Движение тела-точки в центральном потенциальном поле

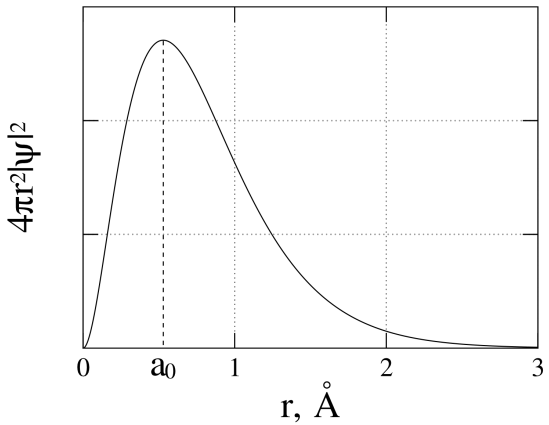
Выполнил: Тур В.Д., студент гр. 5040103/00101
Руководитель: Иванова Е.А., д.ф.-м.н., проф. ВШТМиМФ

15 июня 2022 г.

Введение

Для основного состояния в атоме водорода

- с точки зрения квантовой механики имеется сферически симметричное электронное облако;



- с точки зрения классической механики модели материальной точки и абсолютно твердого тела дают плоскую траекторию.

Цель работы

Предложить модель, которая в рамках эйлеровой механики будет давать решение, *похожее* на квантово-механическое.

Основная идея

Будем моделировать электрон *телом-точкой*[1].
В общем случае кинетическая энергия тела-точки имеет вид[1]

$$K = \frac{1}{2}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — это скорости трансляционного и спинорного движения, а $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ — это тензоры инерции второго ранга.
Основное отличие тела-точки от абсолютно твердого тела в том, что тензор $\mathbf{B}$ *может быть произвольным.*

В работе используется тело-точка с кинетической энергией вида[1]

$$K = \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + b\,\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,j\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

[1] Жилин П.А. Теоретическая механика: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. — 147 с.

Постановка задачи

Рассмотрим тело-точку с кинетической энергией вида

$$K = \frac{1}{2}\, m\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + b\, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\, j\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Количество движения $\mathbf{K}_1$ и собственный кинетический момент $\mathbf{K}_2$ определяются как

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}}, \tag{3a}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}}. \tag{3b}$$

С учетом (2) формулы (3) имеют вид

$$\mathbf{K}_1 = m\, \mathbf{v} + b\, \boldsymbol{\omega}, \tag{4a}$$

$$\mathbf{K}_2 = b\, \mathbf{v} + j\, \boldsymbol{\omega}. \tag{4b}$$

Постановка задачи

Законы баланса имеют вид

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{F}, \tag{5a}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q = \mathbf{M}^Q. \tag{5b}$$

Кинетический момент $\mathbf{K}_2^Q$ и внешний момент $\mathbf{M}^Q$ определяются как

$$\mathbf{K}_2^Q = \mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \qquad \mathbf{M}^Q = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}, \tag{6}$$

где $\mathbf{F}$ — внешняя сила, а $\mathbf{L}$ — внешний момент, не выражаемый через силы.

Определяющие соотношения центрального потенциального поля имеют вид

$$\mathbf{F} = -q\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \tag{7a}$$

$$\mathbf{L} = 0, \tag{7b}$$

где $q > 0$.

Постановка задачи

Уравнения движения (5) можно преобразовать к виду

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{mj - b^2}(j\mathbf{K}_1 - b\mathbf{K}_2), \tag{8a}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = -q\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \tag{8b}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_2 = -\frac{b}{mj - b^2}\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2. \tag{8c}$$

Поставим начальные условия

$$\mathbf{R}|_{t=0} = \mathbf{R}_0, \tag{9a}$$

$$\mathbf{K}_1|_{t=0} = \mathbf{K}_1^{(0)}, \tag{9b}$$

$$\mathbf{K}_2|_{t=0} = \mathbf{K}_2^{(0)}. \tag{9c}$$

Метод исследования

Исходная система уравнений → Система из двух скалярных уравнений → Частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \mathrm{const}$ → Частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \mathrm{const}$, с проходящей через полюса траекторией → Анализ частного решения → Нахождение ограничений на параметры

