

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН

_____ А. М. Кривцов

« ___ » _____ 2023 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

**РАЗРАБОТКА И КАЛИБРОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
СИСТЕМЫ «БЕТОННАЯ ПЛОТИНА – ОСНОВАНИЕ» С УЧЕТОМ
ДАННЫХ НАТУРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ**

по направлению подготовки

01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.04.03_03 «Механика и цифровое производство»

Выполнил
студент гр. 5040103/10301

А. А. Мосягина

Руководитель
доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

Е. Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Мосягина Анастасия Алексеевна, группа 5040103/10301

фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: разработка и калибровка математической модели системы «бетонная плотина - основание» с учетом данных натурных наблюдений
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023
3. Исходные данные по работе: научные статьи и литература по теме работы, пакет программ для конечно-элементного моделирования ABAQUS, набор данных натурных наблюдений продольных смещений секции плотины, данные о температуре внешнего воздуха и воды, данные об уровне верхнего и нижнего бьефа, чертежи разрезов секции плотины и основания
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
рассмотрение исходной системы «бетонная плотина - основание» и натурных данных, создание геометрической и конечно-элементной модели, определение НДС исходной системы, подготовка конечно-элементной модели к процессу калибровки, получение базы данных на основе последовательно выполненных расчетов, построение функций (поверхностей) отклика целевой переменной от выбранных параметров, решение задачи оптимизации с учетом данных натурных наблюдений, анализ полученных результатов
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): схемы и графики для иллюстрирования результатов расчетов
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР _____

(подпись)

Е.Ю. Витохин,

доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.
инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению 27.02.2023

(дата)

Студент _____

А.А. Мосягина

РЕФЕРАТ

На 50 с., 26 рисунков, 16 таблиц

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ, КАЛИБРОВКА МОДЕЛИ, АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ, RYTHON, ABAQUS

Целью работы является определение оптимального набора параметров системы «бетонная плотина – основание» с учетом данных натуральных наблюдений.

В данной работе рассматривались следующие задачи:

- Построение конечно-элементной модели системы «бетонная плотина – основание». Расчет напряженно-деформированного состояния конечно-элементной модели;
- Решение задачи аппроксимации зависимости выходных величин от параметров системы с использованием разных методов;
- Решение обратной задачи нахождения параметров как задачи оптимизации. Оценка полученных результатов по вычисленным метрикам качества.

В качестве результатов были созданы программы для решения задачи оптимизации для определения оптимального набора параметров и задачи аппроксимации по заданному набору точек для случаев функции одного, двух параметров с использованием метода наименьших квадратов (МНК) и метода радиальных базисных функций (RBF).

Были сделаны выводы, что наилучший результат дает задача калибровки, где функция выходных величин аппроксимируется как функция от двух параметров методом МНК. Остальные случаи имеют приемлемую точность. Однако для прогноза значений параметров можно использовать только случай, где используется аппроксимированная функция от одного параметра в силу наличия единственности решения.

THE ABSTRACT

50 pages, 26 pictures, 16 tables

PARAMETER IDENTIFICATION, MODEL CALIBRATION, APPROXIMATION
FUNCTION, OPTIMIZATION PROBLEM, PYTHON, ABAQUS

The purpose of the work is to determine the optimal set of parameters of the system "concrete dam - foundation", considering the data of field observations.

The following tasks were considered in this paper:

- Construction of finite-element model of the system "concrete dam - foundation". Calculation of stress-strain of finite element model;
- The solution of the problem of approximating the function of output values from the system parameters using different methods;
- Solving the inverse problem of finding parameters as an optimization problem. Evaluation of the obtained results according to the calculated quality metrics.

As results, programs were created to solve the optimization problem to determine the optimal set of parameters and the problem of approximation over a given set of points for the cases of functions of one, two parameters using the least squares method (LSM) and the method of radial basis functions (RBF).

It was concluded that the best results are obtained in the calibration problem, where the output value function is approximated as a function of two parameters by LSM. The other cases have acceptable accuracy as well. However, only the case where the approximated function from one parameter is used can be used to predict parameter values due to the singularity of the solution.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ «БЕТОННАЯ ПЛОТИНА - ОСНОВАНИЕ».....	9
1.1. Исходные данные.....	9
1.2. Методика расчета.....	14
1.3. Конечно-элементная модель.....	16
1.4. Предварительный расчет и постановка задачи калибровки.....	18
ГЛАВА 2. СЛУЧАЙ ВАРЬИРОВАНИЯ ОДНОГО ПАРАМЕТРА	21
2.1. Наборы данных для аппроксимации.....	21
2.2. Аппроксимация зависимости.....	23
2.3. Решение обратной задачи.....	26
ГЛАВА 3. СЛУЧАЙ ВАРЬИРОВАНИЯ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ.....	30
3.1. Наборы данных для аппроксимации.....	30
3.2. Аппроксимация зависимости.....	33
3.3. Решение обратной задачи.....	38
ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	42
4.1. Метрики	42
4.2. Оценка результатов калибровки.....	43
4.3. Улучшение и дальнейшее использование полученных результатов....	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	49

ВВЕДЕНИЕ

Идентификация параметров динамических систем – совокупность методов, позволяющая строить по данным натуральных наблюдений такие математические модели, где невозможность учета многих внешних и внутренних факторов, действующих на объект, осложняет процесс моделирования. Этот процесс также можно назвать калибровкой системы.

Существует множество работ, в которых рассматриваются не только разные типы калибруемых объектов, но и разные методы идентификации [6,8]. Общая суть методов в том, чтобы подобрать математическую модель, которая смогла бы максимально близко аппроксимировать поведение модели к поведению реального объекта, т. е. чтобы эта настраиваемая модель наилучшим образом предсказывала выходную величину исходного объекта [4,8].

Изначально задача идентификации активно развивалась в области теории управления, что наблюдается в работах Б.Л. Хо и Р.Э. Калмана [12], а также К. Й. Острёма и Т. Болина [10]. Данные труды заложили основу методам, которые до настоящего времени пользуются популярностью. Один из методов представляет собой минимизацию специально построенного критерия, зависящего от параметров модели. Далее эта теория распространялась на другие области науки, в большей степени благодаря книге Дж. Бокса и Г. Д. Дженкинса [11], которая в течение долгого времени оставалась главным сборником всей необходимой теории по идентификации систем. На сегодняшний день теория идентификации в той или иной степени присутствует во всех областях исследования.

Идентификация параметров, как правило, сводится к решению обратной задачи, где требуется найти такой оптимальный набор параметров, при которых модель максимально описывает данные наблюдения, взятые с исходного объекта. Однако данная задача, как описано в литературных источниках [4] и [3], не является корректно поставленной. Например, некорректность задачи может проявляться в том, что на одно выходное

значения могут подходить несколько разных наборов оптимальных параметров. Отчего появляется необходимость ставить определенные условия к методам решения: к характеру параметров, к их количеству, к выбору их начального приближения, к расположению точек измерения [3,4]. В случае калибровки модели сложных объектов, как говорилось раньше, важно, чтобы откалиброванная модель наилучшим образом рассчитывала интересующую выходную величину, используя величины, подаваемые на вход (откалиброванные параметры и исходные данные). И чаще всего эти откалиброванные параметры не будут полностью или вовсе не будут совпадать с реальными параметрами исходного объекта. Это происходит из-за того, что откалиброванный параметр косвенно включает в себя другие характеристики и явления, которые явным образом не учитываются в самой модели, но компенсируются за счет идентифицированного параметра. Отчего задача калибровки не сводится к нахождению реальных параметров, а к выявлению так называемых конструктивных параметров.

Эффективность методов идентификации (в понимании минимизации критерия, отвечающего за разницу между моделью и объектом, и зависящего от контролируемых параметров модели) зависит от статистических свойств математической модели. Для улучшения таких свойств при выполнении калибровке модели часто используют разделы теории планирования эксперимента и регрессионного анализа, например, описанных в источниках [4,5,7,9,13]. Теория планирования эксперимента разрабатывалась как инструмент для задач прикладного регрессионного анализа, с целью нахождения оптимального количества экспериментов. Это позволяло получить регрессионное уравнение, достаточно полно описывающее нужную зависимость [5,9]. В итоге эти разделы науки в совокупности с идентификацией тесно развивались на протяжении долгих лет.

Если рассматривать применение идентификации при калибровке систем гидротехнических сооружений, то одним из примеров разработанной теории является труд [4], в котором довольно полно описывается применение теории

идентификации, планирования эксперимента и регрессионного анализа на примере реально существующей бетонной плотины. Также можно отметить работы С. М. Гинзбург [1,2], содержащие теоретический и практический разборы задачи идентификации.

Задача идентификации является важным этапом в настройке модели, однако ее результат можно использовать дальше. Определяя параметры, характер которых нам неизвестен, можно предположить, как эти параметры будут изменяться с течением времени. Зная оптимальные значения параметров на промежутке времени, где известны натурные данные, можно поставить задачу прогноза будущих значений этих параметров и, используя имеющиеся средства (например, конечно-элементную модель), посчитать прогноз целевых значений (например, перемещений).

Заклячая все вышесказанное, идентификация систем на данный момент интегрировалась во множество областей науки (в особенности – теории управления) в качестве одного из основных инструментов улучшения и корректировки описания математических моделей.

Целью данной работы является определение оптимального набора параметров системы «бетонная плотина – основание» с учетом данных натурных наблюдений. Для этого потребуются выполнить такие задачи:

- Построить геометрическую и конечно-элементную модель «бетонная плотина – основание» в ABAQUS [14,15] и подготовить ее к процессу калибровки модели (идентификации параметров);
- Определить параметры для калибровки, их границы значений и количество данных параметров;
- Получить базу данных при расчете КЭМ, состоящую из значений варьируемых параметров и соответствующим им значений целевой переменной;
- Построить аппроксимирующие функции по имеющимся базам данных;

- Произвести решение обратной задачи (задачи оптимизации) по нахождению оптимальных параметров на основе полученных аппроксимированных функций;
- Проанализировать полученные результаты, сделать выводы о точности, скорости и удобстве использования описанных методов.

ГЛАВА 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ «БЕТОННАЯ ПЛОТИНА – ОСНОВАНИЕ»

1.1. Исходные данные

Пусть имеется система «бетонная плотина – основание». Имеется разрез одной из секций плотины с указанными размерами и отметками (рис. 1.1). Ширина секции – 30 м, высота – 89 м, длина – 148 м. Известны характеристики материалов, входящих в состав секции плотины (табл. 1.1). Имеется схема основания под рассматриваемой секцией (рис. 1.2), с указанием материалов и их физико-механических характеристик (табл. 1.2.) и термомеханических характеристик (табл. 1.3.).

Известны нагрузки, действующие на систему:

- температура наружного воздуха, воды, температура в галереях;
- Гидростатическое давление воды на напорную грань (в зависимости от уровня верхнего бьефа), противодействие на подошву плотины;
- собственный вес;

Упрощенная схема нагрузок представлена на рис. 1.3. Графики натурных наблюдений основных нагрузок (температуры наружного воздуха, уровня верхнего бьефа) представлены на рис. 1.4–1.5.

Известны данные натурных наблюдений горизонтальных смещений бетонной плотины на трех разных отметках: 160 м, 175 м, 210 м (рис. 1.6–1.8). Горизонтальные смещения рассчитываются относительно момента времени с начала заполнения водохранилища (дата – 12.05.2012) и относительно отметки 130 м.

