



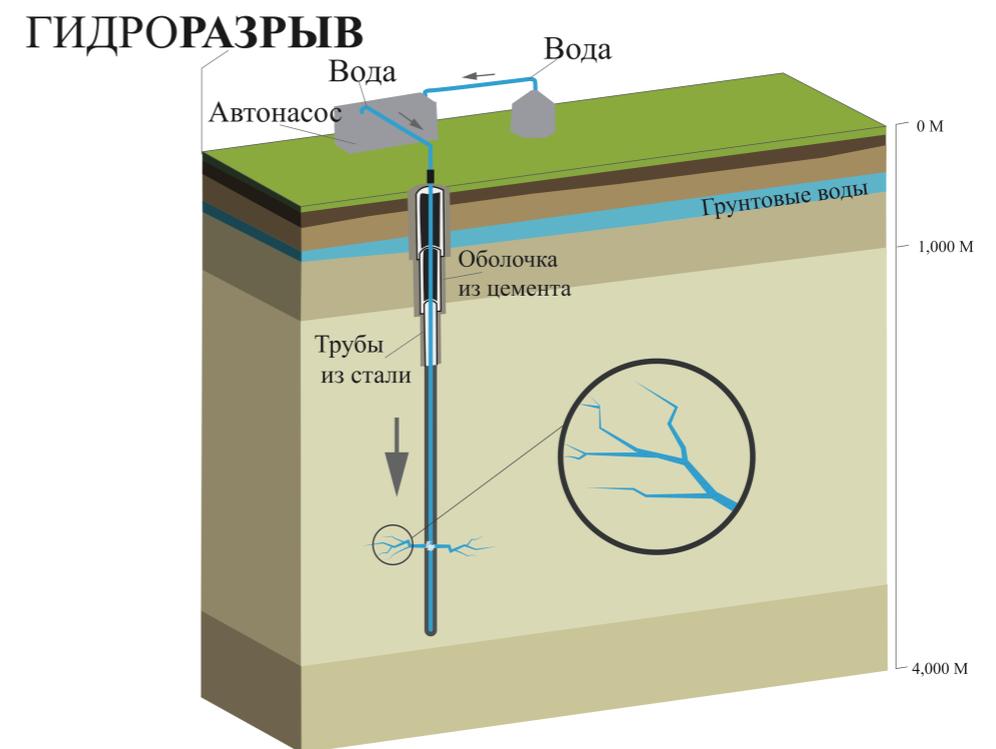
Исследование деформирования горных пород

Кафедра «Теоретическая механика»

Научный руководитель: В.А.Кузькин  
Научный руководитель: ОАО «Газпроменнефть» С.В.Лукин  
выполнил И.С.Чебышев

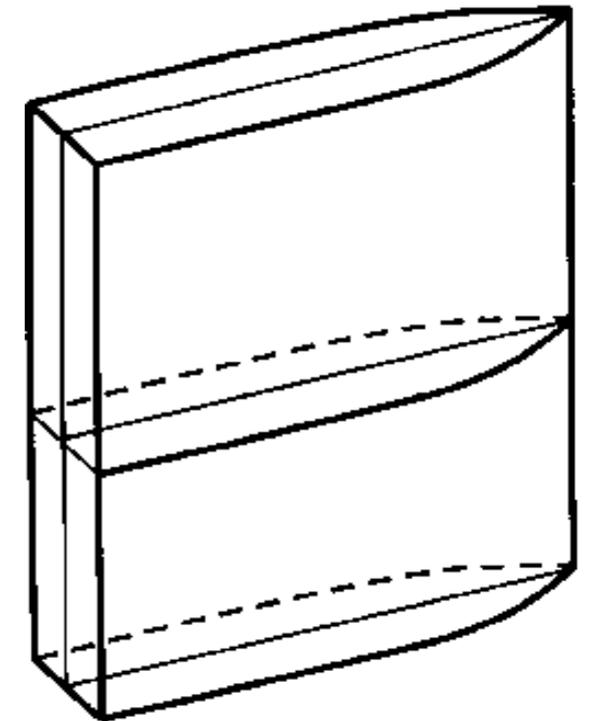


Под гидроразрывом пласта понимают создание высокопроводящей трещины с помощью закачки жидкости и расклинивающего агента – проппанта, который удерживает трещину в открытом состоянии



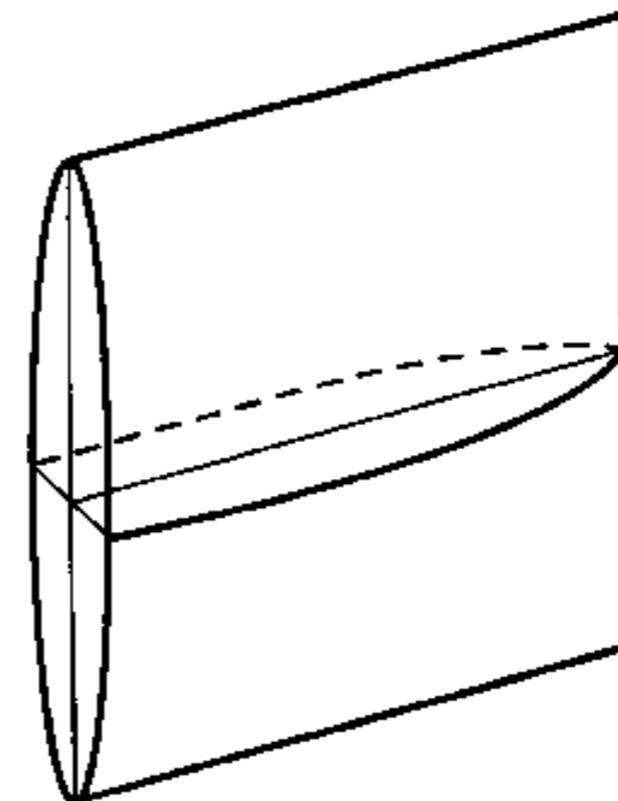
## 1. Модель Христиановича-Желтова-Гиртсма-де Клерка

- $L \ll H$
- Описывает начало распространения трещины



## 2. Модель Перкинса - Керна

- Для трещины  $L \gg H$
- Дальнейшее распространение трещины





1. Реализовать симулятор раскрытия трещин
2. Исследовать рост трещины гидроразрыва пласта на основе подхода Нордгрена
3. Проанализировать влияние вязкости на раскрытие
4. Найти корреляцию динамического и статического модуля Юнга для горных пород



