

«Решение задач о колебаниях в одномерных и двумерных кристаллических решетках»

Защита выпускной квалификационной работы

студент: Васильев Максим Дмитриевич (гр.5030103/90101),
руководитель: д.ф-м.н. Кузькин Виталий Андреевич

Высшая школа теоретической механики и математической физики
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

25 июня 2023 г.

1 Колебания в одномерной цепочке

- Постановка задачи
- Решение задачи
- Перемещение в цепочке
- Скорость в цепочке
- Гармоническая сила в цепочке
- Задача с закрепленным элементом

2 Колебания в двумерной квадратной решетке

- Постановка задачи
- Аналитическое решение
- Перемещение в решетке
- Скорость в решетке
- Гармоническая сила в решетке

3 Трансфер энергии в квадратной решетке с интерфейсом

- Постановка задачи
- Проверка баланса энергии
- Определение параметров зависимости T

4 Выводы

Примеры применения кристаллов в промышленности:

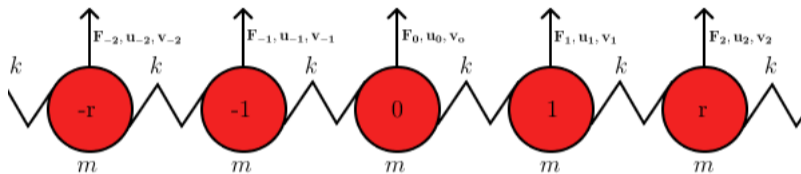
- 1 Алмазы используются в граверных инструментах, делительных машинах, аппаратах для испытания твердости, сверлах для камня и металла.
- 2 Вся часовая промышленность работает на искусственных рубинах. На полупроводниковых заводах тончайшие схемы рисуют рубиновыми иглами. В текстильной и химической промышленности рубиновые нитеводители вытягивают нити из искусственных волокон, из капрона, из нейлона.

Рассматриваемые в работе структуры являются моделями кристаллов.

Колебания в одномерной цепочке

Постановка задачи

Рассмотрим движение следующей системы:



Конфигурация одномерной цепочки

Математическая формулировка задачи

Решить дифференциальное уравнение:

$$\ddot{u}_n = \omega_*^2 (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + \frac{F_n(t)}{m} \quad \omega_* = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Со следующими начальными и граничными условиями:

$$u_n(0) = u_n^0 \quad \dot{u}_n(0) = v_n^0 \quad u_{n+N} = u_n \quad \forall n \in \left[\frac{-N+1}{2}, \frac{N-1}{2} \right]$$

Колебания в одномерной цепочке

Решение задачи

Решая поставленную задачу приходим к:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{j,k=\frac{-N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[u_k^0 \cos \Omega t + \frac{\sin \Omega t}{\Omega} v_k^0 + \frac{1}{m} \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{\Omega} d\tau \right] \cos \frac{2\pi j}{N} (n-k)$$

Переходя к пределу при ($N \rightarrow \infty$), получим следующее решение:

$$u_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^0 J_{2(n-k)}(2\omega_* t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[v_k^0 \frac{\sin \Omega_s t}{\Omega_s} + \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega_s(t-\tau))}{m\Omega_s} d\tau \right] * \cos(2s(n-k)) ds$$

Здесь введены обозначения:

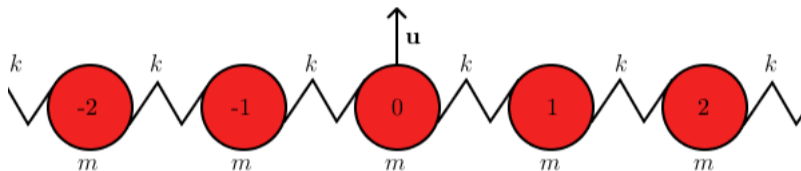
$$\Omega = 2\omega_* \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad \omega_* = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Omega_s = 2\omega_* \sin s$$

Далее рассмотрим частные случаи задания начальных условий и внешних силовых нагрузок.

Колебания в одномерной цепочке

Перемещение в цепочке

Рассмотрим следующий частный случай решенной ранее задачи:



Перемещение в центре цепочки

Соответствующие начальные условия имеют вид:

$$u_n(0) = \begin{cases} u_0^0, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad \dot{u}_n(0) = 0 \quad \forall n; \quad u_{n+N} = u_n$$

Колебания в одномерной цепочке

Перемещение в цепочке

Решение задачи в данной постановке имеет вид:

1 Для конечной цепочки:

$$u_n = \frac{u_0^0}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[\cos(\Omega t) \cos \frac{2\pi j n}{N} \right]$$

