на границе полупространства:  $h|_{s=0} = h_0 \delta(t)$ , где  $h_0$  — множитель, добавленный для сохранения размерности,  $\delta(t)$  — функция Дирака, которая аппроксимирует временной профиль короткого лазерного импульса. Тогда распределение температуры при однородных начальных условиях будет иметь вид<sup>2</sup>, представленный на рис. 2, а.

<sup>1</sup>Леванов Е.И., Сотский Е.Н. Некоторые свойства процессов теплопереноса в неподвижной среде с учетом постоянной релаксации теплового потока // Инженерно-Физический Журнал. 1986. Т.50. N.6. С.1017–1024

<sup>2</sup>Новиков Н.А. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение прямых и обратных задач для полуограниченного стержня // Инженерно-Физический Журнал. 1977. Т.35. N.4. С.734–740

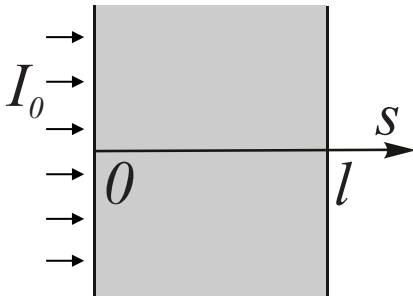


Рис. 1: Слой, находящийся под воздействием лазерного импульса

эффицент поглощения вещества. На границах слоя заданы условия теплоизоляции:  $h|_{s=0} = 0$ ;  $h|_{s=l} = 0$ . При однородных начальных условиях, распределение температуры будет иметь вид<sup>3</sup>, представленный на рис. 2, б. Если устремить значение  $\beta$  к бесконечности, то получится распределение температуры, показанное на рис. 2, а.

Зададим распределение источников тепла в объеме неограниченного слоя толщины  $l$  (рис. 1). Пусть интенсивность лазерного импульса поглощается средой по закону Бугера, тогда мощность источников тепла можно представить в виде:

$$q(s, t) = I_0 \delta(t - 0) \exp(-\beta s) \quad (3)$$

Здесь  $I_0$  – интенсивность света на входе в поглощающий слой,  $\beta$  – ко-

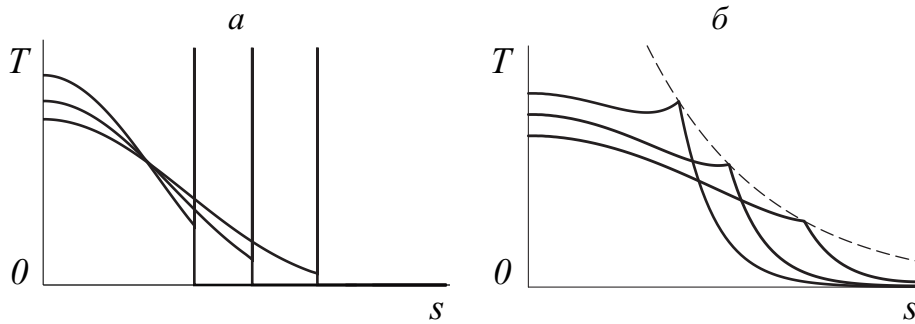


Рис. 2: Температурные профили при разных значениях времени порядка постоянной релаксации  $\tau$ . График а — тепловой поток задан на границе. График б — распределение источников тепла задано в объеме. Штриховой линией показана огибающая.

На волновом фронте решения задачи с тепловым воздействием на границе значение температуры обращается в бесконечность (рис. 2, а). В задаче с распределенными источниками тепла, мощность которых зависит от времени как  $\delta$ -функция, вместо температурного скачка на фронте наблюдается точка излома (рис. 2, б). В задаче с тепловым воздействием на границе график температуры обрывается на волновом фронте, тогда как в задаче с объемным воздействием значение температуры убывает до нуля постепенно. Проведенный сравнительный анализ позволяет сделать вывод, что задача с объемными источниками тепла значительно лучше описывает процесс теплопереноса в слое, находящимся под воздействием лазерного импульса.

<sup>3</sup>Lewandowska M. Hyperbolic heat conduction in the semi-infinite body with a time-dependent laser heat source // Heat and Mass Transfer. 2001. N.37. С.333–342



Результаты сравнения решений граничной и неоднородной задач гиперболической теплопроводности приводятся в Таблице 1.

Таблица 1: Сравнение задач нагрева среды на границе и в тонком слое вблизи границы

Вид воздействия	$T$ на фронте	$T$ за точкой излома
$h _{s=0} = \delta(t - 0)$	$\infty$	0
$q(s, t) = I_0\delta(t - 0)\exp(-\beta s)$	конечна	$\neq 0$
$h _{s=0} = H(t - 0)$	конечна	0
$q(s, t) = I_0H(t - 0)\exp(-\beta s)$	конечна	$\neq 0$

Рассмотрим процесс волнового переноса тепла при однородных граничных условиях первого рода на температуру и однородных начальных условиях:

$$T|_{t=0} = 0; \quad \dot{T}|_{t=0} = 0; \quad T|_{s=0} = 0; \quad T|_{s=l} = 0; \quad (4)$$

Данные граничные условия могут применяться в задачах о телах, погруженных в среду с большой теплопроводностью<sup>4</sup>.

Решение задачи (1), (2), (3), (4), полученное методом функций Грина имеет вид:

$$\vartheta(\varsigma, t) = 2\pi e^{-\mu\gamma - \frac{t}{2\tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(e^{\mu\gamma} - (-1)^n) \sin\left[\frac{n\pi\varsigma}{\mu}\right]}{S_n(n^2\pi^2 + \mu^2\gamma^2)} \times \left( S_n \cos\left[\frac{1}{2}S_n t\right] + \mu \sin\left[\frac{1}{2}S_n t\right] \right) H(t), \quad (5)$$

где  $\vartheta = TC_v/I_0$ ;  $\varsigma = s\sqrt{\rho C_v/\lambda}$ ;  $\mu = l\sqrt{\rho C_v/\lambda}$ ;  $\gamma = \beta\sqrt{\lambda/(\rho C_v)}$ ;  $S_n = \sqrt{4n^2\pi^2\tau - \mu^2}$ ;  $H(t)$  – функция Хевисайда. Сходимость данного ряда доказана по признаку Дирихле в приложении к диссертационной работе. Распределение температуры (5) показано на рис. 3. При аппроксимации временного профиля  $q(s, t)$  гладкой функцией, например, распределением Гаусса, скачки на рис. 3 сглаживаются и уменьшаются пиковые значения температуры.