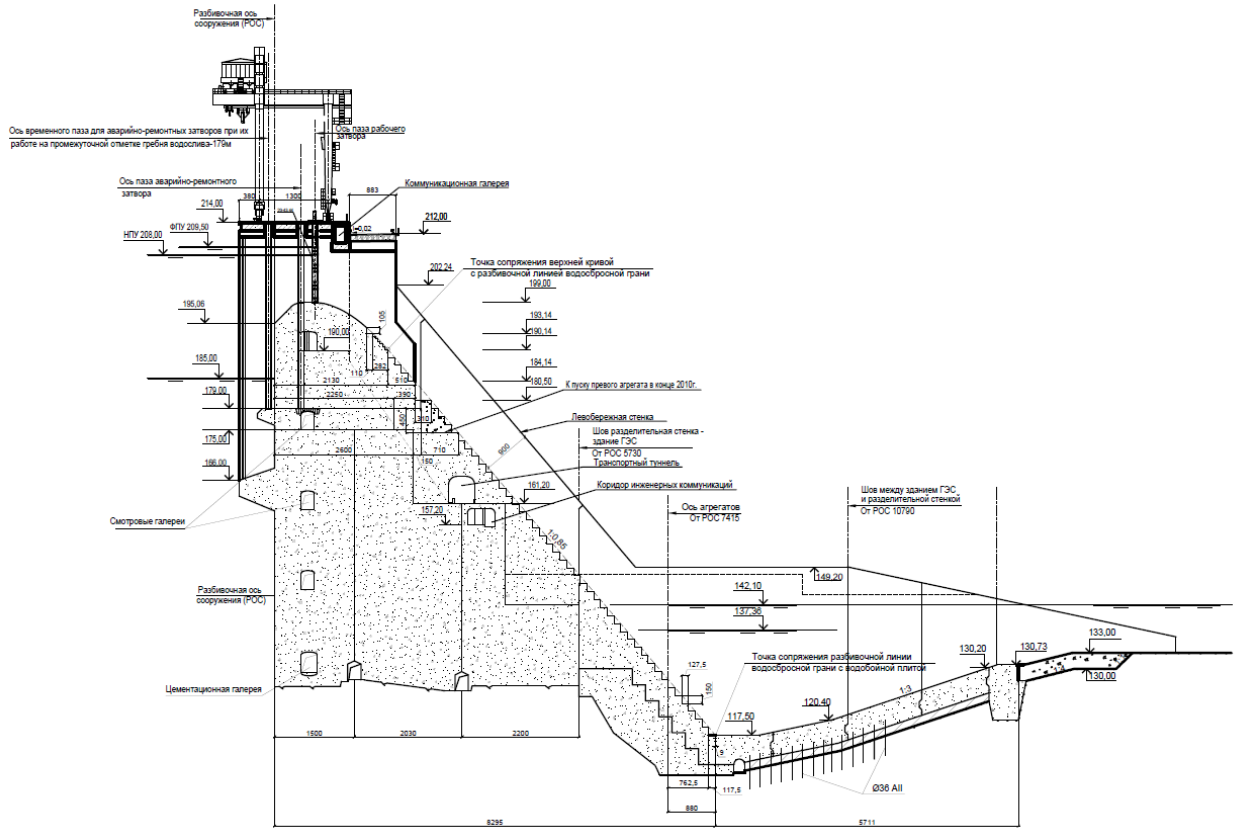


Рис. 1.1. Разрез секции бетонной плотины

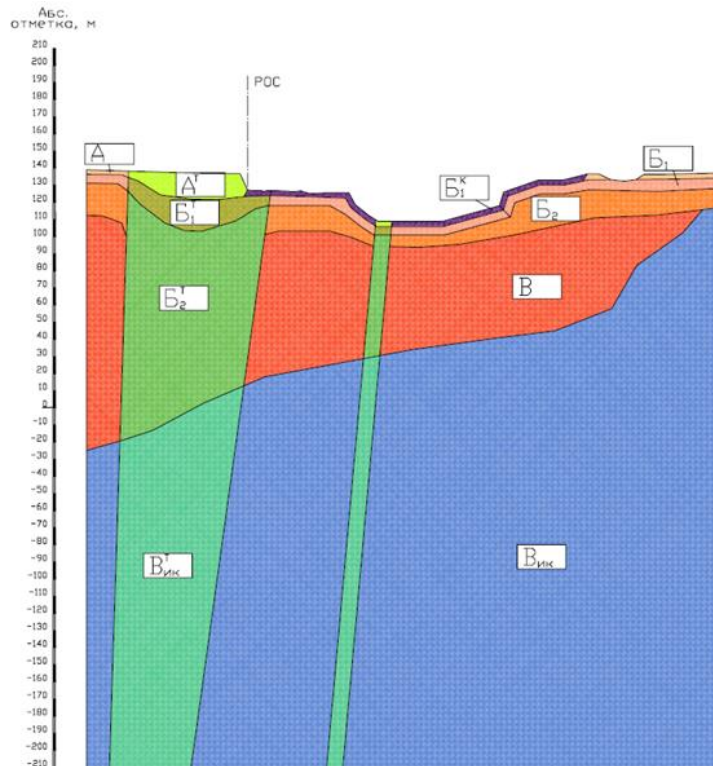


Рис. 1.2. Схема разреза основания под секцией бетонной плотины

Таблица 1.1. Физико-механические характеристики материалов бетонной плотины

Класс бетона по прочности	Начальный модуль упругости, E_b , МПа	Коэффициент Пуассона ν	Плотность ρ , т/м ³	Расчетные прочности (МПа)	
				Сжатие R_{bn}	Растяжение R_{bt}
В10	19000	0,14	2,37	7,5	0,56
В20	27500		2,45	15,0	0,90
Железобетон	16500		2,39	4,5	0,48

Таблица 1.2. Физико-механические характеристики материалов основания

Инженерно-геологические элементы массива			Плотность ρ , т/м ³	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона ν
Наименование	Индекс	Цвет			
Зона выветривания	А		2,55	1000	0,35
Зона интенсивной разгрузки	Б ₁		2,89	6000	0,28
Зона разгрузки	Б ₂		2,92	15000	0,25
Неизменная часть скального массива	В		2,95	23000	0,25
Зона выветривания	А ^г		2,55	1000	0,35
Зона интенсивной разгрузки	Б ₁ ^г		2,85	3000	0,30
Зона разгрузки	Б ₂ ^г		2,90	6000	0,28
Измененные	А _{ук}		2,25	1000	0,35
	Б _{ук}		2,40	3000	0,30
	В _{ук} ^г		2,40	3000	0,30
Неизмененные	В _{ук}		2,50	6000	0,28

Таблица 1.3. Термомеханические характеристики бетона

Характеристика	Обозначение	Значение
Коэффициент линейного расширения, °С ⁻¹	α	$1,0 \cdot 10^{-5}$
Коэффициент теплопроводности, Вт/(м · °С)	λ_c	1,69
Теплоемкость, Дж/(кг · °С)	c_v	1070

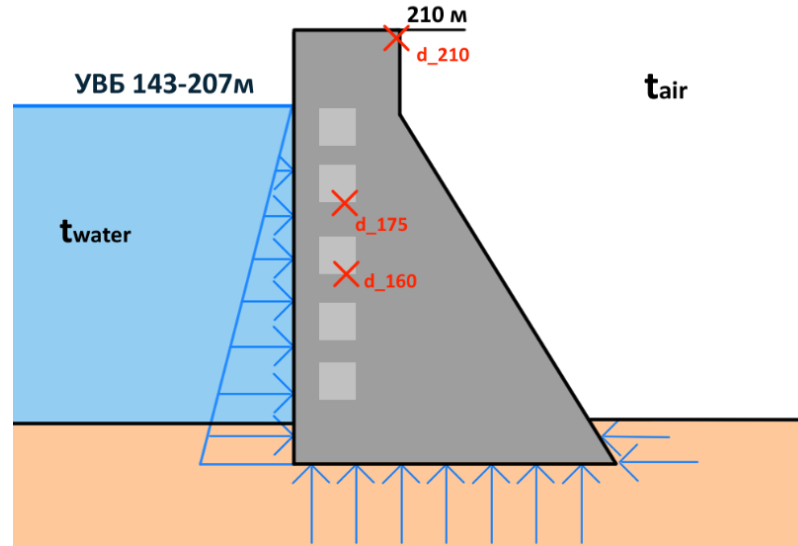


Рис. 1.3. Схема нагрузок, действующие на бетонную плотину (красными крестиками указаны контрольные отметки: 160м, 175м и 210м).

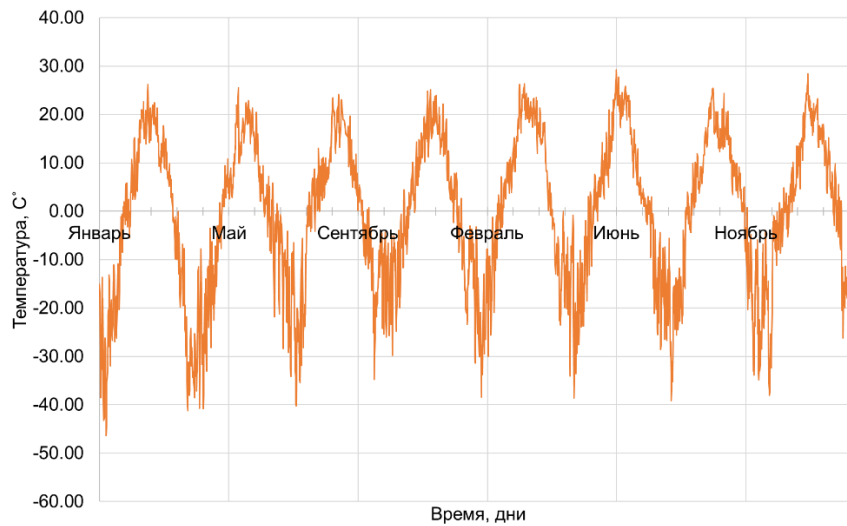


Рис. 1.4. График температуры наружного воздуха

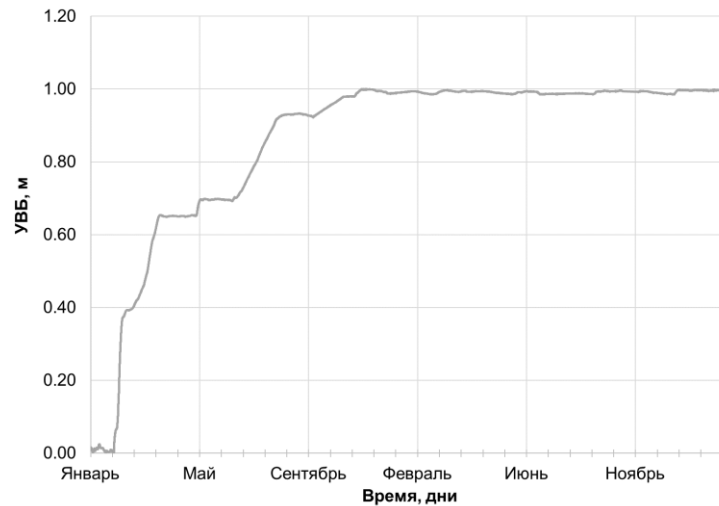


Рис. 1.5. График уровня верхнего бьефа



Рис. 1.6. График натуральных данных (горизонтальных смещений) на отметке 160 м.

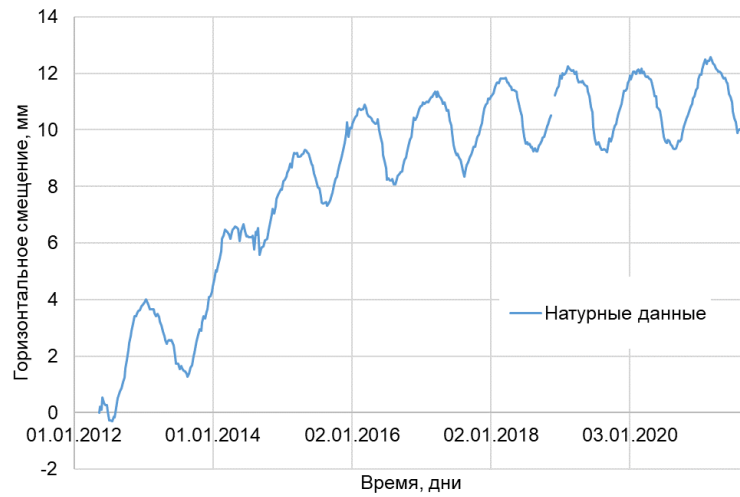


Рис. 1.7. График натуральных данных (горизонтальных смещений) на отметке 175 м.

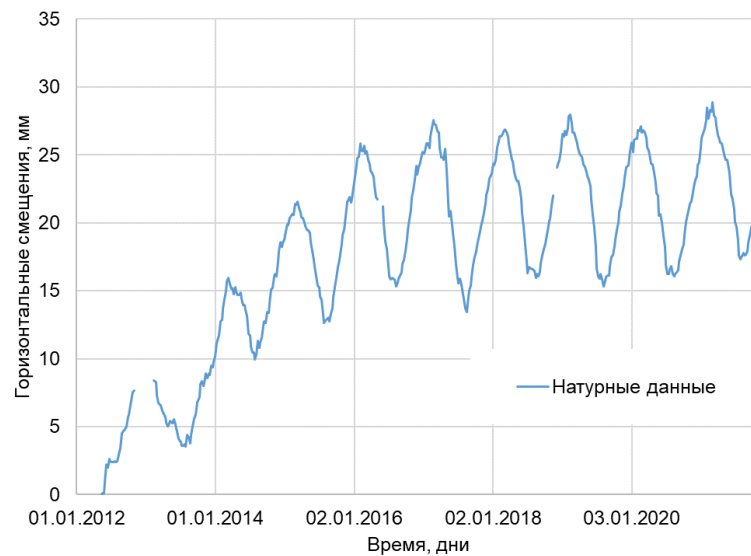


Рис. 1.8. График натуральных данных (горизонтальных смещений) на отметке 210 м.

1.2. Методика расчета

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) системы будет производиться с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Для разработки пространственной конечно-элементной модели и выполнения расчетов с применением МКЭ использовался пакет программного обеспечения Simulia ABAQUS [14,15].

Калибровка системы будет проводиться с использованием программы, написанной на языке программирования Python. Будут использоваться доступные библиотеки:

- для аппроксимации данных – библиотека SciPy [18];
- для решений задач оптимизации – библиотека Optuna [17];
- для визуализации результатов – библиотека Matplotlib [16].

Поведение материалов модели считается линейно-упругим. Учет переменного уровня верхнего бьефа и сезонных колебаний температур воздуха и воды производится за счет решения задачи термоупругости с использованием пользовательской подпрограммы. В качестве начального напряженного состояния для такой задачи выступает состояние системы, отвечающее статическим нагрузкам.

Этапы расчетов модели:

1. Расчет начального напряженного состояния (предполагается как состояние системы, отвечающее статическим нагрузкам);
2. Расчет задачи термоупругости, отвечающая двухлетнему периоду колебания температур до начала заполнения водохранилища. Уровень верхнего бьефа считается постоянным и равным 143 м.
3. Расчет задачи термоупругости в основной рассматриваемый период (с 2012 г. по 2020 г.).

В основной период уровень верхнего бьефа начинает увеличиваться с отметки 143 м до отметки 207 м в соответствии с рис. 1.5. При этом температура на несмоченной поверхности будет принята как температура

наружного воздуха в соответствии с рис. 1.4. Температура воды, действующая на напорную грань плотины, задается следующим образом. Ниже отметки уровня верхнего бьефа на глубине до 10м температура воды задается с помощью линейной аппроксимации между температурой воды на поверхности согласно данным натурных наблюдений и постоянной температурой 4 °С. Ниже глубины 10 м температура воды считается постоянной и равной 4 °С. Температура в галереях плотины считается постоянной и равной 20 °С.

Взаимодействия плотины с воздухом (снаружи и в галереях) моделируется с помощью граничных условий третьего рода (конвекции), взаимодействие с водой – граничными условиями первого рода.

1.3. Конечно-элементная модель

Согласно предыдущим разделам 1.1 и 1.2, с учетом исходных данных строится пространственная конечно-элементная модель. Твёрдотельная модель представлена на рис. 1.9. Непосредственно конечно-элементная модель представлена на рис. 1.10–1.11. Информация о количестве и типах элементов сетки указана в таблице 1.4. Основание и массивный бетон моделируются с помощью линейных тетраэдров. Быки моделируются оболочками. Расчет модели происходит в соответствии с методикой, описанной в разделе 1.2.

Таблица 1.4. Данные о сетке конечно-элементной модели.