2 Для бесконечной цепочки:

$$u_n = u_0^0 J_{2n}(2\omega_* t)$$

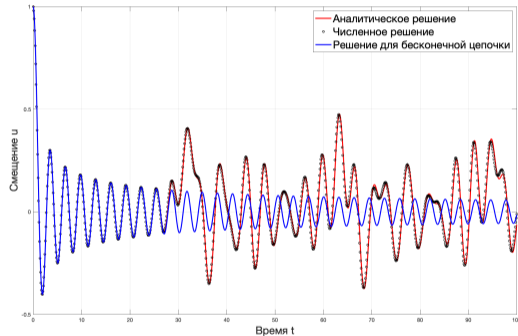
Если устремить $t \rightarrow \infty$, то можно получить асимптотическую формулу для бесконечной цепочки (для больших времен):

$$u_n \sim u_0^0 \sqrt{\frac{1}{\pi\omega_* t}} \cos\left(2\omega_* t - \pi n - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Колебания в одномерной цепочке

Перемещение в цепочке

- 1 Колебания в бесконечной цепочке будут затухать с течением времени пропорционально $\sqrt{\frac{1}{t}}$
- 2 С течением времени колебания станут гармоническими с частотой $2\omega_*t$
- 3 Графики для бесконечной и конечной цепочек совпадают до определенного момента, после чего расходятся. Это объясняется возвратом отраженной от границы волны.



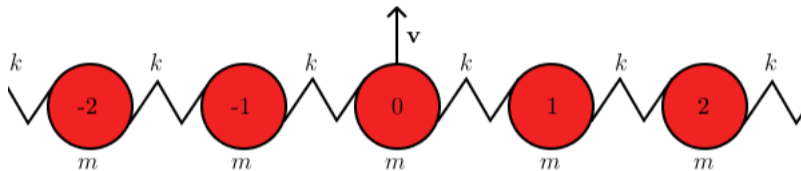
Перемещения центрального элемента цепочки.

$$\Delta t = 0.1, \omega_* = 1, N = 31, n = 0, u_0^0 = 1$$

Колебания в одномерной цепочке

Скорость в цепочке

Рассмотрим следующий частный случай решенной ранее задачи:



Скорость в цепочке

Соответствующие начальные условия имеют вид:

$$u_n(0) = 0 \quad \forall n \quad \dot{u}_n(0) = \begin{cases} v_0^0, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad u_{n+N} = u_n$$

Колебания в одномерной цепочке

Скорость в цепочке

Решение задачи в данной постановке имеет вид:

1 Для конечной цепочки:

$$u_n = \frac{v_0^0}{N} \sum_{j=\frac{-N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[\frac{\sin \Omega t}{\Omega} \cos \frac{2\pi j n}{N} \right]$$

2 Для бесконечной цепочки:

$$u_n = \frac{v_0^0 \Gamma(|n| + \frac{1}{2}) t}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{|n|} \left(\frac{{}_2F_1 \left([r + \frac{1}{2}], [\frac{3}{2}, |n| + 1], -\omega^2 t^2 \right) (-1)^r}{\Gamma(1 + |n| - r) \Gamma(r + 1)} \right)$$

Здесь введены следующие обозначения: ${}_pF_q$ - обобщенная гипергеометрическая функция, $\Gamma(z)$ - Гамма-функция.

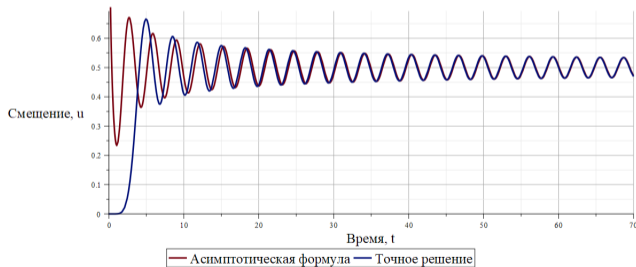
Колебания в одномерной цепочке

Скорость в цепочке

Если устремить $t \rightarrow \infty$, то можно получить асимптотическую формулу для бесконечной цепочки (для больших времен):

$$u_n \underset{(t \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{v_0^0}{2\omega_*} - \frac{\cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})(-1)^n}{2\omega_*^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Сравним полученные асимптотическую формулу и точное решение:



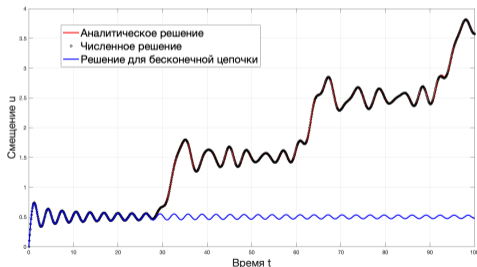
$$n = 3, \omega_* = 1, t = [0; 70], dt = 0.01, v_0^0 = 1$$

Колебания в одномерной цепочке

Скорость в цепочке

- 1 В конечной цепочке перемещения всех ее элементов стремятся к ∞ с течением времени
- 2 В бесконечной цепочке перемещения всех ее элементов конечны
- 3 С течением времени колебания в цепочке затухают по закону $\sqrt{\frac{1}{t}}$
- 4 С течением времени в бесконечной цепочке устанавливаются гармонические колебания с частотой $2\omega_*$
- 5 Центр тяжести бесконечной цепочки смещается на величину $\frac{v_k^0}{2\omega_*}$

- 1 Все четные элементы имеют одинаковые асимптотические формулы при $t \rightarrow \infty$. Нечетные также имеют одинаковые асимпт. формулы (между собой), но другие.

