МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф.
_____ А. М. Кривцов
« » _____ 2017 г.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени

МАГИСТРА

Тема: Разработка электро-механических моделей углеродных нановискеров как детекторов масс

Направление: 01.04.03 - Механика и математическое моделирование

Выполнила: студентка гр. 63604/1 _____ В. В. Ванюшкина

Руководитель: к.ф.-м.н., доцент _____ Л. В. Штукин

Санкт-Петербург
2017

Содержание

1 Введение **3**

2 Задача о вискере колеблющемся на игле. **5**
2.1 Результаты эксперимента. 5
2.2 Собственные частоты и формы консольной балки. 6
2.3 Задача о собственных частотах и формах колебаний системы игла-вискер. . . . 7
2.4 Операторная запись уравнений. 9
2.5 Приближённое решение задачи о системе игла-вискер. 9
2.6 Тестовая задача. 13
2.7 Результат. 13

3 Двойной вискер. **15**
3.1 Различия в АЧХ одиночного и двойных вискеров. 15
3.2 Дифференциальный резонатор. 16
3.3 Вывод уравнений колебаний дифференциального резонатора. 17
3.4 Раскачка колебаний двойного вискера. 19
3.5 Выбор момента прекращения возбуждения. 23
3.6 Нахождение огибающей биений. 26
3.7 Двойной вискер как детектор массы. 27

4 Емкостной датчик колебаний вискера. **30**
4.1 Описание модели. 30
4.2 Уравнения колебаний исследуемой НЭМС. 30
4.3 Параметры системы 32
4.4 Результат численного эксперимента. 32
4.5 Уравнения колебаний НЭМС с двойным вискером. 33
4.6 Результаты численного эксперимента для двойного вискера. 34
4.7 Емкостной датчик с характеристикой, близкой к линейной. 37
4.8 Результаты численного эксперимента для линейного датчика. 38

5 Выводы **39**

Литература **41**

1 Введение

Одним из самых популярных технических направлений науки на протяжении длительного периода времени является создание, исследование и применение наноструктур и наноматериалов. Наноструктуры - объекты, созданные человеком и имеющие малые размеры (от нескольких нанометров до сотен микрометров). Эта область науки открывает много новых и интересных возможностей для экспериментов и теоретических расчётов. Наноструктуры могут быть очень полезны для медицины, механики, инженерии и биологии: могут быть использованы для разрезания клеток, взвешивания объектов на нано- и микро- уровнях, а так же для построения более сложных структур. Возможности использования таких изобретений неограничены.

Последние годы это направление исследований получило резкий толчок в развитии, так как появились технологии, позволяющие создавать наноконструкции нужной формы и размеров даже на таком уровне. Общие принципы, методы, возможности создания различных наноструктур подробно описаны в работе [1].

Современные методы позволяют использовать различные материалы на наноуровне. Например в статье [2] показано создание кремниевых резонаторов. Большую популярность имеет графит и графен. Так же возможно использование многих других разнообразных веществ.

Одной из технологий для создания наноструктур является напыление аморфного углерода на металлическую иглу. Такая технология, а так же некоторые возможности использования получившихся конструкций описаны в работах [3] и [4]. Установка для создания вискера приведена на (Рис.1) (изображение из работы [4]).

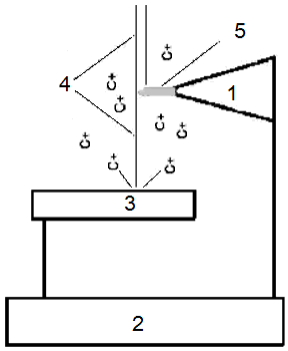

Рис. 1: Создание одиночного вискера

При таком опыте максимальное ускоряющее напряжение составляет 30 кВ, диаметр сфокусированного электронного пучка 2 нм. Игла, на которой будет нарощен вискер размещается на столике (2). Ниже иглы располагается мишень (3), представляющая собой металлическую поверхность с углеродным покрытием. Электронный пучок (4) фокусируется на вершине иглы, и осуществляется сканирование по области с небольшой площадью. При этом производится экспонирование как участка иглы (1), так и участка расположенной ниже мишени (3). В зоне экспонирования на поверхности иглы происходит зарождение нановискера (5). Задавая направление и скорость перемещения пучка электронов относительно неподвижной иглы а также площадь экспонирования, ускоряющее напряжение и ток пучка, можно управлять ростом нановискера. Такая технология выращивания нановискеров позволяет создавать наноконструкции самых различных форм (Рис.2).

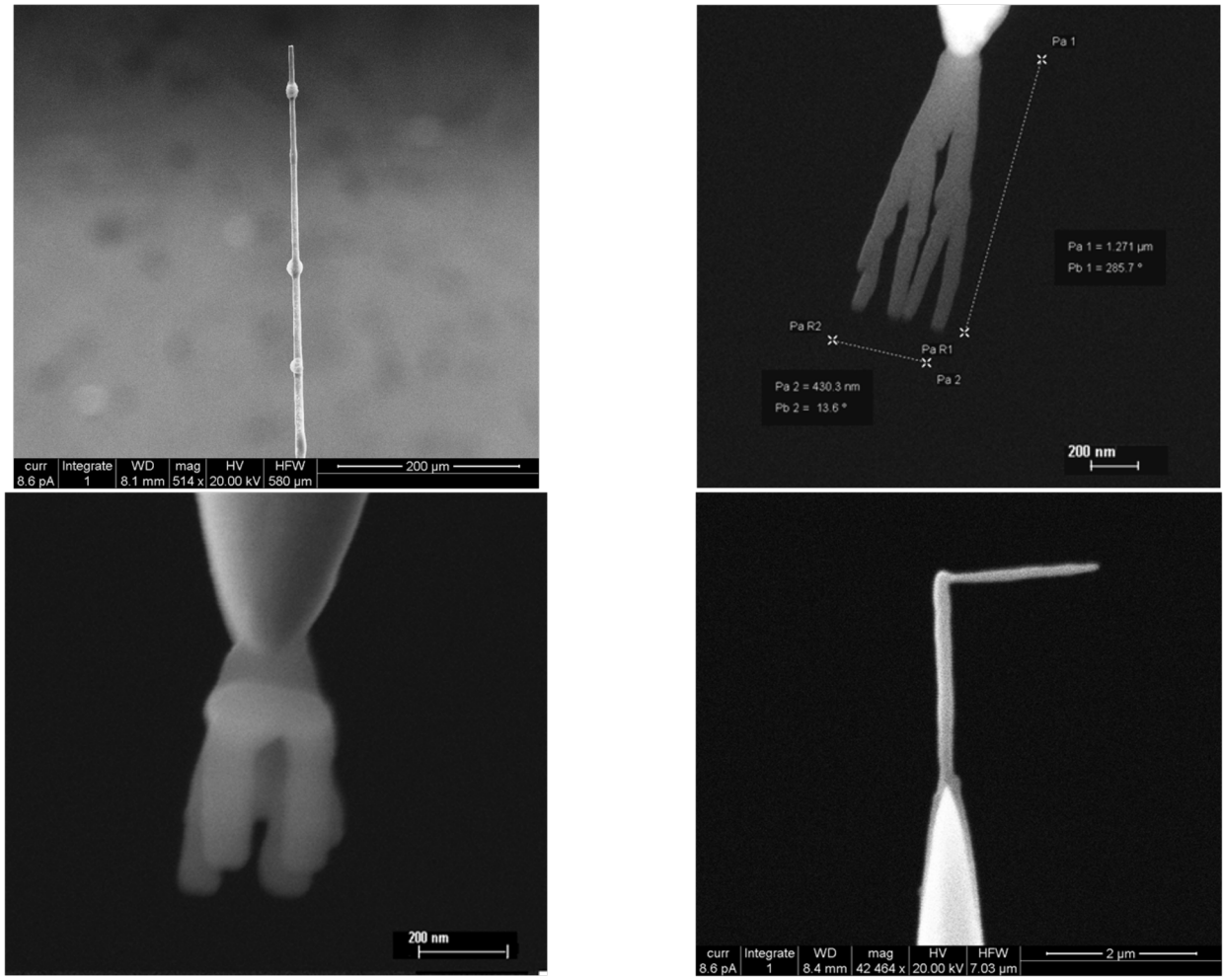

Рис. 2: Различные углеродные структуры

Целью данной работы является подробное исследование двух углеродных наноструктур (Рис.3).

Одна из них это прямолинейный одиночный вискер. Длина такого вискера порядка нескольких микрометров, а максимальная толщина всего лишь несколько десятков нанометров. Вискер выращен на вершине металлической иглы и закреплен на ней. Вторая исследуемая конструкция, это система из двух вискеров, связанных между собой упругой перемычкой. Перемычка так же создана из углерода путём напыления.

Задачи данной работы заключаются в исследовании и описании одного из экспериментов с одиночным вискером на игле с помощью применения приближённого метода решения; описание модели и изучение дифференциального резонатора из нановискеров для возможного применения его в качестве детектора масс; изучения одного из способов точного измерения колебаний нановискера и дифференциального резонатора с помощью различных емкостных датчиков.

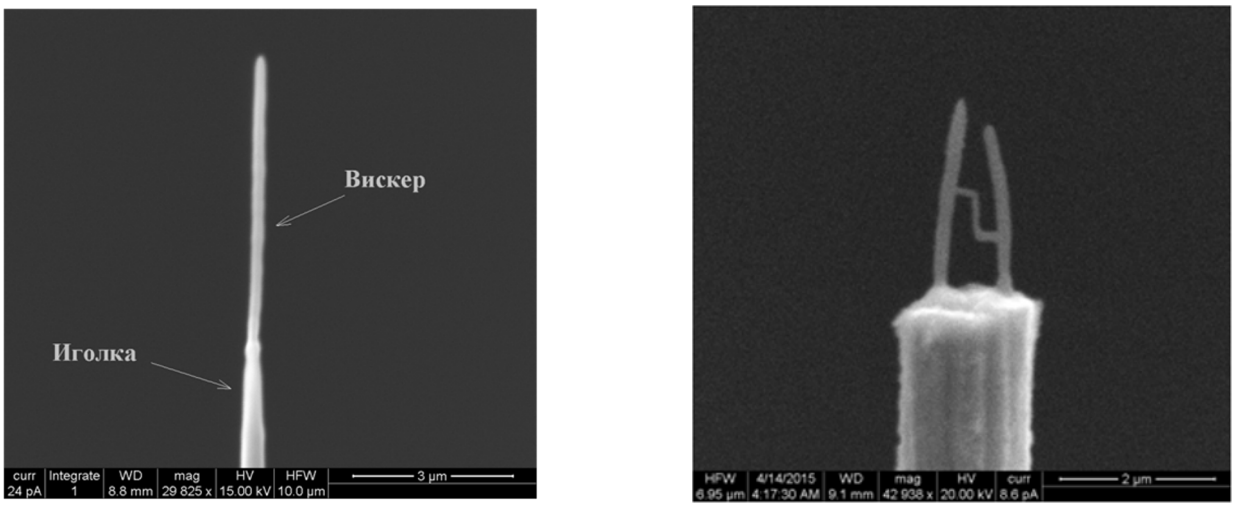

Рис. 3: Исследуемые углеродные структуры

2 Задача о вискере колеблющемся на игле.

2.1 Результаты эксперимента.

Первая исследуемая конструкция представляет из себя одиночный прямой вискер, колеблющийся на игле. В ходе одного из экспериментов над такой системой было обнаружено, что существует две близкие собственные частоты этой системы с похожими формами колебаний (Рис.4).

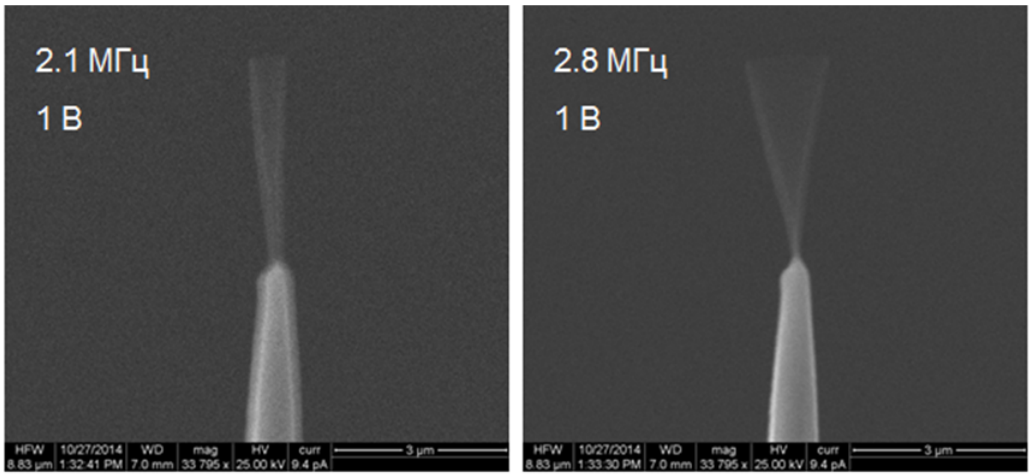

Рис. 4: Эксперимент с одиночным вискером на игле

Обе эти формы не имеют узлов на вискере и похожи на колебания одиночного вискера с первой собственной частотой.

Объяснение этого явления заключается в том, что нельзя рассматривать вискер, как консольную балку на неподвижном основании, необходимо учитывать колебания иглы, хотя она много превышает размерами вискер. Более того, можно предположить, что игла колеблется со своей высокой частотой, соответствующей одной из многоузловых форм колебаний, а вискер с первой частотой имеет первую форму колебаний, как видно на фотографии.

2.2 Собственные частоты и формы консольной балки.

На первом этапе исследования было получено решение задачи об одиночной балке Бернулли-Эйлера, имеющей жёсткую заделку с одной стороны и свободный конец с другой. Решение данной задачи известно. Уравнение колебаний данной системы задается уравнением (1), где

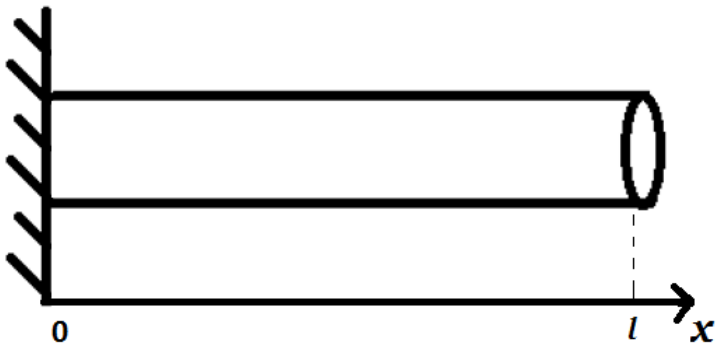

Рис. 5: Одиночная балка с заделкой

x-координата, такая что она равно нулю в заделке и $x = l = max(x)$ - на правом конце балки, ρ-плотность материала балки, F-Площадь поперечного сечения балки, $w(x,t)$-прогиб балки, который зависит от времени и координаты, E-модуль Юнга, J-момент инерции сечения, t-время.

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \tag{1}$$

Решение данного уравнения производится с помощью подстановки (2), где λ-собственные частоты колебаний,а α-фаза колебаний. Обоснование данного метода решения содержится в книге [5]. В результате такой подстановки получается уравнение для нахождения собственных частот (3).

$$w(x,t) = X(x)T(t) = X(x)sin(\lambda t + \alpha) \tag{2}$$

$$1 + cos(al)ch(al) = 0, a = \frac{F\rho\lambda^2}{EJ} \tag{3}$$

Сами же формы колебаний (прогиб w) легко найти через функции Крылова (4)

$$\begin{array}{l} K_1 = \frac{(\cosh x + \cos x)}{2} \\ K_2 = \frac{(\sinh x + \sin x)}{2} \\ K_3 = \frac{(\cosh x - \cos x)}{2} \\ K_4 = \frac{(\sinh x - \sin x)}{2} \end{array} \tag{4}$$

А остальные характеристики системы, такие как θ-угол поворота, M-изгибный момент, Q-перерезывающая сила связаны с прогибом w соотношениями (5). Здесь $'$ обозначает производную по координате x. Данная система приведена в работе [6]. Первые два уравнения выведены из соотношений равновесия системы, а третье и четвёртое из соотношений упругости материала.

$$
\begin{aligned}
&-Q' - \lambda^2 \rho F w = 0 \\
&Q - M' = 0 \\
&w' + \theta = 0 \\
&\theta' = \tfrac{M}{EJ}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

В результате полное решение системы, имеет следующий вид (6). То есть все характеристики (прогиб, угол поворота, момент и сила) зависят от координаты через функции Крылова.

$$
\begin{aligned}
&w = -\tfrac{K_2(al)}{K_1(al)} K_3(ax) + K_4(ax) \\
&\theta = a\tfrac{K_2(al)}{K_1(al)} K_2(ax) - aK_3(ax) \\
&M = EJ(a^2 \tfrac{K_2(al)}{K_1(al)} K_1(ax) - a^2 K_2(ax)) \\
&Q = EJ(a^3 \tfrac{K_2(al)}{K_1(al)} K_4(ax) - a^3 K_1(ax))
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Таким образом найдено точное решение задачи об одиночной балке с заделкой на одном из концов. В дальнейшем эти результаты будут использованы для нахождения частот и форм колебаний системы вискер-игла.