Область модели	Тип элемента	Кол-во элементов	Кол-во узлов
Секция бетонной плотины	Тетраэдр (C3D4)	472673	
	Четырехугольная оболочка (S4R)	3794	
	Треугольная оболочка (S3)	157	
	Всего в области	476624	97296
Основание	Тетраэдр (C3D4)	21638	
	Всего в области	21638	4748
Всего в модели		498262	102044

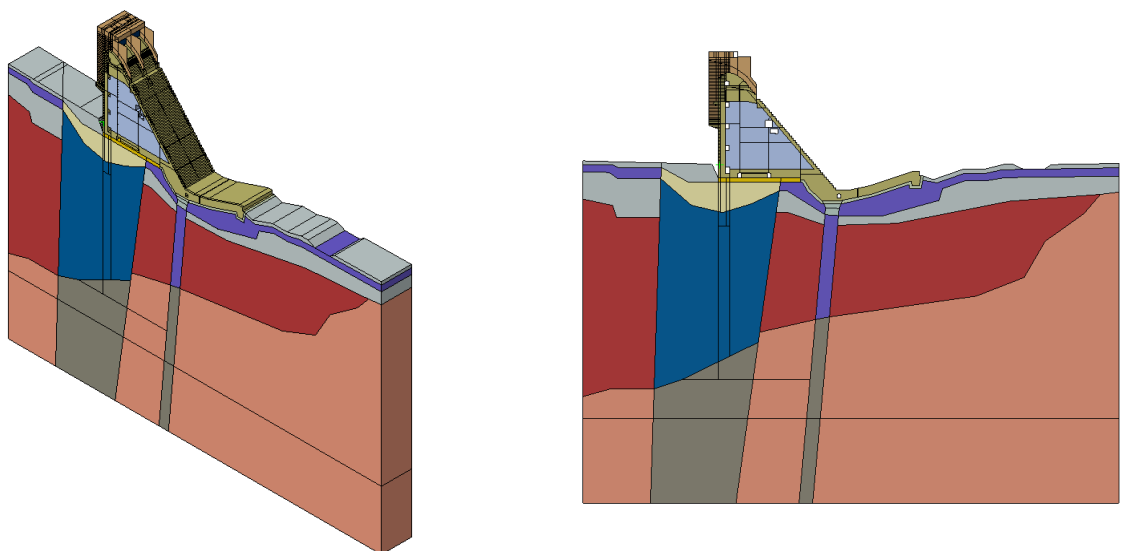


Рис. 1.9. Твёрдотельная модель (изометрический вид и вид сбоку)

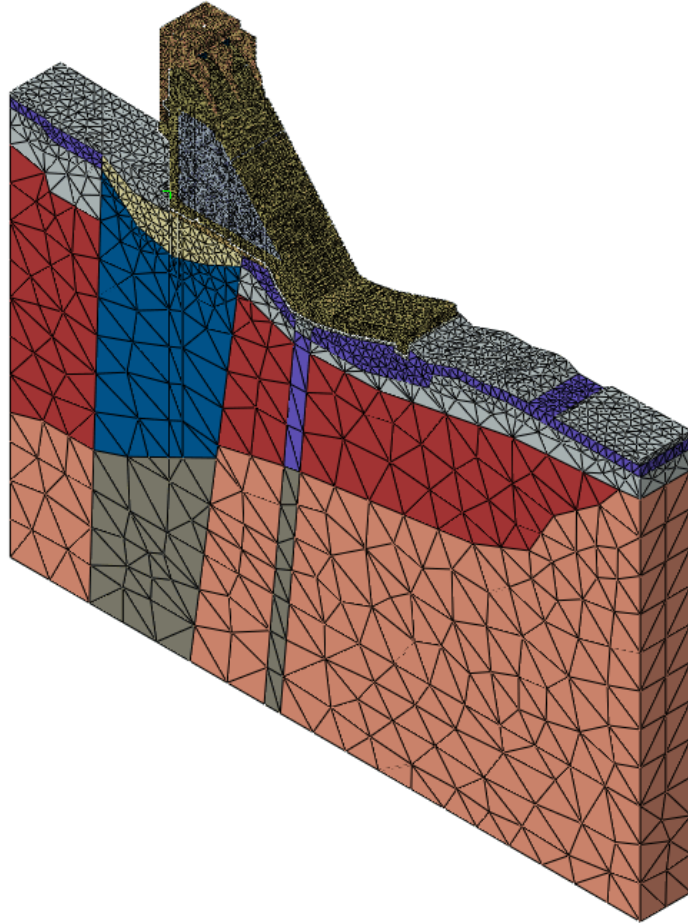


Рис. 1.10. Конечно-элементная модель

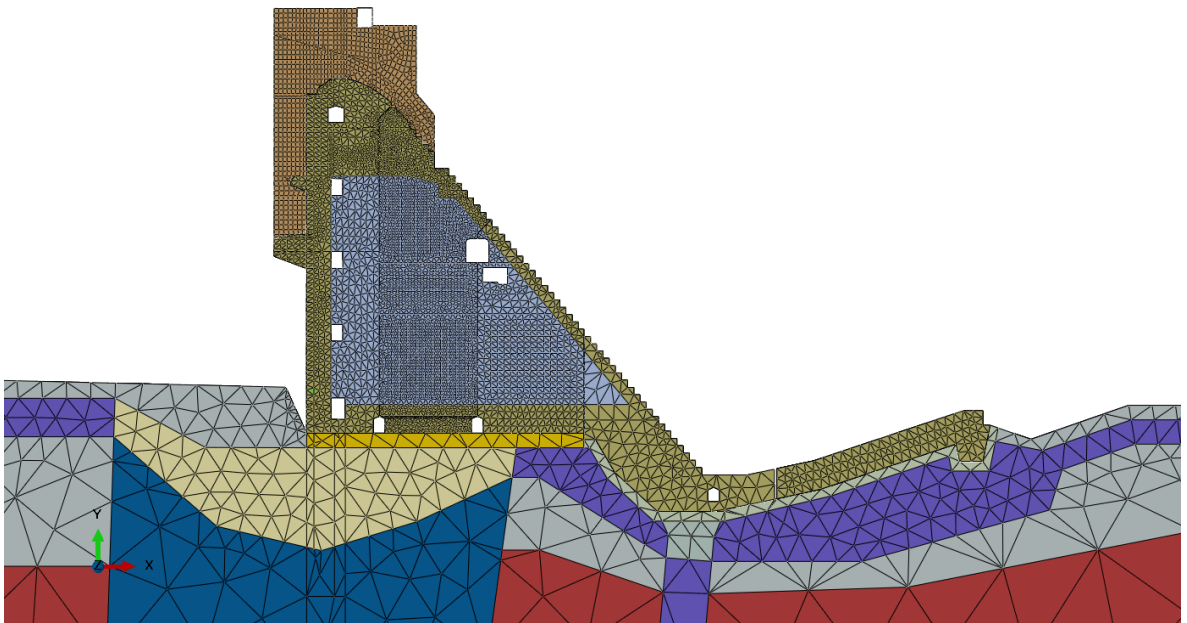


Рис. 1.11. Конечно-элементная модель (приближение, вид сбоку)

1.4. Предварительный расчет и постановка задачи калибровки

С помощью конечно-элементной модели проводится расчет напряженно-деформированного состояния. В частности, будут рассматриваться результаты для горизонтальных смещений в сравнении с натурными данными в основной период. Они представлены на рис. 1.12. – 1.13.

По графикам видно, что полного совпадения с натурными данными не наблюдается. Для достижения более высокой точности необходимо провести калибровку модели. Так как в качестве прогнозных параметров выступают значения перемещений, то предполагается, что можно калибровать модули упругости. Установлено, что наибольшее влияние на горизонтальные перемещения оказывает модуль упругости верхних слоев оснований под плотиной.

Пусть рассматриваются как варьируемые параметры:

- Модуль упругости основания В1 (на рис. 1.2 обозначен как B_1), обозначение - E_{b1} ;
- Модуль упругости основания В1Т (на рис. 1.2 обозначен как B_1^T), обозначение - E_{b1t} ;

Рассмотрим несколько моментов времени, они представлены красными точками на 1.12., конкретные даты представлены в таблице 1.6 в совокупности с данными натурных наблюдений с разных отметок. Эти моменты времени соответствуют местам, где требуется откалибровать модель так, чтобы наблюдалось совпадение между расчетными горизонтальными смещениями и натурными данными (из табл. 1.5).

Для того чтобы решить задачу калибровки, будут выполнены следующие шаги для каждого момента времени:

1. Будет проведен сбор данных при варьировании выбранных параметров, включающий в себя данные о значениях варьируемых

параметров и значение горизонтальных смещений на каждой отметке;

2. Определение аппроксимированной зависимости по собранному набору точек для каждой отметки;
3. Решение обратной задачи (задачи оптимизации) с использованием полученной аппроксимированной функции и предоставление набора оптимальных параметров.

На выходе получаются наборы оптимальных параметров (модулей упругости), которые потом заносятся в конечно-элементную модель для проведения расчета.

Расчет конечно-элементной модели в ее исходном виде до калибровки модели проходит достаточно долго. С целью уменьшить количество времени на сбор данных для калибровки, модель была упрощена: сокращено количество рассчитываемых моментов времени. Так как расчет основного периода времени представляет собой серию последовательных статических расчетов в конкретные даты, то можно рассматривать только расчеты интересующих моментов времени.

Таблица 1.5. Моменты времени, выбранные из базы натуральных данных для калибровки.

Дата	Горизонтальные смещения, мм		
	u_{160}	u_{175}	u_{210}
08.08.2017	6,96	8,55	13,7
20.02.2018	8,38	11,81	26,51
14.08.2018	7,41	9,24	15,94
12.02.2019	8,63	12,24	27,94
23.07.2019	7,62	9,56	16,25
18.02.2020	8,55	12,14	27,09
11.08.2020	7,61	9,43	16,04
02.03.2021	8,74	12,58	28,85
20.07.2021	7,75	9,88	17,58

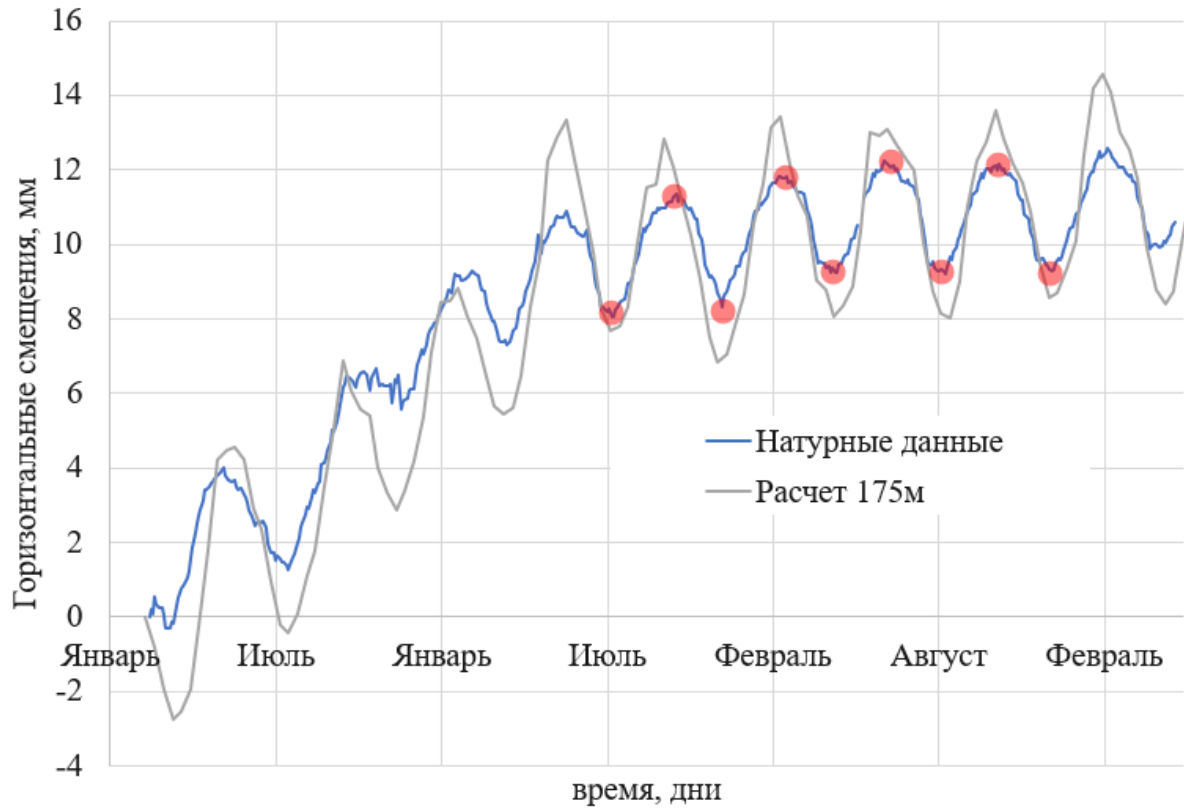


Рис. 1.12. Горизонтальные смещения на отметке 175 м с исходными параметрами. Моменты времени, в которых будут искаться оптимальные наборы параметров, отмечены красным цветом.

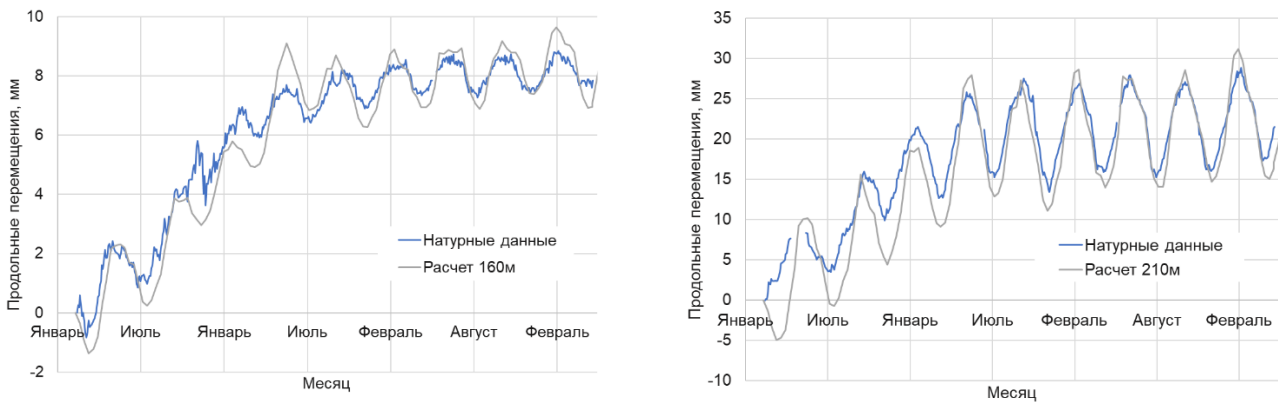


Рис. 1.13. Горизонтальные смещения на отметках 160 м и 210 м с исходными параметрами.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙ ВАРЬИРОВАНИЯ ОДНОГО ПАРАМЕТРА

2.1. Наборы данных для аппроксимации

Для решения задачи калибровки при случае варьирования одного параметра требуется определить зависимость между выходными значениями горизонтальных смещений u_i от варьируемого параметра E_{b1} (модуля упругости). Можно предположить, что зависимость имеет вид:

$$u_i(x_1) = \frac{1}{b_3x_1^3 + b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0} + a_0 \quad (2.1)$$

Где x_1 – параметр E_{b1} , a_0, b_0, \dots, b_3 – коэффициенты искомой функции, $i = 160, 175, 210$ – номер отметки, где считываются натурные данные.