Система из двух скалярных уравнений

Уравнения (8) можно преобразовать к виду

$$R^2\mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2}\left(R^3\left(\mathbf{K}_1^2\right)^{\cdot}\right)^2 + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2}\left(R^2\right)^{\cdot\cdot} - \frac{2jq(mj-b^2)}{b^2}\frac{1}{R} = \\ = \mathbf{K}_2^{Q\,2} - \frac{2mj-b^2}{b^2}\mathbf{K}_2^2 + \frac{4j(mj-b^2)}{b^2}E, \tag{10a}$$

$$\frac{j}{m}\mathbf{K}_1^2 + \frac{mj-b^2}{mq}\left(R^3\left(\mathbf{K}_1^2\right)^{\cdot}\right)^{\cdot} = \mathbf{K}_2^2 - \frac{2(mj-b^2)}{m}E, \tag{10b}$$

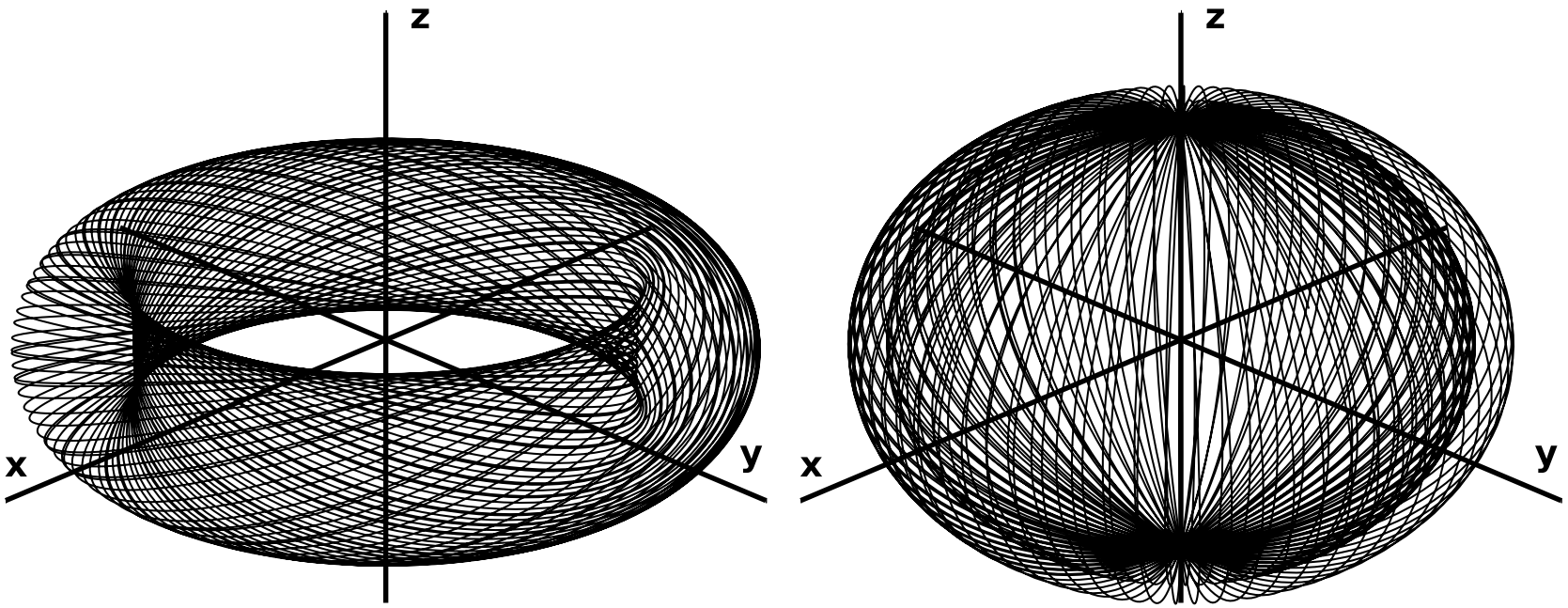
где E — полная энергия.
В (10) нетрудно увидеть частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \mathrm{const}$.