При граничных условиях первого рода, в отличие от условий теплоизоляции, можно наблюдать области, где температура опускается ниже начальной (рис. 3,а). Время их существования оценивается величиной порядка постоянной релаксации теплового потока. Результаты сравнения задач гиперболической теплопроводности, рассмотренных в работе, при разных граничных условиях и длительности воздействия представлены в Таблицах 2, 3. Величина  $T$ , отложенная на графиках по вертикальной оси, не является абсолютным значением температуры и равна отклонению от некоторого начального значения  $T_0$ . Предполагается, что значения температуры  $T_0$  далеки от абсолютного нуля. В работе установлено, что области охлаждения

<sup>4</sup>Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики Т.2. М.: ИИЛ, 1960. 886 с.

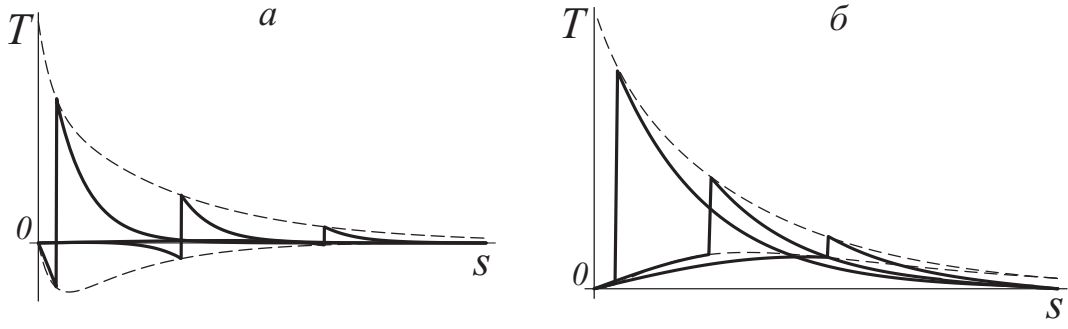


Рис. 3: Профили распределения температуры  $T$  в слое в зависимости от координаты  $s$ , построенные при нескольких значениях  $t$ ;  $a$  — случай  $\tau > \tau_*$ ,  $b$  — случай  $\tau < \tau_*$ . Штриховой линией показаны огибающие.

Таблица 2: Сравнение задач теплопроводности. Короткое объемное воздействие:  $q(s, t) = I_0 \delta(t - 0) \exp(-\beta s)$

Теплопроводность	ГУ	$T > 0$	Экстремум в точке излома
Гиперболическая	$h _{s=0,l} = 0$	всегда	$\tau < \tau_*$
Гиперболическая	$T _{s=0,l} = 0$	$\tau < \tau_*$	есть
Классическая	$h _{s=0,l} = 0$	всегда	нет
Классическая	$T _{s=0,l} = 0$	всегда	нет

Таблица 3: Сравнение задач теплопроводности. Длительное объемное воздействие:  $q(s, t) = I_0 H(t - 0) \exp(-\beta s)$

Теплопроводность	ГУ	$T > 0$	Экстремум в точке излома
Гиперболическая	$h _{s=0,l} = 0$	всегда	есть
Гиперболическая	$T _{s=0,l} = 0$	всегда	нет
Классическая	$h _{s=0,l} = 0$	всегда	нет
Классическая	$T _{s=0,l} = 0$	всегда	нет

могут обнаруживаться или не обнаруживаться в зависимости от соотношения между постоянной релаксации теплового потока среды  $\tau$  и величиной  $\tau_* = 1/(4\gamma^2)$ , характеризующей глубину проникновения лазера в материал. Если  $\tau > \tau_*$ , тогда  $T$  принимает отрицательные значения (рис. 3,  $a$ ), если  $\tau < \tau_*$ , то  $T$  принимает только положительные значения вблизи облучаемой границы слоя, как показано на рис. 3,  $b$ .

Величина  $\tau_*$  зависит от частоты лазерного излучения и в пределах от 10 ГГц до 1 ТГц изменяется в диапазоне от  $10^{-9}$  до  $10^{-11}$  с для типичных металлов (алюминий, золото, медь, серебро). Рассмотрим специальные случаи решения задач гиперболической теплопроводности, которые могут быть применены для сравнения с результатами экспериментального измерения температуры. На рис. 4,  $a$  приведено решение (5) при  $\beta = 0$ . В этом случае мощность лазерного излучения не убывает с увеличением расстояния от границы.

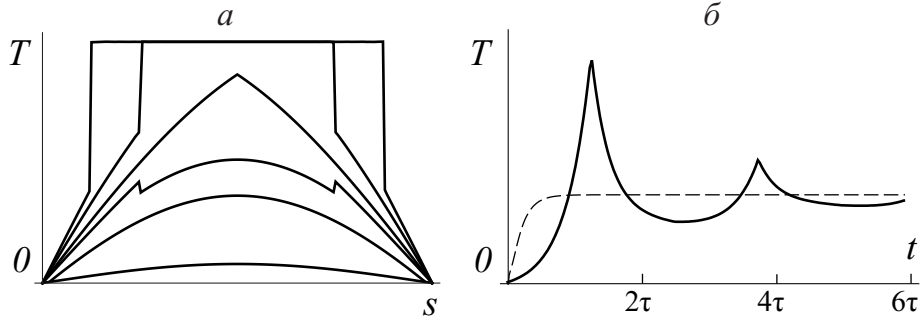


Рис. 4: График  $a$  — температурные профили при разных значениях времени порядка постоянной релаксации  $\tau$  в равномерно нагретом слое, остывающем при постоянной температуре на границе. График  $b$  — температура на границе теплоизолированного слоя, облучаемого коротким лазерным импульсом. Штриховой линией показано классическое решение при  $\tau = 0$ .

Примером может служить тонкий теплопроводящий стержень, равномерно по всей длине нагретый лазерным импульсом. Так как на границах поддерживается постоянная температура, стержень постепенно остывает. При малых временах (графики на рис. 4,  $a$  вверху) заметны точки излома. На рис. 4,  $b$  представлен график зависимости  $T(t)$  на границе слоя  $s = l$ , где проще всего проводить измерения. Наличие минимумов и максимумов на графике гиперболической теплопроводности (показаны сплошной линией) обусловлено перемещением тепловой волны внутри слоя.

**Вторая глава** посвящена изучению распространения плоских гармонических волн в полупространстве с релаксацией теплового потока. Приведен вывод уравнений связанной гиперболической термоупругости LS типа, получены дисперсионные соотношения. Исследуются особые точки, наклонные и горизонтальные асимптоты волнового числа, коэффициента затухания, фазовой и групповой скоростей. В стационарной динамической задаче о распространении волн в полупространстве рассматривается влияние частоты и параметров материала на затухание амплитуд термоупругих волн. Проводится сравнение результатов, полученных в гиперболической термоупругости с результатами, полученными в классической термоупругости.