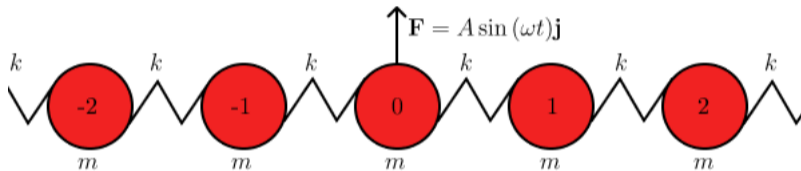


$$\Delta t = 0.1, \omega_* = 1, N = 31, n = 0, v_0 = 1$$

Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

Рассмотрим следующий частный случай решенной ранее задачи:



Гармоническая сила в цепочке

Соответствующие начальные условия имеют вид:

$$u_n(0) = 0 \quad \forall n \quad \dot{u}_n(0) = 0 \quad \forall n \quad F_n = \begin{cases} A \sin(\omega t), & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad u_{n+N} = u_n$$

Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

В данном случае будем иметь следующее решение:

$$u_n = \frac{A}{mN} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right)$$

Рассмотрим 2 случая: $\Omega = \omega$ и $j = 0$:

$$\frac{A}{mN} \lim_{\omega \rightarrow \Omega} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right) = \frac{A}{mN} \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t \cos(\omega t)}{2\Omega^2} \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right)$$

$$\frac{A}{mN} \lim_{j \rightarrow 0} \left[\frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} = \frac{\Omega(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega t))}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \right] = \frac{A}{mN} \frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^2}$$

Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

- 1 При $\Omega = \omega$ имеем нелинейный рост координаты со временем. Это значит, что частоты $\Omega = \omega$ являются резонансными для данной системы. Отсюда также следует, что их ровно N .
- 2 При $j \rightarrow 0$ имеем слагаемое, дающее нелинейный рост координаты любого элемента цепочки со временем - это значит, что при любой частоте ω цепочка будет бесконечно удаляться от своего исходного положения.

Проверим выполнение баланса количества движения:

$$M\ddot{\mathbf{R}}_c = A \sin(\omega t)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{R}_c(0) = 0 \quad \dot{\mathbf{R}}_c(0) = 0$$

Отсюда получим:

$$\mathbf{R}_c = \frac{A}{M} \left(\frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^2} \right) \mathbf{j}$$

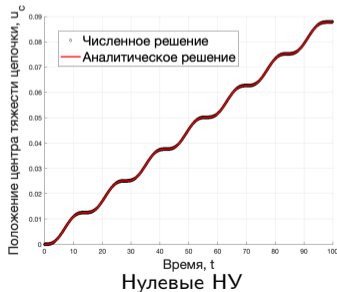
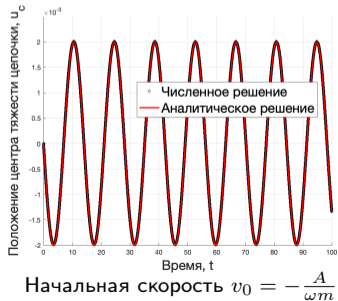
Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

Вычислим движение центра тяжести цепочки:

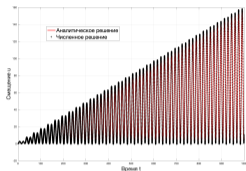
$$u_c = \frac{A}{mN^2} \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \cos \frac{2\pi j n}{N} = \frac{A(\omega t - \sin(\omega t))}{Nm\omega^2}$$

Движение центра тяжести цепочки, полученное из фундаментального закона полностью совпадает с полученным при решении задачи.

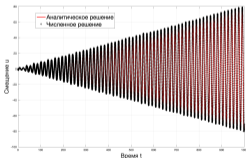


Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

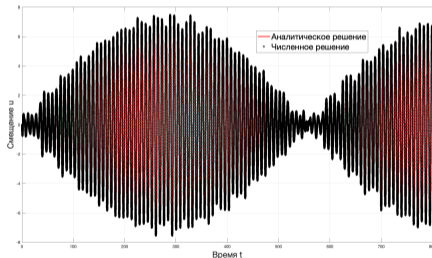


Движение центрального элемента цепочки на резонансной частоте



Движение центрального элемента цепочки на резонансной частоте и с заданной начальной скоростью $v_0 = -\frac{A}{\omega t}$

Частота огибающей биений равна $\frac{|\omega - \Omega|}{2}$, что совпадает с теоретическими выкладками.