# Постановка задачи



Запишем уравнение баланса массы:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = q_e$$

На основе теории смазки представим:

$$\mathbf{q} = -D(w, p) \nabla p$$

Получим уравнение для раскрытия:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D(w, p) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = q_e$$

В случае ньютоновской жидкости  $D$  имеет вид:

$$D(w, p) = \frac{w^3}{12\mu}$$

Трещины высотой  $h$  под воздействием плоских деформаций и давления следующего вида [Nordgren, 1972, SPE3009]:

$$p = kw, \quad k = \frac{2E}{\pi h(1-\nu^2)}$$

$q_e$  утечки в пласт равны нулю

$q$  поток жидкости на левом краю трещины

$w$  раскрытие трещины

$\mu$  вязкости потока жидкости

$E$  модуль Юнга

$\nu$  коэф. Пуассона



Тогда уравнение раскрытия примет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( w^3 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

Граничные условия

$$\frac{k w^3}{12\mu} \frac{\partial w}{\partial x} = q_0 \quad w|_{x=L} = w_0$$

Начальные условия

$$w|_{t=0} = w_0$$





# Тестовая Задача



Рассмотрим линейное дифф. уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Численная конечно-разностная явная схема:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = a^2 \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}; i = 1, \dots, N,$$

$h$  - расстояние между соседними узлами

$\tau$  - временной шаг

Г.У.  $U|_{x=L} = U_L \quad U|_{x=0} = U_0$

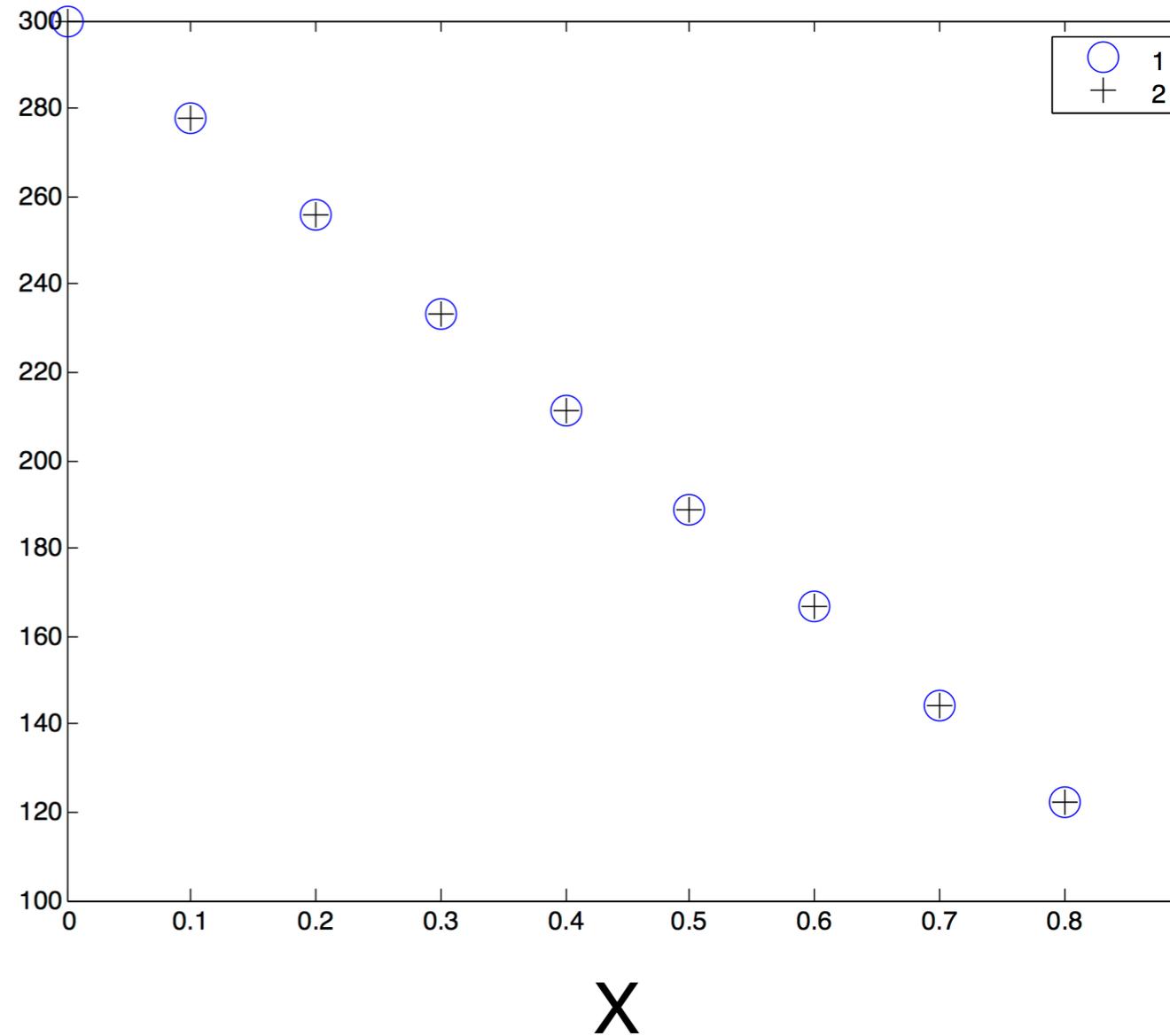
Н.У.  $U|_{t=0} = U_{t0}$

1 - Численное решение

2 - Аналитическое решение

$$U(x) = C_1 x + C_2$$

⊃





# Тестовая Задача



Рассмотрим линейное дифф. уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Численная конечно-разностная неявная схема, метод прогонки:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = a^2 \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}; i = 1, \dots, N,$$

$$A_i U_{i+1}^{j+1} - B_i U_i^{j+1} + C_i U_{i-1}^{j+1} = F_i,$$

$$A_i = C_i = \frac{a^2}{h^2}, B_i = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{\tau}, F_i = -\frac{1}{\tau} U_i^j$$