Рассмотрим одномерную задачу о распространении объемных термоупругих волн в направлении координаты  $s$ :

$$T'' - \frac{\rho c_v}{\lambda} (\dot{T} + \tau \ddot{T}) = \frac{\alpha K T_0}{\lambda} (\dot{\epsilon} + \tau \ddot{\epsilon}) \quad (6)$$

$$(K + 4G/3) \epsilon'' - \alpha K T'' = \rho \ddot{\epsilon} \quad (7)$$

Где  $T$  — отклонение от начального значения температуры,  $\rho$  — плотность материала,  $c_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\tau$  — время релаксации теплового потока,  $\alpha$  — объемный коэффициент теплового расширения,  $K$  — изотермический модуль

объемного сжатия,  $T_0$  — температура, при которой производились измерения констант,  $\varepsilon$  — след тензора деформаций,  $G$  — модуль сдвига, точкой обозначается производная по времени, штрихом обозначена производная по координате. Для построения дисперсионных соотношений будем искать решение системы уравнений (6), (7) в виде экспонент, затухающих по координате:

$$\varepsilon(s, t) = B e^{ks} e^{-i\omega t}; \quad T(s, t) = D e^{ks} e^{-i\omega t}; \quad k = -\gamma + i\delta; \quad (8)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания,  $\delta$  — волновое число,  $\omega$  — частота. Представим дисперсионные соотношения в параметрическом виде:

$$\delta(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{2}} \sqrt{A_1 \left( \sqrt{x^2 + 4y^2(x)} - x \right)}; \quad \gamma(x) = \frac{y(x)\omega(x)\sqrt{2A_1}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + 4y^2(x)} - x}}; \quad (9)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\omega(x) = A_3(1 - A_4 + x)/(A_1(1 + A + 2x)2y(x)); \quad (10)$$

$$y(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - A_4 + x)(AA_4 - (x + 1)(x + A))}{A + A_4 + x}}; \quad (11)$$

$$A = A_2/A_1; \quad A_1 = \rho/(K + 4G/3); \quad A_2 = \tau A_3;$$

$$A_3 = \frac{1}{\lambda} \left( \rho c_v + \frac{\alpha^2 K^2 T_0}{K + 4G/3} \right); \quad A_4 = \frac{1}{1 + \rho c_v (K + 4G/3) / (\alpha^2 K^2 T_0)}; \quad (12)$$

На основании (9) и (10) получим выражение фазовой скорости  $C_f$ :

$$C_f(x) = \omega(x)/\delta(x) = \sqrt{2}/\sqrt{A_1 \left( \sqrt{x^2 + 4y^2(x)} - x \right)} \quad (13)$$

Групповая скорость  $C_g$  находится по определению:

$$C_g(x) = \frac{d\omega}{d\delta} = \frac{d\omega}{dx} \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^{-1} \quad (14)$$

В зависимости от того, выполняется ли условие  $A < 1 - 2A_4$  или  $A > 1 - 2A_4$ , тепловые и акустические ветви дисперсионных соотношений демонстрируют различное поведение. Данные условия могут быть сформулированы относительно постоянной релаксации теплового потока  $\tau$ . В первом варианте получим:  $\tau < \tau_0$ , во втором варианте:  $\tau > \tau_0$ , где значение релаксации  $\tau_0$  выражается через термомеханические параметры среды:

$$\tau_0 = \frac{\lambda \rho (\rho c_v (K + 4G/3) - \alpha^2 K^2 T_0)}{(\rho c_v (K + 4G/3) + \alpha^2 K^2 T_0)^2} \quad (15)$$

Значение  $\tau_0$  прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности  $\lambda$  и для реальных материалов лежит в пределах оценок величины релаксации

теплового потока, встречающихся в литературе. Для классической термоупругости существуют аналогичные условия:  $A_4 < 1/2$  и  $A_4 > 1/2$ , их можно сформулировать относительно коэффициента теплового расширения  $\alpha$ :  $\alpha < \alpha_0$  и  $\alpha > \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  находится по формуле:  $\alpha_0 = \sqrt{\rho c_v (K + 4G/3) / T_0 / K}$ . Для реальных веществ значения коэффициента теплового расширения приблизительно в 1.5–2 раза меньше  $\alpha_0$  для твердых веществ и жидкостей, и на треть меньше для газов.

Приведем интервалы значений  $x$ , при которых исследуемые функции (9)–(14) будут вещественными и положительными. При  $\tau < \tau_0$  интервал  $(x_2, x_3)$  соответствует акустическим ветвям, а интервал  $(x_4, x_1)$  соответствует тепловым ветвям; при  $\tau > \tau_0$  интервал  $(x_2, x_4)$  соответствует тепловым ветвям, а интервал  $(x_3, x_1)$  соответствует акустическим ветвям. Значения границ интервалов зависят от термомеханических параметров:

$$x_1 = \left( -1 - A + \sqrt{1 - 2A + A^2 + 4AA_4} \right) / 2; \quad x_3 = -1 + A_4 \quad (16)$$

$$x_2 = \left( -1 - A - \sqrt{1 - 2A + A^2 + 4AA_4} \right) / 2; \quad x_4 = -A - A_4 \quad (17)$$

Полагая  $A$  равным нулю, можно получить аналогичные соотношения для классической задачи термоупругости.

График  $\gamma(\omega)$  имеет следующие горизонтальные асимптоты (рис. 5,а,б):

$$\gamma_1 = \frac{A_3(a - b)}{2a\sqrt{2(A_1 + A_2 - a)}}; \quad \gamma_2 = \frac{A_3(a + b)}{2a\sqrt{2(A_1 + A_2 + a)}}, \quad (18)$$

где константы  $a$  и  $b$  имеют вид:  $a = \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_1A_2A_4}$  и  $b = A_2 + A_1(2A_4 - 1)$ . В классической термоупругости возможна только одна асимптота:  $\gamma_2 = A_3A_4/(2\sqrt{A_1})$ , которая соответствует тепловой ветви при  $A_4 > 1/2$  и акустической при  $A_4 < 1/2$ .

График  $\delta(\omega)$  (рис. 5,б,г) имеет две наклонные асимптоты, выходящие из начала координат, тангенсы углов наклона которых определяются формулами:

$$\text{tg } \varphi_1 = \sqrt{(A_1 + A_2 - a)/2}; \quad \text{tg } \varphi_2 = \sqrt{(A_1 + A_2 + a)/2}; \quad (19)$$

где при  $\tau < \tau_0$  величина  $\varphi_1$  равна углу наклона асимптоты тепловых ветвей, а  $\varphi_2$  — углу наклона асимптоты акустических ветвей. При  $\tau > \tau_0$  — наоборот. В классической термоупругости возможна только одна асимптота, тангенс угла наклона которой равен  $\sqrt{A_1}$  это значение соответствует тепловой ветви при  $A_4 > 1/2$  и акустической при  $A_4 < 1/2$ .