Движение центрального элемента цепочки на частоте, близкой к резонансной

Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

Решение для бесконечной цепочки:

$$u_n = \frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Omega_s \sin \omega t - \omega \sin \Omega_s t}{\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \cos(2sn) ds$$

Асимптотические формулы при $t \rightarrow \infty$. Валидация на [Hemmer 1959]

1 При $\omega < 2\omega_*$:

$$u_n \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{2m\omega\omega_*} - \frac{A \cos(\omega t - 2|n|\phi(\omega))}{m\omega\sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2}} - \frac{A\omega \cos(\pi n) \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})}{2m\omega_*^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}(\omega^2 - 4\omega_*^2)} \sqrt{\frac{1}{t}}$$

2 При $\omega = 2\omega_*$:

$$u_n \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{2m\omega\omega_*} - \frac{A \cos(2\omega_* t - \frac{\pi}{4})(-1)^n}{2\sqrt{\pi}\omega_*^{\frac{3}{2}}m} \sqrt{t} + C_{n3} \sin(\omega t)$$

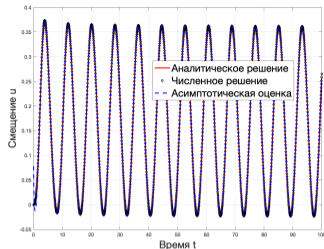
3 При $\omega > 2\omega_*$:

$$u_n \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{2m\omega\omega_*} + C_{n1} \sin(\omega t) - \frac{A\omega \cos(n\pi) \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})}{2m\omega_*^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}(\omega^2 - 4\omega_*^2)} \sqrt{\frac{1}{t}}$$

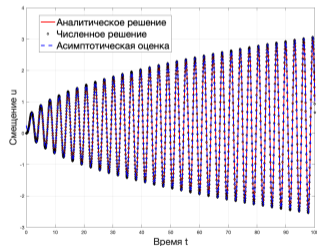
Колебания в одномерной цепочке

Гармоническая сила в цепочке

- 1 Во всех трех случаях в системе устанавливаются колебания с частотой вынуждающей силы;
- 2 В первом и третьем случаях колебания на частоте $2\omega_*$ затухают со скоростью $\sim \sqrt{\frac{1}{t}}$;
- 3 При $\omega = 2\omega_*$ амплитуда колебаний элементов цепочки будет расти $\sim \sqrt{t}$;
- 4 Центр тяжести цепочки смещается на величину $\frac{A}{2m\omega\omega_*}$, равную смещению центра тяжести цепочки, к которой приложена скорость величиной $v_0 = \frac{A}{\omega m}$.



$$\omega = 1\omega_*$$

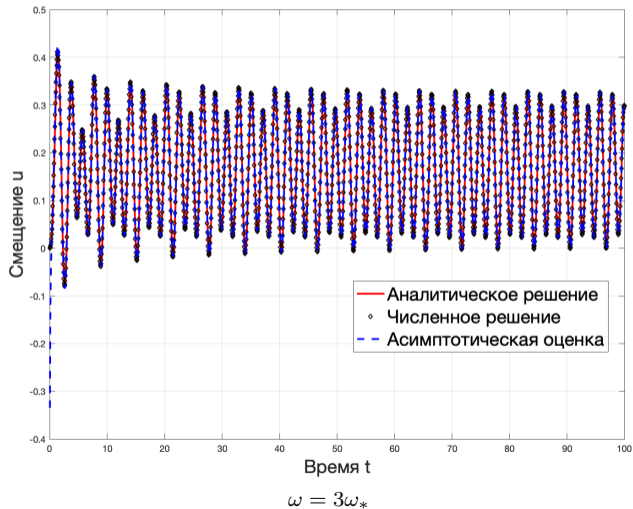


$$\omega = 2\omega_*$$

Сравнение численных и асимптотических решений с асимптотическими оценками на больших временах

Колебания в одномерной цепочке

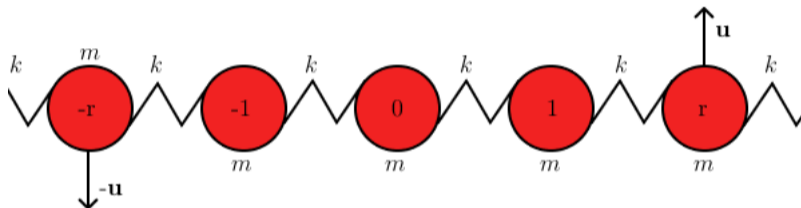
Гармоническая сила в цепочке



Колебания в одномерной цепочке

Задача с закрепленным элементом

Рассмотрим бесконечную цепочку со следующими начальными условиями:



Симметричное относительно центра цепочки перемещение двух элементов

Ее решение уже было получено ранее:

$$u_n(t) = J_{2(n-r)}(2\omega_*t) - J_{2(n+r)}(2\omega_*t)$$

Предлагается иное решение для данной задачи

Колебания в одномерной цепочке

Задача с закрепленным элементом

Запишем уравнение динамики для данной задачи в следующем виде:

$$\ddot{u}_n = \omega_*^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - \omega_*^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})\delta(n)$$

Из него видно, что $\ddot{u}_0 = 0 \rightarrow u_0 \equiv 0$. Тогда применим ДПФ к этому уравнению:

$$\hat{u}_j = -\Omega^2 \hat{u}_j - \omega_*^2(u_1 - 2u_0 + u_{-1}) \quad \hat{u}_j(0) = e^{\frac{2\pi I r j}{N}} \quad \dot{\hat{u}}_j(0) = 0$$

По постановке задачи можем принять: $u_0 = 0$ $u_{-1} = 0$. Тогда, используя прямое и обратное преобразование Лапласа, получим:

$$\hat{u}_j = \cos \Omega t e^{\frac{2\pi I r j}{N}} - \omega_*^2 \int_0^t \frac{u_1(\tau) \sin \Omega(t - \tau)}{\Omega} d\tau$$

Найдем u_1 как решение не модифицированной задачи. Тогда, подставляя и интегрируя, придем к решению в виде:

Колебания в одномерной цепочке

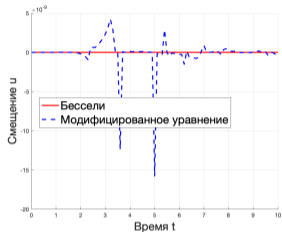
Задача с закрепленным элементом

$$u_n = \int_{-1/2}^{1/2} [\cos \Omega_X t \cos 2\pi x(r - n) - \omega_*^2 \cos 2\pi x n \int_0^t \frac{(J_{2(1-r)}(2\omega_*\tau) - J_{2(1+r)}(2\omega_*\tau)) \sin \Omega_X(t - \tau)}{\Omega_X} d\tau] dx$$

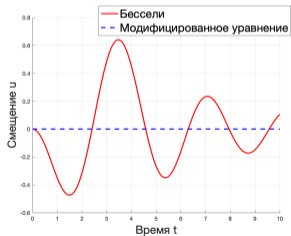
Здесь использовано обозначение $\Omega_X = 2\omega_* \sin \pi x$. Полученное решение будет совпадать с приведенным ранее, если $r \geq 1$ и $n \geq 0$. В случае, если $n < 1$, то ПЧ полученного решения тождественно равна нулю.

Колебания в одномерной цепочке

Задача с закрепленным элементом

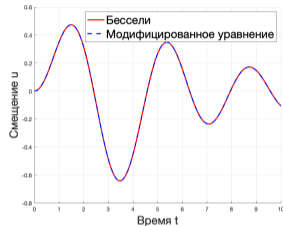


$n = 0$

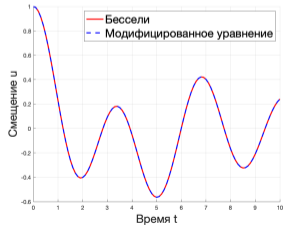


$n = -1$

$$\omega_* = 1, \Delta t = 0.1, N = 11, r = 2$$



$n = 1$

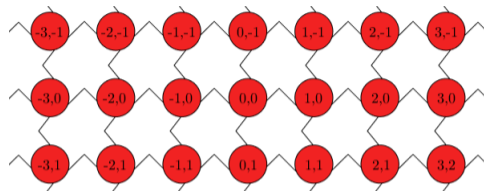


$n = 2$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Постановка задачи

Рассмотрим движение следующей системы:



Конфигурация двумерной цепочки. Жесткости всех связей одинаковы и равны k . Массы всех элементов также одинаковы и равны m_*

Математическая формулировка задачи

Решить дифференциальное уравнение:

$$\ddot{u}_{n,m} = \omega_*^2 (u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} - 4u_{n,m}) + \frac{F_{n,m}(t)}{m_*}$$

Со следующими начальными и граничными условиями:

$$u_{n,m}(0) = u_{n,m}^0, \quad \dot{u}_{n,m}(0) = v_{n,m}^0, \quad u_{n,m} = u_{n+N,m+M}$$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Аналитическое решение

Решение для конечной цепочки:

$$u_{n,m} = \frac{1}{NM} \sum_{k,l} \sum_{i,j} \left[u_{k,l}^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} v_{k,l}^0 + \int_0^t \frac{F_{k,l}(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{m_* \Omega} d\tau \right] e^{2\pi I \left(\frac{i(n-k)}{N} + \frac{j(m-l)}{M} \right)}$$