Частный случай $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$

Доказано, что частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ реализуется при выполнении ограничений

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_1^{(0)} = 0, \tag{11a}$$

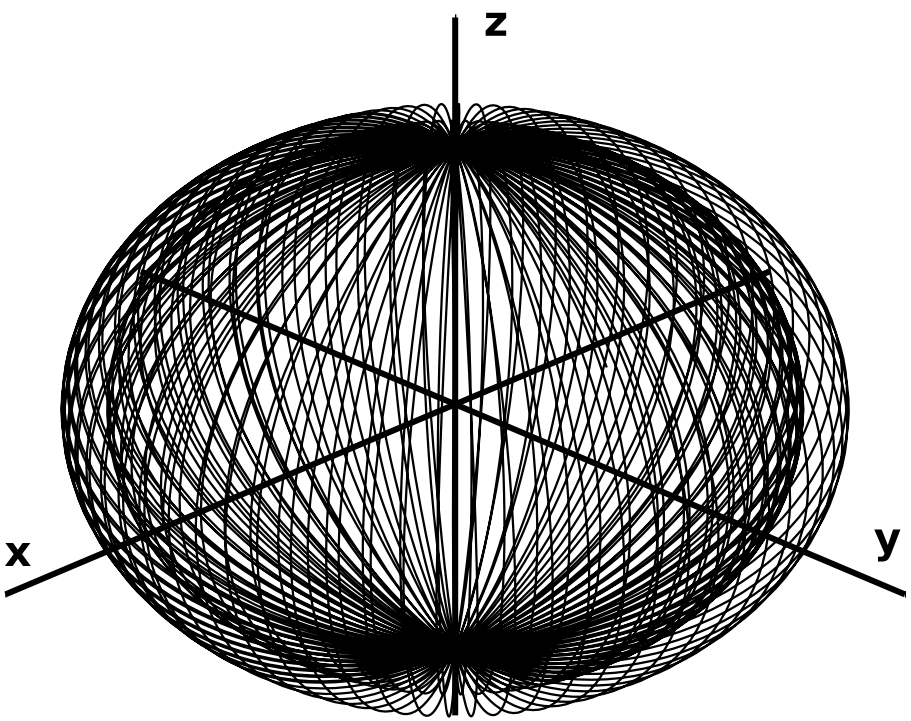
$$(j\mathbf{K}_1^{(0)} - b\mathbf{K}_2^{(0)}) \cdot \mathbf{K}_1^{(0)} = \frac{q(mj - b^2)}{|\mathbf{R}_0|}. \tag{11b}$$



Частный случай $\mathbf{K}_1^2 = \mathrm{const}$, с проходящей через полюса траекторией

Доказано, что траектория проходит через полюса при выполнении **дополнительного** ограничения

$$\frac{q^2(mj - b^2)^2}{j^2\mathbf{K}_1^2} = \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}. \tag{12}$$