Асимптоты фазовых (13) и групповых (14) скоростей совпадают (рис. 6):

$$C_1 = \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 - a}; \quad C_2 = \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 + a}; \quad (20)$$

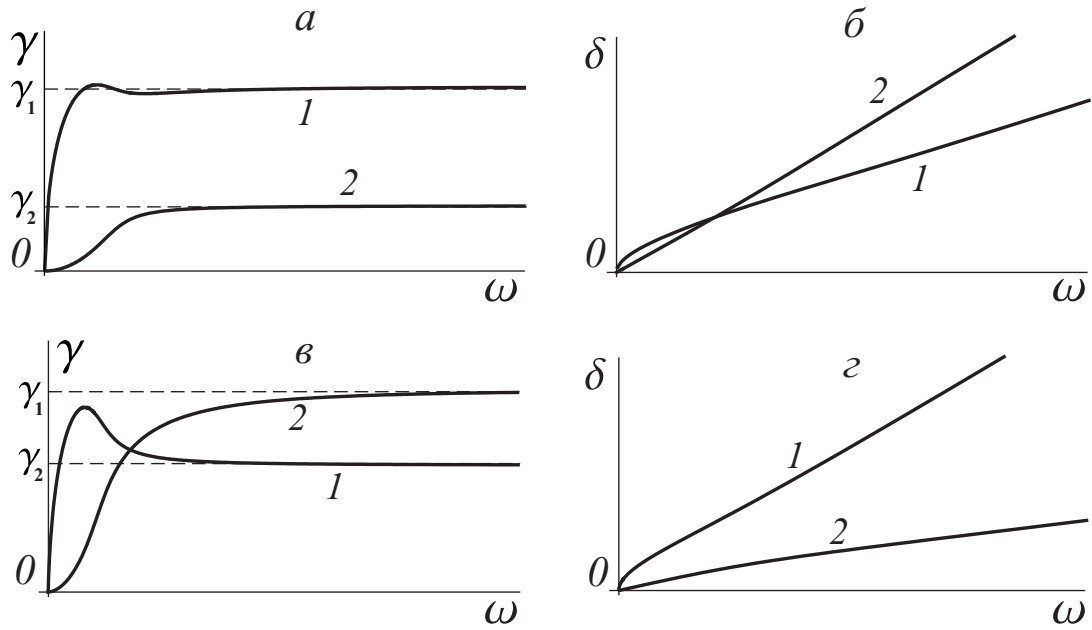


Рис. 5: Графики *a, в* – зависимость коэффициента затухания от частоты; *б, з* – зависимость волнового числа от частоты; графики *a, б* построены при  $\tau < \tau_0$ , графики *в, з* построены при  $\tau > \tau_0$ ; кривые *1* – тепловые ветви, *2* – акустические ветви.

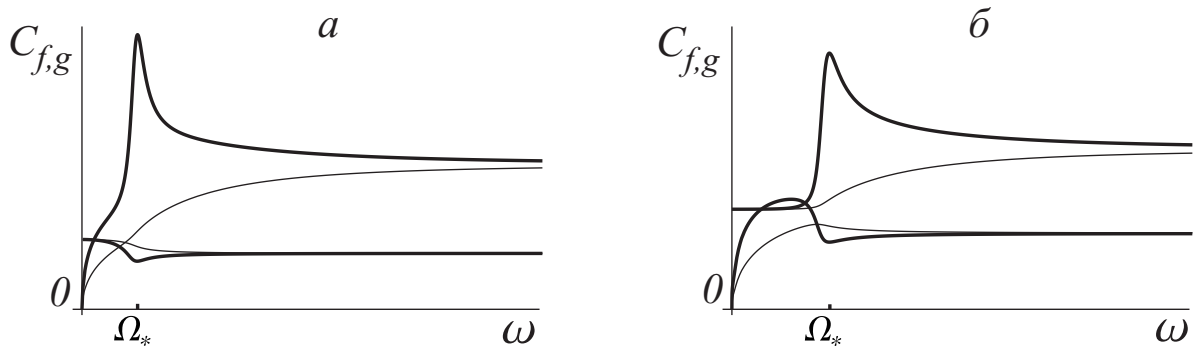


Рис. 6: Фазовые (тонкие линиями) и групповые (показаны толстыми линиями) скорости в зависимости от частоты; графики *a* построены при  $\tau < \tau_0$ , графики *б* – при  $\tau > \tau_0$ ; тепловые ветви выходят из начала координат.

где при  $\tau < \tau_0$  величина  $C_1$  равна асимптотическому значению тепловых ветвей фазовых и групповых скоростей,  $C_2$  – асимптотическому значению акустических ветвей. При  $\tau > \tau_0$  – наоборот.

Рассмотрим частоты, соответствующие экстремальным значениям групповых скоростей. Обозначим их  $\omega_*$  (для классической термоупругости) и  $\Omega_*$  (для гиперболической термоупругости). При  $\tau < \tau_0$  экстремумами групповой скорости являются минимум акустической ветви и максимум тепловой ветви, при  $\tau > \tau_0$  – минимум тепловой ветви и максимум акустической (рис. 6). При некотором соотношении термомеханических параметров материала, экстремумы могут не наблюдаться; На частоте  $\Omega_*$  и при  $\tau = \tau_0$  гра-

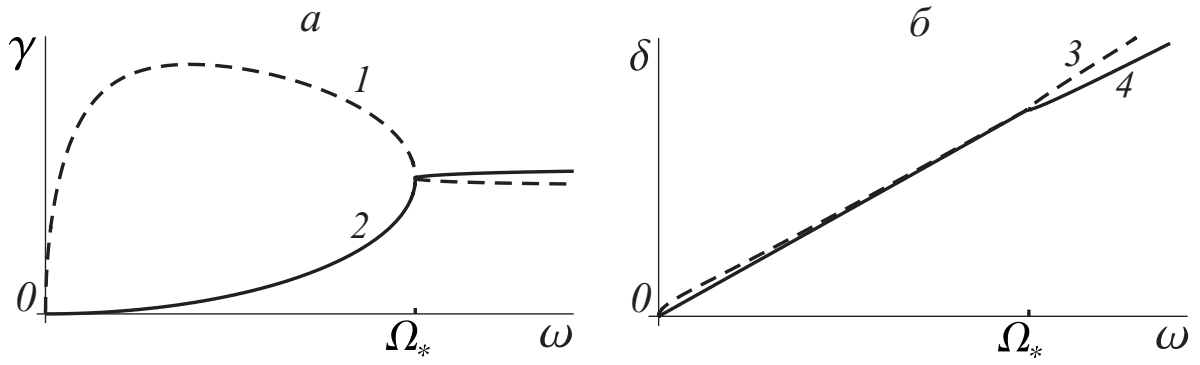


Рис. 7: *a* – графики зависимости волнового числа от частоты, *б* – графики зависимости коэффициента затухания от частоты, построенные в окрестности  $\Omega_*$  при  $\tau = \tau_0$ ; 1, 3 – тепловые ветви, 2, 4 – акустические ветви.