Для бесконечной:

$$u_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k,l} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[u_{k,l}^0 \cos(\Omega_{s,q} t) + \frac{\sin(\Omega_{s,q} t)}{\Omega_{s,q}} v_{k,l}^0 + \int_0^t \frac{F_{k,l}(\tau) \sin(\Omega_{s,q}(t-\tau))}{m_* \Omega_{s,q}} d\tau \right] e^{2I(s(n-k)+q(m-l))} ds dq$$

В нижней формуле суммирование по k и l ведется в бесконечных пределах

Колебания в двумерной квадратной решетке

Перемещение в решетке

При задании начального перемещения на элементе с индексом $(0,0)$, получим следующие формулы для перемещений:

1 Для конечной решетки:

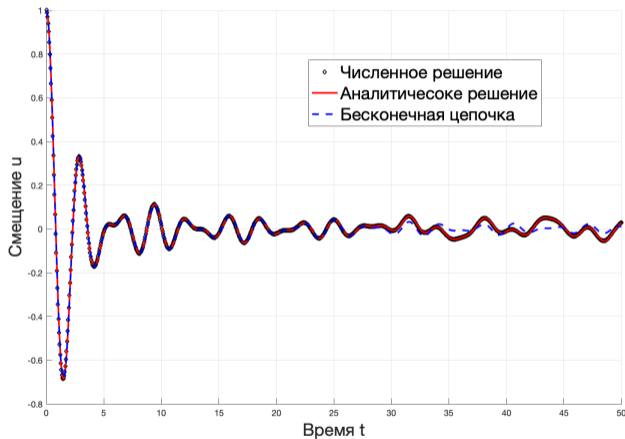
$$u_{n,m} = \frac{u_{0,0}^0}{NM} \sum_{i,j} \cos(\Omega t) \cos\left(2\pi\left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M}\right)\right)$$

2 Для бесконечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{u_{0,0}^0}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\Omega_{s,q} t) \cos(2(sn + qm)) ds dq$$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Перемещение в решетке



Перемещение центрального элемента двумерной решетки, к центральному элементу которого приложено единичное перемещение. $\Delta t = 0.02, \omega_* = 1, N = 31, M = 31, n = 0, m = 0, u_{0,0} = 1$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Скорость в решетке

При задании начальной скорости у элемента с индексом $(0,0)$, получим следующие формулы для перемещений:

Для конечной решетки:

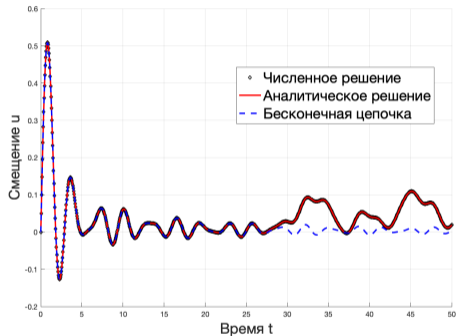
$$u_{n,m} = \frac{v_{0,0}^0}{NM} \sum_{i,j} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \cos\left(2\pi\left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M}\right)\right)$$

Для бесконечной решетки:

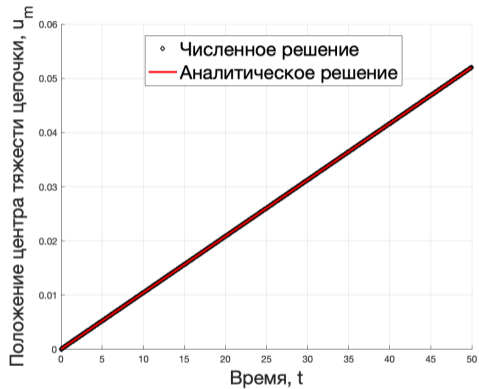
$$u_{n,m} = \frac{v_{0,0}^0}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\Omega_{s,q} t)}{\Omega_{s,q}} \cos(2(sn + qm)) dsdq$$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Скорость в решетке



Перемещение центрального элемента двумерной решетки, к центральному элементу которого приложена единичная скорость $v_{0,0}^0 = 1$



Перемещение центра тяжести двумерной решетки, к центральному элементу которого приложена единичная скорость $v_{0,0}^0 = 1$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Гармоническая сила в решетке

При приложении гармонической силы по закону $A \sin \omega t$ к элементу с индексом $(0,0)$, получим следующие формулы для перемещений:

1 Для конечной решетки:

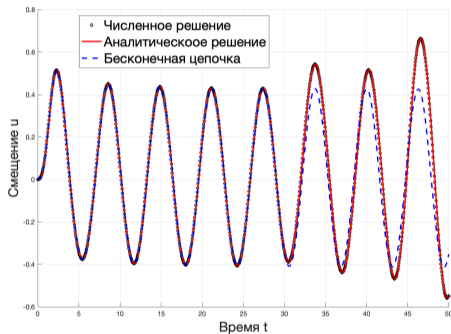
$$u_{n,m} = \frac{A}{NM} \sum_{i,j} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{m_* \Omega (\Omega^2 - \omega^2)} \cos \left(2\pi \left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M} \right) \right)$$