Пусть функция (2.1) будет функцией отклика, выражающая искомую зависимость. Вид функции (2.1) был выбран из соображений влияния модуля упругости на перемещения: при увеличении модуля упругости перемещения уменьшаются. Была взята обратная функция с полиномом третьей степени с целью улучшить результаты аппроксимации, так как полинома первой степени было недостаточно.

Так как известен вид функции, можно для аппроксимации использовать метод наименьших квадратов (МНК). Зависимость (2.1) имеет 5 неизвестных коэффициентов. Значит требуется провести минимум 5 расчетов конечно-элементной модели (КЭМ) для определения коэффициентов.

Пусть варьируется параметр E_{b1} в промежутке от 0,2 ГПа до 4 ГПа и считываются значения горизонтальных смещений u_i , полученных в ходе расчета КЭМ. Данный интервал варьирования был выбран таким образом, чтобы нужное значение горизонтальных смещений u_i^{target} попало в промежуток между наименьшим u_i^{lower} и наибольшим u_i^{upper} значениями горизонтальных смещений, полученных при варьировании параметра E_{b1} :

$$u_i^{lower} \leq u_i^{target} \leq u_i^{upper} \quad (2.2)$$

Где $i = 160, 175, 210$ – номер отметки, значение u_i^{lower} получается при расчете модели с модулем упругости $E_{b1} = 0,2$ ГПа, соответственно u_i^{upper} – при расчете с модулем упругости $E_{b1} = 4$ ГПа.

Итого, на каждый рассматриваемый момент времени будет сделано 5 расчетов конечно-элементной модели. Данные наборы данных будут использоваться для аппроксимации зависимости горизонтальных смещений от варьируемого параметра в каждый рассматриваемый момент времени.

В качестве обработки данных была произведена нормализация. То есть каждая переменная была нормирована так, что все значения попадали в промежуток $[0,1]$. Это должно помочь улучшить результаты аппроксимации или, в крайнем случае, не допустить появления некорректных случаев при большой числовой разнице между значениями. Нормализация данных также поможет обеспечить более благоприятные условия для поиска коэффициентов функции (2.1).

Набор точек для лета 2017 года представлен в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Набор данных для аппроксимации, лето 2017 года.

Параметр E_{b1} , ГПа	u_{160} , мм	u_{175} , мм	u_{210} , мм
0,20	10,868	16,083	29,890
0,65	7,079	10,562	20,365
1,43	5,359	8,071	16,078
2,60	4,504	6,837	13,955
4,00	4,076	6,220	12,896

2.2. Аппроксимация зависимости

Имеются наборы точек для аппроксимации и известен вид аппроксимирующей функции (2.1) с 5 неизвестными коэффициентами. Пусть рассматривается один из моментов времени: лето 2017 года (дата 08.08.2017).

Для того чтобы провести аппроксимацию функции (2.1) будут использоваться возможности языка программирования Python и его библиотеки SciPy [18]. В данной библиотеке доступен метод `curve_fit`, который реализует метод наименьших квадратов.

Часть кода, строящая аппроксимирующую функцию:

```
def objective_func(x, b3, b2, b1, b0, c):
    return 1 / (b3 * x * x * x + b2 * x * x + b1 * x + b0) + c

def create_curve_fit(x, y, objective):
    popt, _ = curve_fit(objective, x, y)
    return popt
```

Видно, что создается вид функции `objective_func` с неизвестными коэффициентами и потом находятся коэффициенты при помощи метода `curve_fit`.

Полученные зависимости для каждой из отметок имеют вид:

$$u_{160}(E_{B1}) = \frac{1}{3,99 * E_{B1}^3 - 0,06 * E_{B1}^2 + 8,42 * E_{B1} + 0,93} - 0,08 \quad (2.3)$$

$$u_{175}(E_{B1}) = \frac{1}{3,99 * E_{B1}^3 - 0,01 * E_{B1}^2 + 8,49 * E_{B1} + 0,93} - 0,07 \quad (2.4)$$

$$u_{210}(E_{B1}) = \frac{1}{4,02 * E_{B1}^3 - 0,01 * E_{B1}^2 + 8,52 * E_{B1} + 0,93} - 0,07 \quad (2.5)$$

Стоит отметить, что функции (2.3) – (2.5) получены для нормированных значений при максимальных и минимальных значениях, указанных при рассмотрении промежутка (2.2).

Графики полученных аппроксимированных функций для лета 2017 года представлены на рис. 2.1–2.3. На графиках значения получены обратным преобразованием из нормированных.

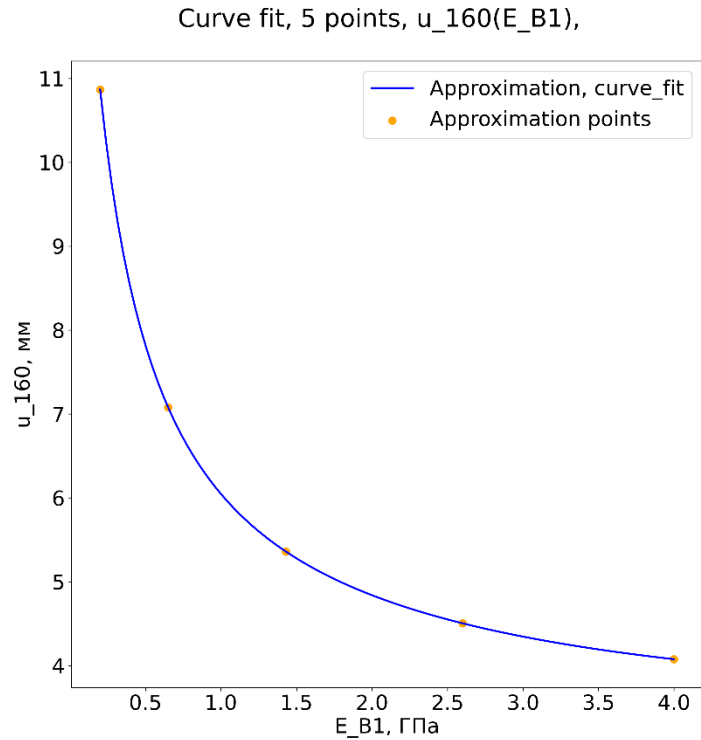


Рис. 2.1. Аппроксимированная функция (2.3) для отметки 160, лето 2017 год.

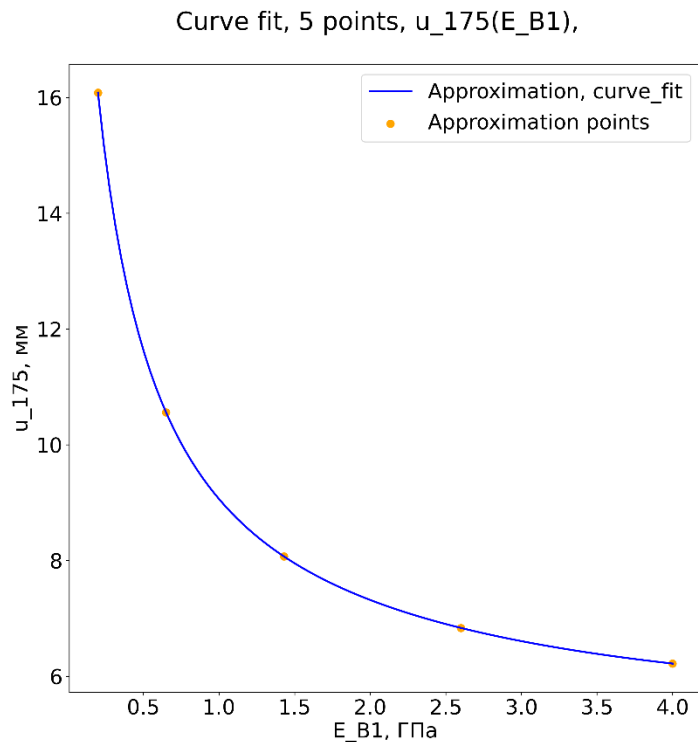


Рис. 2.2. Аппроксимированная функция (2.4) для отметки 175, лето 2017 год.

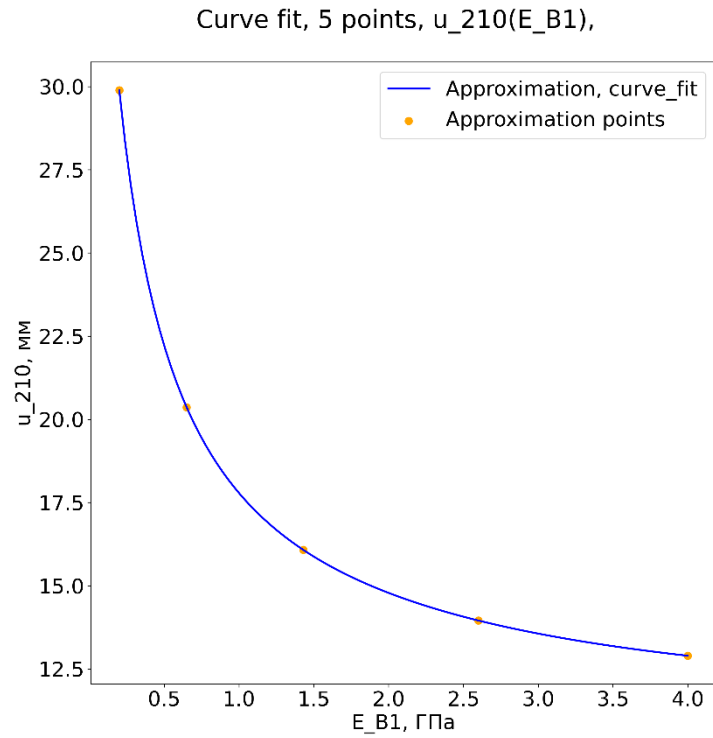


Рис. 2.3. Аппроксимированная функция (2.5) для отметки 210, лето 2017 год.

Аналогичные функции строятся для других моментов времени. В итоге имеется набор аппроксимированных функций на каждый момент времени и на каждую рассматриваемую отметку. Далее эти функции будут использоваться для решения обратной задачи.

2.3. Решение обратной задачи

Известны функции вида (2.3) – (2.5), описывающие зависимость между горизонтальными смещениями бетонной плотины на разных отметках u_i и входным параметром E_{b1} . Пусть известны данные натуральных наблюдений u_i^{target} для каждого момента времени и для каждой отметки i .

Требуется определить такое значение E_{b1} , при котором значения $u_i(E_{b1})$ и u_i^{target} будут максимально приближены друг к другу. Построим целевую функцию вида:

$$\varphi_i(E_{b1}) = (u_i(E_{b1}) - u_i^{target})^2 \quad (2.6)$$

Где $i = 160, 175, 210$ – номер отметки, u_i^{target} – значение натуральных наблюдений в данный момент времени на данной отметке i .

Далее ставится задача оптимизации:

$$\varphi_i(E_{b1}) \rightarrow \min \quad (2.7)$$

То есть будет минимизироваться целевая функция (2.7) так, чтобы определить такой параметр E_{b1} , при котором результаты модели будут максимально совпадать с данными натуральных наблюдений. Полученное значение параметра будет считаться оптимальным.

Задача оптимизации будет решаться с использованием библиотеки Optuna на языке программирования Python [17]. Часть кода, отвечающая за решение задачи оптимизации:

```
def objective(trial):
    x = trial.suggest_float("x", limits_x[0], limits_x[1])
    return (fun(x) - target)**2

study = optuna.create_study(sampler=optuna.samplers.TPESampler())
study.optimize(objective, n_trials=N_TRIALS)
```

Определенные оптимальные значения параметров для всех рассматриваемых моментов времени представлены в таблице 2.2. Стоит отметить, что оптимальные значения искались для каждой отметки отдельно, отчего при хороших результатах калибровки на одной отметке не гарантируется такие же результаты на остальных отметках.

Используя полученные оптимальные значения, указанные в табл. 2.2, будут сделаны расчеты конечно-элементной модели для каждой из отметок. Графики полученных зависимостей горизонтальных смещений от времени представлены на рис. 2.4–2.6. На графиках красными точками обозначены моменты времени, в которых определяются оптимальные параметры.

Таблица 2.2. Определенные оптимальные значения параметров.