2.3 Задача о собственных частотах и формах колебаний системы игла-вискер.

В качестве модели исследуемой системы возьмём две балки Бернулли-Эйлера, соединённые друг с другом (Рис. 6). Игла обозначается большей балкой, вискер меньшей. Большая балка имеет заделку с левого конца и жёстко прикрепленный вискер с правого. Меньшая балка с левого конца прикреплена к большей, а правый её конец свободен.

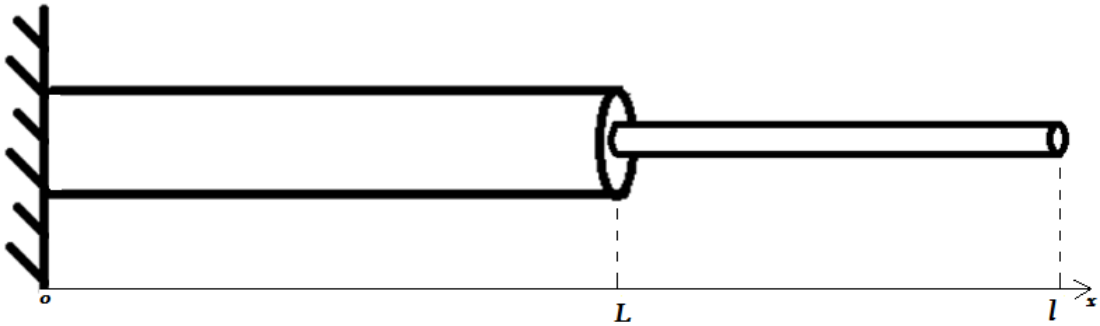

Рис. 6: Модель системы игла-вискер

Может быть получено точное решение системы вискер-игла, путём составления системы уравнений, основанной на точном решении задачи об одиночной балке. В дальнейшем нижним индексом (1) будем обозначать переменные, описывающие иглу, а нижним индексом (2) - переменные, относящиеся с вискеру.

Составим систему уравнений, описывающую колебания такой конструкции. Получится система из двух уравнений колебаний балок Бернулли-Эйлера.

$$
\begin{aligned}
\rho_{(1)} F_{(1)} \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial t^2} &= -E_{(1)} J_{(1)} \frac{\partial^4 w_{(1)}}{\partial x^4} \\
\rho_{(2)} F_{(2)} \frac{\partial^2 w_{(2)}}{\partial t^2} &= -E_{(2)} J_{(2)} \frac{\partial^4 w_{(2)}}{\partial x^4}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Каждое из этих уравнений можно решить отдельно и получить решения в таком же виде, как и в предыдущей задаче.

При такой постановке задачи необходимо 8 граничных условий. Четыре из них это условия сопряжения, с помощью которых достигается равенство прогибов, углов поворота, сил и моментов в месте соединения двух балок, то есть на длине L (8).

$$\begin{aligned} &w_{(1)}(L) = w_{(2)}(L) \\ &\theta_{(1)}(L) = \theta_{(2)}(L) \\ &M_{(1)}(L) = M_{(2)}(L) \\ &Q_{(1)}(L) = Q_{(2)}(L) \end{aligned} \tag{8}$$

Следующие два граничных условия ставятся в заделке, то есть на левом конце большей балки. Крепление типа "заделка"характеризуется тем, что в ней отсутствует прогиб и угол поворота (9).

$$\begin{aligned} &w_{(1)}(0) = 0 \\ &\theta_{(1)}(0) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Последние два условия - это условия свободного края вискера. Они означают, что на правом конце системы отсутствует внешнее воздействие в виде сил и моментов (10).

$$\begin{aligned} &Q_{(2)}(L+l) = 0 \\ &M_{(2)}(L+l) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Решение поставленной задачи можно представить в виде функций Крылова, так же, как в задаче об одиночной консольной балке. Например для прогибов будет выполняться (11), где a-соответствующее волновое число, L-длина иглы, l-длина вискера.

$$\begin{aligned} &w_{(1)}(x) = A_1(-\tfrac{K_2(a_{(1)}L)}{K_1(a_{(1)}L)}K_3(a_{(1)}x) + K_4(a_{(1)}x)) \\ &w_{(2)}(x) = A_2(-\tfrac{K_2(a_{(2)}(l+L))}{K_1(a_{(2)}(l+L))}K_3(a_{(2)}(x-L)) + K_4(a_{(2)}(x-L))) + A_3 w_{(1)}(L) + A_4\tfrac{\partial w_{(1)}(x)}{\partial x}(L) \end{aligned} \tag{11}$$

Для иглы прогиб вычисляется по формуле полученной для обычной балки с заделкой, так как вискер слишком мал и не влияет на собственный прогиб иглы, однако, для вискера необходимо учитывать не только его собственный прогиб, но и прогиб иглы. Поэтому выражение для $w_{(2)}(x)$ состоит из 3 слагаемых. Первое (с коэффициентом A_2)- собственный прогиб вискера. Второе (с коэффициентом A_3) - прогиб иглы, он передаётся вискеру.И третье (с коэффициентом A_4)-угол поворота иглы на её конце, который тоже необходимо учесть при расчёте конечного прогиба 2-й балки. Сами же коэффициенты A_1,A_2,A_3,A_4 - должны быть найдены из условий сопряжения (8), где θ, M, Q вычисляются с помощью соотношений (5).

Таким образом, получается система сложных трансцендентных уравнений, которая не имеет аналитического решения, а численное решение требует большой точности введённых данных и компьютерной мощности, а так же трудоемкое в проверке. Более того, для решения такой системы требуется находить большее количество собственных частот, чем нужно. Такой метод не учитывает особенностей системы, состоящей в том, что две балки имеют принципиально различные парциальные низшие собственные частоты. Однако, рассмотрение данного способа решения необходимо для общего понимания проблемы, поставленной изначально и возможных способов её решения. Получившаяся система так же может послужить аппаратом проверки приближённых решений и увеличения их точности.

2.4 Операторная запись уравнений.

Для построения приближённого решения задачи о двух балках используется метод, предложенный В.М.Фридманом в работе [6], заключающемся в использовании спектральных свойств отдельных элементов системы. В соответствии с работой [6] уравнения движения системы балок могут быть для удобства записаны в операторном виде. Для этого вводятся новые векторные переменные ξ и η (12). Они определены через уже известные параметры, такие как прогиб балки, угол поворота, сила и момент.

$$\xi = \begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix} \tag{12}$$

Так же вводятся D и D^* - дифференциальные операторы вида (13), а R и B - алгебраические операторы инерции и упругости (14).

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 1 & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \qquad D^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$R = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{14}$$

Здесь $\rho = \rho_\nu F$-интенсивность массы, распределённой вдоль оси стержня (погонная масса), ρ_ν-удельная масса(масса единицы объёма), $j = \rho_\nu J_p$-распределённый момент инерции стержня, $b = \frac{1}{EF}$-распределённая податливость или упругость стержня при растяжении, $\beta = \frac{1}{GJ_p}$-упругость стержня при кручении, G, J_p-модуль сдвига и экваториальный момент поперечного сечения.

Важно заметить, что для D и D^* верно соотношение (15), оно позволяет связать эти два дифференциальных оператора.

$$\int_0^l D\xi\eta\,dx + \xi\eta\Big|_{x=0}^{x=l} = \int_0^l \xi D^*\eta\,dx \tag{15}$$

2.5 Приближённое решение задачи о системе игла-вискер.

Метод Галёркина(метод Бубнова-Галёркина)— метод приближённого решения краевой задачи для дифференциального уравнения $L[\psi(x)] = 0$ [7]. В данной задаче предложенный подход был использован для нахождения приближённых значений собственных частот системы типа игла-вискер. В качестве базиса, по которому будут разложены функции колебаний, взяты собственные формы, силы, углы поворота и моменты колебаний.

В работе В.М. Фридмана [6] предложен метод решения подобных задач, который включает в себя комбинацию метода Галёркина (разложение по собственным формам) с операторным подходом самого В.М. Фридмана. Согласно такому способу решения, решение для каждой из балок можно представить в виде двух векторов ξ и η (см. (12)), каждый из которых, в свою очередь, состоит из двух слагаемых (16).

$$\xi = \widetilde{\xi} + \bar{\xi} \qquad \eta = \widetilde{\eta} + \bar{\eta} \tag{16}$$

Первые слагаемые $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$ - решения,которые удовлетворяют условиям, соответствующим колебаниям одиночной консольной балки с заделкой на одном краю и свободной с другого,но

без учёта соединения игла-вискер. Такое решение,можно точно выразить через собственные формы колебаний балки $\widetilde{\xi}_i$, $\widetilde{\eta}_i$ и коэффициенты разложения α_i и β_i (17), где i - номер собственной формы.

$$\widetilde{\xi} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \widetilde{\xi}_i \qquad \widetilde{\eta} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \widetilde{\eta}_i \tag{17}$$

Приведённая сумма является выражением для точного решения одиночной балки. При использовании метода Бубнова-Галёркина, считается, что приближённое решение нужно считать, учитывая лишь некоторое количество слагаемых - n. Тогда n будет показателем точности.

Второе слагаемое в формуле (16) добавка, которая удовлетворяет условиям сопряжения. Возьмём её в виде (18).

$$\bar{\eta} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{\xi} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Здесь a_1 ,a_2 ,b_1 ,b_2 - неизвестные постоянные коэффициенты. Их четыре, что соответствует четырём граничным условиям (2 в заделке, 2 на свободном правом конце).

Как сказано выше, для получения приближённого решения задачи, необходимо взять конечное число слагаемых в разложении (17). При этом, количество слагаемых будет собственным у каждой из балок.

С учётом всех преобразований и замен уравнения колебаний балок примут вид (19). Это два векторных уравнения с матричными дифференциальными операторами.

$$\begin{aligned} D\xi - \lambda^2 R\eta = 0 \\ D^*\eta - B\xi = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Известно, что все собственные формы колебаний балки Бернулли-Эйлера ортогональны друг другу. Это означает, что при скалярном умножении форм друг на друга выполняется следующее соотношение (20).

$$(\widetilde{\eta}_i; \widetilde{\eta}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad (\widetilde{\xi}_i; \widetilde{\xi}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{20}$$

Используя условия (20) и уравнения (19) получим выражения для коэффициентов а $\alpha_{k(1)}$, $\beta_{k(1)}$,а $\alpha_{k(2)}$, $\beta_{k(2)}$. Для этого необходимо каждое из уравнений (19) скалярно умножить на одну из собственных форм (21).

$$\begin{aligned} (D\xi - \lambda^2_{(1)} R_{(1)}\eta; \widetilde{\eta}_{k(1)}) = 0 \\ (D\xi - \lambda^2_{(2)} R_{(2)}\eta; \widetilde{\eta}_{k(2)}) = 0 \\ (D^*\eta - B_{(1)}\xi; \widetilde{\xi}_{k(1)}) = 0 \\ (D^*\eta - B_{(2)}\xi; \widetilde{\xi}_{k(2)}) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Выражения (21) преобразуются с использованием условий ортогональности собственных форм (20), разложения решения на две составляющие (16) и свойство операторов D и D^*, которое переводит их друг в друга (15), а так же граничных условий (Рис.7).

В заделке иглы $\eta = 0$, так как прогиб и угол поворота там отсутствуют по определению. Момент и сила ξ в заделке есть, причем они состоят из двух слагаемых - решение для иглы без вискера плюс отклонение из-за наличия присоединенной балки. На конце иглы отсутствуют

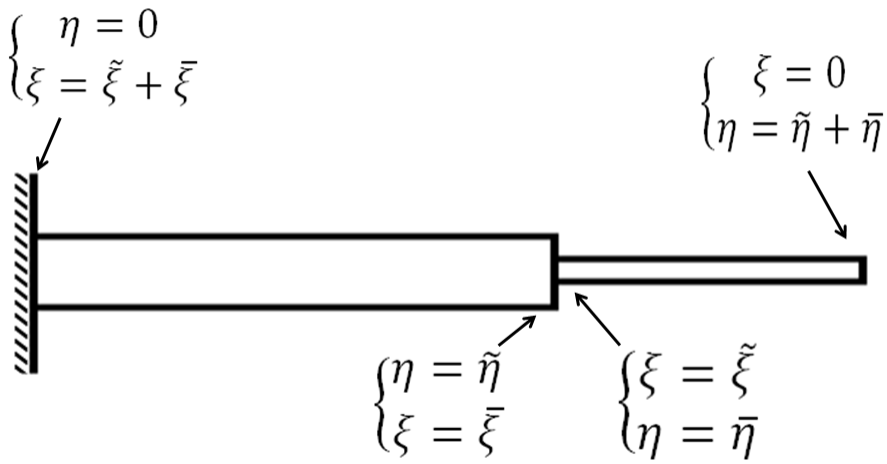

Рис. 7: Постановка граничных условий для задачи о системе игла-вискер

собственные силы и моменты, но есть добавка от вискера. На прогиб иглы вискер не влияет, соответственно, на свободном конце остается такой прогиб, какой бы был при отсутствие добавки. Для вискера на свободном конце $\xi = 0$, так как сил и моментов там нет, а прогиб состоит из двух частей: собственный прогиб вискера плюс поправка на то, что он присоединен к подвижной игле. В месте соединения двух балок у вискера есть только собственные силы и моменты, а прогиб и угол поворота возникают только из-за наличия иглы.

В результате описанных математических преобразований, из выражений (21) получаются выражения, из которых можно найти коэффициенты разложения по собственным формам $\alpha_{k(1)}$, $\beta_{k(1)}$,а $\alpha_{k(2)}$, $\beta_{k(2)}$.

$$\begin{gathered}
\lambda^2_{k(1)}\beta_{k(1)} - \int\limits_0^{l_1} B\overline{\xi}_{(1)}\widetilde{\xi}_{k(1)}\,dx - \alpha_{k(1)} = 0 \\
-\lambda^2\beta_{k(1)} - \int\limits_0^{l_1} B\overline{\xi}_{(1)}\widetilde{\xi}_{k(1)}\,dx + \alpha_{k(1)} - \overline{xi}_{(1)}\widetilde{\eta}_k(1)\Big|_{x=l_1} = 0 \\
-\lambda^2\beta_{k(2)} - \lambda^2\int\limits_0^{l_2} R\overline{\eta}_{(2)}\widetilde{\eta}_{k(2)}\,dx + \alpha_{k(2)} = 0 \\
\lambda^2_{k(2)}\beta_{k(2)} - \lambda^2_{k(2)}\int\limits_0^{l_2} B\overline{\eta}_{(2)}\widetilde{\eta}_{k(2)}\,dx - \alpha_{k(2)} - \overline{\eta}_{(2)}\widetilde{\xi}_k(2)\Big|_{x=0} = 0
\end{gathered} \tag{22}$$

Более того, соотношения (22) представляют собой связь между коэффициентами разложений решения по собственным формам и неизвестными коэффициентами решения $\overline{\eta}, \overline{\xi}$.Теперь $\alpha_{k(1)}$, $\beta_{k(1)}$, $\alpha_{k(2)}$, $\beta_{k(2)}$ выражаются через неизвестные коэффициенты a_1 ,a_2 ,b_1 ,b_2. Это означает, что полное решение поставленной задачи зависит только от четырёх неизвестных. Размерность задачи при такой подстановке всегда остаётся одинаковой и не зависит от точности, с которой будет найдено решение и от количества искомых собственных частот и форм.

Для нахождения четырёх неизвестных коэффициентов, от которых зависит решение задачи, необходимо 4 условия. Это условия сопряжения в месте соединения двух балок (8). В результате подстановки всех известных величин в условия получается система следующего вида (23).

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \beta_{k(1)} \widetilde{w}_{k(1)} \Big|_{l_1} &= b_1 + b_2 x \\
\sum_{k=1}^{n} \beta_{k(1)} \widetilde{\theta}_{k(1)} \Big|_{l_1} &= -b_2 \\
a_2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k(2)} \widetilde{M}_{k(2)} \Big|_{0} & \\
a_1 + a_2 x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k(2)} \widetilde{Q}_{k(2)} \Big|_{0} &
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Так как $\overline{\eta}, \overline{\xi}$ выражаются через неизвестные коэффициенты a_1 ,a_2 ,b_1 ,b_2 , то из уравнений (22) легко выражаются $\alpha_{k(2)}$ и $\beta_{k(1)}$ через a_1 ,a_2 ,b_1 ,b_2, которые необходимо подставить в(23).Откуда ,в конечном итоге, получается система из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными относительно a_1 ,a_2 ,b_1 ,b_2. Так же в этой системе остаётся неизвестный параметр λ - искомая частота полной системы игла-вискер.$\lambda_{k(1,2)}$- известная собственная частота иглы или вискера.

Далее составляется матрица этой системы уравнений относительно a_1 ,a_2 ,b_1 ,b_2, и определитель такой матрицы равен нулю, так как решение системы единственно. Тогда из уравнения $Det(A) = 0$ легко найти значение частоты колебаний сложной системы игла-вискер. Матрица A определена в формулах (24), (25).