$$U_i^{j+1} = \alpha_i U_{i+1}^{j+1} + \beta_i$$

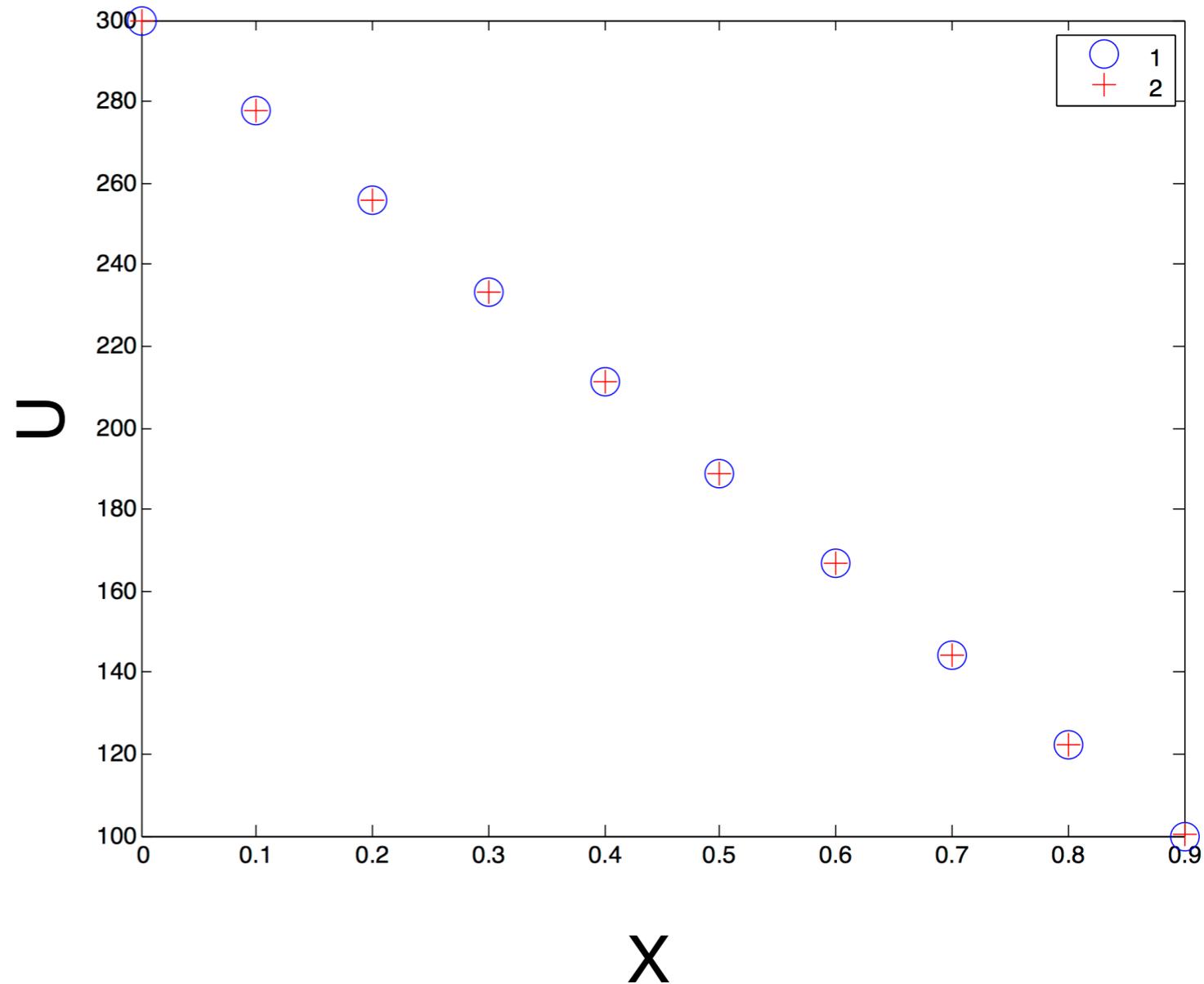
$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}$$

Г.У.  $U|_{x=L} = U_L \quad U|_{x=0} = U_0$

Н.У.  $U|_{t=0} = U_{t0}$

1 - Численное решение

2 - Аналитическое решение  $U(x) = C_1 x + C_2$





# Тестовая Задача



Рассмотрим линейное дифф. уравнение с потоком на границе

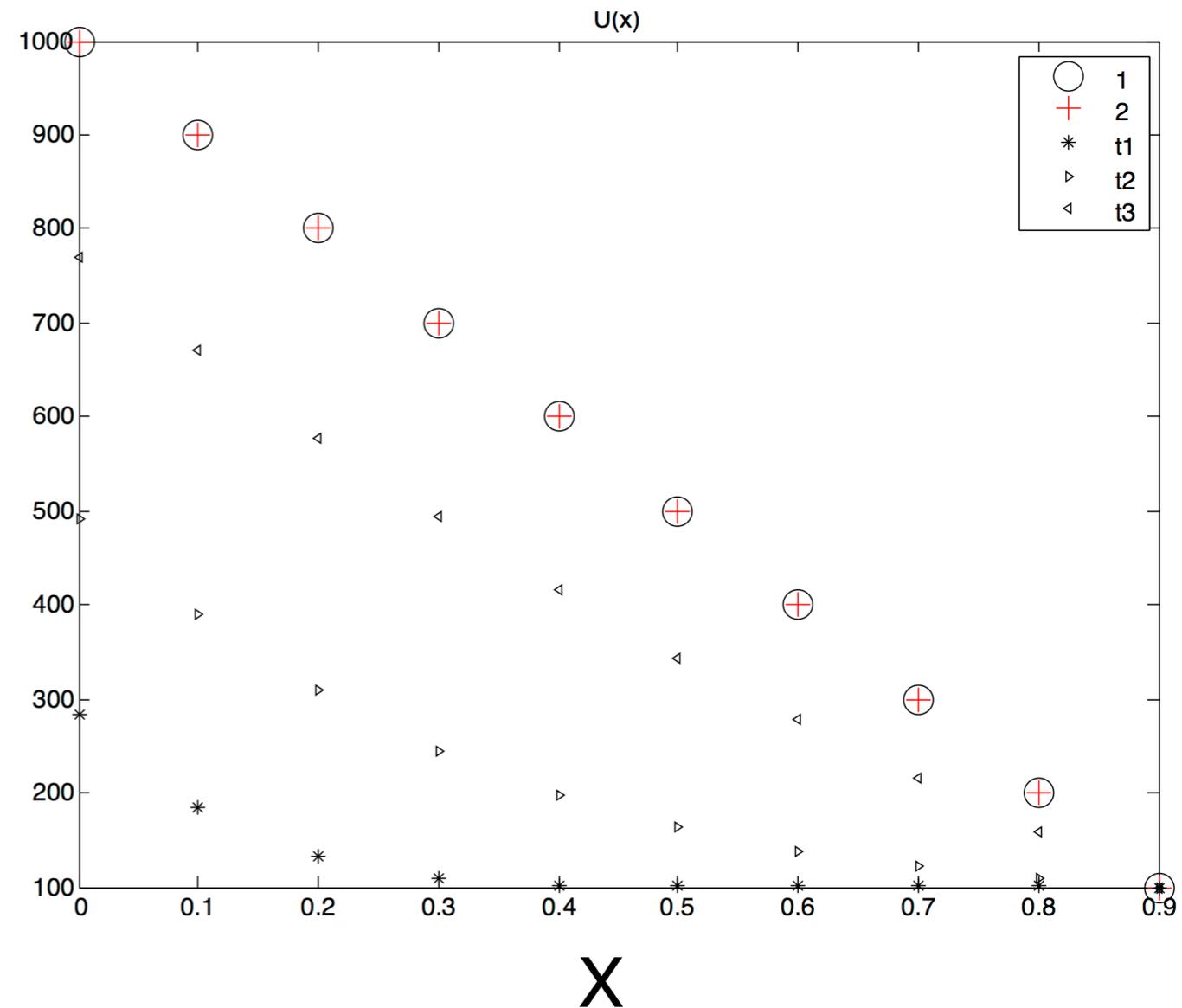
$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Численная конечно-разностная неявная схема, метод прогонки:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = a^2 \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}; i = 1, \dots, N, \quad \supset$$