Дата	Модуль упругости E_{b1} , ГПа		
	u_{160}	u_{175}	u_{210}
08.08.2017	0,6813	1,1901	2,8484
20.02.2018	0,4414	0,4462	0,251
14.08.2018	0,6567	1,1428	2,3909
12.02.2019	0,4566	0,4565	0,2502
23.07.2019	0,6312	1,1106	3,0245
18.02.2020	0,476	0,4755	0,2731
11.08.2020	0,6542	1,0753	1,8331
02.03.2021	0,4188	0,4124	0,2182
20.07.2021	0,574	1,1346	5,9786

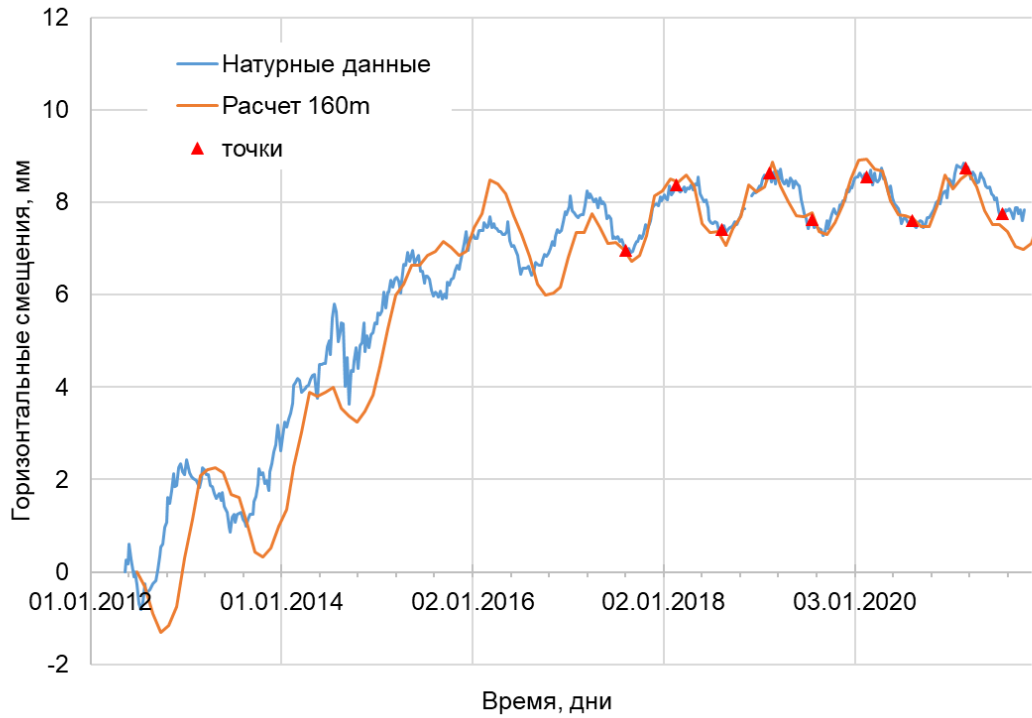


Рис. 2.4. Зависимости горизонтальных (продольных) смещений с течением времени на отметке 160м, результаты при варьировании одного параметра.

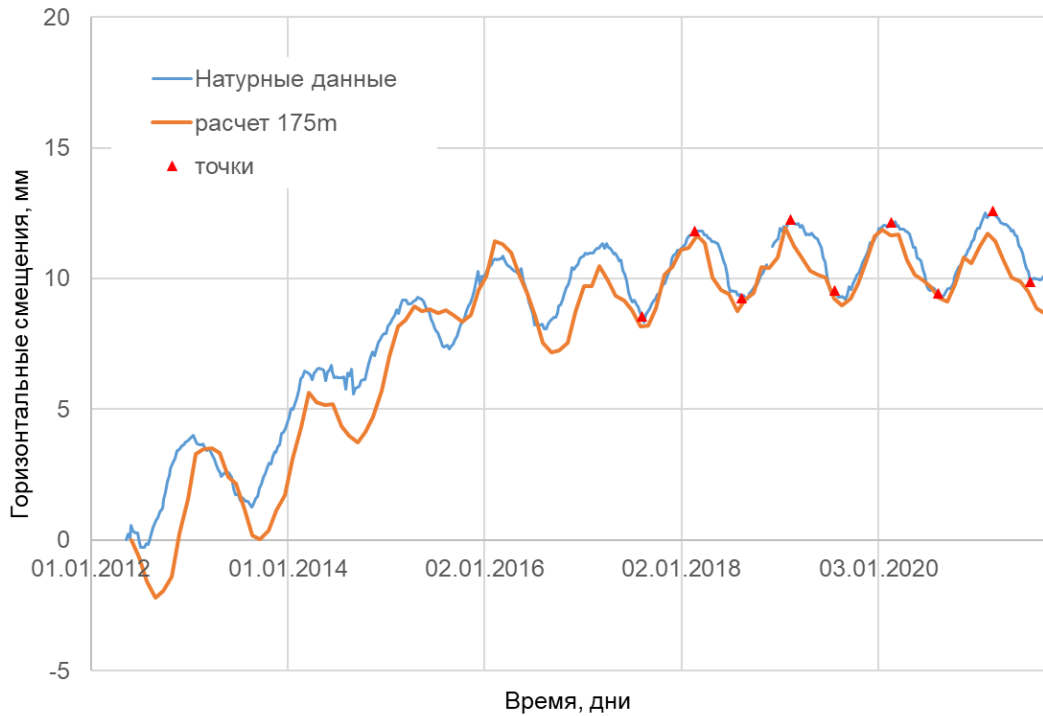


Рис. 2.5. Зависимости горизонтальных (продольных) смещений с течением времени на отметке 175м, результаты при варьировании одного параметра.

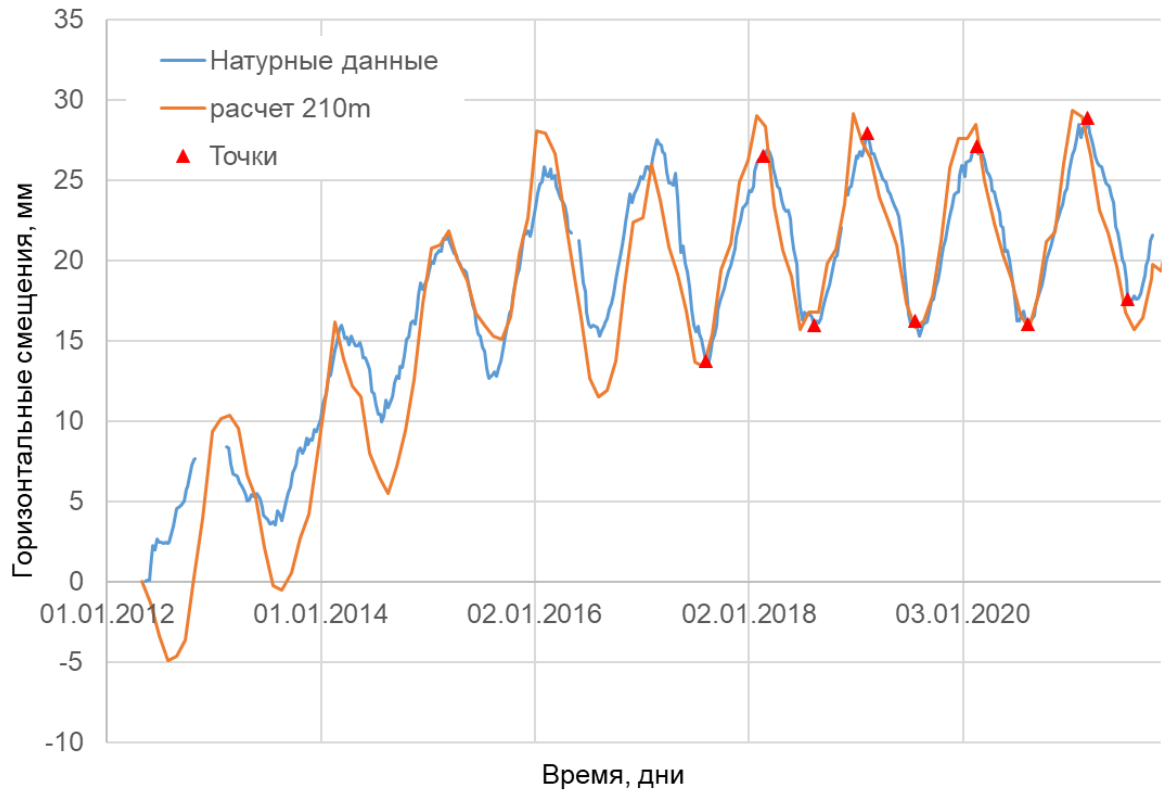


Рис. 2.6. Зависимости горизонтальных (продольных) смещений с течением времени на отметке 210м, результаты при варьировании одного параметра.

ГЛАВА 3. СЛУЧАЙ ВАРЬИРОВАНИЯ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

3.1. Наборы данных для аппроксимации

Для решения задачи калибровки модели при случае варьирования двух параметров требуется определить зависимость между выходными значениями горизонтальных смещений u_i от варьируемых параметров E_{b1} и E_{b1t} (модулей упругости).

В отличие от первого случая с варьированием одного параметра (см. главу 2), в данном случае будет рассматриваться на каждый момент времени три набора данных, состоящих из 9, 25 и 36 точек. Они приведены в таблицах 3.1–3.3 для одного конкретного момента времени (лето 2020 год), и такие наборы сделаны для всех рассматриваемых моментов времени.

Изначально предполагалось, что 9 точек на один момент времени будет хватать для аппроксимации искомой функции. Однако по мере расчетов было выявлено, что требуется увеличение количества точек в особых местах (например, в районе резкого возрастания функции). Отчего будет рассматриваться 3 набора данных и влияние количества точек на результаты аппроксимации.

Для обработки данных также использовалась нормализация данных с целью улучшить результаты аппроксимации.

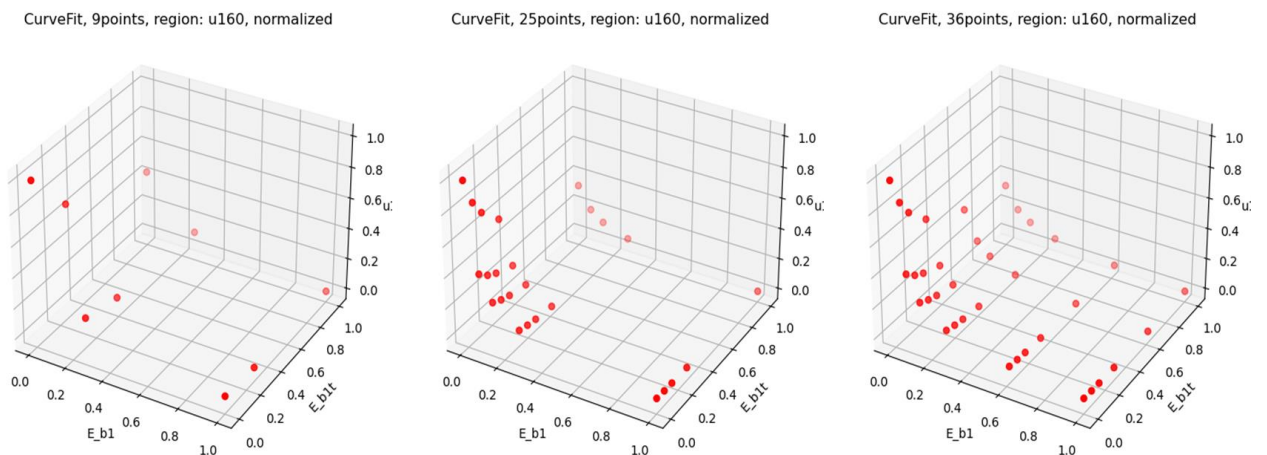


Рис. 3.1. Три набора данных для момента времени 11.08.2020 (лета 2020 года), значения на графиках нормированы относительно своих максимумов и минимумов.

Таблица 3.1. Набор дискретных данных, состоящий из 9 точек, лето 2020 год.

№	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	u_{160} , мм	u_{175} , мм	u_{210} , мм
1	0,20	0,20	12,75	18,12	28,16
2	1,24	1,24	4,64	6,30	7,78
3	4,00	4,00	2,94	3,84	3,56
4	0,20	4,00	7,14	9,90	13,98
5	4,00	0,20	3,36	4,46	4,61
6	1,24	0,20	5,24	7,17	9,27
7	0,20	1,24	9,58	13,47	20,13
8	1,24	4,00	4,09	5,49	6,39
9	4,00	1,24	3,15	4,14	4,07

Таблица 3.2. Набор дискретных данных, состоящий из 25 точек, лето 2020 год.

№	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	u_{160} , мм	u_{175} , мм	u_{210} , мм
1	0,10	0,10	18,59	26,72	43,07
2	0,38	0,38	8,89	12,48	18,42
3	0,65	0,65	6,51	9,00	12,42
4	1,20	1,20	4,71	6,40	7,94
5	4,00	4,00	2,94	3,84	3,56
6	0,38	0,10	9,76	13,75	20,60
7	0,10	0,38	15,72	22,49	35,75
8	0,65	0,10	7,34	10,21	14,51
9	0,10	0,65	14,02	19,99	31,41
10	0,38	0,65	8,34	11,67	17,03
11	0,65	0,38	6,83	9,48	13,25
12	0,10	1,20	11,92	16,90	26,05
13	0,38	1,20	7,60	10,59	15,17
14	0,65	1,20	6,06	8,35	11,30
15	1,20	0,10	5,42	7,43	9,72
16	1,20	0,38	5,15	7,04	9,05
17	1,20	0,65	4,96	6,77	8,58
18	0,10	4,00	8,19	11,44	16,63
19	0,38	4,00	6,02	8,29	11,19
20	0,65	4,00	5,06	6,89	8,79
21	1,20	4,00	4,13	5,55	6,49
22	4,00	0,10	3,40	4,51	4,70
23	4,00	0,38	3,31	4,38	4,48
24	4,00	0,65	3,24	4,29	4,32
25	4,00	1,20	3,15	4,15	4,09

Таблица 3.3. Набор дискретных данных, состоящий из 36 точек, лето 2020 год.

№	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	u_{160} , мм	u_{175} , мм	u_{210} , мм
1	0,10	0,10	18,59	26,72	43,07
2	0,38	0,38	8,89	12,48	18,42
3	0,65	0,65	6,51	9,00	12,42
4	1,20	1,20	4,71	6,40	7,94
5	4,00	4,00	2,94	3,84	3,56
6	0,38	0,10	9,76	13,75	20,60
7	0,10	0,38	15,72	22,49	35,75
8	0,65	0,10	7,34	10,21	14,51
9	0,10	0,65	14,02	19,99	31,41
10	0,38	0,65	8,34	11,67	17,03
11	0,65	0,38	6,83	9,48	13,25
12	0,10	1,20	11,92	16,90	26,05
13	0,38	1,20	7,60	10,59	15,17
14	0,65	1,20	6,06	8,35	11,30
15	1,20	0,10	5,42	7,43	9,72
16	1,20	0,38	5,15	7,04	9,05
17	1,20	0,65	4,96	6,77	8,58
18	0,10	4,00	8,19	11,44	16,63
19	0,38	4,00	6,02	8,29	11,19
20	0,65	4,00	5,06	6,89	8,79
21	1,20	4,00	4,13	5,55	6,49
22	4,00	0,10	3,40	4,51	4,70
23	4,00	0,38	3,31	4,38	4,48
24	4,00	0,65	3,24	4,29	4,32
25	4,00	1,20	3,15	4,15	4,09
26	2,50	2,50	3,43	4,55	4,77
27	0,10	2,50	9,49	13,34	19,91
28	0,38	2,50	6,63	9,17	12,71
29	0,65	2,50	5,45	7,46	9,77
30	1,20	2,50	4,36	5,89	7,07
31	4,00	2,50	3,02	3,96	3,77
32	2,50	0,10	3,98	5,34	6,13
33	2,50	0,38	3,84	5,15	5,80
34	2,50	0,65	3,75	5,01	5,56
35	2,50	1,20	3,61	4,82	5,23
36	2,50	4,00	3,31	4,37	4,46

3.2. Аппроксимация зависимости

Для наглядности будет все также рассматриваться один момент времени (лето 2020 года, дата 11.08.2020). Этому моменту времени соответствуют наборы данных, изображенные на рис. 3.1 и представленные в табл. 3.1–3.3.