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}
\tag{24}
$$

$$
\begin{gathered}
A_{11} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{k(1)}^2 - \lambda^2} w_{k(1)}^2(l_1); \\
A_{12} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{k(1)}^2 - \lambda^2} ((w_{k(1)}(l_1))l_1 + \theta_{k(1)}(l_1)) w_{k(1)}(l_1); \\
A_{13} = -1; A_{14} = 0; \\
A_{21} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{k(1)}^2 - \lambda^2} w_{k(1)}(l_1) \theta_{k(1)}(l_1); \\
A_{22} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{k(1)}^2 - \lambda^2} ((w_{k(1)}(l_1))l_1 + \theta_{k(1)}(l_1)) \theta_{k(1)}(l_1); \\
A_{23} = 0; A_{24} = 1; \\
A_{31} = 0; A_{32} = 1; \\
A_{33} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda^2}{\lambda_{k(2)}^2 - \lambda^2} Q_{k(2)}(0) M_{k(2)}(0); \\
A_{34} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda_{k(2)}^2 - \lambda^2} M_{k(2)}^2(0); \\
A_{41} = 1; A_{42} = l_1; \\
A_{43} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda^2}{\lambda_{k(2)}^2 - \lambda^2} Q_{k(2)}^2(0); \\
A_{44} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda^2}{\lambda_{k(2)}^2 - \lambda^2} Q_{k(2)}(0) M_{k(2)}(0);
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Выражение $Det(A) = 0$ при преобразовании приводится к виду уравнения относительно λ - частоты колебаний всей системы целиком. Вид уравнения зависит от количества слагаемых в разложении для $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$. Число корней такого уравнения так же зависит от количества членов разложения, то есть от числа учтенных собственных частот и форм системы. Полученное уравнение можно решить с помощью программно-прикладных пакетов (MatLab, Wolfram Mathematica) и получить таким образом полный набор собственных частот системы игла-вискер.

2.6 Тестовая задача.

Для проверки полученного решения была взята тестовая задача, которая состояла в том, чтобы исследовать один и тот же объект с помощью разных подходов. В качестве объекта была взята одиночная балка Бернулли-Эйлера с заделкой с одной стороны (Рис.8). Первый способ точного нахождения собственных частот колебаний такой балки известен и описан в пункте 2.2. Второй способ - метод Галёркина с использованием операторного подхода.

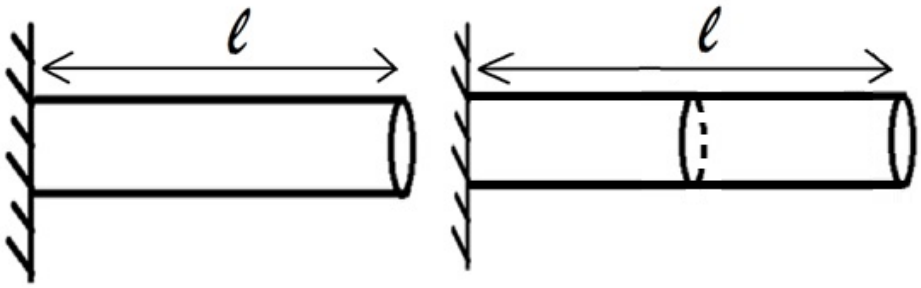

Рис. 8: Постановка задачи для проверки решения

С помощью точного решения задачи об одиночной балки с заделкой с некоторыми относительными параметрами($E = 1, \rho = 1, F = 1, J = 1$) была получена первая собственная частота её колебаний $\lambda = 1.875104$. Далее эта же задача была представлена в виде, в котором возможно применение формул, полученных выше. То есть балка была разбита на 2 половины, каждая из которых имела одинаковые параметры ($E = 1, \rho = 1, F = 1, J = 1$), но длина каждой из них была равна половине длины исходной балки. Тогда собственная частота каждой из половин $\lambda_{(1,2)} = 3.750208$. После по методу Галёркина были проделаны все преобразования, изложенные выше и найдена собственная частота колебаний двух балок половинной длины, соединённых вместе. В результате получилось, что она равна $\lambda = 1.875143$. Данный простой численный эксперимент подтверждает правильность приведённых выше формул.

2.7 Результат.

Так как данное решение удовлетворяет проверке, его можно использовать для объяснения эксперимента, описанного в пункте 2.1 этой работы. Для этого необходимо взять параметры, равные относительным параметры вискера и иглы. Далее найти собственные частоты колебаний вискера и собственные частоты колебаний иглы.

Как было предположено ранее, ситуация, описанная в эксперименте возможна, когда игла колеблется с многоузловой формой, то есть при высокой частоте, а вискер, как видно на (Рис.4) принимает свою первую форму колебаний. Первый шаг решения, это нахождение собственных частот колебаний каждого из элементов отдельно, для это необходимо решить два волновых уравнения

$$\begin{aligned} 1 + cos(a_{(1)}L)ch(a_{(1)}L) = 0 \quad a_{(1)} = \frac{F_{(1)}\rho_{(1)}\lambda^2_{(1)}}{E_{(1)}J_{(1)}} \\ 1 + cos(a_{(2)}l)ch(a_{(2)}l) = 0 \quad a_{(2)} = \frac{F_{(2)}\rho_{(2)}\lambda^2_{(2)}}{E_{(2)}J_{(2)}} \end{aligned} \tag{26}$$

При решении данных волновых уравнений получается,что $\lambda_{1(2)} = 0.9336$МГц, близка по значению к $\lambda_{8(1)} = 0.9447$МГц, то есть первая частота вискера примерно равна 8-й частоте иглы. Тогда в системе уравнений (23) в уравнениях 3 и 4 необходимо учитывать 8 слагаемых, соответствующих 8 первым собственным формам колебаний иглы. В результате, при решении уравнения $Det(A) = 0$, получаются λ - собственные частоты системы. При выполнении всех приведённых выше условий получается, что все значения λ имеют "парное"значение, то есть получаются пары близких собственных частот системы. Самая высокая пара частот, получившаяся при введённых данных получилась равной 0.8470МГц и 0.9209МГц. Обе эти частоты близки друг к другу и к выбранным собственным частотам балок.

Исследуем получившуюся форму колебаний системы вискер-игла при этих частотах (Рис.9). Колебания на этих графиках имеют разные масштабы, так как вискер в сотни раз меньше иглы и в одинаковом масштабе его не было бы видно на форме иглы. Так же увеличен масштаб амплитуды колебаний иглы для наглядности её высокой формы колебаний.

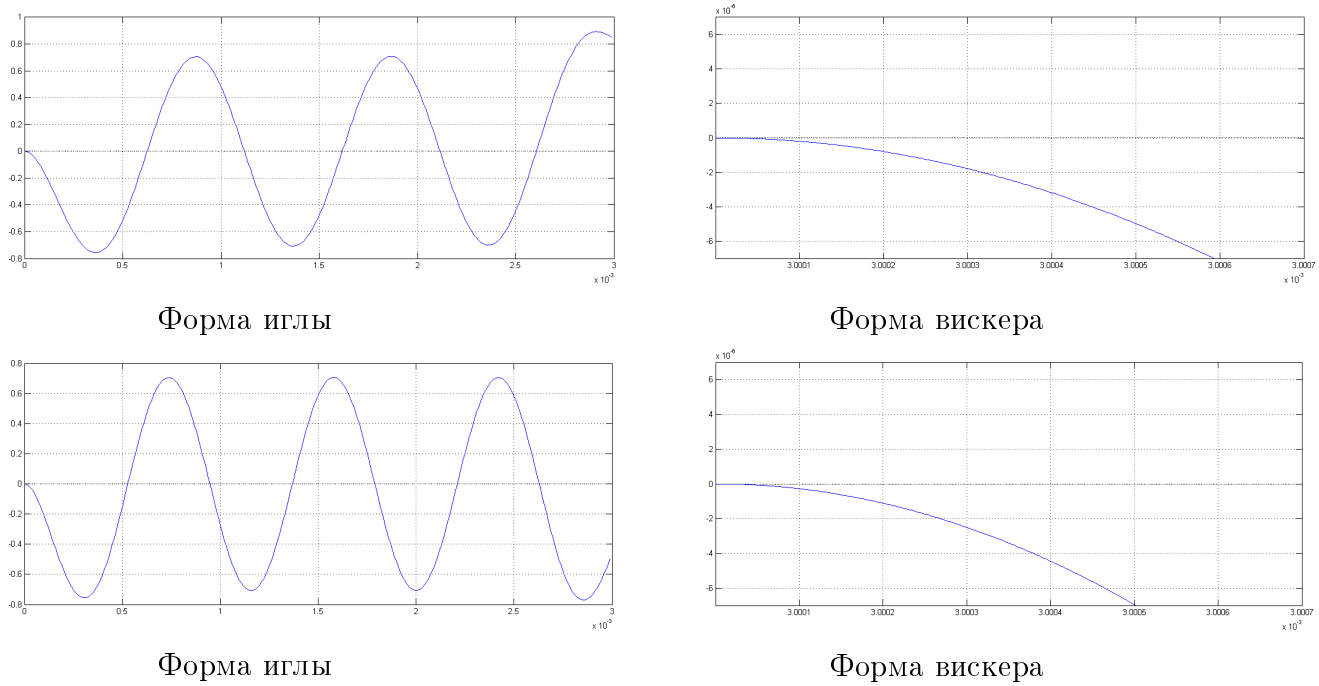

Рис. 9: Формы колебаний системы вискер-игла

Как и было предсказано, вискер колеблется с первой формой, а игла с высокой. Последнее сечение иглы при одной из частот направлено по колебаниям вискера, а при другой против колебаний вискера.

Таким образом, полученная методика позволяет описывать колебания системы игла-вискер и находить собственные частоты колебаний. Данный метод может быть использован в дальнейшем для описания других экспериментов, связанных с колебаниями одиночного вискера, закреплённого на игле.

3 Двойной вискер.

3.1 Различия в АЧХ одиночного и двойных вискеров.

Самый распространённый метод исследования различных колебательных систем это получение АЧХ этих систем.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) - зависимость амплитуды выходного сигнала от частоты входного гармонического сигнала. Данная характеристика показывает, как зависит амплитуда полученных колебаний от частоты внешнего воздействия.

Существует два способа получения АЧХ. Первый-проведения большого количества экспериментов с разной частотой внешнего воздействия. В ходе каждого эксперимента необходимо передать системе внешнее гармоническое воздействие, дождаться перехода в установившийся режим и померить амплитуду. Данный метод неточен из-за сильной зависимости от выбора внешних частот, если брать их с большим шагом, то есть возможность "проскочить"пик АЧХ и померить неточный её максимум. При малом шаге время проведения эксперимента может стать неоправданно большим.

Второй способ это передача системе сканирующего сигнала вида $f(t) = f_0 cos(\omega_0 t + 0.5\epsilon t^2)$. Здесь ϵ - скорость изменения частоты, а ω_0-частота внешнего воздействия, с которой начинается исследование. Второй способ занимает меньшее время, однако может привести к смещению резонансного пика при большой скорости сканирования.

Применение одиночного вискера затрудняет измерение резонансной частоты при не очень большой добротности системы, когда полученная точность измерения расположения максимума на резонансной кривой по порядку совпадает с изменением этой частоты при измерении малых масс.

Для системы одиночного вискера на неподвижной игле АЧХ будет иметь такой вид (Рис.10). При изменении характеристик системы пик максимума смещается вправо или влево. Например, при попадании дополнительной взвешиваемой массы на конец вискера, пик графика сместится. Но это смещение будет незначительным по сравнению с масштабом амплитуды колебаний (Рис.11).

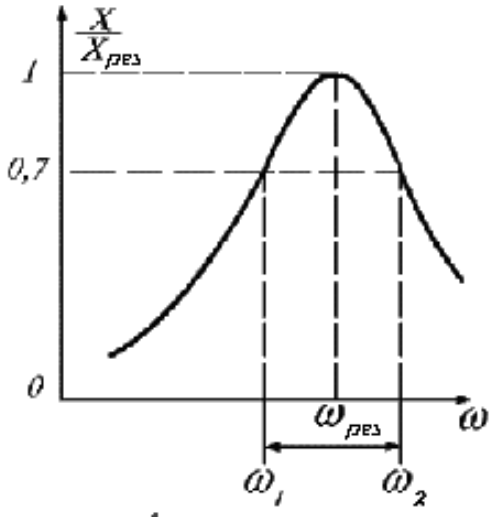

Рис. 10: АЧХ системы с одной степенью свободы

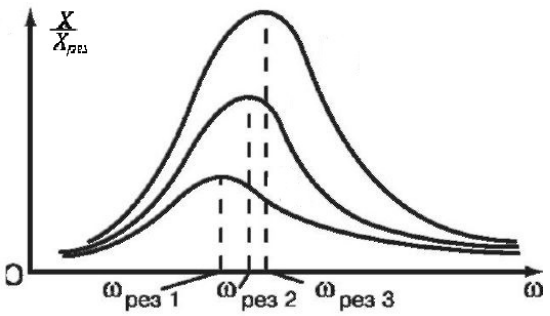

Рис. 11: Смещение пика АЧХ

Предлагается усовершенствовать резонатор, использую двойной вискер. Для такого случая апмлитудно-частотная характеристика буде выглядеть следующим образом (Рис.12). На данном графике присутствуют два пика, а расстояние между ними характеризует параметры системы. То есть, если на один из вискеров попала масса, то расстояние между максимумами увеличится.

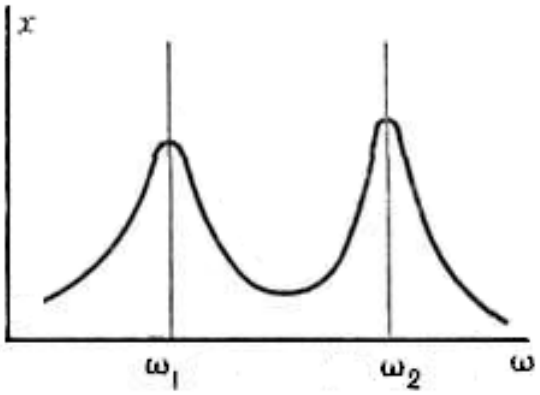

Рис. 12: АЧХ системы с двумя степенями свободы

В обоих случаях померить смещение пиков довольно сложно. Оно может быть малым по сравнению с амплитудой и не быть заметным из-за этого в масштабе АЧХ. Так же оба способа построения АЧХ довольно трудоемкие и требуют большого количества экспериментов. Например, для первого способа, если на вискер попадает масса, то необходимо большое количество раз с малым шагом менять частоту внешнего воздействия, с каждой новой частотой раскачивать систему и ждать, пока режим установится, затем мерить амплитуду.

Непосредственное использование резонансной кривой двойного вискера ничем не отличается от того же способа для одиночного вискера. Поэтому требуется реализация другого метода определения изменения массы вискеров.

3.2 Дифференциальный резонатор.

Под дифференциальным резонатором из углеродных вискеров понимается система, состоящая из двух параллельно расположенных вискеров, соединённых между собой упругой перемычкой и закреплённых на жёстком основании(Рис.13).

Свободные колебания системы с двумя степенями свободы и близкими собственными частотами имеют вид биений. Период огибающей сильно зависит даже от малых изменений

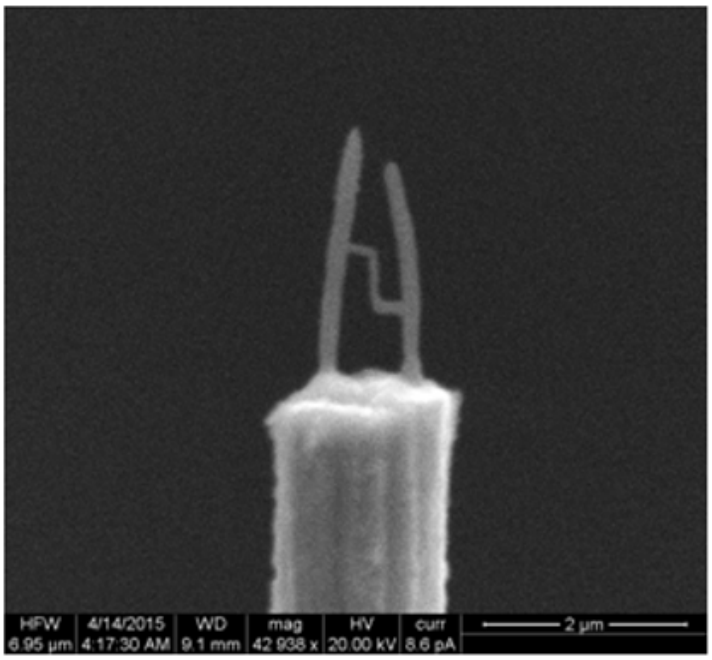

Рис. 13: Двойной вискер

упругих и инерционных свойств системы, что может позволить повысить точность измерения малых добавленных масс.