фики 1 и 2 на рис. 7,*a* пересекаются; графики 3 и 4 на рис. 7,*б* подходят друг к другу, не имея общих точек. Для параметров меди, взятой в качестве примера типичного металла, при постоянной релаксации, равной значению  $\tau_0 \approx 5.3 \times 10^{-12}$ с, вычисленному по формуле (15), частота  $\Omega_*$  составляет примерно 700ГГц. На данной частоте длина акустических волн на два порядка больше ( $2\pi/\delta \approx 3.73 \times 10^{-8}$ м) постоянной решетки меди ( $3.61 \times 10^{-10}$ м), что не противоречит возможности применения континуальной модели в диапазоне частот близких к  $\Omega_*$ . Величина  $\tau_0$  имеет тот же порядок, что и оценка релаксации теплового потока из фононной теории<sup>5</sup>:  $\tau_{ph} \approx \lambda/(C_v(K + 4G/3))$ . Для термомеханических параметров меди оценка постоянной релаксации, вычисленная по данной формуле равна  $\tau_{ph} \approx 5.6 \times 10^{-12}$ с.

Рассмотрим задачу о распространении продольных термоупругих волн в направлении координаты  $s$ . Будем искать установившееся решение системы дифференциальных уравнений (6), (7) для полупространства в виде экспонент, затухающих по координате:

$$u(s, t) = Ce^{ks}e^{-i\omega t}; \quad T(s, t) = De^{ks}e^{-i\omega t}; \quad k = -\gamma + i\delta; \quad (21)$$

Волны распространяются в направлении, перпендикулярном границе полупространства. Граничные условия имеют вид:

$$T|_{s=0} = 0; \quad u|_{s=0} = u_0 \sin(\omega t); \quad (22)$$

Установившееся решение задачи (6), (7), (22) имеет вид:

$$u(s, t) = u_0 e^{-\gamma_h s} (a_1 \cos(\omega t - \delta_h s) + a_2 \sin(\omega t - \delta_h s)) + u_0 e^{-\gamma_a s} (a_3 \cos(\omega t - \delta_a s) + a_4 \sin(\omega t - \delta_a s)) \quad (23)$$

$$T(s, t) = u_0 e^{-\gamma_h s} (b_1 \cos(\omega t - \delta_h s) + b_2 \sin(\omega t - \delta_h s)) - u_0 e^{-\gamma_a s} (b_1 \cos(\omega t - \delta_a s) + b_2 \sin(\omega t - \delta_a s)) \quad (24)$$

<sup>5</sup>Chester, M. Second sound in solids // Physical Reviews. 1963. N.131. C.2013–2015

Вещественные константы зависят только от параметров среды и частоты колебаний:

$$a_1 = \operatorname{Re} \left( \frac{\Lambda_1 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2} \right); \quad a_2 = \operatorname{Im} \left( \frac{\Lambda_1 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2} \right); \quad a_3 = -\operatorname{Re} \left( \frac{\Lambda_2 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2} \right);$$

$$a_4 = -\operatorname{Im} \left( \frac{\Lambda_2 i}{\Lambda_1 - \Lambda_2} \right); \quad b_1 = \operatorname{Re} \left( \frac{i}{\Lambda_1 - \Lambda_2} \right); \quad b_2 = \operatorname{Im} \left( \frac{i}{\Lambda_1 - \Lambda_2} \right);$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{K \alpha k_{1,2}}{(4/3G + K) k_{1,2}^2 + \rho \omega^2};$$

В рассматриваемой задаче термические волны появляются исключительно за счет эффекта связанности, который заметен тем сильнее, чем выше частота  $\omega$ . Максимальные значения амплитуд тепловых волн при заданной частоте в гиперболической термоупругости больше, чем в классической. Это означает, что в гиперболической термоупругости эффект связанности проявляется сильнее.

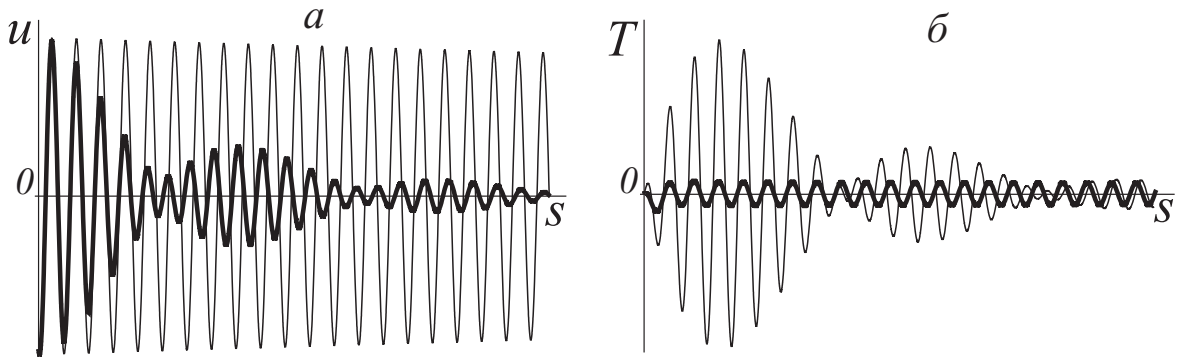


Рис. 8: На графике *а* **толстыми линиями** показаны амплитуды перемещений в *гиперболической термоупругости*, тонкими линиями показаны амплитуды перемещений в *классической термоупругости*, на графике *б* амплитуды температуры в *гиперболической термоупругости* показаны тонкими линиями, а амплитуды в *классической термоупругости* показаны **толстыми линиями**.

С ростом частоты усиливается затухание акустических волн, при этом максимальное значение амплитуд тепловых волн увеличивается, а расстояние, на которое они проникают в среду, уменьшается.

При частотах меньших  $\Omega_*$ , основной вклад в значения амплитуд (23) и (24) дают квазиупругие составляющие (вторые слагаемые в выражениях для  $u$  и  $T$ ). Следовательно, поведение решения описывается в большей степени акустической ветвью дисперсионных соотношений. При частотах, больших  $\Omega_*$ , вклад квазитепловых составляющих становится существенным и на графиках решения становится заметна модуляция амплитуд термоупругих волн (рис. 8, *а, б*).