Г.У.  $a^2 \frac{\partial U}{\partial x} |_{x=0} = q_0 \quad U|_{x=L} = U_L$

Н.У.  $U|_{t=0} = U_{t_0}$



t1, t2, t3 - несколько моментов времени

1 - Численное решение

2 - Аналитическое решение (Стационарное)

$$U(x) = C1x + C2$$

$$C1 = \frac{q_0}{a^2}, C2 = U_L - L \frac{q_0}{a^2}$$



$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{k}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( w^3 \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$w$  раскрытие трещины

## Неявная конечно-разностная схема по Кранку-Николсону

$$U_i^{j+1} - U_i^j = \left[ \frac{1}{2} (A_i^{j+1} U_{i-1}^{j+1} - 2B_i^{j+1} U_i^{j+1} + D_i^{j+1} U_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2} (1 - (A_i^j U_{i-1}^j - 2B_i^j U_i^j + D_i^j U_{i+1}^j)) \right]$$

$A, B, D$  зависят от  $w^3$

$$(w_{i \pm \frac{1}{2}}^j)^3 = \frac{(w_i^j)^3 + (w_{i \pm 1}^j)^3}{2}$$

$$(w_{i \pm \frac{1}{2}}^{j+1})^3 = \frac{(w_i^{j+1})^3 + (w_{i \pm 1}^{j+1})^3}{2}$$

$$A_i^j = \left( w_{i-\frac{1}{2}}^j \right)^3 r, \quad A_i^{j+1} = \left( w_{i-\frac{1}{2}}^{j+1} \right)^3 r$$

$$D_i^j = \left( w_{i+\frac{1}{2}}^j \right)^3 r, \quad D_i^{j+1} = \left( w_{i+\frac{1}{2}}^{j+1} \right)^3 r$$

$$\frac{dt}{dx^2} \frac{k}{12\mu} = r$$

$$B_i^j = \frac{1}{2} (A_i^j + D_i^j), \quad B_i^{j+1} = \frac{1}{2} (A_i^{j+1} + D_i^{j+1})$$



СНАУ:  $\rightarrow \begin{cases} T_1^{(k+1)} = T_1^{(k)} + \Delta T_1^{(k)} \\ \vdots \\ T_N^{(k+1)} = T_N^{(k)} + \Delta T_N^{(k)} \end{cases} ; \rightarrow \text{Линеаризация} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A(1,1)\Delta T_1^{(k,j)} & A(1,2)\Delta T_2^{(k,j)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A(1,1)\Delta T_1^{(k,j)} & A(1,2)\Delta T_2^{(k,j)} & A(1,2)\Delta T_3^{(k,j)} & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & A(1,2)\Delta T_2^{(k,j)} & A(1,2)\Delta T_3^{(k,j)} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A(N-1, N-3)\Delta T_{N-2}^{(k,j)} & A(N-1, N-2)\Delta T_{N-2}^{(k,j)} & A(N-1, N-1)\Delta T_{N-2}^{(k,j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A(N-1, N-2)\Delta T_{N-1}^{(k,j)} & A(N-1, N-1)\Delta T_{N-1}^{(k,j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0 \\ B_2^{(k,j)} \\ \vdots \\ B_{N-1}^{(k,j)} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  Условие сходимости метода Ньютона:  $|\Delta T^{(k+1)} - \Delta T^{(k)}| \leq \varepsilon$



# Проверка численной схемы на сходимость



Параметр	Обозначение	Величина
Модуль Юнга, ГПа	$E$	24
Вязкость жидкости, Па · с	$\mu$	0.008
Коэффициент Пуассона	$\nu$	0.2
Высота Трещины, м	$h$	1
Поток, м <sup>2</sup> /с	$q_0$	0.01
Длина Трещины, м	$L$	1