Подобная задача рассмотрена в статьях [9],[10] и [11] однако в этих работах исследованы графеновые слои, связь между которыми осуществляется с помощью электромагнитного поля. Такая модель весов имеет существенные недостатки, которых нет в этой работе. Например, использование электромагнитного поля сильно усложняет описание связи между слоями графена, а именно то, что в графене происходит потеря электрической энергии из-за свойств материала, так называемая "джоулевая"диссипация. Это обусловлено возникновением вихревых токов в графене при воздействие на него электрическим полем. Так же механика гибких пластин много сложнее механики балок, что делает решение поставленной задачи о дифференциальном резонаторе из графеновых пластин более трудоемким, чем решение задачи о вискерах.

В статьях [8], [11] подробно описаны колебания одиночного (состоящего из одной пластины) и дифференциального (из двух пластин) резонаторов на основе графена. Указаны преимущества и недостатки каждого из них и описаны методы получения уравнений колебаний и их исследования. Основным преимуществом двойного резонатора является форма, которую принимают его колебания - биения. Биение, в отличие от обычных гармонических колебаний имеет дополнительное, легко измеряемое свойство - частота или период огибающей. То есть, если обычные колебания характеризуются одной частотой, то биения - двумя.

Из всего вышесказанного вытекает вопрос. Возможно ли создание подобной системы на основе вискеров, а не графена, можно ли найти применение такой системе и какое.

3.3 Вывод уравнений колебаний дифференциального резонатора.

В качестве модели, для исследования такого резонатора были взяты две балки Бернулли-Эйлера, с заделкой на нижнем конце и свободные с верхнего (Рис.14). При этом упругая перемычка моделируется, как пружина, соединяющая два вискера.

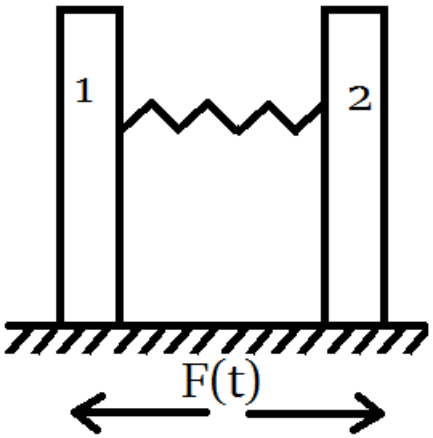

Рис. 14: Модель двойного вискера

Для того, чтобы написать уравнения колебаний описанной выше системы, изначально рассматривается один из вискеров (Рис.15). Похожая задача была рассмотрена в первой части данной работы, отличие состоит в наличии связи между двумя вискерами, которую в модели можно рассматривать, как точечную силу.

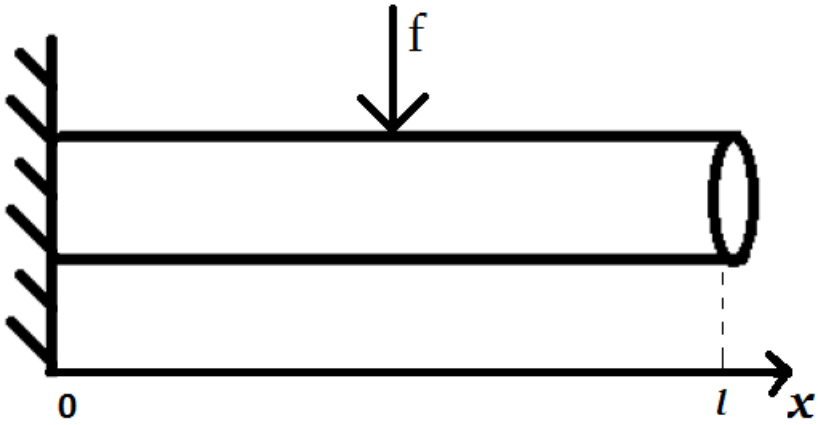

Рис. 15: Модель одного из вискеров в дифференциальном резонаторе

Уравнения колебаний для такой модели известны, следовательно можно написать систему из двух уравнений, каждое из которых будет описывать колебания своего вискера. Для этого необходимо понять, что представляет из себя точечная сила. В условиях эксперимента считается, что жесткость пружины, связующей вискеры много меньше изгибной жесткости самих вискеров. То есть можно обозначить за c-жесткость вискера, тогда жесткость пружины будет равна ϵc, где ϵ-малый параметр. А силу можно записать, как $f_1 = \epsilon c(w_2 - w_1)$, $f_2 = \epsilon c(w_1 - w_2)$, где w_1, w_2 - прогибы балок.

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} &= f_1(t) \\ \rho F \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} &= f_2(t) \end{aligned} \tag{27}$$

Прогибы балок в системе уравнений (27) можно разложить в ряд по собственным формам по координате x_k, а так же, как и в первой главе представить прогиб в виде произведения

двух функций $T(t)$ и $X(x) = \sum_k x_{(k)}$, каждая из которых зависит только от своей переменной(времени или координаты). Тогда получим выражения для прогибов (28).

$$\begin{aligned} w_1 = T_1(t) \sum_k x_{1(k)}(x) = T_1(t) x_{1(1)}(x) \\ w_1 = T_2(t) \sum_k x_{2(k)}(x) = T_2(t) x_{2(1)}(x) \end{aligned} \tag{28}$$

В этом представлении для прогибов из всех слагаемых в разложении по собственным формам оставлены только первые, так как в поставленной задаче рассматриваются колебания вблизи резонанса, значит остальными формами можно пренебречь.

Далее, происходит подстановка выражений для прогибов и для сил в уравнения (27). После чего, каждое из уравнений умножается на первую собственную форму разложения по координате и интегрируется по координате, в результате чего получаются уравнения, соответствующие колебаниям обычной линейной системы с двумя степенями свободы (29).

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 = c\varepsilon(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2 = c\varepsilon(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{29}$$

Такая система уравнений описывает так же колебания системы, состоящей из двух шариков одинаковой массы, трёх пружин и демпферов (Рис.16).

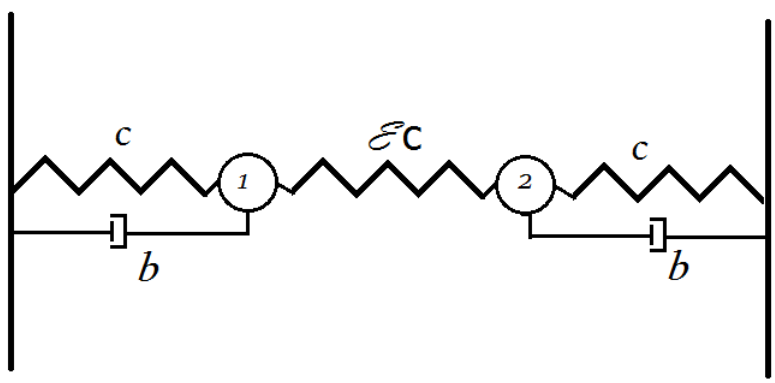

Рис. 16: Упрощённая модель двойного вискера

В статье [8] для раскачки колебаний графенового дифференциального резонатора предлагается использовать короткий электрический импульс. В случае с вискерами таким методом сложно раскачать большую амплитуду, так как вискеры менее чувствительны к воздействию электрического поля, чем графен. Поэтому предлагается использовать пьезоэлемент для раскачки иглы под вискерами. Пьезоэлемент позволяет раскачивать систему с постоянной гармонической силой.

3.4 Раскачка колебаний двойного вискера.

3.4.1 Импульсное воздействие.

Для первичного анализа модели упростим её максимально, взяв массы, жесткости пружин и коэффициенты демпфирования одинаковыми для обоих шариков, однако жесткость пружины между объектами будет отличаться.

В таком представлении c - аналог жесткости на изгиб вискера. А $c\varepsilon$ - жесткость перемычки между вискерами.

Тогда решение этой задачи можно получить при решении системы уравнений (30) с ненулевыми начальными условиями. То есть свободные колебания системы, вызванные импульсным внешним воздействием.

$$\begin{gathered} m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 + c\varepsilon(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2 + c\varepsilon(x_2 - x_1) = 0 \\ x_1(0) = x_0 \neq 0 \end{gathered} \tag{30}$$

При отсутствие внешней силы и ненулевых начальных условиях, вискеры будут иметь колебания по типу биений с затуханием, связанным с наличием демпфера (Рис.17). Вискеры колеблются в противофазе с равными частотами.

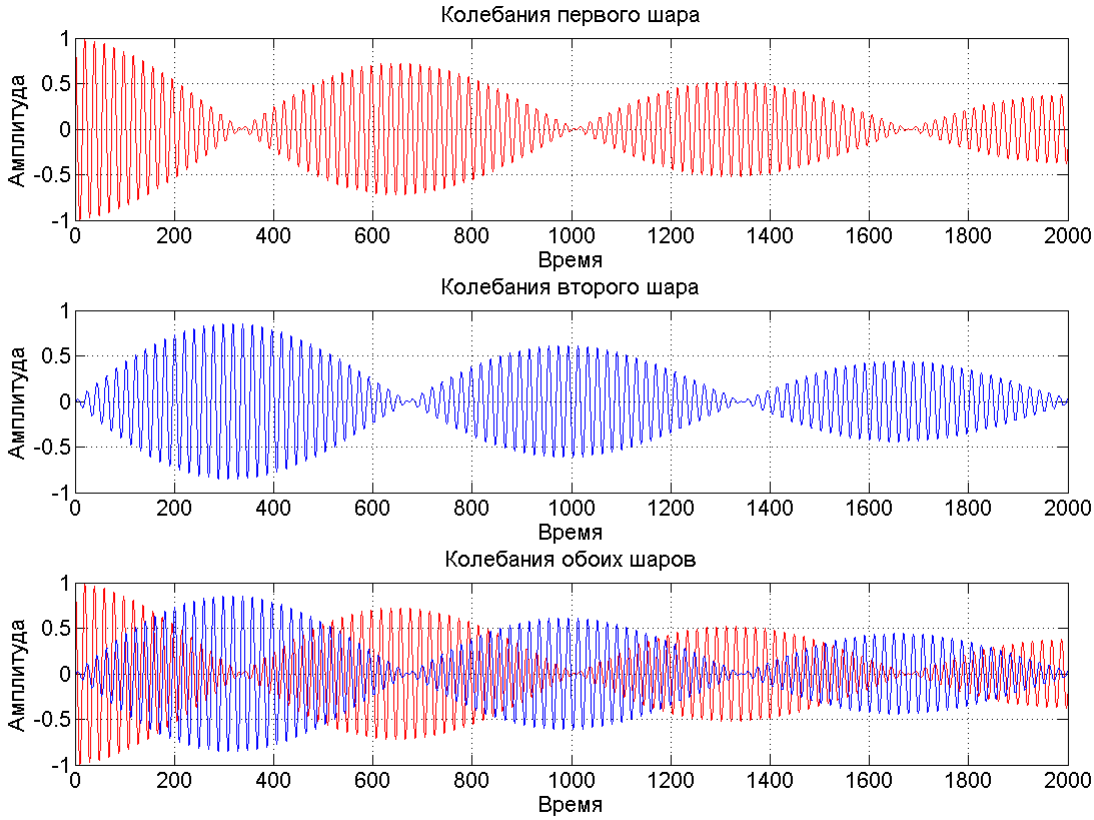

Рис. 17: Свободные колебания системы

3.4.2 Выбор допустимой жесткости упругой связи.

Форма колебаний существенно зависит от ε-коэффициента жёсткости соединяющей пружины. На приведённом графике $\varepsilon = 0.05$ (Рис.17). Если рассмотреть случай, соответствующий $\varepsilon = 0.5$, то получившиеся колебания имеют форму не биений, что не позволяет осуществить дальнейшее решение задачи. Колебания, получающиеся для $\varepsilon = 0.5$ приведены на (Рис.18) для одного из вискеров. То есть сильное увеличение жесткости связующей пружины ведет к колебаниям не в форме биений, что не соответствует цели исследования.

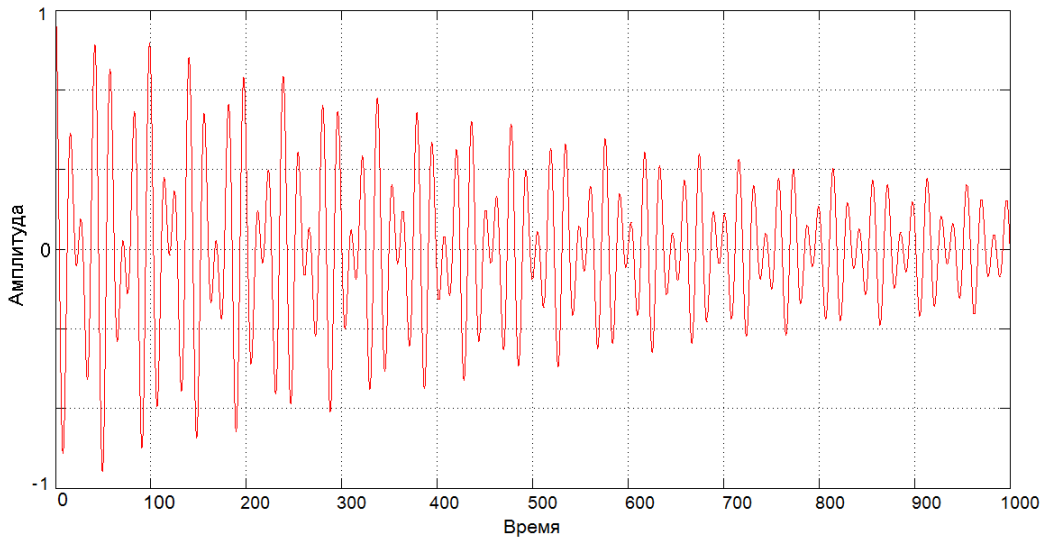

Рис. 18: Колебания одного из шаров при большой жесткости средней пружины

Очень маленький ε тоже не подходит для анализа системы, так как жесткость средний пружины получается слишком маленькой или даже пренебрежимо малой, что соответствует отсутствию связи между объектами или не волнообразной раскачке, а плавному выходу в режим установившихся колебаний, как представлено на (Рис.19).

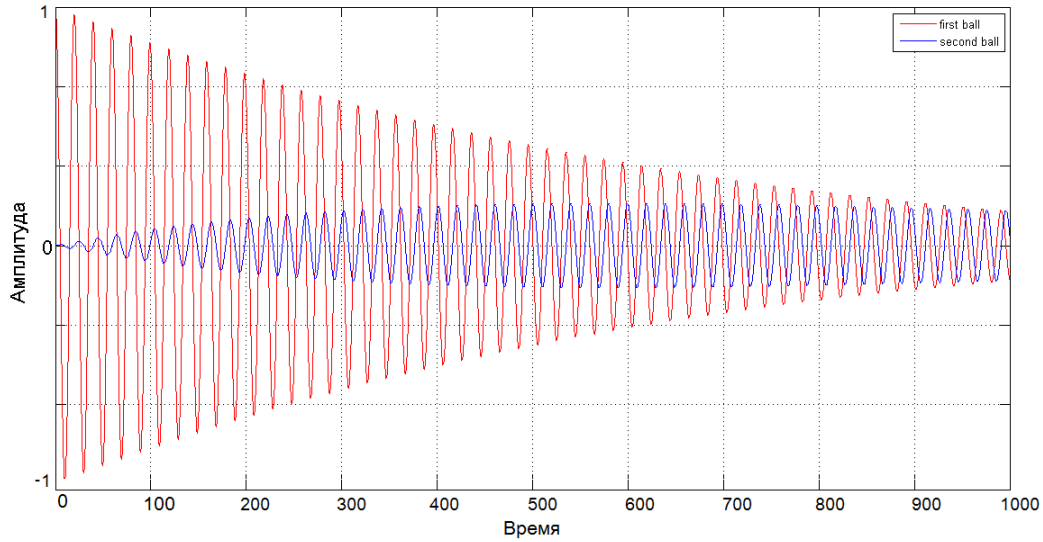

Рис. 19: Колебания системы при слишком малой жесткости связывающей пружины

Таким образом, рекомендуемый ε будет находиться примерно в промежутке $0.02 - 0.07$. Полученное значение ε упрощает дальнейшее исследование, в котором ε бредет считаться константой. $\varepsilon = 0.05$.

В такой постановке задачи необходимо обратить внимание на ω-частоту внешнего воздействия. У внешней частоты есть ограничения, обусловленные видом зависимости координаты

от времени. При некоторых значениях ω координата принимает комплексные значения, которые не подходят.

Величина коэффициента демпфирования так же имеет большое значения для этой задачи, так как при большом коэффициенте демпфирования не будет происходить достаточной раскачки системы. Его величину можно найти из соотношения $\frac{b}{2cm} = 0.01 - 0.005$ - это одно из условий интегрируемости дифференциальных уравнений (30).

3.4.3 Установившийся режим.

Следующим этапом работы является рассмотрение этой задачи с добавлением внешнего воздействия на оба вискера. Внешнее воздействие это сила, которую можно представить в гармоническом виде $F(t) = F_0 cos(\omega t + \alpha)$, это внешнее воздействие, раскачивающее оба шарика в модели. Необходимо раскачать вискеры до достаточно большой амплитуды, после чего "отключить"внешнее воздействие и анализировать установившийся режим. Для этого запишем систему дифференциальных уравнений (31). Она отличается от (30) только наличием функции, зависящей от времени $F(t)$ в правой части.

$$\begin{aligned} m\ddot{x_1} + b\dot{x_1} + cx_1 + c\varepsilon(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x_2} + b\dot{x_2} + cx_2 + c\varepsilon(x_2 - x_1) = F(t) \end{aligned} \tag{31}$$

Первая ситуация соответствует случаю постоянного, непрекращающегося внешнего воздействия. То есть на протяжении всего времени колебаний на оба шара воздействует гармоническая сила инерции $F(t) = F_0 cos(\omega t + \alpha)$, где $F_0 = m\omega^2$. Колебания, получившиеся в результате такого воздействия не являются биениями (Рис.20).