В отличие от первого случая с варьированием одного параметра (см. главу 2), для данного случая будет рассматриваться два метода аппроксимации данных:

1. Аппроксимация методом наименьших квадратов (МНК), при котором будет задан вид функции;
2. Аппроксимация методом радиальных базисных функций (RBF, radial basis function), который реализует аппроксимацию сплайнами и не требует конкретного вида функции на вход.

Все эти методы присутствуют в библиотеке SciPy при использовании языка программирования Python (соответственно методы `curve_fit` и `RBFInterpolator`) [18].

Пусть используется первый метод (МНК). Рассматривая точки, представленные в таблицах 3.1–3.3, можно сделать вывод о том, что при увеличении какого-либо из параметров E_{b1} и E_{b1t} результирующие значения u_{160} , u_{175} и u_{210} будут уменьшаться. Это говорит о наличии обратной зависимости между переменными.

С такими соображениями предполагаем, что вид функции имеет вид:

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{b_5 x_2^2 + b_4 x_1^2 + b_3 x_1 x_2 + b_2 x_2 + b_1 x_1 + b_0} \quad (3.1)$$

Где x_1 – параметр E_{b1} , x_2 – параметр E_{b1t} , b_0, \dots, b_5 – коэффициенты искомой функции, $i = 160, 175, 210$ – номер отметки.

Часть кода на языке программирования Python, которая определяет функцию для вида искомой зависимости и функцию для нахождения

неопределенных коэффициентов по имеющимся данным при помощи `curve_fit`:

```
def func(x, b1, b2, b3, b4, b5, c):
    return 1 / (b1 * x[0] + b2 * x[1] + b3 * x[1] * x[0] + b4 *
x[0] * x[0] + b5 * x[1] * x[1] + c)

def create_curve_fit(x, y, zdata):
    xdata = np.vstack((x, y))
    popt, _ = curve_fit(func, xdata, zdata, method="lm")
    print("fitted: {}".format(popt))
    return popt
```

Далее строится аппроксимация МНК для каждого из трех наборов данных и для каждой отметки отдельно. Полученные коэффициенты функции (3.1) представлены в таблице 3.4. Стоит так же отметить, как и в случае с варьированием одного параметра (см. главу 2), коэффициенты функции находились для нормированных данных.

Визуализация аппроксимированных зависимостей МНК представлена на рисунке 3.2.

Таблица 3.4. Значения коэффициентов для искомой функции (3.1), лето 2020 год.

b_i	Набор из 9 точек (таблица 3.1)			Набор из 25 точек (таблица 3.2)			Набор из 36 точек (таблица 3.3)		
	u_{160}	u_{175}	u_{210}	u_{160}	u_{175}	u_{210}	u_{160}	u_{175}	u_{210}
b_0	1,000	1,000	1,000	1,005	1,005	1,005	1,007	1,007	1,007
b_1	3,819	4,006	4,003	17,137	17,356	17,476	16,873	17,092	17,210
b_2	1,911	1,929	1,936	3,033	3,065	3,081	2,989	3,023	3,038
b_3	12,045	12,344	12,398	14,710	15,150	15,263	15,084	15,519	15,629
b_4	30,153	29,837	30,067	13,278	13,343	13,442	15,097	15,179	15,300
b_5	-0,577	-0,576	-0,576	-1,096	-1,097	-1,100	-1,090	-1,092	-1,095

Пусть теперь используется второй метод (RBF). Он базируется на построении радиальных базисных функций в n -мерном пространстве.

Часть кода представлена на Python с использованием библиотеки SciPy и ее метода `RBFInterpolator`:

```

smooth_coeff = 0
rbf_fun = RBFInterpolator(
    list(zip(x_scaled.ravel(), y_scaled.ravel())),
    z_scaled,
    kernel="thin_plate_spline",
    smoothing=smooth_coeff,
)

```

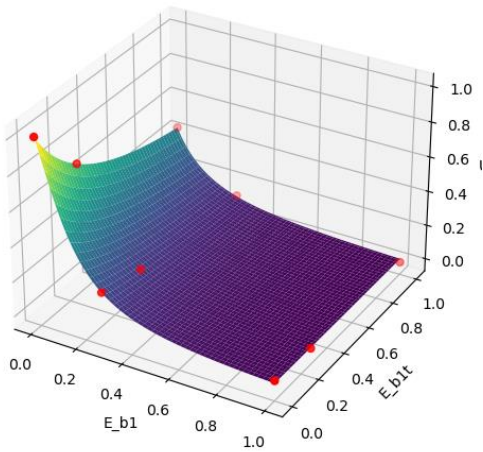
Здесь строится функция `rbf_fun`, которая на вход получает набор данных для аппроксимации. Так же на вход она получает информацию о сглаживании (в данном случае сглаживания нет) и о базисной функции, которая будет использоваться для аппроксимации. В качестве базисной функции выбрана функция `thin_plate_spline`, представляющая собой полигармонический сплайн. Выбор основан из предположения, что вид функции полигармонических сплайнов наилучшим образом подойдет для аппроксимации.

На выходе программы предоставляется объект `rbf_fun`, представляющий собой аппроксимированную функцию, которую можно использовать для вычисления нормированных значений переменных u_{160} , u_{175} и u_{210} , если подавать на ее вход нормированные значения E_{b1} и E_{b1t} . Эти значения можно обратно трансформировать.

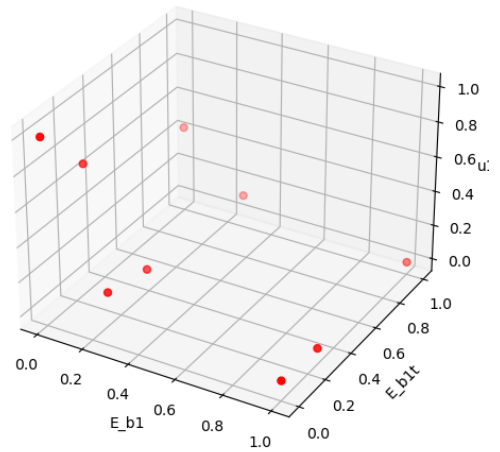
Визуализация аппроксимированных зависимостей методом RBF представлена на рисунке 3.3.

Такие функции строятся для каждого рассматриваемого момента времени с использованием двух имеющихся методов (МНК и RBF) и с использованием трех наборов данных (9, 25 и 36 точек).

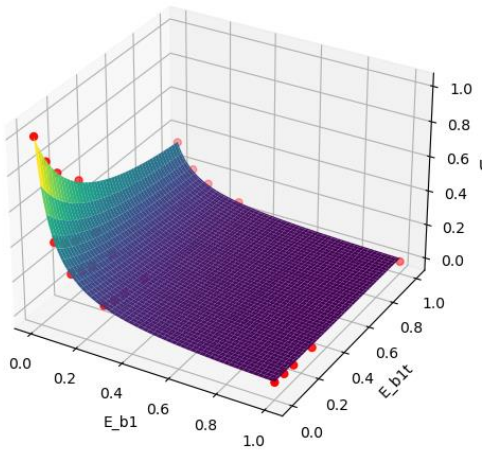
CurveFit, 9points, region: u160, normalized



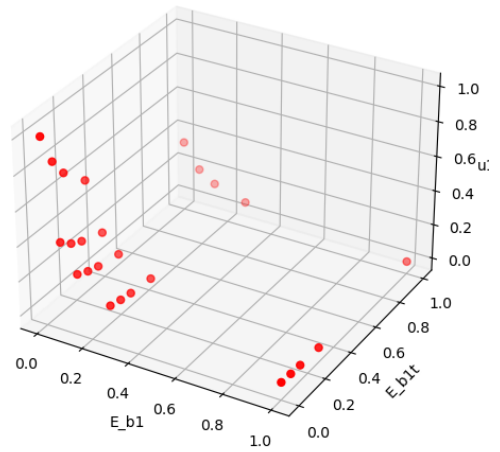
CurveFit, 9points, region: u160, normalized



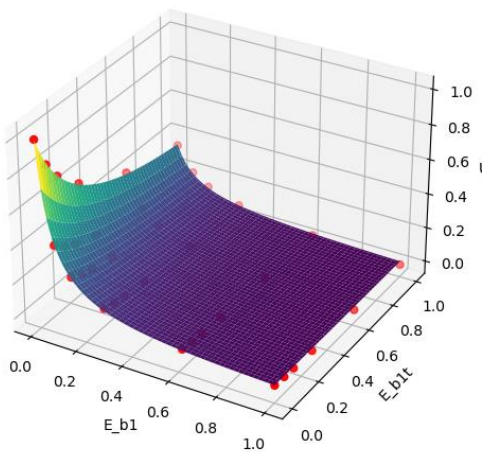
CurveFit, 25points, region: u160, normalized



CurveFit, 25points, region: u160, normalized



CurveFit, 36points, region: u160, normalized



CurveFit, 36points, region: u160, normalized

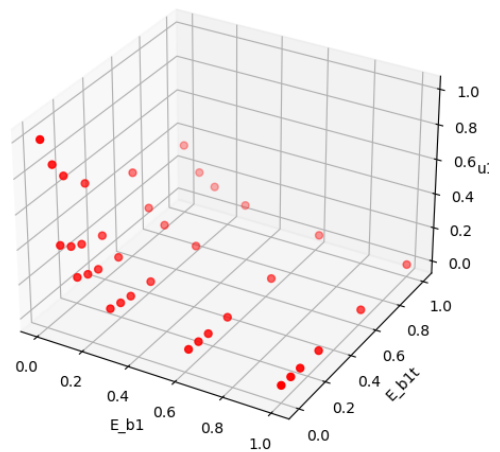
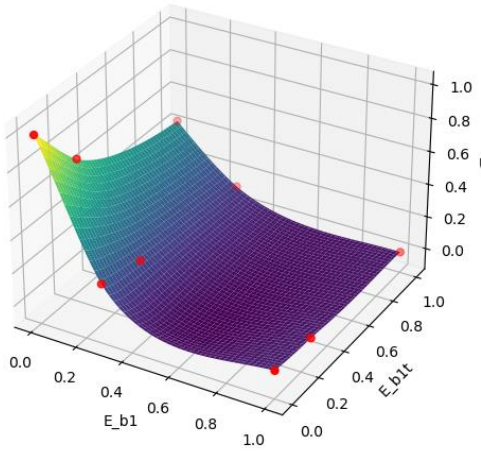
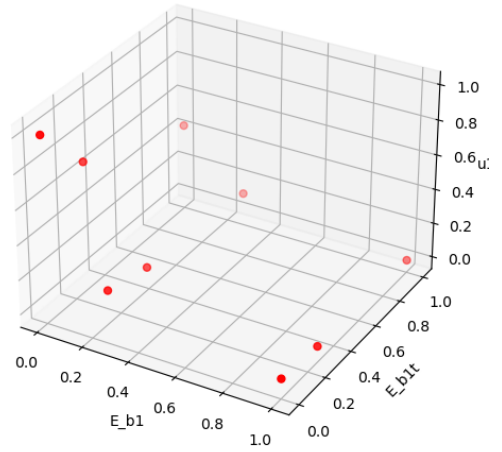


Рис. 3.2. Графики аппроксимированных первым методом (МНК) функций u_{160} при разных наборах данных, значения величин нормированы, лето 2020 год.

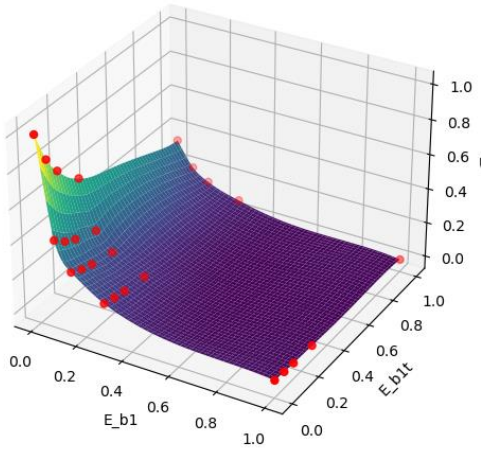
RBF, 9points, region: u160, normalized



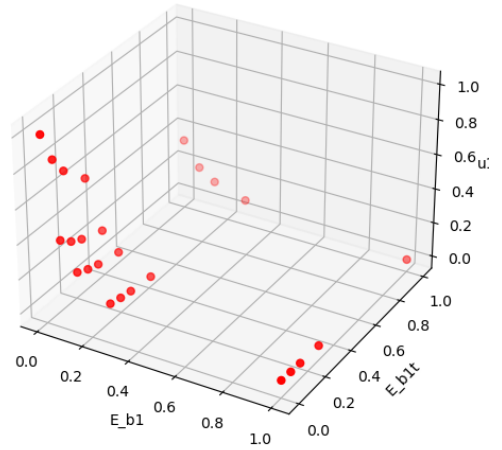
RBF, 9points, region: u160, normalized



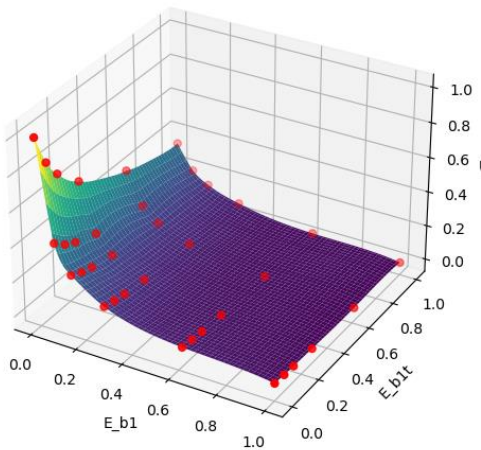
RBF, 25points, region: u160, normalized



RBF, 25points, region: u160, normalized



RBF, 36points, region: u160, normalized



RBF, 36points, region: u160, normalized

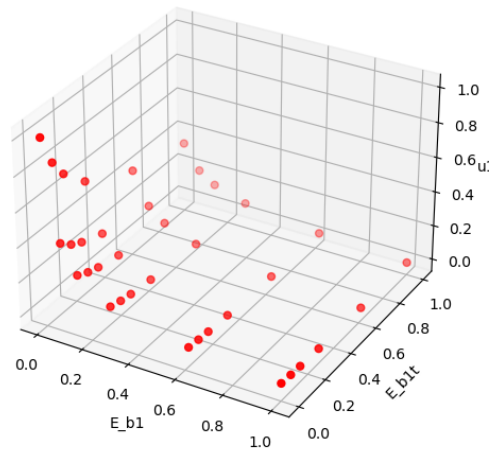


Рис. 3.3. Графики аппроксимированных вторым методом (RBF) функций u_{160} при разных наборах данных, значения величин нормированы, лето 2020 год.