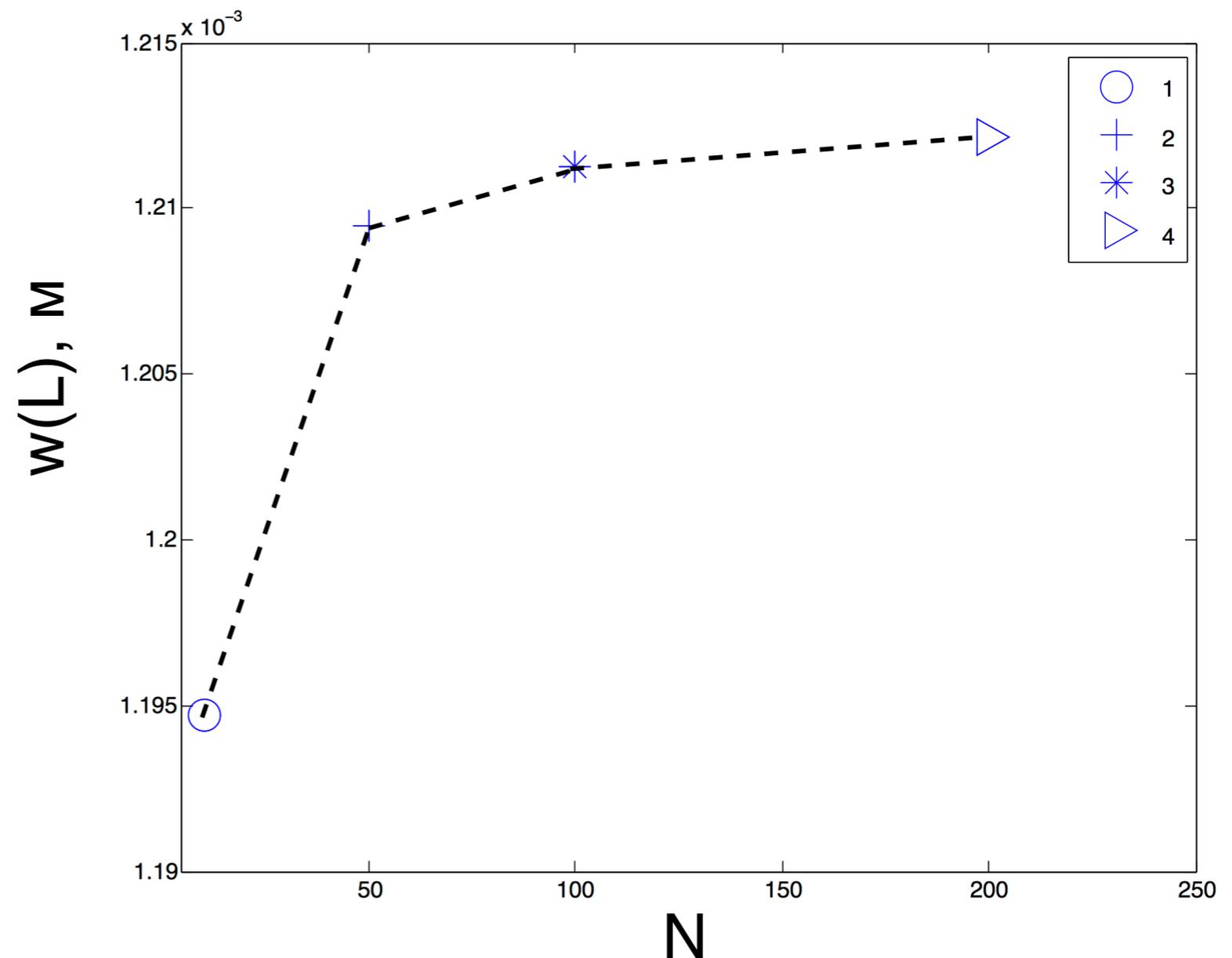
Кол-во узлов       $dx$ , м

10      0.1

50      0.02

100      0.01

200      0.002





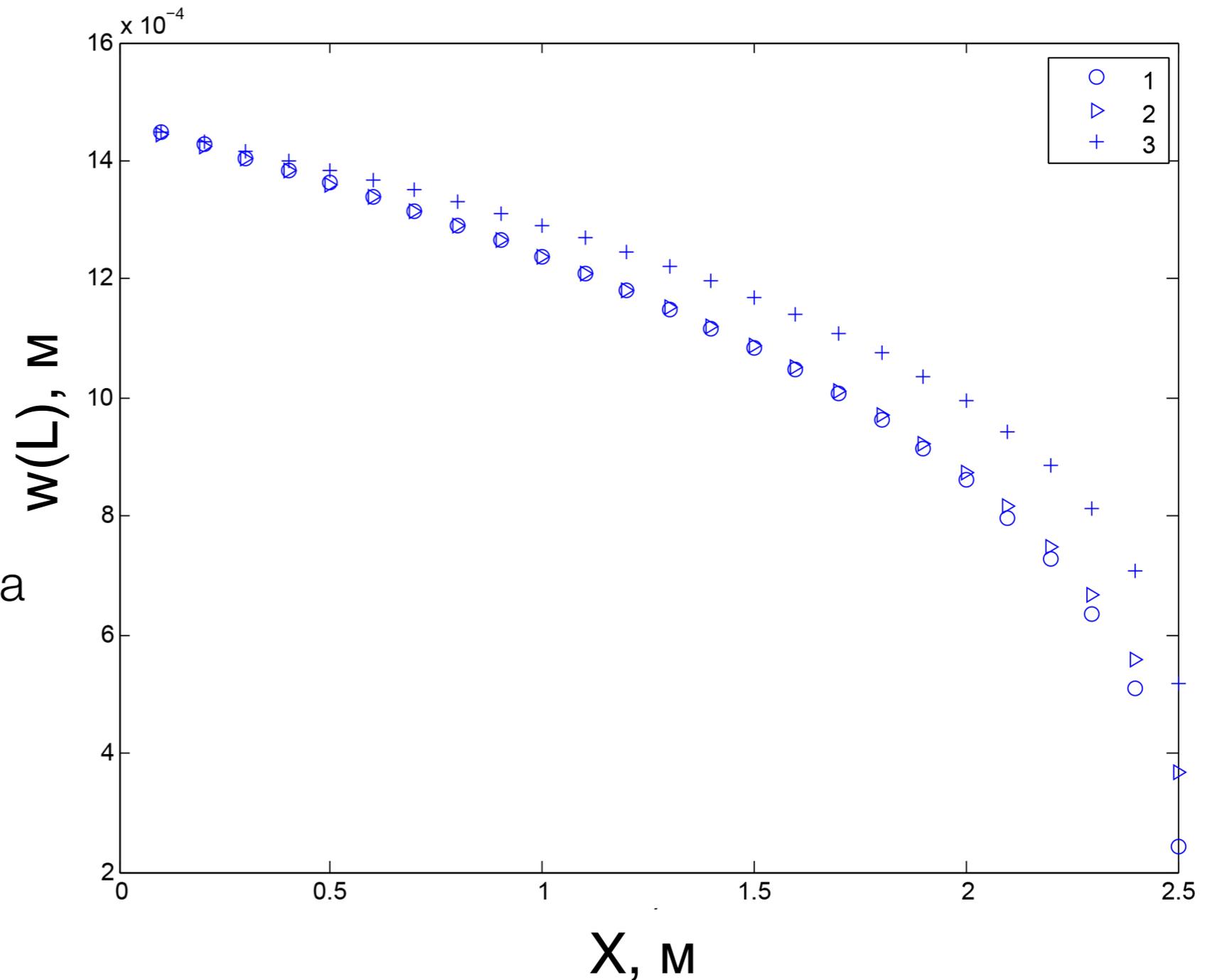
# Сравнение с аналитическим решением

- 1 - Численное решение
- 2 - Решение А.М.Линкова

$$w(x, t) = w_0(t) \left[ 1 - \frac{x}{l} \right]^{\frac{1}{3}}$$

- 3 - Решение Перкинса-Керна

$$w(x, t) \approx w_0(t) \left[ 1 - \frac{x}{l} \right]^{\frac{1}{4}}$$