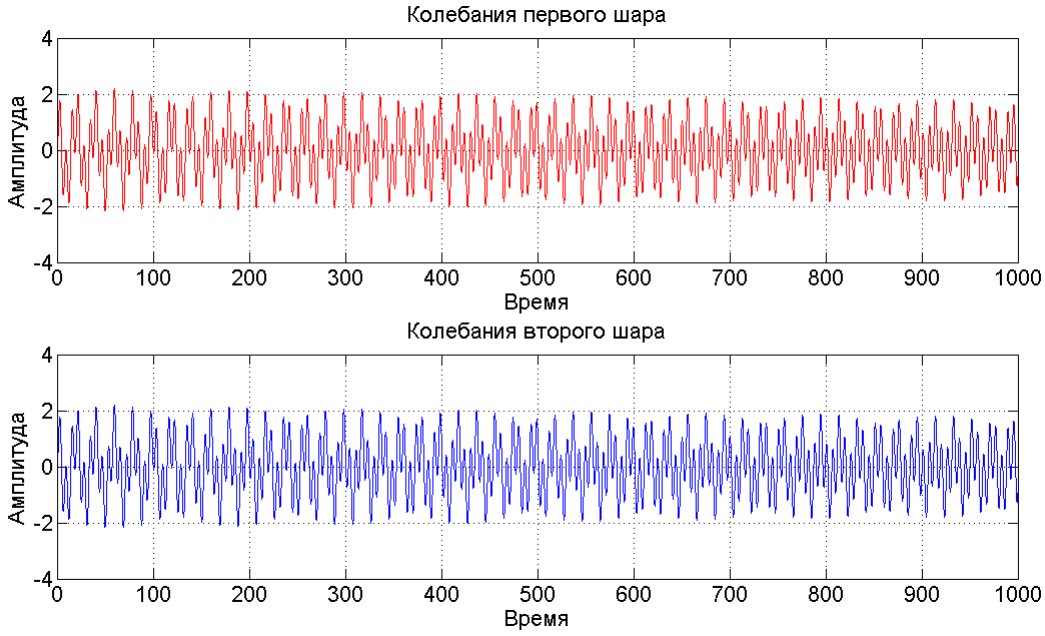

Рис. 20: Воздействие непрекращающейся гармонической силы

3.5 Выбор момента прекращения возбуждения.

3.5.1 Зависимость амплитуды колебаний от момента прекращения внешнего воздействия.

Необходимо проверить, имеет ли значение, в какой момент в рамках одного периода установившихся колебаний происходит прекращение воздействия, для этого рассмотрим участок графика колебаний при постоянном воздействие внешней силы около $t = 41$ (Рис.21).

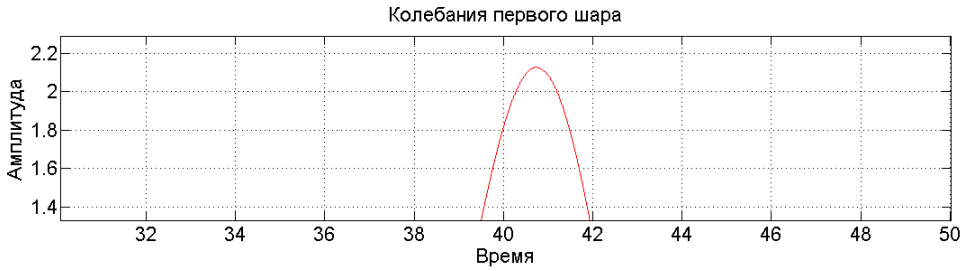

Рис. 21: Участок графика колебаний

Для исследования будут взяты три характерные точки:$t = 40$,41 и 42. Первая и последняя точки характеризуются большим модулем скорости колебания шара, но разным по направлению вектором скорости, а точка $t \approx 41$ - максимум графика, что соответствует близкой к нулевой скорости шара в данный момент (Рис.22), (Рис.23), (Рис.24).

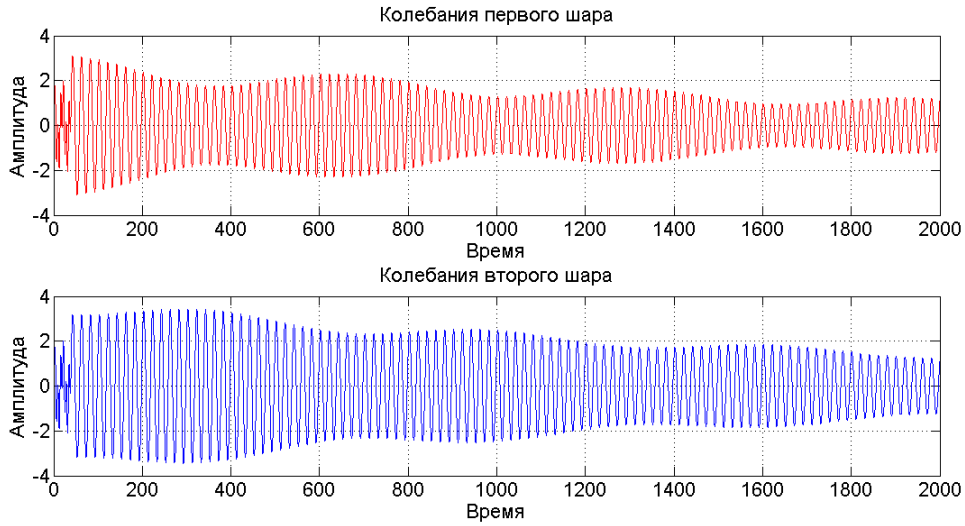

Рис. 22: Колебания при отключении внешнего воздействия при t=40

При $t = 40$ скорость шара имеет положительное направление и большой модуль. Характерной особенностью этого эксперимента является достаточно большой скачок амплитуды колебаний сразу после прекращение внешнего воздействия.

При $t = 41$ из всех трёх возможных случаев амплитуда получается самой низкой. То есть прекращение внешнего силового воздействия в момент, когда скорость близка к нулю является самым неоптимальным в условиях поставленной задачи.

Большая амплитуда нужна при таких экспериментах, так как её легче зафиксировать.

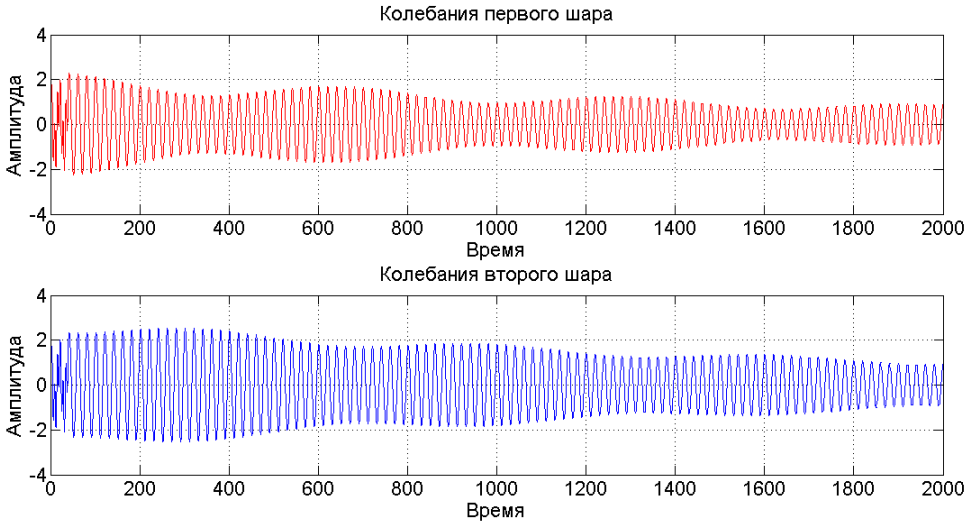

Рис. 23: Колебания при отключении внешнего воздействия при t=41

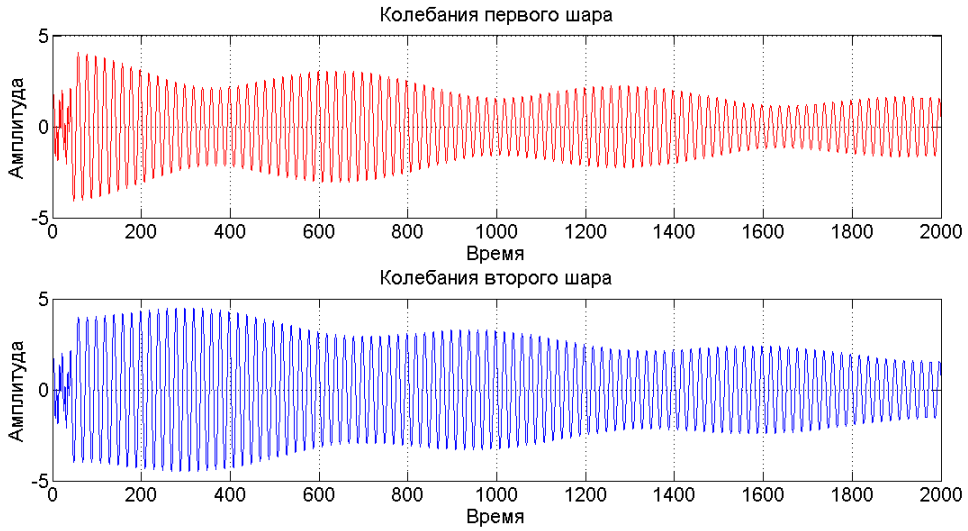

Рис. 24: Колебания при отключении внешнего воздействия при t=42

При $t = 42$ - амплитуда колебаний получается так же больше, чем во втором случае.

На представленных графиках заметно, что при прекращении действия внешней силы в момент колебаний, характеризующийся большой скоростью движения, происходит более резкий скачок амплитуды.

Из полученных результатов следует, что для дальнейшего исследования рекомендуется прекращать внешнее воздействие в момент времени, характеризующийся большой скоростью движения вискера.

3.5.2 Зависимость амплитуды колебаний от продолжительности внешнего воздействия.

Кроме нахождения оптимального момента отключения внешней силы по фазе установившихся колебаний, необходимо найти оптимальную продолжительность приложения внешней гармонической силы.

Для этого было взято несколько моментов, в которых колебания находились в той фазе, которая была найдена лучшей в предыдущем пункте $t = 0.1$, $t = 4$ и t=20.

Первый случай соответствует ситуации, когда раскачка с помощью внешнего воздействия происходит недостаточно долго. То есть прекращение действия силы происходит в первые моменты после начала проведения эксперимента.

Если время раскачки очень мало: $t = 0.1$, то амплитуда колебаний получается недостаточно большой для её измерения.На (Рис.25) - амплитуда $= 0.3$.

При увеличении времени приложения внешней гармонической силы происходит увеличение амплитуды колебаний (Рис.26)-амплитуда $= 4$.

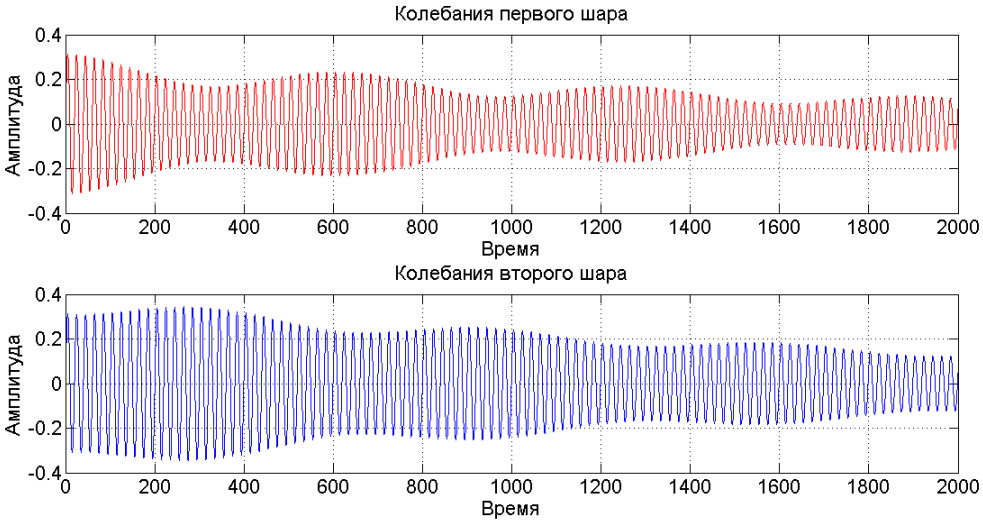

Рис. 25: Малое время внешнего воздействия t=0.1

Если постепенно повышать длительность приложения внешней силы, то через какое-то время амплитуда перестаёт возрастать. То есть при любом времени большем, чем некоторое критическое время раскачки амплитуда не будет превышать максимального значения. С взятыми параметрами задачи, это критическое время составляет около 3.

На (Рис.27) момент отключения внешней силы это $t = 20$, что больше, чем найденное критическое время раскачки, амплитуда принимает максимально возможное значение для этой задачи ≈ 4.

Из всех, приведённых выше соображений можно выбрать подходящее по всем параметрам время раскачки, которое будет использовано во всех последующих экспериментах. Это обеспечивает чистоту их проведения и максимальную амплитуду на всех опытах. Большая амплитуда колебаний необходима для того, чтобы колебания вискеров можно было зафиксировать, например, с помощью фотооборудования или датчика.

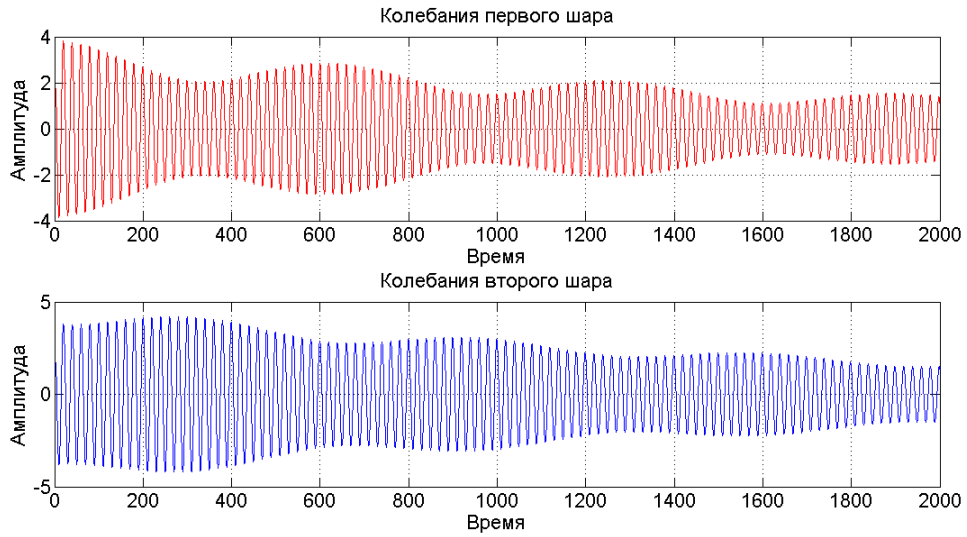

Рис. 26: Большее время внешнего воздействия t=4

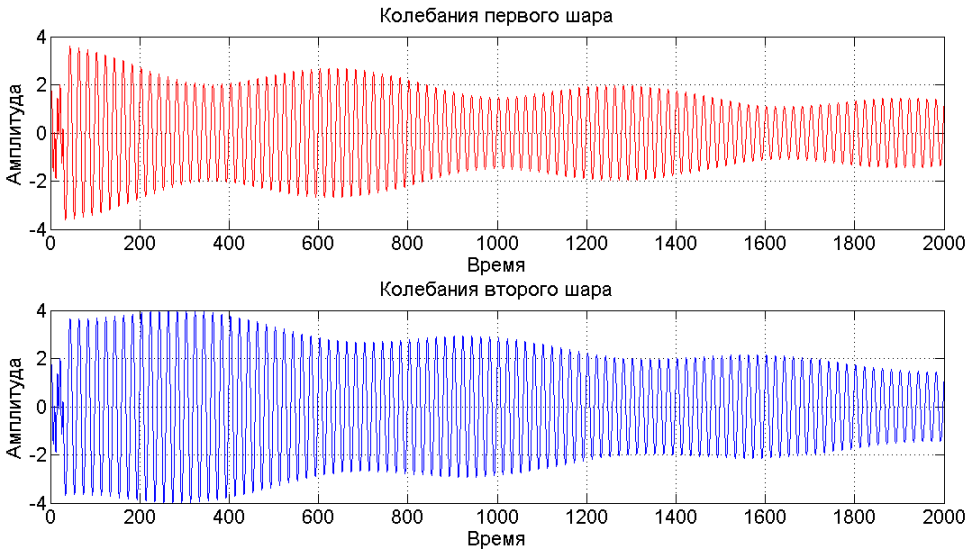

Рис. 27: Большее время внешнего воздействия t=20

3.6 Нахождение огибающей биений.