На графиках (рис. 8), полученных с использованием гиперболической теории термоупругости (толстые линии), видно, что акустические и тепловые волны затухают за небольшое число периодов. В классической теории термоупругости (тонкие линии), затухание практически не заметно.

**Третья глава.** В рамках несвязанной термоупругости получены решения задачи нагревания бесконечного слоя коротким лазерным импульсом при различных граничных условиях на температуру и напряжения. Получено решение связанной задачи гиперболической термоупругости для бесконечного слоя со свободными краями под воздействием короткого лазерного импульса при однородных граничных условиях первого рода на температуру. Выполнено сравнение решений задач в связанной и несвязанной постановках, а также в классической и гиперболической постановках.

Рассмотрим задачу о нагревании бесконечного слоя коротким лазерным импульсом в связанной и несвязанной постановке. Длительность реального импульса, который можно считать коротким в термоупругости LS типа, определяется как величина, обратная частоте, на которой дисперсионные кривые имеют значения близкие к асимптотическим. Например для алюминия при  $\tau = 10^{-11}$  с акустические и тепловые ветви коэффициента затухания и фазовых скоростей выходят на асимптотические значения при частоте порядка  $10/\tau = 10^{12}$  Гц что соответствует длительности импульса  $\tau/10 = 10^{-12}$  с. Неоднородные уравнения связанной гиперболической термоупругости LS типа относительно температуры и напряжений с учетом распределенных в объеме источников тепла выглядят так:

$$\sigma'' - \ddot{\sigma} - D_1 \dot{T} = 0 \quad (25)$$

$$T'' - (\dot{\sigma} + D_3 \ddot{\sigma}) - (\dot{T} + D_3 \ddot{T}) = -D_2 e^{-\gamma s} \left( \delta(D_4 t - 0) + D_3 \dot{\delta}(D_4 t - 0) \right) \quad (26)$$

где введены обозначения:

$$s = s_* \lambda \sqrt{3\rho(4G + 3K)}/d; \quad t = 3t_* \lambda \rho/d; \quad \sigma = \sigma_* d/(3\beta K T_0);$$

$$D_1 = 3\beta^2 K^2 T_0/d; \quad D_2 = 3I_0 \lambda \rho^2 (4G + 3K)/d^2; \quad D_3 = \tau d/(3\lambda \rho); \quad D_4 = 3\lambda \rho/d;$$

$$d = 4G\rho C_v + 3K(\rho C_v + \beta^2 K T_0);$$

Здесь  $s_*$  — координата,  $t_*$  — время,  $\sigma_*$  — напряжения на площадке, перпендикулярной оси  $s_*$ .

Для получения решения задачи термоупругости в несвязанной постановке, распределение температуры, найденное из задачи теплопроводности, подставляется в уравнение движения (25), которое затем решается совместно с начальными и граничными условиями как неоднородное волновое уравнение.

В работе представлены решения задачи несвязанной гиперболической термоупругости для бесконечного слоя, нагреваемого коротким лазерным импульсом, интенсивность которого поглощается средой по закону Бугера. Начальные условия однородны. Рассматривались четыре варианта граничных условий:

$$\begin{aligned} T'|_{s=0} = T'|_{s=l} = 0; \quad \sigma|_{s=0} = \sigma|_{s=l} = 0; \\ T'|_{s=0} = T'|_{s=l} = 0; \quad \sigma'|_{s=0} = \sigma'|_{s=l} = 0; \\ T|_{s=0} = T|_{s=l} = 0; \quad \sigma|_{s=0} = \sigma|_{s=l} = 0; \\ T|_{s=0} = T|_{s=l} = 0; \quad \sigma'|_{s=0} = \sigma'|_{s=l} = 0; \end{aligned}$$

В ходе исследования установлено, что учет постоянной релаксации теплового потока вносит наиболее заметный вклад в задачу с однородными граничными условиями первого рода на температуру и напряжения. Временные профили температуры, напряжений и перемещений, соответствующие данной задаче, показаны толстыми линиями на рис. 9,10,а,б,в. Тонкими линиями показаны классические решения при  $\tau = 0$  (графики классического решения быстро затухают, поэтому для них выбран более крупный масштаб по оси ординат).

Экстремумы, наблюдаемые на графиках, показанных толстыми линиями, соответствуют квазитепловым и квазиакустическим составляющим термоупругой волны и перемещаются с разными скоростями слева направо в сторону от облучаемой лазерным импульсом границы. Скорость квазитепловых составляющих в несвязанной термоупругости (локальные экстремумы на рис. 9,б,в слева и на рис. 10,б,в справа) равна скорости тепла в среде:  $c_h = \sqrt{\lambda/(\rho C_v \tau)}$ . Скорость квазиакустических составляющих в несвязанной термоупругости (локальные экстремумы на рис. 9,б,в справа и на рис. 10,б,в слева) находится по формуле для скорости упругих волн в среде:  $c_a = \sqrt{\rho/(K + 4G/3)}$ . Коэффициент затухания квазитепловых составляющих равен  $\gamma_h = \sqrt{\rho C_v/(\lambda \tau)}/2$ . Квазиакустические составляющие термоупругой волны в несвязанной постановке задачи не затухают.

Рассмотрим задачу термоупругости для бесконечного слоя, нагреваемого коротким лазерным импульсом по закону Бугера в связанной постановке. Граничные и начальные условия на напряжения и температуру однородны:

$$\begin{aligned} T|_{s=0} = T|_{s=l} = 0; \quad \sigma|_{s=0} = \sigma|_{s=l} = 0; \\ T|_{t=0} = \dot{T}|_{t=0} = 0; \quad \sigma|_{t=0} = \dot{\sigma}|_{t=0} = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

Решение задачи (25), (26), (27), полученное по методу Гринберга, принимает вид:

$$T(s, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin(s\sqrt{\lambda_n}); \quad \sigma(s, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sin(s\sqrt{\lambda_n}); \quad (28)$$

Выражения для трансформант  $T_n(t)$  и  $\sigma_n(t)$  имеют вид:

$$T_n = \frac{D_2 \zeta_n H(t)}{(D_1 - 1) D_3 D_4} \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i (R_i^2 + \lambda_n) (D_3 R_i + 1) \exp(t R_i)}{j \neq i \prod_{j=1}^4 (R_i - R_j)} \quad (29)$$

$$\sigma_n = \frac{D_1 D_2 \zeta_n H(t)}{(1 - D_1) D_3 D_4} \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i R_i^2 (D_3 R_i + 1) \exp(t R_i)}{j \neq i \prod_{j=1}^4 (R_i - R_j)} \quad (30)$$