# Растущая трещина

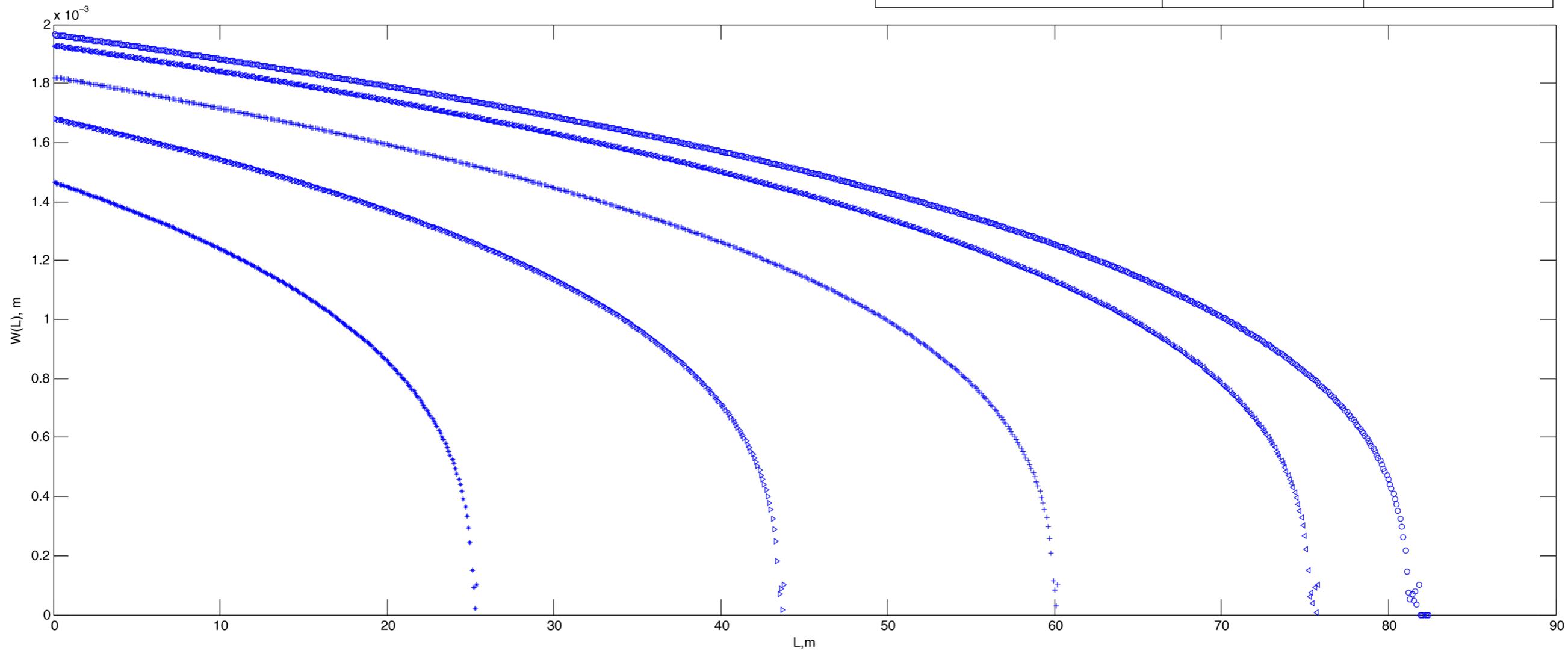


Используется критерий разрушения:

$$K_I = 0.806 \frac{\sqrt{\pi E}}{4(1 - \nu^2)\sqrt{l}} D_x$$

[Pollard D.D., Segall P.]

Параметр	Обозначение	Величина
Модуль Юнга, ГПа	$E$	24
Вязкость жидкости, Па · с	$\mu$	0.008
Коэффициент Пуассона	$\nu$	0.2
Высота Трещины, м	$h$	1
Поток, м <sup>2</sup> /с	$q_0$	0.01
Начальная длина трещины, м	$L$	1
Критерий разрушения, МПа	$K_I$	1