3.6.1 Нахождение огибающей биений с помощью усредняющего интеграла.

При дальнейших исследованиях будут рассматриваться биения. Основной характеристикой такого типа колебаний являются их форма, а именно огибающая. В этой работе основной интерес представляет частота огибающей, полученных биений, которую можно найти только зная саму огибающую.

Приведённые ниже способы описаны с учётом того, что данное исследование проводится с использованием численного метода интегрирования дифференциальных уравнений. Это означает, что решения уравнений имеют вид массивов чисел с некоторым шагом по времени.

Для реализации первого метода необходимо возвести в квадрат полученное решение(или

взять его по модулю), если этого не сделать, то усреднённый интеграл будет всегда примерно равен 0. Далее решение необходимо проинтегрировать по времени, с достаточным для усреднения шагом. В результате получается формула (32)

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(\xi)d\xi \tag{32}$$

Данный метод достаточно точен и прост в осуществлении, однако требует большой компьютерной мощности. Поэтому в данной работе не использован, однако это наиболее точный и простой метод получения функции, имеющей характер соответствующий огибающей биений (совпадение максимумов, минимумов и периода колебаний).

3.6.2 Построение огибающей по локальным максимумам.

Второй способ построения огибающей это нахождение локальных максимумов внутренней кривой колебаний и построение огибающей по ним. Для данного метода необходима перебором сравнить все полученные значения решения для координаты с предыдущим и следующим по времени значениями решения. После нахождения локальных максимумов из них создаётся массив, так же создаётся массив соответствующих времен. Тогда построение огибающей происходит путём соединения максимумов внутренних колебаний. Этот метод даёт менее точное изображение искомой кривой и сильно зависит от шага, с которым было проведено исходное интегрирование. Однако этот метод менее трудоемок, он не требует нового разбиения полученного решения на участки по времени и взятия интеграла на каждом шаге.

3.7 Двойной вискер как детектор массы.

Система, состоящая из двух вискеров удобна для измерения масс наночастиц. При попадании массы на один из вискеров, и раскачке системы, начинаются биения, как было указано выше, из-за изменения состояния одного из вискеров, происходит смещение максимумов огибающей кривой относительно друг друга.

Измерение смещения максимумов огибающей означает изменение её частоты и периода, измерение которых не составляет труда при использовании компьютерного вычисления.

В реальном эксперименте оба вискера стоят на одной платформе(пьезоэлементе), что означает их одинаковую внешнею раскачку, то есть к ним приложена одна и та же гармоническая сила, то есть при моделировании двух одинаковых объектов с одновременной раскачкой биений не будет.

Поэтому, для того, чтобы исследовать изменения формы биений при попадании дополнительной массы на один из вискеров, массы вискеров будем считать разными m_1 и m_2, при этом $m_1 = 1$, а m_2 будет принимать разные значения, в зависимости от массы, попавший на второй элемент. При этом остальные параметры системы не изменяются. То есть уравнения (31) примут вид (33) :

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + cx_1 + c\varepsilon(x_1 - x_2) = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + cx_2 + c\varepsilon(x_2 - x_1) = F(t) \end{aligned} \tag{33}$$

Данная система(с различными массами) имеет аналитическое решение, однако оно достаточно громоздкое. В следствии чего, интегрирование данных уравнений было произведено численно.

В результате численного интегрирования были получены колебания, имеющие форму биений.

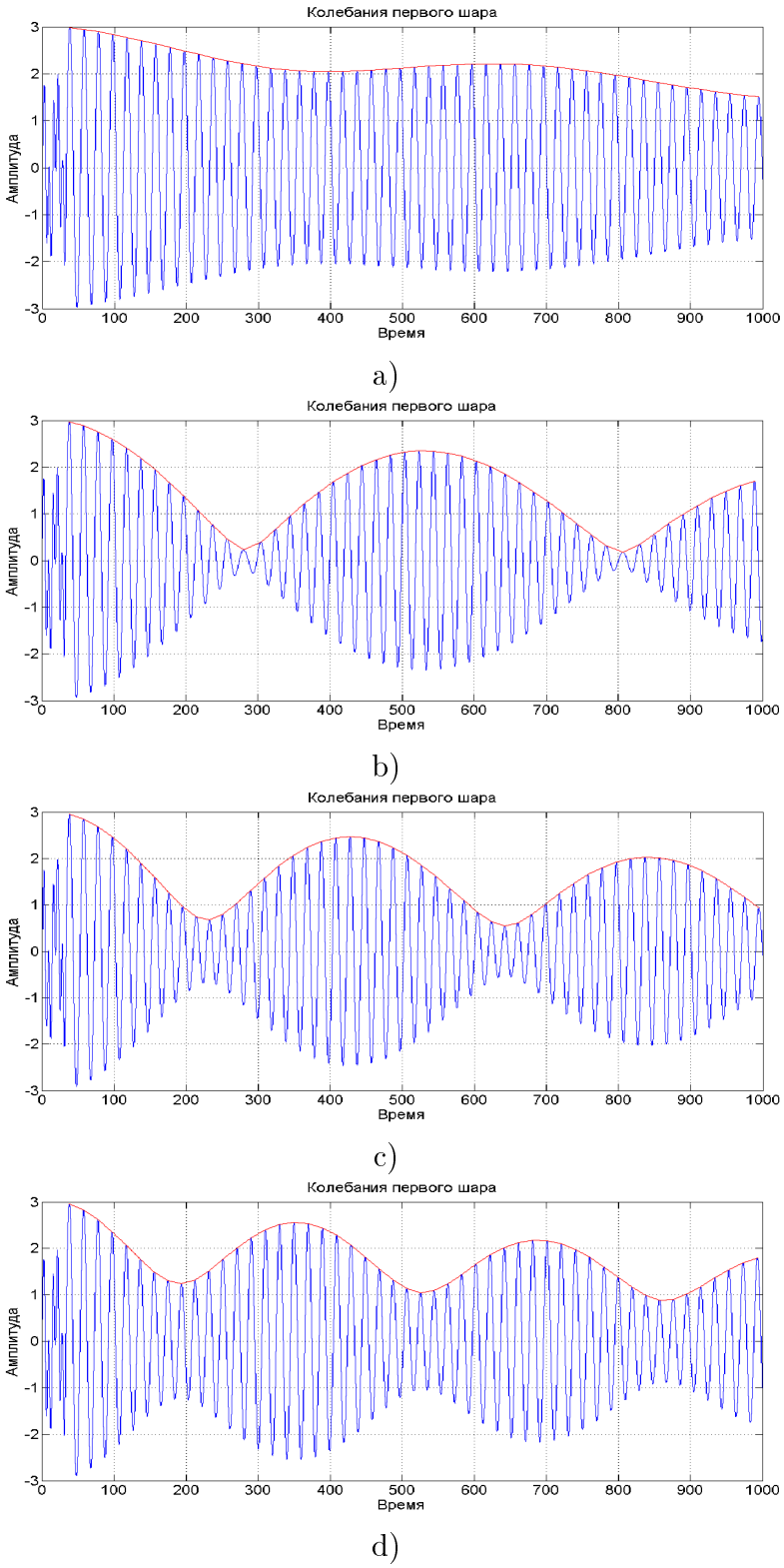

Рис. 28: Разность между массами вискеров относительно одного из них: a)2% , b)5%, c) 8%, d)11%

Таким образом, в данной задаче рассмотрены случаи, когда один из вискеров изначально отличается по массе от другого, хотя бы незначительно. Такое условие способствует получению колебаний в форме биений даже при отсутствие внешней массы, а так же избежать проблем, связанных с нелинейностью графика зависимости частоты от разности масс при малом отклонении массы(около 0).

В ходе численного эксперимента были рассмотрены разные добавки к массе одного из вискеров. На (Рис.28) показаны некоторые из полученных результатов. Видно, что смещение максимума огибающей по времени зависит от приложенной массы.

Проведённое исследование позволяет создать весы, которые можно использовать на уровне клеток и частиц. Выше доказано, что весы, состоящие из двух связных вискеров точнее и проще в использовании, чем весы из одиночного вискера из-за простоты измерения характеристик колебаний.

Для создания нановесов необходимо, как и при создании обыкновенных макро измерительных приборов, провести градуировку шкалы. Обычно она проводится экспериментально. Для этого необходимо осуществить большое количество опытов с разными прикрепленными массами и зафиксировать данные о том, как изменился период огибающей при данной, конкретной внешней добавке.

Для того, чтобы зафиксировать изменение массы одного из вискеров двойной системы, необходимо померить период огибающей. Исследование данной зависимости представлено в работе [9]. В приведённой статье показано, что для подобных систем зависимость частоты(периода) колебаний огибающей имеет нелинейный вид, если массы вискеров отличаются на малую величину (примерно менее 2%). Так как в исследуемой системе вискеры стоят на общей подложке и раскачиваются одинаковой силой одновременно, то при идентичных по характеристикам вискерах и отсутствии внешней массы не будет наблюдаться биений.

Влияние величины прикрепленной массы на период огибающей изображено на (Рис.29). Видно, что как и описано в статье [9], при малых отклонениях масс (менее 2%), график не линейный.

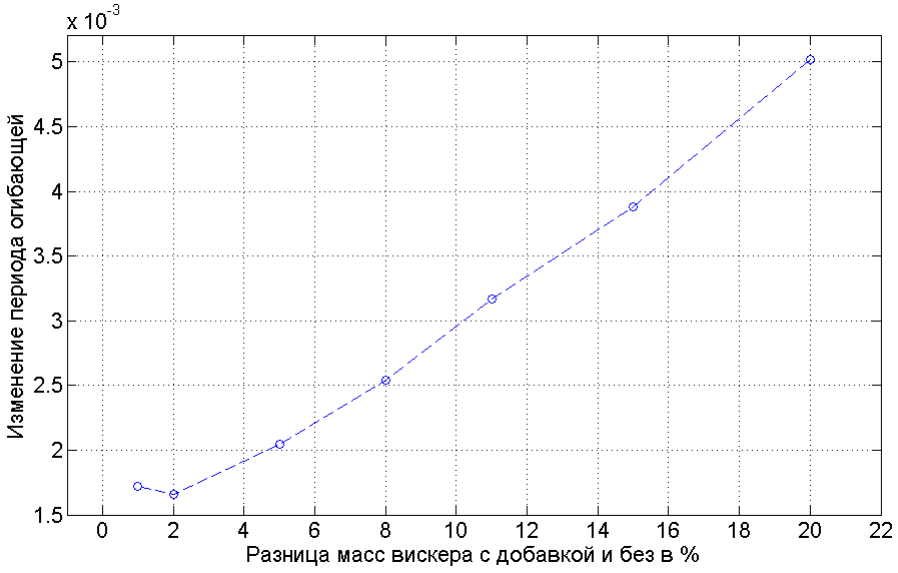

Рис. 29: Влияние прикрепленной массы на период огибающей

Проведённые численные эксперименты показывают, что для калибровки необходимой шка-

лы в исследуемом случае можно провести всего 2-3 измерения, так как зависимость изменения периода колебаний от прикрепленной добавочной массы является линейной. Это значительно упрощает производство весов на нано уровне.

4 Емкостной датчик колебаний вискера.

4.1 Описание модели.

Одним из направлений исследований нанообъектов является обнаружение возможностей применения углеродных структур в НЭМС(нано-электромеханических системах). Большая ветвь развития этих исследований связана с конденсаторами переменной ёмкости. Подобная задача на примере графеновых пластин рассмотрена в [9].

Все системы, включающие в себя механические углеродные нанообъекты, которые являются частью электрической схемы называются НЭМС (нано-электро-механическая система). Чаще всего работа НЭМС основывается на резонаторах. Объектами, используемыми в качестве резонаторов может стать любая наномеханическая конструкция, например нанотрубки, графеновые пластины, кремниевые мостики. Общие принципы работы любой НЭМС можно изучить в статье [2] на примере кремниевых нанорезонаторов.

Использовать углеродные вискеры в качестве обкладки конденсатора позволяет тот факт, что чистый углерод является проводником.

В этой работе изучается возможность использования конденсатора с вискером для детектирования колебаний этого вискера. Фотографии вискера дают только статическое изображение и не позволяют точно измерить амплитуду его колебаний или выявить огибающую. Так же амплитуду механических колебаний вискера сложно измерить точно из-за его малых размеров и высокой частоты колебаний, поэтому колебания вискера с использованием такой электрической цепи переводят в соответствующие колебания напряжения, которые легко измерить обычным осциллографом с большой точностью.

Рассматривается НЭМС, в которой роль одной из обкладок конденсатора выполняет углеродный вискер, который является балкой, работающей на изгиб в рассматриваемой модели (Рис.30). Такая модель может быть представлена в виде электрический схемы (Рис.31).

В конечном итоге получается обычная электрическая схема с конденсатором переменной ёмкости, зависящей от прогиба вискера.

4.2 Уравнения колебаний исследуемой НЭМС.

То есть в представленной системе механические и электрические колебания взаимосвязаны и одни вызваны другими. (34) - уравнения колебаний для электрической и механической составляющих системы. Колебания вискера можно представить как колебания гармонического маятника с демпфером и поправкой на наличие внешней силы от электрического поля. Здесь U - напряжение источника тока (постоянное), R - сопротивление цепи,i - сила тока в цепи, u_c - напряжение на конденсаторе, d - текущее растояние между обкладкам конденсатора, x - отклонение вискера от горизонтального положения, $d_0 = d - x$ - начальное расстояние между обкладками конденсатора, $C = \frac{C_0 d_0}{d_0 + x}$ - текущая емкость конденсатора,C_0 - начальная емкость конденсатора, c, m, b - характеристики вискера (линейная жесткость, масса, коэффициент вязкости), $F(t)$ - внешняя сила.

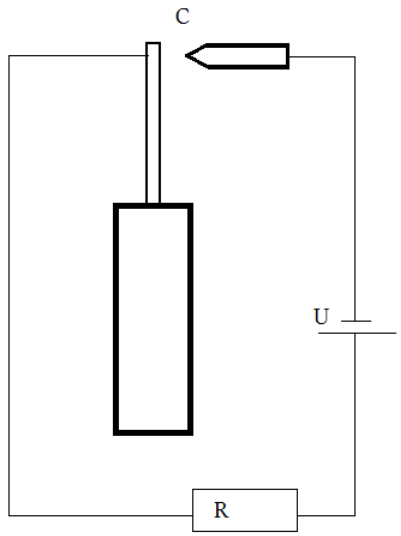

Рис. 30: Устройство НЭМ конденсатора

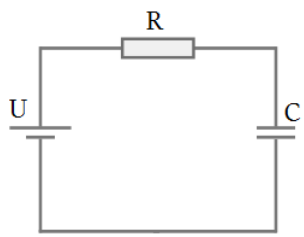

Рис. 31: Исследуемая электрическая цепь

$$\begin{aligned} &U - Ri - u_c = 0 \\ &m\ddot{x} + b\dot{x} + cx - \frac{Cu_c^2}{d} = F(t) \end{aligned} \tag{34}$$

Представленные уравнения имеют очень большое количество варьируемых параметров, что делает их не очень удобными для исследования и громоздкими. Для упрощения задачи данные уравнения были приведены к безразмерному виду с минимальным количеством изменяемых величин.Размерные характеристики системы были приведены к следующим безразмерным параметрам: $\beta = \frac{C_0 U^2}{d_0 c}$ - имеет смысл отношения электрической энергии к энергии механических колебаний; $\nu = \frac{b}{2mk}$ - характеристика демпфирования; $\delta = \frac{RC_0}{\frac{2\Pi}{k}}$ - отношение периодов колебаний(электрических к механическим) - показывает соотношение характерных времен колебаний.

Более того, вводятся новые неизвестные z, y-безразмерные и связаны с исходными неизвестными x, u_c соотношениями (35), а дифференцирование производится по относительному, безразмерному времени τ (35).

$$\begin{aligned} &\frac{x}{d_0} = y, \frac{u_c}{U} = z, \tau = kt \\ &\dot{z} = \frac{dz}{dt} = k\frac{dz}{d\tau} = z'k, \dot{y} = \frac{dy}{dt} = k\frac{dy}{d\tau} = y'k \end{aligned} \tag{35}$$

После подстановки всех новых безразмерных величин в уравнения (34) получаются урав-

нения (36), которые и будут исследованы в дальнейшем.

$$\begin{gathered} 1 - 2\Pi\delta\frac{z'}{1+y} + 2\Pi\delta\frac{zy'}{(1+y)^2} = 0 \\ y'' + 2\nu y' + y - \beta\frac{z^2}{(1+y)^2} = \widetilde{F(t)} \end{gathered} \tag{36}$$

В этих уравнениях $\widetilde{F(t)} = \frac{F(t)}{d_0 c}$ - безразмерная вынуждающая гармоническая сила.

Аналитическое решение этой системы неизвестно, поэтому необходимо численное интегрирование, которое было произведено с помощью пакета MatLab.