где для краткости записи введены обозначения:

$$\zeta_n = \pi l n (1 - (-1)^n e^{-\gamma l}) / (\gamma^2 l^2 + \pi^2 n^2); \quad \lambda_n = \pi^2 n^2 / l^2$$

$R_1, R_2, R_3, R_4$  — корни уравнения четвертой степени:

$$(D_1 - 1) D_3 R^4 + (D_1 - 1) R^3 - (D_3 + 1) \lambda_n R^2 - \lambda_n R - \lambda_n^2 = 0$$

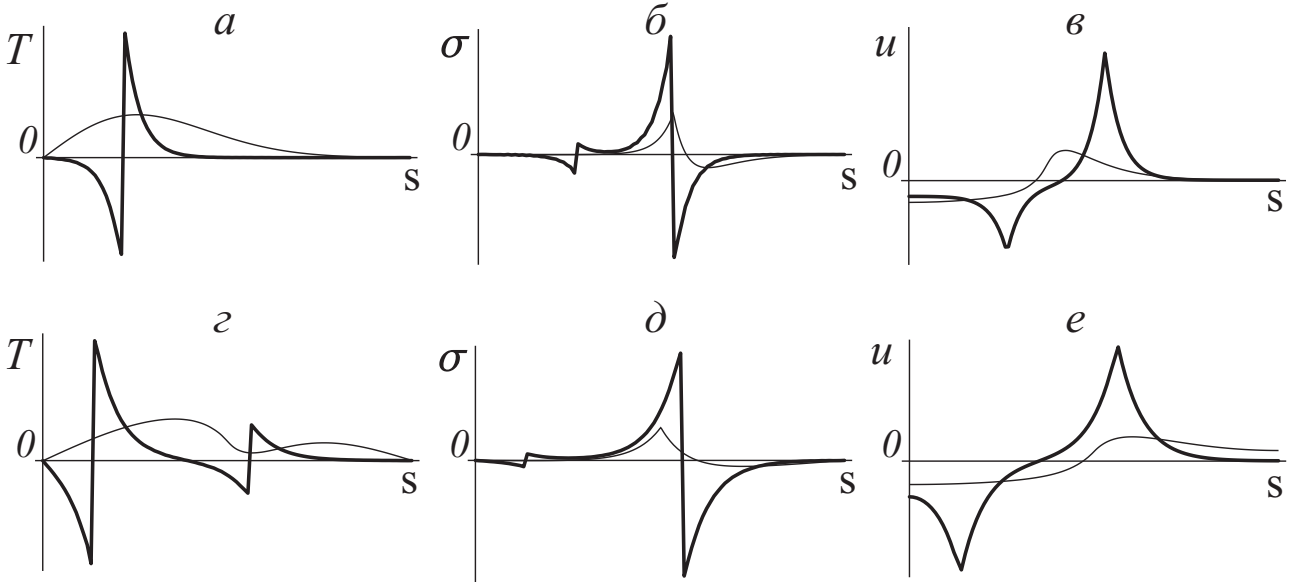


Рис. 9: Профили распределения температуры  $T$ , напряжения  $\sigma$  и перемещения  $u$  в слое в зависимости от координаты  $s$  в момент времени порядка  $\tau$  при  $\tau > \tau_0$ . Графики  $a, б, в$  соответствуют задачам термоупругости в несвязанной постановке, графики  $г, д, е$  — задачам в связанной постановке. Тонкими линиями показаны графики классической термоупругости, толстыми линиями показаны графики гиперболической термоупругости.

На рис. 9,10,  $г, д, е$  представлены решения (28) связанной задачи термоупругости. В результате учета связанности в постановке задачи, на графике температуры (рис. 9,10,  $г$ ) возникает второй минимум, соответствующий квазиакустической составляющей термоупругой волны. В зависимости от параметров задачи в области отрицательных значений  $T$  могут находиться два минимума, один минимум или ни одного.

Скорости квазитепловых и квазиакустических составляющих термоупругой волны в связанной задаче термоупругости находятся по формулам (20), полученным в первой главе:

$$C_1 = \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 - a}; \quad C_2 = \sqrt{2}/\sqrt{A_1 + A_2 + a};$$

Всегда выполняется соотношение:  $C_1 > C_2$ . Значения скорости упругих волн  $c_a$  и скорости тепла  $c_h$  лежат в интервале  $(C_2, C_1)$ . При коэффициенте теплового расширения равном нулю  $\alpha = 0$ , выполняются соотношения:  $C_1 = c_a$  и  $C_2 = c_h$ , если  $\tau > \tau_0$  (см. формулу (15)), и если  $\tau < \tau_0$ , то наоборот:  $C_1 = c_h$  и  $C_2 = c_a$ . Расхождение скорости упругих волн  $c_a$  со скоростью квазиупругой составляющей термоупругой волны, а также скорости тепловых волн  $c_h$  со скоростью квазитепловой составляющей термоупругой волны не превышает 2% (в расчетах использованы термомеханические параметры алюминия, взятого в качестве примера типичного металла; значение постоянной релаксации принято равным  $\tau = 10^{-11}$ с).

Если  $\tau > \tau_0$ , то скорость распространения квазитепловой составляющей термоупругой волны, равная  $C_2$ , будет меньше скорости распространения квазиакустической составляющей  $C_1$  (рис. 9,з,д,е). Если  $\tau < \tau_0$ , то скорость квазитепловой составляющей термоупругой волны  $C_1$  будет больше скорости квазиакустической составляющей термоупругой волны  $C_2$  (рис. 10,з,д,е).

В случае классической термоупругости, если  $\tau = 0$ , то значение  $C_1$  обращается в бесконечность, а значение  $C_2$  становится равным скорости упругих волн в среде  $c_a$ .

Коэффициенты затухания квазитепловых и квазиакустических составляющих термоупругой волны в связанной задаче термоупругости находятся по формулам (18):

$$\gamma_1 = \frac{A_3(a - b)}{2a\sqrt{2(A_1 + A_2 - a)}}; \quad \gamma_2 = \frac{A_3(a + b)}{2a\sqrt{2(A_1 + A_2 + a)}}$$

При  $\tau < \tau_0$  коэффициент  $\gamma_1$  является характеристикой затухания квазитермических составляющих термоупругой волны, а  $\gamma_2$  — квазиакустических; при  $\tau > \tau_0$  наоборот. Если положить коэффициент теплового расширения  $\alpha$  равным нулю, то будут выполняться следующие соотношения:  $\gamma_1 = \gamma_h$  и  $\gamma_2 = 0$  при  $\tau < \tau_0$  или  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 = \gamma_h$  при  $\tau > \tau_0$ .