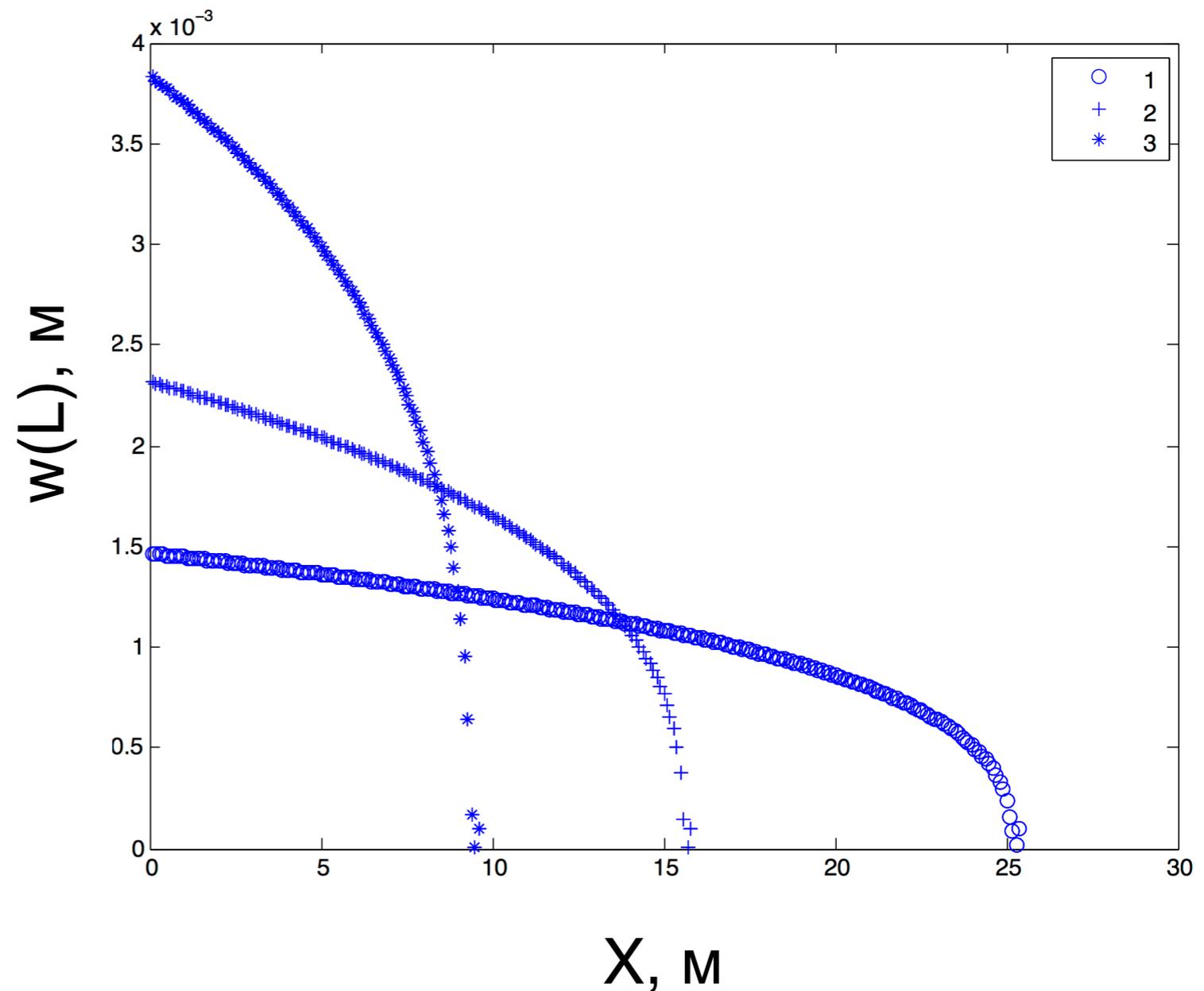


# Влияние вязкости на раскрытие трещины



Вязкость нагнетаемой жидкости меняется в пределах нескольких порядков. [Па·с]

Менее вязкая жидкость обладает более проникающими способностями, в то время как более вязкая жидкость интенсивнее влияет на раскрытие трещины на левом конце



- 1 - 0.008 Па·с
- 2 - 0.08 Па·с
- 3 - 1 Па·с



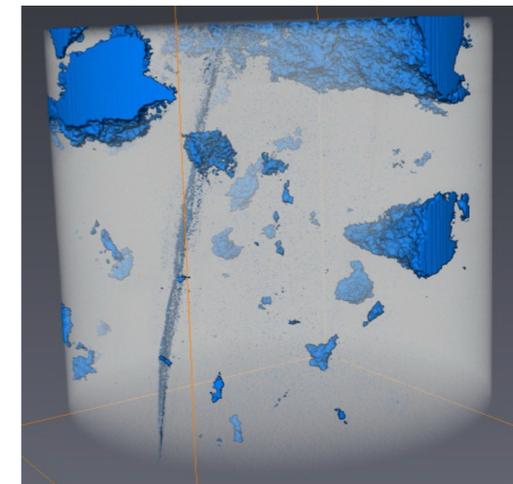
# Анализ керновых исследований



Динамический метод основан на связи между скоростями распространения упругих волн в горных породах и их упругими характеристиками

$$v_s = \frac{l_{\text{обп}}}{t_s} \quad v_p = \frac{l_{\text{обп}}}{t_p}$$

$$E_{\text{дин.}} = \frac{\rho v_s^2 (3v_p^2 - 4v_s^2)}{v_p^2 - v_s^2}$$



Лабораторные исследования:

Пористость, %	Количество
>25	20
15-25	107
10-15	69
<10	31



# Анализ керновых исследований

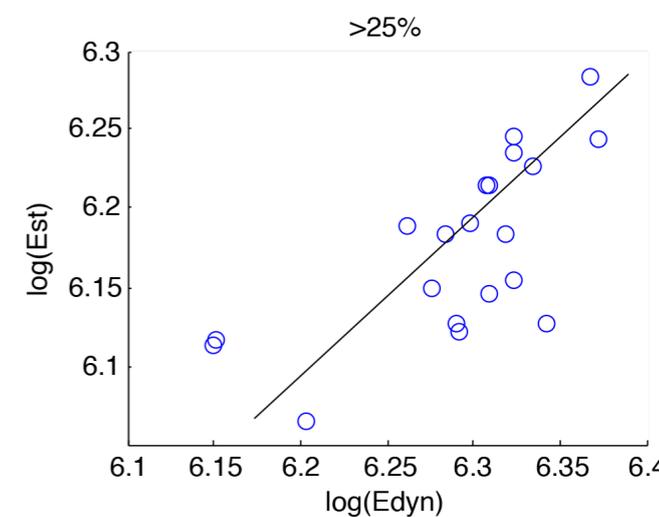
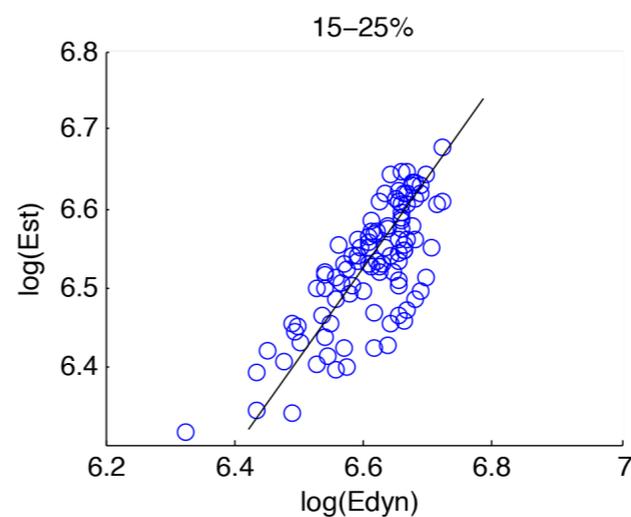
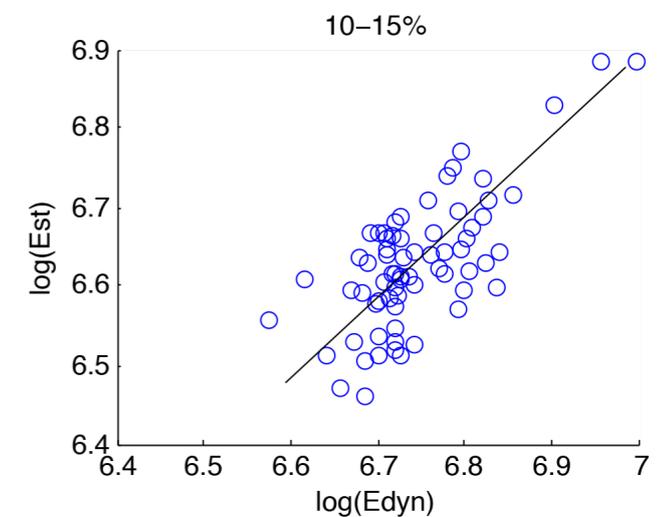
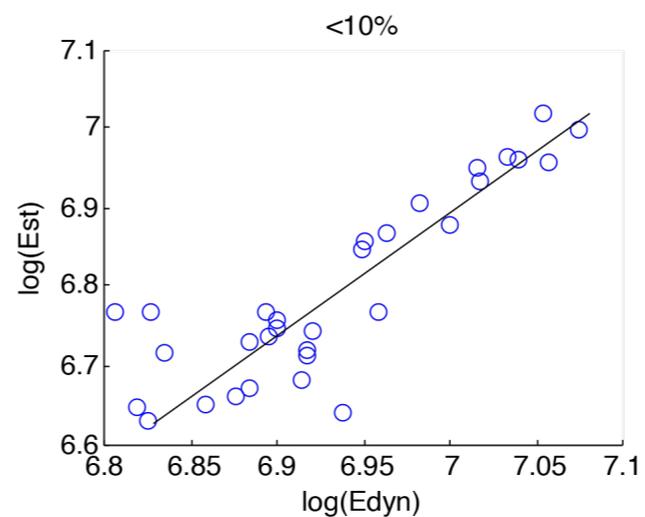
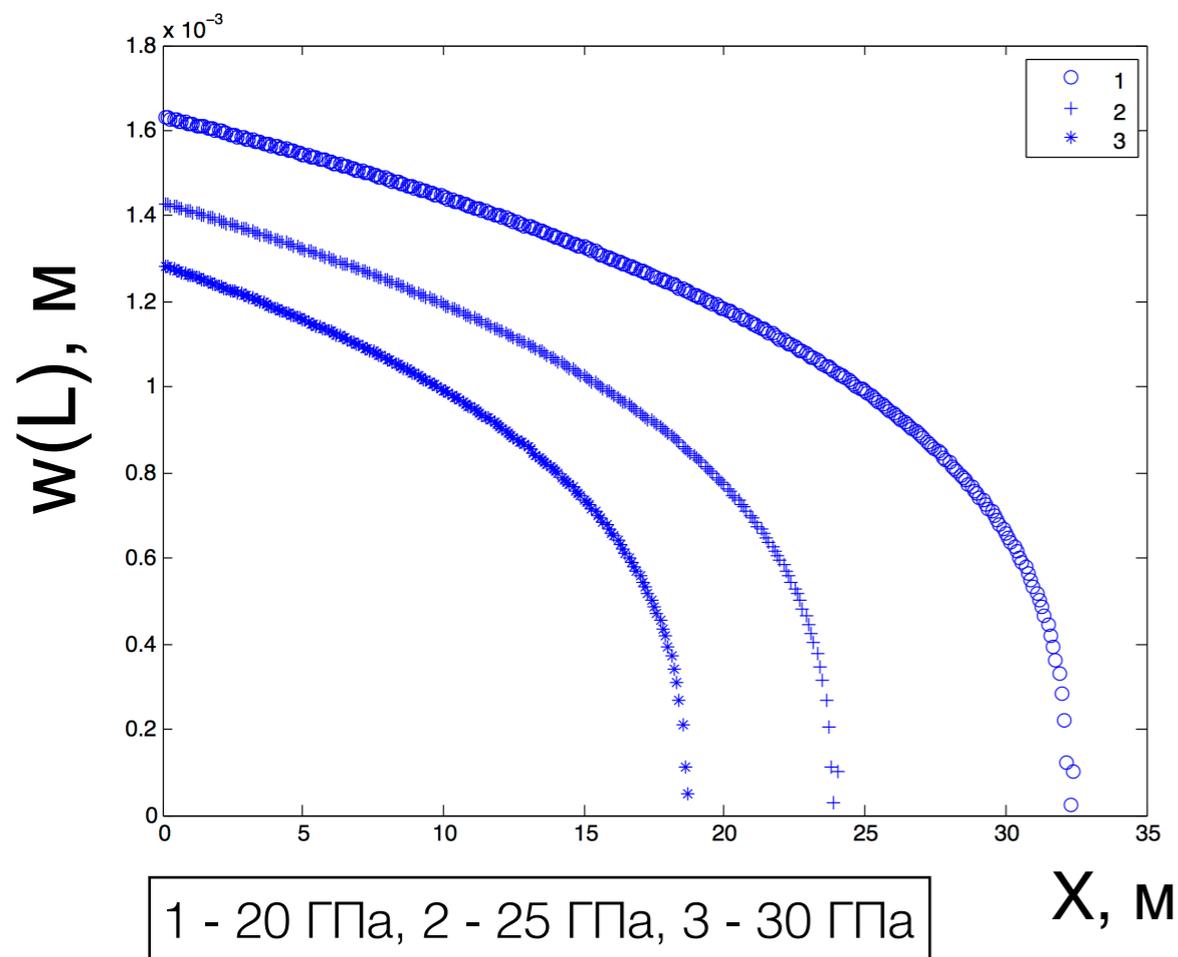


## Корреляция между статическим и динамическим модулем Юнга

$$\log E_{ст} = A_0 + A_1 \log E_{дин}$$

Пористость, %	Моралес[14]		Результаты данной работы		Достоверность аппроксимации
	$A_0$	$A_1$	$A_0$	$A_1$	
<10	-	-	-2,5188	1,3437	0,75
10-15	2,137	0,6612	0,9175	0,8466	0,51
15-25	1,829	0,692	1,1543	0,8127	0,57
>25	-0,4575	0,9402	2,1302	0,6431	0,48

[Morales, 1993, SPE26561]





# Результаты



- Решены тестовые задачи на основе явной и неявной численной схемы Эйлера
- Реализована конечно-разностная схема решения уравнения раскрытия трещины в пакете Matlab
- Проверена на сходимость численная схема
- Проанализировано влияние вязкости на раскрытие и длину трещины
- Произведено сравнение с аналитическим решением
- Определены корреляции статического и динамического модуля Юнга



**Спасибо за внимание**