4.3 Параметры системы

Для исследования колебаний необходимо подобрать подходящие параметры системы. После проведения процедуры обезразмеривания, количество характеристик сократилось до трёх.

В любой системе есть потери энергии такие как: внутреннее трение,микропластические деформации и т.д. Оценка таких параметров берется из эксперементальных данных, поэтому ν-коэффициент демпфирования системы, его значение считаем известным $\nu = 0.01$. Параметр β, отвечающий за соотношение энергий, подбирается из соображений, что данная электромеханическая конструкция является детектором механических колебаний вискера, а значит, наличие электрической составляющей не должно сильно влиять на колебания вискера. Однако, если β будет слишком малым, в эксперименте не будет заметно электрической составляющей вовсе. Поэтому $\beta = 0.05$. Параметр $\delta = 0.1$ должен быть таким, чтобы конденсатор успевал перезаряжаться достаточно большое количество раз. То есть должно выполняться соотношение периодов: период перезарядки $<$ периода колебаний.

Из уравнений (36) видно, что амплитуда колебаний переменной y не должна достигать значения 1, так как при колебании её координата достигнет значения -1, что невозможно, так как знаменатель одного из слагаемых в уравнении равен $y + 1$. Данная ситуация соответствует тому, что обкладки конденсаторов соединились и произошло замыкание цепи. Поэтому необходимо наложить ограничения на силу внешнего воздействия, которая имеет вид $F = F_0 cos(\omega t)$. При проведении процедуры численного интегрирования параметр F_0 подбирается так, чтобы не происходило соприкасания обкладок конденсатора. Этот параметр был найден методом подбора.

4.4 Результат численного эксперимента.

На графике (Рис.32)представлены колебания в резонансном режиме, создаваемые конденсатором, одна из обкладок которого - углеродный вискер. На верхней половине представлено отклонение вискера от положения равновесия, на нижней колебания напряжения в цепи. (Все характеристики безразмерные-относительные).

Видно, что амплитуда механических колебаний не превышает 1, то есть вискер не касается второй обкладки конденсатора и замыкания электрической схемы не происходит. Так же заметно, что колебания напряжения и отклонение вискера имеют очень близкую к друг другу форму, а именно положения максимумов и минимумов амплитуды огибающей совпадают, это позволяет исследовать переходной процесс колебаний одиночного вискера с помощью вольтметра.

Через некоторое время колебания принимают форму установившихся. На (Рис.33) показаны установившиеся колебания вискера и напряжения в цепи. Колебания вискера имеют гармоническую форму и постоянную амплитуду. Колебания напряжения отличаются от гармони-

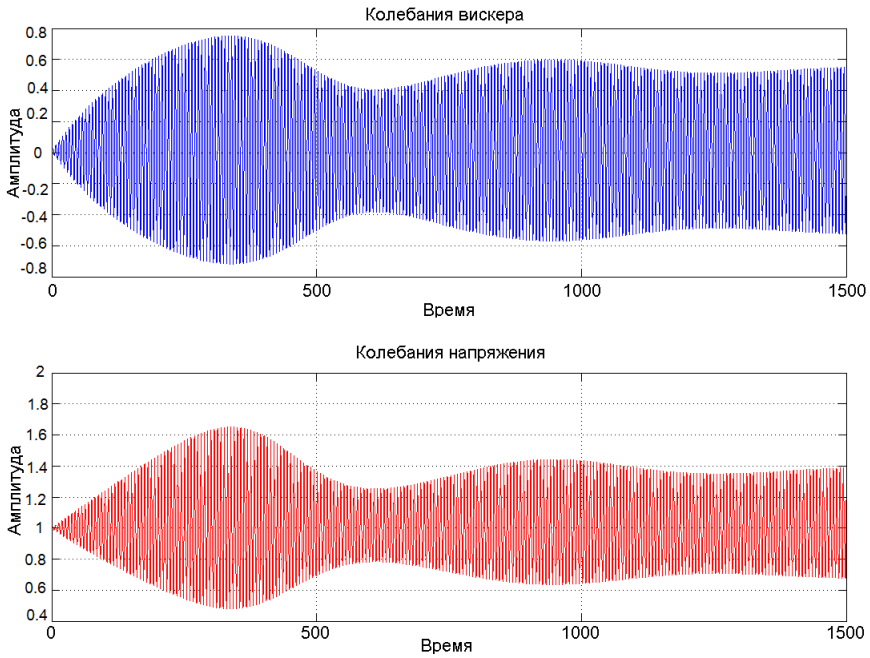

Рис. 32: Колебания системы с одним конденсатором

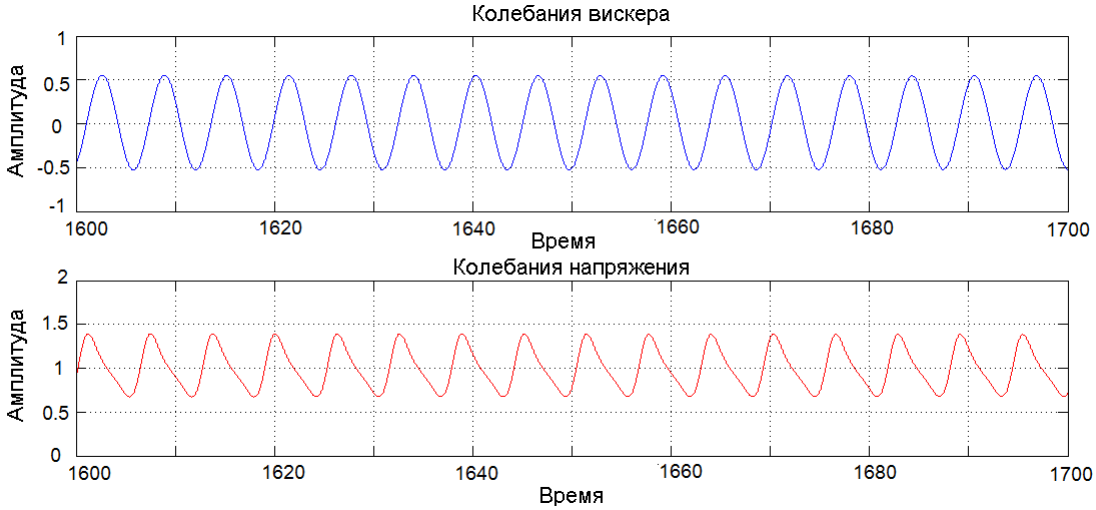

Рис. 33: Установившиеся колебания системы с одним конденсатором

ческих, что обусловлено нелинейностью уравнений, описывающих электрические процессы, емкость конденсатора меняется нелинейно при изменении зазора. Это большой недостаток использования одиночного конденсатора в качестве детектора механических колебаний. Периоды напряжения и отклонения вискера в установившемся режиме примерно совпадают, но форма колебаний существенно отличается. Поэтому рекомендуется использовать другую, более сложную схему емкостного датчика.

4.5 Уравнения колебаний НЭМС с двойным вискером.

Представленная система состоит из двух независимых одинаковых электрических цепей, конденсаторы которых связаны между собой механическим образом (Рис.34).

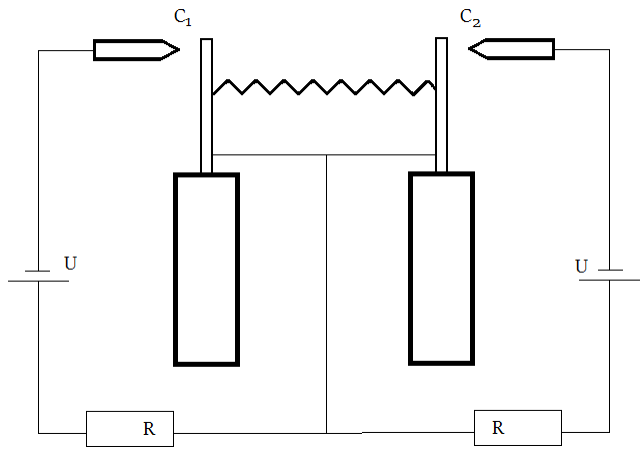

Рис. 34: Система из двух конденсаторов

Связь между вискерами осуществляется с помощью упругой перемычки, так же, как это было рассмотрено в задаче о двойном вискере-детекторе масс.

При исследовании системы двух конденсаторов вид уравнений (36) изменится. В каждом уравнении появится дополнительное слагаемое, отвечающее за связь между вискерами, аналогично задаче про двойной вискер. Так же появятся ещё 2 идентичных уравнения, но уже для второго конденсатора. Итого получится система из 4 уравнений, которая в размерном виде выглядит следующим образом (37).

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_1 - \frac{C_1 u_1^2}{d} + \epsilon c(x_1 - x_2) = F(t)\\
&m\ddot{x}_2 + b\ddot{x}_2 - \frac{C_2 u_2^2}{d} + \epsilon c(x_2 - x_1) = F(t)\\
&U - Ri_1 - u_1 c = 0\\
&U - Ri_2 - u_2 c = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

Так же как и в случае с одним конденсатором систему необходимо привести к безразмерному виду. Используя такие же замены, как в первом случае (35), получается (38).

$$\begin{aligned}
&y_1'' + 2\nu y_1' - \beta\frac{z_1^2}{(1+y_1)^2} + \epsilon(y_2 - y_1) = \widetilde{F(t)}\\
&y_2'' + 2\nu y_2' - \beta\frac{z_2^2}{(1+y_2)^2} - \epsilon(y_2 - y_1) = \widetilde{F(t)}\\
&1 - 2\Pi\delta\frac{z_1'}{1+y_1} + 2\Pi\delta\frac{z_1 y_1'}{(1+y_1)^2} = 0\\
&1 - 2\Pi\delta\frac{z_2'}{1+y_2} - 2\Pi\delta\frac{z_2 y_2'}{(1+y_2)^2} = 0
\end{aligned} \tag{38}$$

Это система из четырёх дифференциальных уравнений и четырьмя неизвестными, решение этой ситемы было получено численно.

4.6 Результаты численного эксперимента для двойного вискера.

При постоянном внешнем воздействии в виде гармонической силы для одного из вискеров получаются следующие результаты (Рис.35). На верхнем графике представлены механические колебания одного из вискеров, а на нижнем колебания напряжения на соответствующем ему конденсаторе.

Видно, что форма колебаний напряжения точно повторяет форму колебаний вискера. Это означает, что измерения механических колебаний такой системы можно наблюдать и

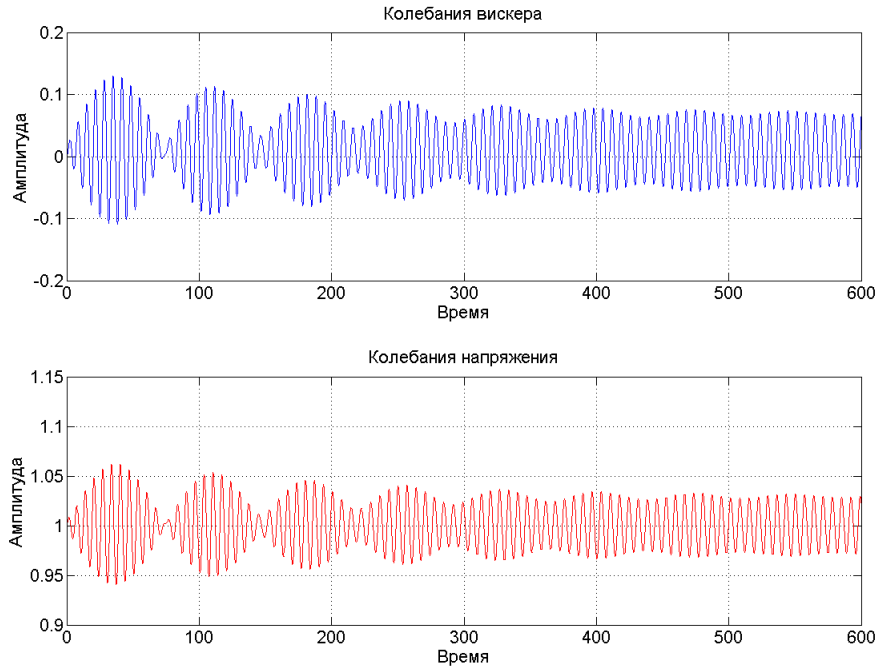

Рис. 35: Колебания вискера и соответствующего напряжения при дополнительной массе 5%

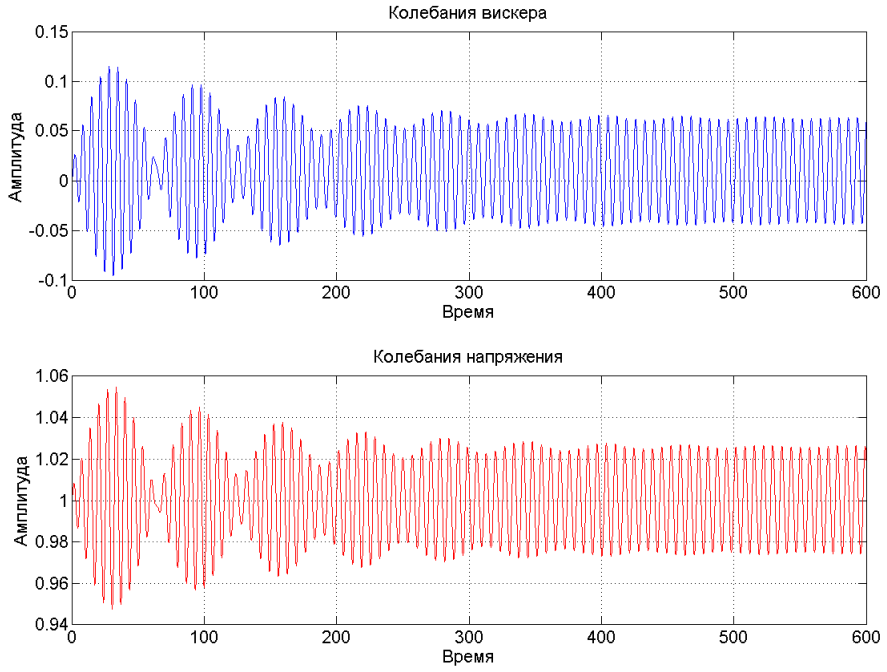

Рис. 36: Колебания вискера и соответствующего напряжения при дополнительной массе 9%

детектировать с помощью измерений напряжения на соответствующем конденсаторе.

Если изменить массу этого вискера то так же, как и в двойной системе вискров без конденсаторов, происходит изменение периода колебаний огибающей, это изменение так же от-

ражается на колебаниях напряжения и легко измеряется осциллографом (Рис.36).

Видно, что на (Рис.36) максимум огибающей, который находился на (Рис.35) после временной отметки 100, сместился влево. То есть изменение массы одного из вискеров (попадание на него взвешиваемой частицы) влечёт за собой изменение периода огибающей как вискера, так и напряжения на соответствующем конденсаторе при постоянной внешней гармонической нагрузке. Так же заметно, что система выходит на установившийся режим спустя некоторое время.

Если внешнюю нагрузку на систему отключить через определённый промежуток времени, то колебания будут затухать, при этом биения получаются не такими выраженными, однако изменения массы возможно померить (Рис.37).

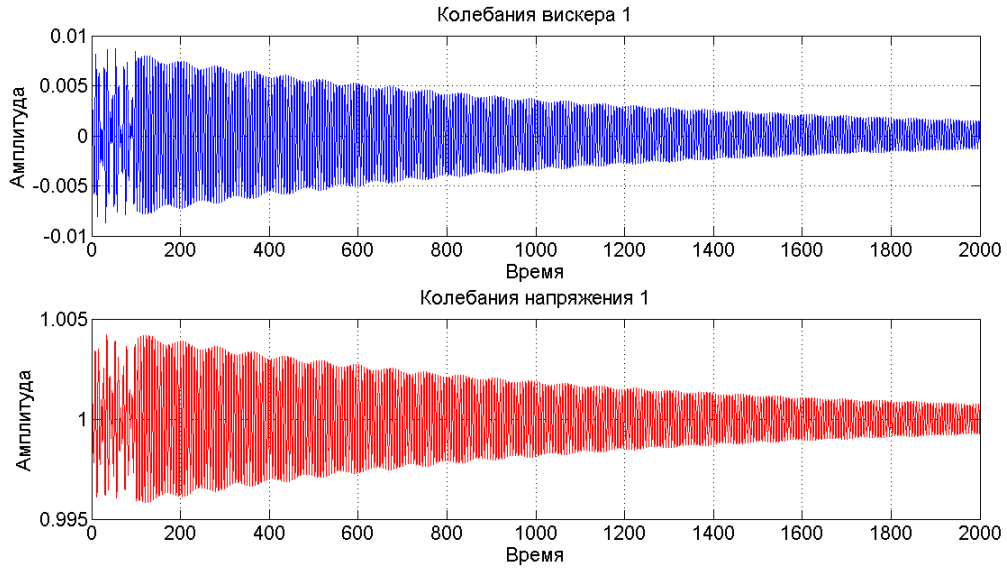

Рис. 37: Затухающие биения вискера и напряжения при дополнительной массе 5%

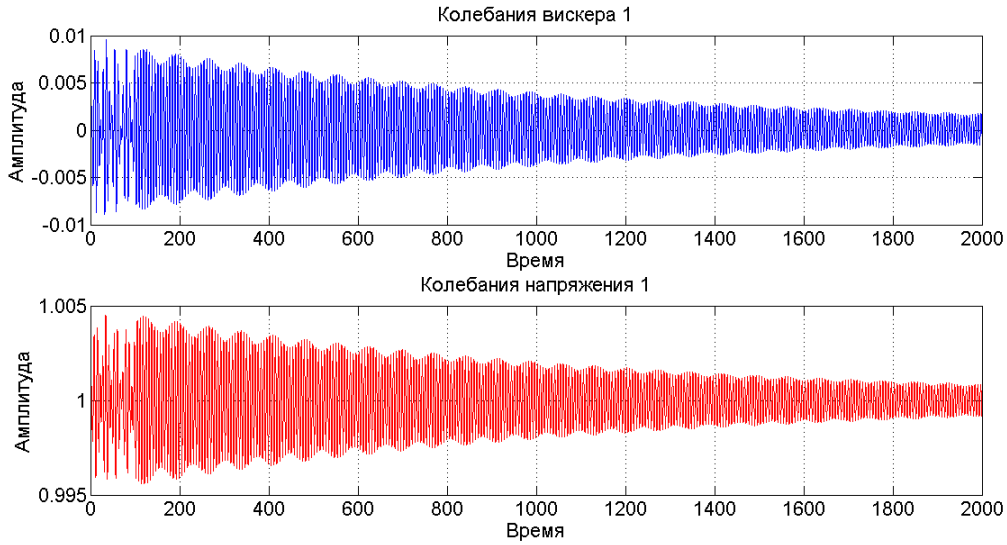

Рис. 38: Затухающие биения вискера и напряжения при дополнительной массе 9%

Смещение максимумов огибающей можно заметить при сравнении (Рис.37) и (Рис.38). Например, если на одном из рисунков есть максимум около 400, то на втором рисунке находится уже минимум огибающей в этой же временной отметке.