3.3. Решение обратной задачи

Аналогично случаю с варьированием одного параметра (см. главу 2). Пусть известны ранее аппроксимированные функции, описывающие зависимость между горизонтальными смещениями бетонной плотины на разных отметках u_i и входными параметрами E_{b1} и E_{b1t} . Пусть известны данные натуральных наблюдений u_i^{target} для каждого момента времени и для каждой отметки i .

Требуется определить такой набор значений E_{b1} и E_{b1t} , при котором значения $u_i(E_{b1}, E_{b1t})$ и u_i^{target} будут максимально приближены друг к другу.

Построим целевую функцию вида:

$$\varphi_i(E_{b1}, E_{b1t}) = (u_i(E_{b1}, E_{b1t}) - u_i^{target})^2 \quad (3.2)$$

Где $i = 160, 175, 210$ – номер отметки, u_i^{target} – значение натуральных наблюдений в данный момент времени на данной отметке i .

Далее ставится задача оптимизации:

$$\varphi_i(E_{b1}, E_{b1t}) \rightarrow \min \quad (3.3)$$

То есть будет минимизироваться целевая функция (2.7) так, чтобы определить такой набор параметров E_{b1} и E_{b1t} , при котором результаты модели будут максимально совпадать с данными натуральных наблюдений. Полученный набор значений параметров будет считаться оптимальным.

Аналогично описанному в главе 2, задача оптимизации будет также решаться с использованием библиотеки Optuna на языке программирования Python [17]. Часть кода, отвечающая за решение задачи оптимизации:

```
def objective(trial):
    x = trial.suggest_float("x", limits_x[0], limits_x[1])
    y = trial.suggest_float("y", limits_y[0], limits_y[1])
    return abs(fun(convert(x, y)) - target)

study = optuna.create_study(sampler=optuna.samplers.TPESampler())
study.optimize(objective, n_trials=N_TRIALS)
```

Аналогично задача решается для всех рассматриваемых моментов времени и с использованием функций, полученных двумя разными методами аппроксимации, и с использованием трех наборов данных.

Полученные наборы оптимальных значений параметров, для набора данных из 36 точек и с использованием метода наименьших квадратов (МНК) представлены в таблице 3.5. Для метода радиальных базисных функций (RBF) соответственно в таблице 3.6.

Таблица 3.5. Подобранные оптимальные наборы параметров, метод аппроксимации МНК.

Дата	u_{160}		u_{175}		u_{210}	
	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа
08.08.2017	0,3733	1,7512	0,5819	1,0932	0,2411	2,6777
20.02.2018	0,6639	0,9479	0,8202	1,5270	0,5229	2,4934
14.08.2018	0,2262	2,9961	0,4133	2,1072	0,2084	2,7645
12.02.2019	0,4701	1,5166	0,5317	2,0578	0,2208	3,8356
23.07.2019	0,3634	1,5181	0,5603	1,0230	0,4618	0,7068
18.02.2020	0,3259	3,5334	0,7976	1,0196	0,4529	2,0132
11.08.2020	0,2209	2,6948	0,3410	2,4059	0,4830	0,3827
02.03.2021	0,7442	0,1012	0,4078	3,5226	0,4636	1,1872
20.07.2021	0,3084	2,3642	0,5765	1,4167	0,2276	3,5522

Таблица 3.6. Подобранные оптимальные наборы параметров, метод аппроксимации RBF.

Дата	u_{160}		u_{175}		u_{210}	
	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа	E_{b1} , ГПа	E_{b1t} , ГПа
08.08.2017	0,5431	0,4917	0,5501	1,2346	0,2258	3,4892
20.02.2018	0,4660	2,8001	0,6247	3,4471	0,8682	0,6115
14.08.2018	0,4020	1,9581	0,3845	3,2793	0,1692	3,7804
12.02.2019	0,3824	3,0548	0,8852	0,3754	0,2417	3,9223
23.07.2019	0,2482	3,3776	0,7367	0,2900	0,2361	3,1914
18.02.2020	0,8313	0,1848	0,7904	1,0100	0,5931	0,9156
11.08.2020	0,4712	0,4447	0,3089	3,5744	0,1814	3,2528
02.03.2021	0,5183	1,5611	0,6551	1,3843	0,3314	3,1017
20.07.2021	0,4365	1,2771	0,6257	1,0398	0,2561	3,7200

Используя полученные оптимальные значения, указанные в табл. 3.5 и 3.6, сделаем расчеты конечно-элементной модели для каждой из отметок. Графики полученных зависимостей горизонтальных смещений от времени

представлены на рис. 3.4–3.6. На графиках красными точками обозначены моменты времени, в которых определяются оптимальные параметры.

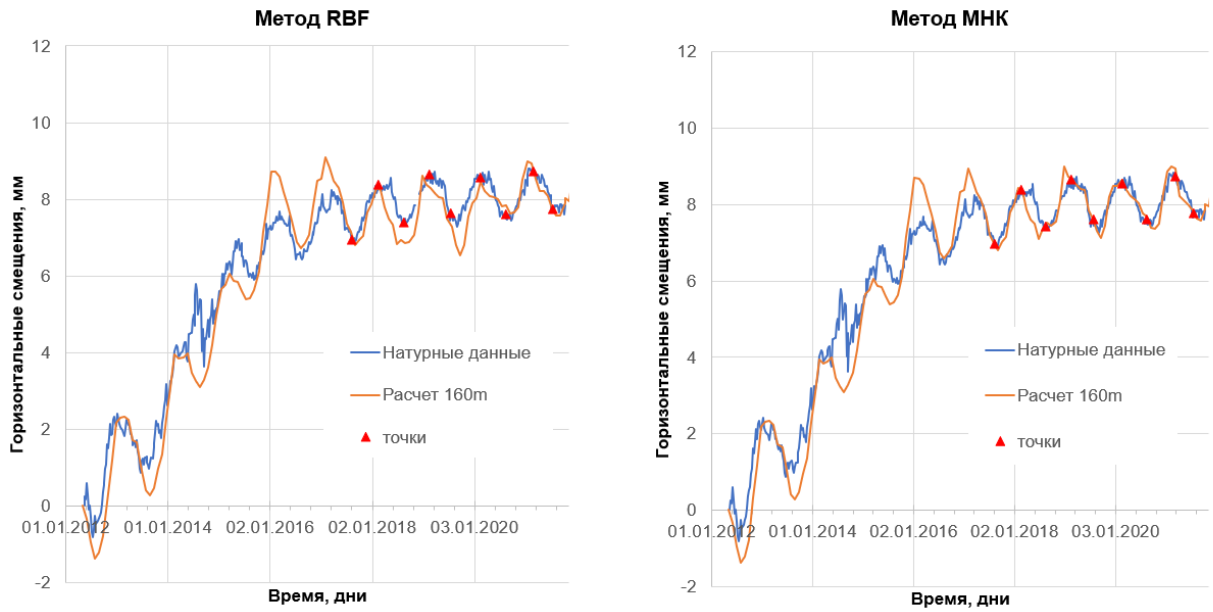


Рис. 3.4. График горизонтальных смещений в зависимости от времени, отметка 160 м.

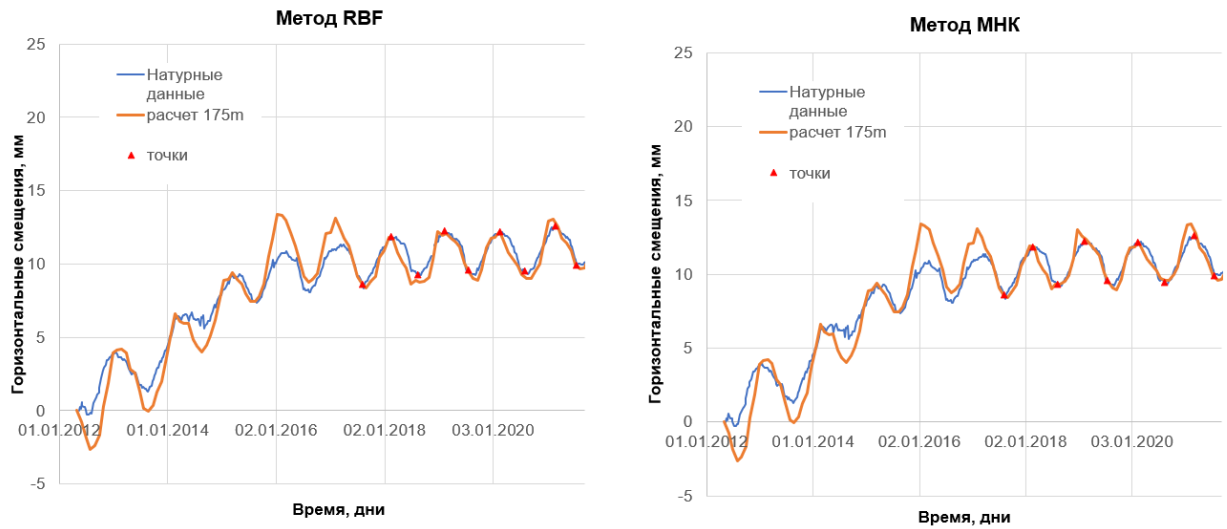


Рис. 3.5. График горизонтальных смещений в зависимости от времени, отметка 175 м.

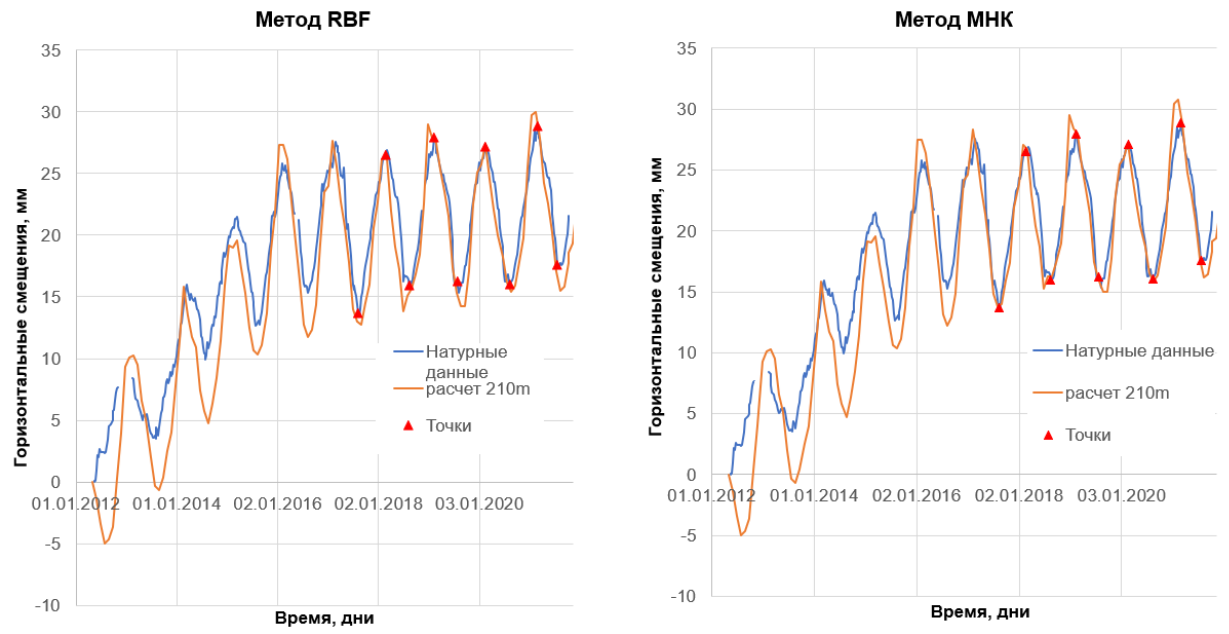


Рис. 3.6. График горизонтальных смещений в зависимости от времени, отметка 210 м.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1. Метрики

Пусть известны определенные с помощью откалиброванной конечно-элементной модели горизонтальные смещения u_i . Известны также данные натуральных наблюдений U_i . Количество рассматриваемых значений смещений обозначено как n . Чтобы оценить результаты проведенных расчетов, определяются нескольких метрик [13]:

1. Средняя абсолютная ошибка MAE (Mean Absolute Error):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_i - U_i| \quad (4.1)$$

2. Средняя абсолютная процентная ошибка MAPE (Mean Absolute Percentage Error):

$$MAPE = 100\% \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|u_i - U_i|}{|U_i|} \quad (4.2)$$

3. Корень из средней квадратичной ошибки RMSE (Root Mean Squared Error):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - U_i)^2} \quad (4.3)$$

4. Коэффициент детерминации R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - U_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{U} - U_i)^2} \quad (4.4)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \quad (4.5)$$

Для каждого из рассмотренных случаев (с варьированием одного, двух параметров и при разных аппроксимированных функциях) будут высчитаны соответствующие метрики (4.1) – (4.4). Метрики приведены в табл. 4.1 – 4.3.