2 Для бесконечной решетки:

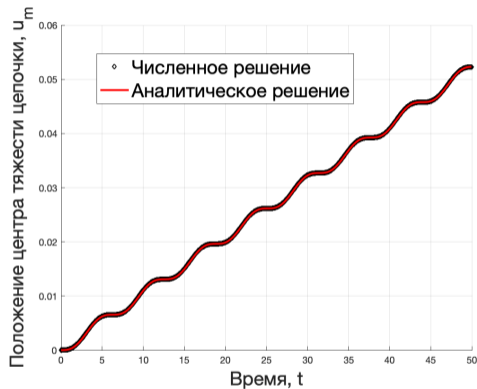
$$u_{n,m} = \frac{A}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_{s,q} \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_{s,q} t)}{m_* \Omega_{s,q} (\Omega_{s,q}^2 - \omega^2)} \cos(2(sn + qm)) dsdq$$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Гармоническая сила в решетке



Перемещение центрального элемента двумерной решетки, к центральному элементу которого приложена периодическая сила $F_{0,0} = A \sin \omega t$



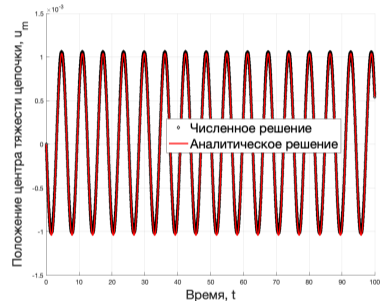
Перемещение центра тяжести двумерной решетки, к центральному элементу которого приложена периодическая сила $F_{0,0} = A \sin \omega t$

Колебания в двумерной квадратной решетке

Гармоническая сила в решетке

Если задать на центральном элементе начальную скорость по формуле $v_{0,0}^0 = -\frac{A}{\omega m}$, то получим следующий график для движения центра масс:

Видно, что центр масс колеблется около своего начального положения. Также было и в одномерном случае.



Перемещение центра тяжести двумерной решетки, к центральному элементу которого приложена периодическая сила $F_{0,0} = A \sin \omega t$ и начальная скорость $v_{0,0}^0 = -\frac{A}{\omega m}$

Колебания в двумерной квадратной решетке

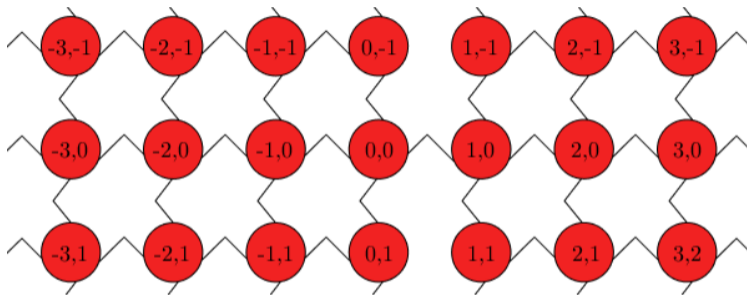
Гармоническая сила в решетке

- 1 Полученные для 2D квадратной решетки решения очень похожи на те, которые были получены для одномерной цепочки;
- 2 Справедливыми остаются утверждения, сделанные про движение центра масс одномерной цепочки;
- 3 Количество собственных частот в двумерной решетке равно NM - по количеству степеней свободы в решетке.

Трансфер энергии в квадратной решетке с интерфейсом

Постановка задачи

Будем рассматривать следующую колебательную систему:



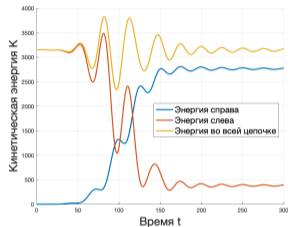
Конфигурация двумерной решетки с интерфейсом. Массы всех элементов одинаковы и равны m_* . Жесткости всех цепочек одинаковы и равны k

В левой части решетки будем задавать плоскопараллельную волну, движущуюся в сторону интерфейса [Schelling, 2002]. Основным интересом представляет определение величин, от которых зависит коэффициент прохождения интерфейса.

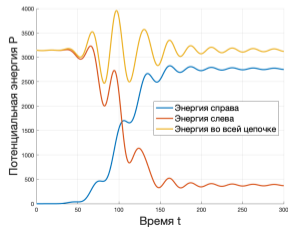
Трансфер энергии в квадратной решетке с интерфейсом

Проверка баланса энергии

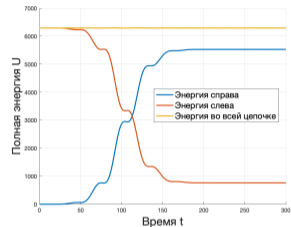
Сначала проверим, выполняется ли закон сохранения энергии в этой системе:



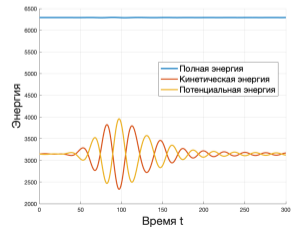
Кинетическая энергия



Потенциальная энергия



Полная энергия



K, U, P по всей цепочке

Трансфер энергии в квадратной решетке с интерфейсом

Определение параметров зависимости T

В соответствии с π - теоремой, коэффициент прохождения T может зависеть только от следующих безразмерных величин:

- 1 k_1 - частота волн внутри волнового пакета;
- 2 β - частота огибающей волнового пакета;
- 3 $\frac{g_1}{a\omega_*}$ - отношение групповой скорости в цепочке к параметру самой цепочки
($\omega_* = \sqrt{\frac{k}{m_*}}, a = 1$);
- 4 $\frac{U_0}{a}$ - отношение амплитуды огибающей волнового пакета к расстоянию между частицами ($a = 1$);
- 5 $\frac{w}{M}$ - относительный размер отверстия.

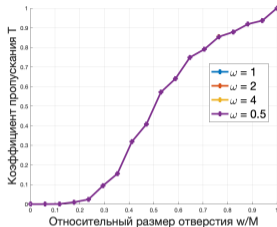
Исследуем зависимость коэффициента прохождения от указанных выше зависимостей

Трансфер энергии в квадратной решетке с интерфейсом

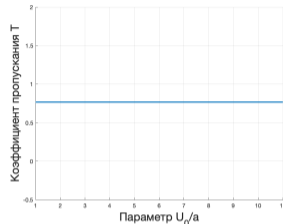
Определение параметров зависимости T

Из полученных графиков можно сделать вывод:

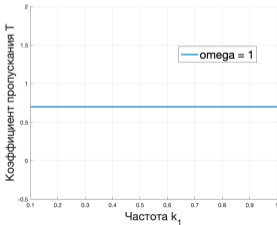
Коэффициент прохождения T зависит только от относительной толщины интерфейса $\frac{w}{M}$ и не зависит ни от каких других параметров задачи.



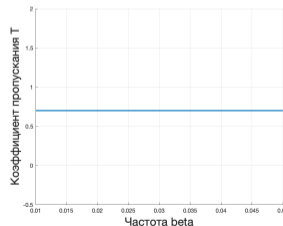
Зависимость $T(\frac{w}{M})$ для разных ω_*



Зависимость $T(\frac{U_0}{a})$



Зависимость $T(k_1)$



Зависимость $T(\beta)$

Выводы

В ходе выполнения работы были получены следующие основные результаты:

- 1 Выражения для перемещений элементов одномерных и двумерных (квадратных) кристаллов при задании произвольных НУ и силовых воздействий;
- 2 Получены асимптотические формулы для перемещений элементов одномерной цепочки, к центральному элементу которой приложена гармоническая сила.
- 3 Предложен новый способ решения задачи с закрепленным элементом для одномерной решетки, который можно рассматривать как метод решения интегральных уравнений специального вида;
- 4 Определено, что коэффициент прохождения плоскопараллельной волны в двумерной решетке через интерфейс специального вида зависит только от относительного размера отверстия в интерфейсе.

Дальнейшие исследования

В продолжение настоящей работы можно исследовать следующие вопросы:

- 1 Вывод асимптотических оценок для перемещений на больших временах в двумерной квадратной решетке
- 2 Вывод аналитической формулы для коэффициента прохождения энергии через интерфейс в двумерной квадратной решетке

Спасибо за внимание!

Использованные методы

В настоящей работе были использованы следующие методы:

- 1 Одномерное и двумерное дискретные преобразования Фурье (ДПФ)
- 2 Преобразование Лапласа
- 3 Метод стационарной фазы
- 4 Метод Верле
- 5 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

Начальные условия для задачи с интерфейсом

Начальные условия в левой части решетки [Schelling, 2002]

$$u_{n,m} = B_{n,m} \sin(k_1 n), \quad B_{n,m} = U_0 \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}(n - n_0)^2\right)$$

$$v_{n,m} = -B_{n,m} [\Omega \cos(k_1 n) - \beta^2 g_1 (n - n_0) \sin(k_1 n)]$$

$$g_1 = \frac{a}{2\Omega} \sqrt{\Omega^2 \left(\frac{4k}{m_*} - \Omega^2\right)}, \quad \Omega = 2\sqrt{\frac{k}{m_*}} \sin\left(\frac{k_1}{2}\right),$$

$$n \in (n_1, n_2), \quad m \in \left(\frac{-M+1}{2}, \frac{M-1}{2}\right)$$

где U_0 — амплитуда волнового пакета, n_0 - координата центра волнового пакета, k_1 - частота волн внутри волнового пакета, β - частота огибающей волнового пакета, a - равновесное расстояние между элементами решетки (оно полагается равным единице).