Не такой выраженный вид биений при отключении внешней нагрузки обусловлен электрической составляющей системы.

4.7 Емкостной датчик с характеристикой, близкой к линейной.

Все предыдущие датчики показывают хороший результат на уровне достаточно больших времен. То есть дают возможность с большой точностью померить огибающую колебаний двойного вискера или переходного процесса у одиночного вискера. В экспериментах наблюдение колебаний одиночного вискера происходит только за счёт визуальных изображений, полученных с помощью микроскопа. Предлагается создать датчик, который будет улавливать колебания одиночного вискера с большой степенью точности.

Схема такого датчика представлена на (Рис.39). Устройство состоит из двух конденсаторов с общей обкладкой-вискером. Тогда емкости этих конденсаторов связаны между собой и зависят от наклона вискера. Такой датчик включается в электрическую цепь, такую же, как и в предыдущих опытах.

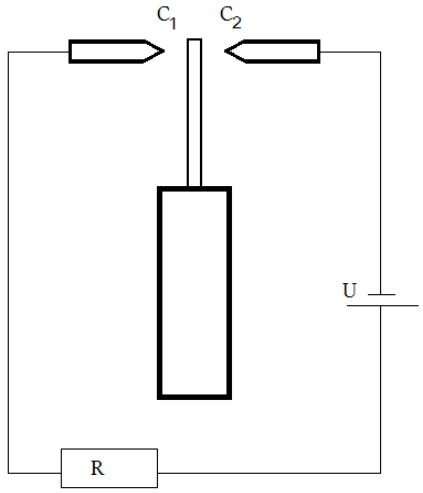

Рис. 39: Устройство двойного НЭМ конденсатора

Выходным сигналом являются напряжения на конденсаторах. Тогда уравнения подобной системы будут иметь вид 39. Исследуется процесс, в котором происходят постоянные колебания вискера за счёт непрекращающейся внешней нагрузки, поэтому гармоническая сила $F(t)$ действует во все моменты времени.

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} + b\dot{x} - \frac{C_1 u_1^2}{d} - \frac{C_2 u_2^2}{d} = F(t) \\ &U - Ri_1 - u_1 c = 0 \\ &U - Ri_2 - u_2 c = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь все переменные размерные и их больше, чем количество уравнений. Требуется привести все параметры системы к безразмерному виду и сократить их число до трёх с помощью преобразований, предложенных ранее: $d_0 = d - x$;$C = \frac{C_0 d_0}{d_0 + x}$; $\beta = \frac{C_0 U^2}{d_0 c}$; $\nu = \frac{b}{2mk}$; $\delta = \frac{RC_0}{\frac{2\Pi}{k}}$ и используя формулы (35). После всех необходимых действий получается система из трёх

уравнений с тремя неизвестными : y, z_1, z_2. Эти неизвестные показывают соответственно смещения вискера, напряжение на первом конденсаторе, напряжение на втором конденсаторе. Полученные уравнения представлены в формулах 40.

$$\begin{aligned} & y'' + 2\nu y' - \beta\frac{z_1^2}{(1+y)^2} - \beta\frac{z_2^2}{(1-y)^2} = \widetilde{F(t)} \\ & 1 - 2\Pi\delta\frac{z_1'}{1+y} + 2\Pi\delta\frac{z_1 y'}{(1+y)^2} = 0 \\ & 1 - 2\Pi\delta\frac{z_2'}{1-y} - 2\Pi\delta\frac{z_2 y'}{(1-y)^2} = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

4.8 Результаты численного эксперимента для линейного датчика.

Полученные уравнения были численно проинтегрированы. Результаты представлены ниже на рисунках (Рис.40), (Рис.41), (Рис.42).

На первом изображении видно, что общий характер колебаний и огибающую можно точно измерить, узнав напряжения на одном из конденсаторов. Однако, в рамках задачи об одиночном вискере это не несет большой пользы, так как огибающая, в установившемся режиме это просто прямая. Таким методом можно лишь зафиксировать переходные процессы при колебаниях одиночного вискера.

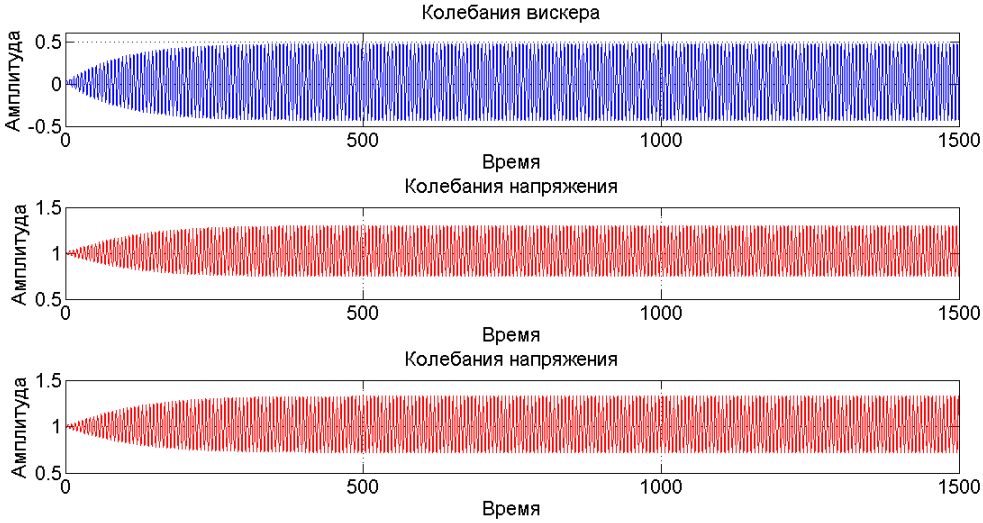

Рис. 40: Колебания вискера и напряжений на конденсаторах

На следующем изображении представлены колебания в установившемся режиме, на коротком промежутке времени. Видно, что колебания вискера - обычные гармонические, а колебания каждого из напряжений нелинейные и неточно совпадают по фазе с измеряемыми механическими колебаниями.

Для исправления неточностей детектора, представленных на (Рис.41), необходимо учитывать в качестве выходного сигнала не напряжение на каждом из конденсаторов отдельно, а их разность. Результат этой поправки представлен на (Рис.42). Видно, что колебания разности напряжений практически точно повторяют колебания вискера, за исключением некоторой асимметричности в графике механических колебаний, которая вызвана наличием электрического воздействия на вискер.

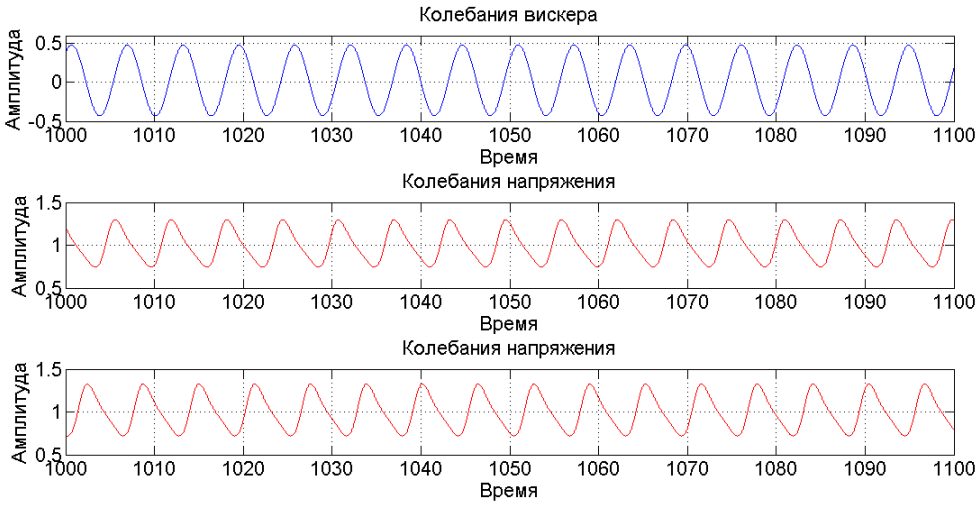

Рис. 41: Установившиеся колебания вискера и напряжений

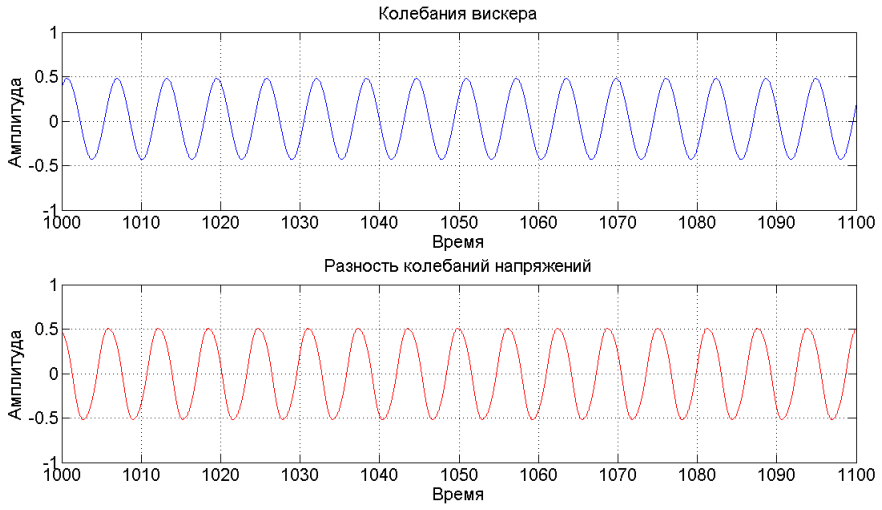

Рис. 42: Установившиеся колебания вискера и разность напряжений

В силу предложенных выше результатов, можно сделать вывод, что измерения колебания одиночного вискера лучше проводить с помощью такого датчика, его показания лучше, чем у прибора, представленного в параграфе 4.4.

5 Выводы

В работе было рассмотрен и объяснён эксперимент с одиночным вискером, колеблющемся на игле; исследована и смоделирована система, состоящая из двух вискеров, соединённых упругим элементом; рассмотрены различные емкостные датчики колебаний.

1. Решение задачи об одиночном вискере, колеблющемся на игле, объясняет природу явления, зафиксированного в эксперименте, а так же предлагает метод приближённого решения подобных проблем. Метод решения (использования операторного подхода и разложения Га-

лёркина) не увеличивает размерность задачи при увеличении количества искомых собственных частот, боле того, он учитывает особенности системы и позволяет находить только нужные собственные частоты и формы. При проверке решения, точность оказалась достаточно большой, при малых затратах вычислительной мощности, и результат совпал с результатами эксперимента. Применить использованный подход можно так же и ко многим другим задачам. Конструкция, состоящая из двух, скрепленных между собой балок встречается в строительстве домов, мостов и других сооружений, так же можно найти применение такой задаче в машиностроении и медицине.

2. Следующая задача, изученная в этой работе, это система из двух вискеров, связанных между собой упругой перемычкой, так называемый дифференциальный резонатор. Причина, по которой для измерения массы предлагается использовать именно двойные системы, а не одиночные это то, что форма колебаний дифференциального резонатора-биения. У биений есть характеристика, которую просто измерить - период или частота огибающей, которая напрямую зависит от параметров системы. Все это показано в данной работе. Изученный дифференциальный резонатор имеет аналоги, которые обладают как своими преимуществами, так и недостатками, но основной принцип работы остаётся одинаковым, что подтверждается схожестью результатов исследования вискерного резонатора с его аналогами. Одним из преимуществ дифференциального резонатора, рассмотренного в этой работе, является способ его раскачки, гарантирующий получение достаточной для наблюдений амплитуды колебаний. Основным направлением применения такой конструкции является измерение масс наночатсиц.

3. Последним этапом проведённого исследования было изучение емкостных датчиков, с помощью которых можно производить измерения колебаний нановискеров. Изучено три вида датчиков. Все они основаны на использовании вискера в качестве одной из обкладок конденсатора, подключенного в электрическую цепь. Такие устройства позволяют измерять напряжение в сети, вместо измерения амплитуды или частоты колебаний самого вискера. Это большое преимущество, так как вискер имеет очень малые размеры, как и его амплитуда, что делает её практически невозможными для точного измерения. Тогда как измерение, даже малых напряжений в цепи не представляет никаких проблем. Однако, у таких датчиков есть и недостатки, такие как нелинейность выходного сигнала. В некоторых случаях эту проблему удалось решить, но, к сожалению, только для измерения колебаний одиночного вискера.

4. Все проведённое исследование основано на экспериментах с нановискерами и направлено на их улучшение и объяснение. Понимание процессов, происходящих при натурном исследовании нанообъектов позволяет упростить и усовершенствовать эксперименты, а также сократить количество неудачных, что ведет к значительной экономии денежных средств, материалов и времени учёных-эксперементаторов.

Возможным продолжениям данной работы является исследование автоколебательных контуров, рассмотрение усложнённых углеродных конструкций и улучшение работы емкостных датчиков. Так же возможно проведение исследования, аналогичное тому, которое представлено в работе [11], то есть определение спектральных характеристик вискерных систем. В силу популярности и новизны этой области исследований, необходимо дальнейшее развитие этой работы и проведение новых экспериментов.

Список литературы

[1] Левичев В.В. Электронные и фотонные устройства: принцип работы, технологии изготовления. //Учебник, учебное пособие, Год: 2015]

[2] Я.С.Гринберг, Ю.А.Пашкин, Е.В.Ильичев. Наномеханические резонаторы.//Успехи физических наук. Т.182. №4. 2012.

[3] Левичев В.В., Жуков М.В., Мухин И.С., Денисюк А.И., Голубок А.О. Об устойчивости работы сканирующего силового микроскопа с нановискером на вершине зонда.// Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 7

[4] Голубок А.О., Ковров А.В., Левичев В.В., Мухин И.С., Приходько О.А. Формирование одиночных нановискеров на вершинах зондов сканирующего зондового микроскопа. Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2009. № 4(62). С. 82-87. [Тип: Статья, Год: 2009]

[5] Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 101 с.

[6] Фридман В. М. Теория упругих колебаний: уравнения и методы / В. М. Фридман ; Рос. акад. наук, Ин-т проблем машиноведения. - Санкт-Петербург : Наука, 2014. - 253, [1] с.; 16 усл. печ. л. - Библиогр.: с. 248-250 (61 назв.). - 500 экз. - ISBN 978-5-02-038375-3 (в пер.)

[7] Галёркин Б. Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок. // Вестник инженеров. — 1915. — Т. 1. — С. 897—908.

[8] Штукин Л.В., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф., Скубов Д.Ю. Электромеханические модели нанорезонаторов. //Физическая мезомеханика 19 1 2016г

[9] И.Е. Бринский, Д.И. Индейцев, Н.Ф. Морозов, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин. Дифференциальный резонатор как детектор массы. // Механика твердого тела. №2 2015.

[10] Д.И. Индейцев, О.С. Лобода, Н.Ф. Морозов, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин. Автоколебательный режим нанорезонатора. //Физическая мезомеханика 19 5 2016г с. 23-28

[11] Н. Ф. Морозов, И.Е. Бринский, Д.И. Индейцев, О.В. Привалова, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин. Срыв колебаний графенового резонатора, как способ определения его спектральных характеристик. ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 456, № 5, с. 1–5