Графики температуры, построенные с использованием связанной гиперболической термоупругости (рис. 9,10,з) отличаются от графиков, построенных с использованием гиперболической теплопроводности (рис. 9,10,а) скоростями распространения волн, характеристиками их затухания, минимальным и максимальным значением  $T$ , количеством температурных пиков. Все перечисленные отличия вносит учет механических слагаемых в уравнение теплопроводности.

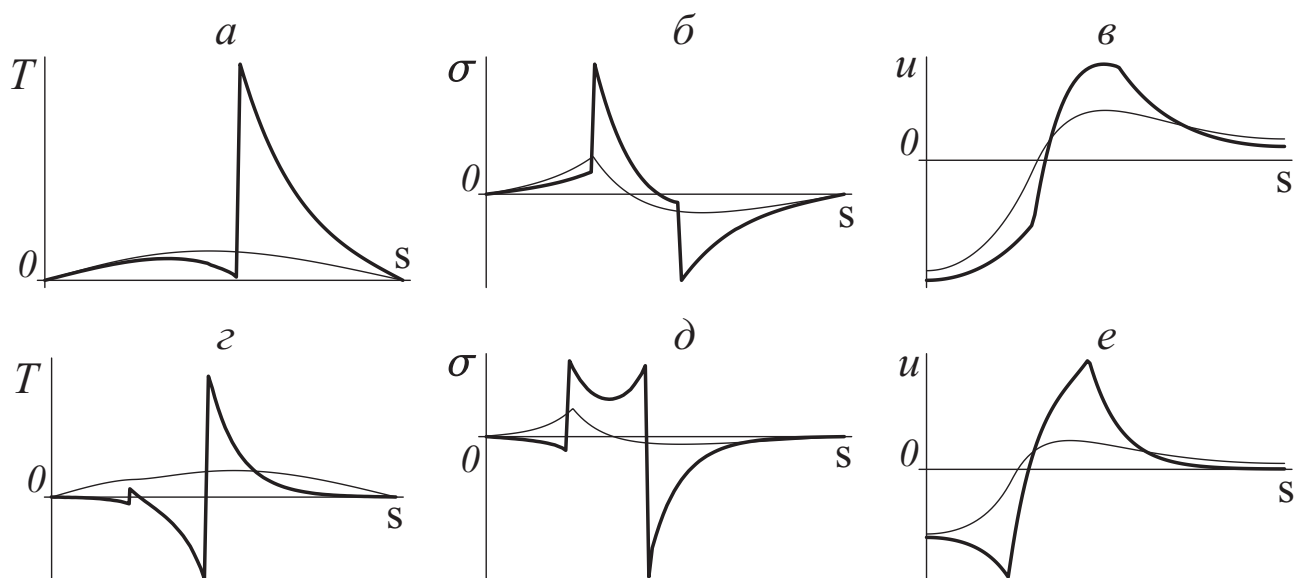


Рис. 10: Профили распределения температуры  $T$ , напряжения  $\sigma$  и перемещения  $u$  в слое в зависимости от координаты  $s$  в момент времени порядка  $\tau$  при  $\tau < \tau_0$ . Графики  $a$ ,  $б$ ,  $в$  соответствуют задачам термоупругости в несвязанной постановке, графики  $г$ ,  $д$ ,  $е$  — задачам в связанной постановке. Тонкими линиями показаны графики классической термоупругости, толстыми линиями показаны графики гиперболической термоупругости.

Таким образом проведенное исследование показало, что если скорости протекающих процессов настолько существенны, что необходим учет релаксационных слагаемых в уравнении теплопроводности, то нужно учитывать и вклад эффектов связанности.

В **заключении** приведен список основных результатов и сформулированы основные выводы диссертационной работы. В **приложении** приведено доказательство сходимости ряда (5).

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Получены выражения зависимостей волнового числа, коэффициента затухания, фазовых и групповых скоростей от частоты в параметрической форме. Данные соотношения оказываются удобными для их аналитического исследования: нахождения асимптот и особых точек графиков функций.
2. При анализе представленных в параметрической форме дисперсионных соотношений, найдены выражения для горизонтальных и наклонных асимптот волнового числа, коэффициента затухания, фазовых и групповых скоростей тепловых и акустических ветвей дисперсионных соотношений.
3. Исследовано поведение дисперсионных соотношений в широком диапазоне значений термомеханических параметров среды. Обнаружены два

варианта поведения дисперсионных кривых в зависимости от времени релаксации теплового потока  $\tau$ . Установлено, что существует такое  $\tau_0$ , что при  $\tau < \tau_0$  и при  $\tau > \tau_0$  характер дисперсионных соотношений качественно отличается. Найдено выражение для  $\tau_0$  через термомеханические параметры среды.

4. При исследовании задачи гиперболической теплопроводности для полупрозрачного слоя, находящего под воздействием короткого лазерного импульса при однородных граничных условиях первого рода на температуру обнаружен участок охлаждения, возникающий вблизи облучаемой поверхности слоя. Установлено, что данный участок возникает только при определенном соотношении постоянной релаксации теплового потока и коэффициента затухания лазерного излучения в среде.
5. Задача гиперболической теплопроводности о полупрозрачном слое обобщена на случай связанной гиперболической термоупругости. Установлено, что в отличие от задачи теплопроводности, в решении задачи термоупругости наблюдаются два участка охлаждения, соответствующих квазитермической и квазиакустической частям термоупругого импульса. Скорости распространения каждого из них вычисляются через термомеханические параметры среды по формуле, полученной в работе.
6. Проведено сравнение скоростей составляющих термоупругой волны на основании ряда моделей: классической связанной термоупругости, гиперболической теплопроводности и гиперболической несвязанной термоупругости. Сделан вывод о том, что если скорости воздействия настолько велики, что необходим учет гиперболических эффектов, то необходимо учитывать и эффекты связанности.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ В ИЗДАНИЯХ,  
ВКЛЮЧЕННЫХ В ПЕРЕЧЕНЬ ВАК

1. Бабенков, М.Б. Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости с учетом релаксации теплового потока / М.Б. Бабенков // Прикл. Мех. Тех. Физ.—2011.—Т.52.— №6.—С. 112-121.
2. Бабенков, М.Б. Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока / М.Б. Бабенков // Прикл. Мех. Тех. Физ.—2013.—Т.54.— №2.—С. 126-137.
3. Babenkov, M.B. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problem of the hyperbolic type/ Babenkov, M.B., Ivanova, E.A. // Continuum Mech. Thermodyn.—2013.—doi:10.1007/s00161-013-0315-8