4.2. Оценка результатов калибровки

Рассчитанные метрики (4.1) – (4.4) для каждой из отметок представлены в таблицах 4.1 -4.3.

Таблица 4.1. Вычисленные метрики при рассмотрении отметки 160м.

Метрика	Расчетные случаи (отметка 160 м)			
	Исходные параметры	Варьирование E_{b1}	Варьирование E_{b1} и E_{b1t}	
		МНК	МНК	RBF
MAE	0,42 мм	0,36 мм	0,07 мм	0,18 мм
MAPE	5,27%	4,46%	0,88%	2,20%
RMSE	0,47 мм	0,40 мм	0,09 мм	0,21 мм
R^2	0,37	0,54	0,98	0,87

Таблица 4.2. Вычисленные метрики при рассмотрении отметки 175м.

Метрика	Расчетные случаи (отметка 175 м)			
	Исходные параметры	Варьирование E_{b1}	Варьирование E_{b1} и E_{b1t}	
		МНК	МНК	RBF
MAE	0,83 мм	0,56 мм	0,07 мм	0,16 мм
MAPE	8,45%	5,30%	0,68%	1,66%
RMSE	0,92 мм	0,62 мм	0,09 мм	0,22 мм
R^2	0,61	0,82	0,99	0,98

Таблица 4.3. Вычисленные метрики при рассмотрении отметки 210м.

Метрика	Расчетные случаи (отметка 210 м)			
	Исходные параметры	Варьирование E_{b1}	Варьирование E_{b1} и E_{b1t}	
		МНК	МНК	RBF
MAE	1,36 мм	1,09 мм	0,18 мм	0,56 мм
MAPE	7,39%	4,69%	0,96%	2,93%
RMSE	1,54 мм	1,28 мм	0,19 мм	0,61 мм
R^2	0,93	0,95	0,998	0,99

Стоит уточнить, что метрики, указанные для варьирования двух параметров E_{b1} и E_{b1t} в таблицах 4.1–4.3, рассчитаны для набора данных в 36 точек. Из результатов аппроксимации (см. рис. 3.2–3.3) можно сказать, что набор из 25 точек будет давать в случае МНК практически такую же аппроксимированную функцию. В случае RBF – немного ухудшится точность из-за неровностей, но результат будет также приближен к указанному в табл. 4.1–4.3. Набор из 9 точек заведомо будет давать результаты с наименьшей точностью из-за нехватки точек для корректной аппроксимации функции. В этом случае следует либо брать наборы данных с большим количеством точек, либо проводить дополнительную задачу оптимизации, где стоит учесть значение неточности непосредственно при построении целевой функции. Это скорее всего не даст отличные результаты, как например с большим количеством точек, однако это поможет их улучшить относительно того, что было изначально.

Оценка расчетных случаев будет опираться на рассмотрение метрик R^2 и MAPE, т. к. они наиболее наглядные. Чем ближе к 1 значение R^2 , тем лучше полученный результат. Процентная абсолютная ошибка MAPE наглядно показывает, насколько результаты отличаются от натуральных данных [13].

Из таблиц метрик 4.1–4.3 можно сделать следующие выводы.

Наилучший результат дает случай с варьированием двух параметров при аппроксимации методом наименьших квадратов (МНК) с коэффициентом детерминации 0.99. Здесь стоит помнить, что был заранее задан вид функции.

Если вид функции неизвестен или не очевиден, то можно использовать метод радиальных базисных функций (RBF) для аппроксимации зависимости между величинами. Он не требует задавать явно вид функции, однако из-за использования полигармонических сплайнов на поверхности функции возникают «неровности» (см. рис. 3.3), что уменьшает результирующую точность калибровки (особенно это заметно на рис. 3.4.). Несмотря на это, метод дает достаточно хорошие результаты, приближенные к случаю с МНК.

При рассмотрении случая с варьированием только одного из параметров, был выбран параметр, наиболее влияющий на горизонтальные смещения. Поэтому этот случай дал приемлемые результаты, однако не для всех отметок (например, в табл. 4.1 для отметки 160м коэффициент детерминации для случая варьирования одного параметра равен 0,54, что мало по сравнению с результатами 0,98 и 0,99 из таблиц 4.2 и 4.3). В целом калибровка с варьированием одного параметра оказалась хуже по точности, чем случай с варьированием двух параметров. Но при этом данный случай оказался наиболее эффективным по времени. Для него не потребовалось много данных, и относительно других случаев его реализация заняла наименьшее количество временных ресурсов.

Еще одно преимущество случая с варьированием одного параметра заключается в том, что задача для этого случая поставлена корректно. То есть на выходе получается один набор оптимальных параметров, что нельзя сказать в случае, где варьируется два параметра. Некорректность задачи не должна мешать получить откалиброванную модель, дающую нужные значения перемещений, ибо в задаче стоит цель найти не фактические, а конструктивные модули упругости. Однако некорректность задачи (отсутствие единственности результата) мешает предсказывать будущие значения параметров, т. к. не удастся выявить явную зависимость параметров от времени. О возможных путях решения данной проблемы будет сказано в следующем разделе.

Еще стоит отметить, что результаты были получены для каждой отметки отдельно. То есть одновременно на всех отметках результаты, как в таблицах 4.1–4.3, не достигаются.

В целом подводя итоги, калибровка модели во всех рассмотренных случаях дала улучшение результатов относительно исходных.

4.3. Улучшение и дальнейшее использование полученных результатов

Результаты задачи калибровки модели (идентификации параметров модели) можно использовать в качестве данных для последующего прогноза будущих значений параметров. Например, если рассмотреть случай с варьированием одного параметра E_{b1} и построить зависимость оптимальных значений параметра от времени, то получим график, представленный на рис. 4.1.

Используя данные значения на графике, можно попытаться экстраполировать значения для летнего (верхние точки) и зимнего (нижние точки) сезонов. Можно также рассмотреть больше моментов времени, чтобы получить больше точек. Однако вопрос решения такой задачи требует отдельного рассмотрения.

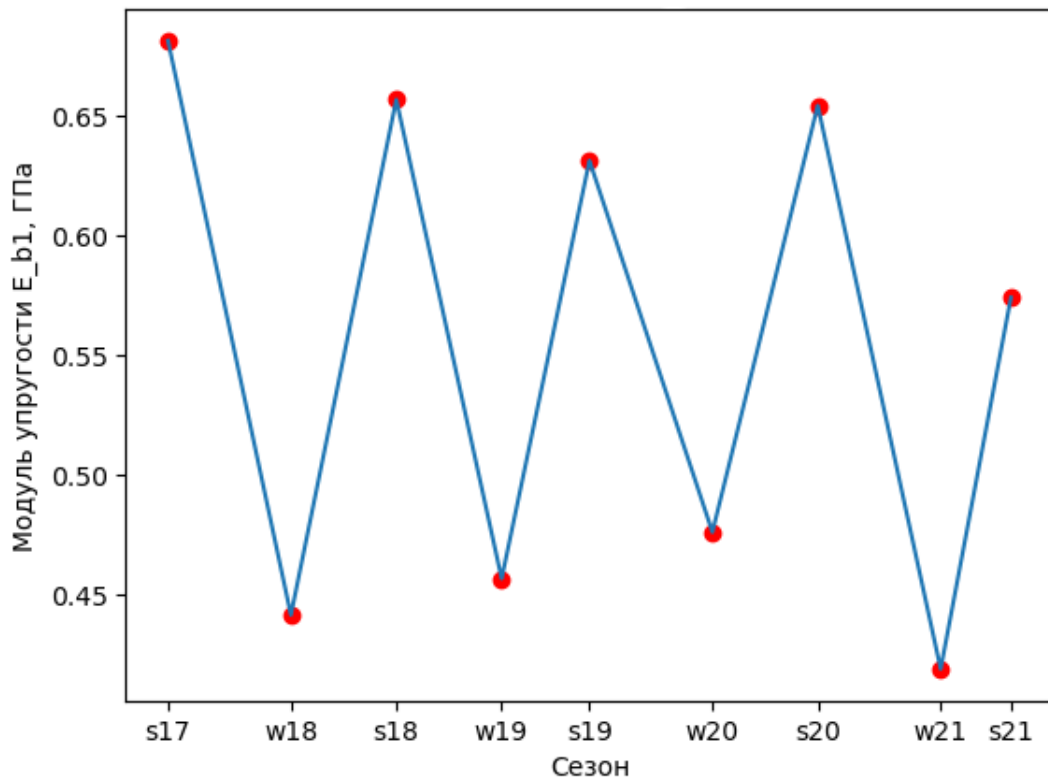


Рис. 4.1. График зависимости модуля упругости E_{b1} от рассматриваемого сезона для отметки 160м, в соответствии с табл. 2.2 (обозначения: s17 – лето 2017 года, w18 – зима 2018 года и т. д.)

Возможные пути улучшения результатов задачи калибровки:

1. Можно рассмотреть целевую функцию, включающую себя информацию о нескольких отметках ($i = 160, 175, 210$):

$$\varphi(x) = \sum_i (u_i(x) - u_i^{target})^2 \quad (4.6)$$

Это может позволить достигнуть ситуации, когда на всех отметках одновременно достигаются значения, близкие к натурным. Однако есть вероятность, что такой набор параметров не найдется при случае варьирования одного или двух параметров (или найдется, но результаты не будут удовлетворительными, или он будет приближен только к одной из отметок). В этом случае вероятно потребуются привлечь большее количество варьируемых параметров (например, добавить один из модулей упругости бетонов плотины из табл. 1.1.);

2. Можно последовательно сделать две задачи калибровки при случае варьирования одного параметра. Сначала варьировать один параметр, откалибровать модель. Потом провести варьирование второго параметра, используя ранее откалиброванную модель, и уточнить результаты за счет второй калибровки;
3. Можно рассмотреть продвинутые методы подбора сетки для аппроксимации методом RBF, используя теорию планирования эксперимента. Особенно, если будет рассматриваться варьирование более двух параметров;
4. Рассмотреть другие методы аппроксимации для случая варьирования двух параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы были выполнены задачи:

1. Построена конечно-элементная модель в ABAQUS, подготовленная для процесса калибровки модели;
2. Выбраны два случая варьирования параметров, определены их границы, количество параметров для двух случаев (варьирование одного и двух параметров);
3. Рассмотрены наборы данных:
 - 1) Для случая варьирования одного параметра был определен 1 набор данных, состоящий из 5 точек на 1 момент времени (всего 9 моментов времени);
 - 2) Для случая варьирования двух параметров было собрано 3 набора данных, состоящих из 9, 25 и 36 точек на один момент времени (всего 9 моментов времени);
4. Создана программа, реализующая методы аппроксимации для обоих случаев. Для второго случая были рассмотрены методы наименьших квадратов (МНК) и радиальных базисных функций (RBF). Для первого случая рассмотрен только МНК. Сделаны выводы о применимости и эффективности данных методов аппроксимации в соответствующих случаях;
5. Создана программа, реализующая решение обратной задачи (задачи оптимизации). Для обоих случаев определены оптимальные наборы параметров на каждый рассматриваемый момент времени. Проведен расчет КЭМ и выведены графики результатов;
6. Рассчитаны метрики MAE, MAPE, RSME, R^2 для оценки результатов решения задачи калибровки. Сделаны выводы о точности результатов для каждого случая;
7. Предложены пути улучшения и дальнейшего использования результатов задачи калибровки модели.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург С.М., Шейнкер Н.Я., Юделевич А.М. Вероятностный подход к оценке работы бетонной плотины по данным контроля за перемещениями. Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, СПб.: Изд-во ОАО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 1980, Т. 237 – с. 102-105.
2. Гинзбург С.М., Шейнкер Н.Я., Юделевич А.М. Оценка состояния бетонной гравитационной плотины с учетом данных натуральных наблюдений. Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, СПб.: Изд-во ОАО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 1980, Т. 239 – с. 50-56.
3. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. — М.: Наука, 1987. — 207 с.
4. Ивашинцов Д.А., Соколов А.С., Шульман С.Г., Юделевич А.М. Параметрическая идентификация расчетных моделей гидротехнических сооружений. СПб.: Изд-во ОАО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2001. — 432 с.
5. Макаричев Ю.А., Иванников Ю.Н. Методы планирования эксперимента и обработки данных: Учебное пособие — Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. — 131 с.
6. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебное пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 211 с.
7. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2018. — 495 с.
8. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 336 с.

9. Шашков В.Б. Прикладной регрессионный анализ. Многофакторная регрессия: Учебное пособие / В.Б. Шашков. – Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2003, — 362 с.
10. Astrom K.J., Bohlin T., Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. — Proc. IFAC Symp. Self-Adaptive System, 1965. — pp. 96—111.
11. Box G.E.P., Jenkins G.M., Time Series Analysis, Forecasting and Control. — Oakland, CA:Holden-Day, 1970 – pp. 553.
12. Ho B.L., Kalman R.E., Effective construction of linear state-variable models from input-output functions. — Regelungstechnik, vol.12, 1965. — pp. 545—548.
13. Cournapeau, D., Scikit-learn User Guide: Metrics and scoring: quantifying the quality of predictions. Regression metrics. – 2011. – URL: https://scikit-learn.org/stable/modules/model_evaluation.html#regression-metrics (дата обращения: 24.05.2023)
14. Dassault Systemes, Simulia Abaqus Scripting User’s Guide – 2016. – URL: <http://62.108.178.35:2080/v2016/books/ker/default.htm?startat=pyi03.html> (дата обращения: 24.05.2023)
15. Dassault Systemes, Simulia Abaqus/CAE User's Guide – 2016. – URL: <http://62.108.178.35:2080/v2016/books/usi/default.htm> (дата обращения: 24.05.2023)
16. Hunter J., Dale D., Firing E., Droettboom M., Matplotlib User Guide – 2002. – URL: <https://matplotlib.org/stable/users/index> (дата обращения: 24.05.2023)
17. Optuna, Key features, Tutorial, Efficient Optimization Algorithms – 2018. – URL: https://optuna.readthedocs.io/en/stable/tutorial/10_key_features/003_efficient_optimization_algorithms.html (дата обращения: 24.05.2023)
18. SciPy User Guide, Interpolation (scipy.interpolate). – 2023. – URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/interpolate.html> (дата обращения: 24.05.2023)