Анализ решения. Модуль радиус-вектора

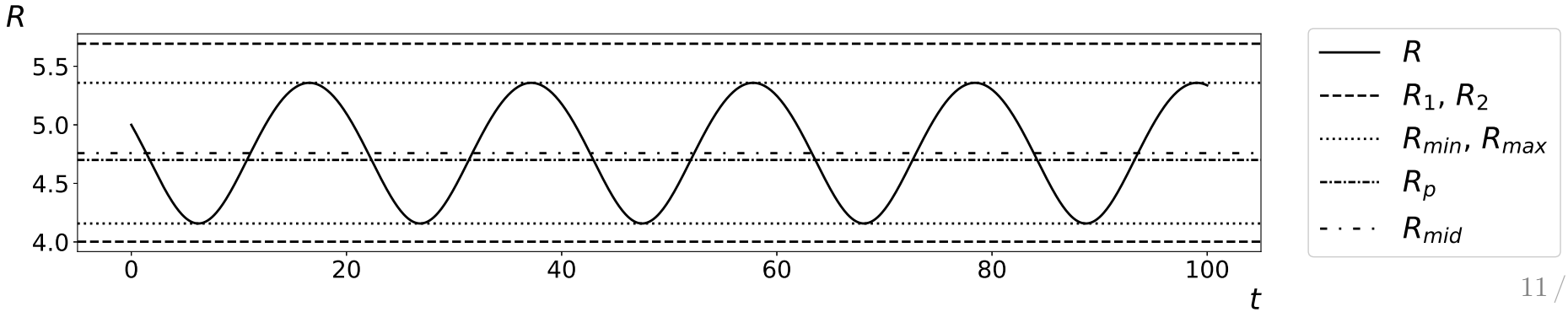
Доказано, что минимальное R_{min} и максимальное R_{max} значения модуля радиус-вектора являются корнями уравнения

$$R^4 - 2\left(\frac{\mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2}{\mathbf{K}_1^2} - 2\frac{j^2}{b^2}\right)R^2 - \frac{8jq(mj - b^2)}{b^2\mathbf{K}_1^2}R = \frac{C}{\mathbf{K}_1^2}, \tag{13}$$

где константа C может быть выражена через начальные условия. Приближенные оценки имеют вид $R_1 < R_{min} \leq R \leq R_{max} < R_2$, где

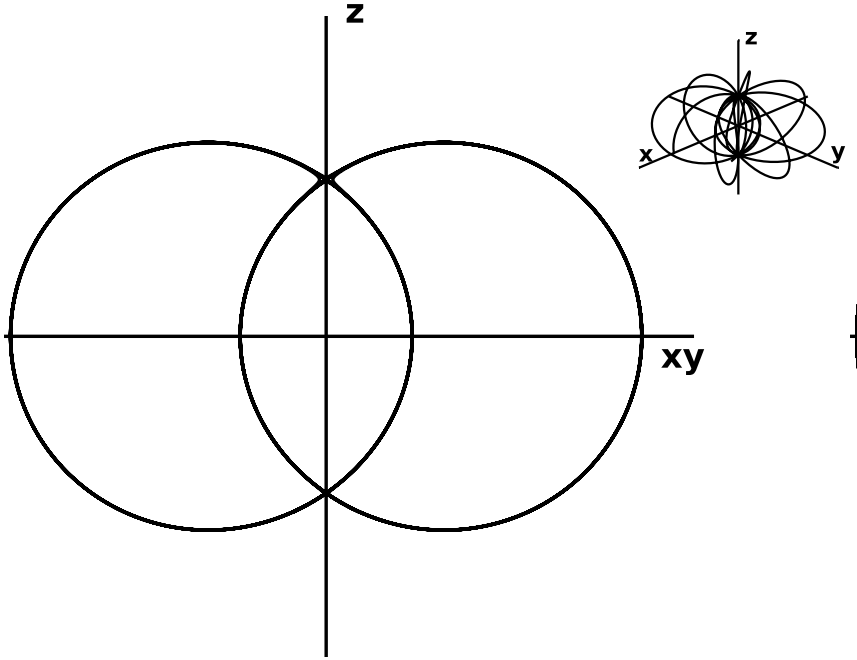
$$R_{1,2} = \frac{R_p}{1 \pm \frac{b}{j}\frac{|\mathbf{K}_2^Q|}{|\mathbf{K}_1|}}, \tag{14}$$

и где R_p — величина модуля радиус-вектора в полюсе. Величина срединной линии на экваторе $R_{mid} = \frac{R_{min}+R_{max}}{2}$.

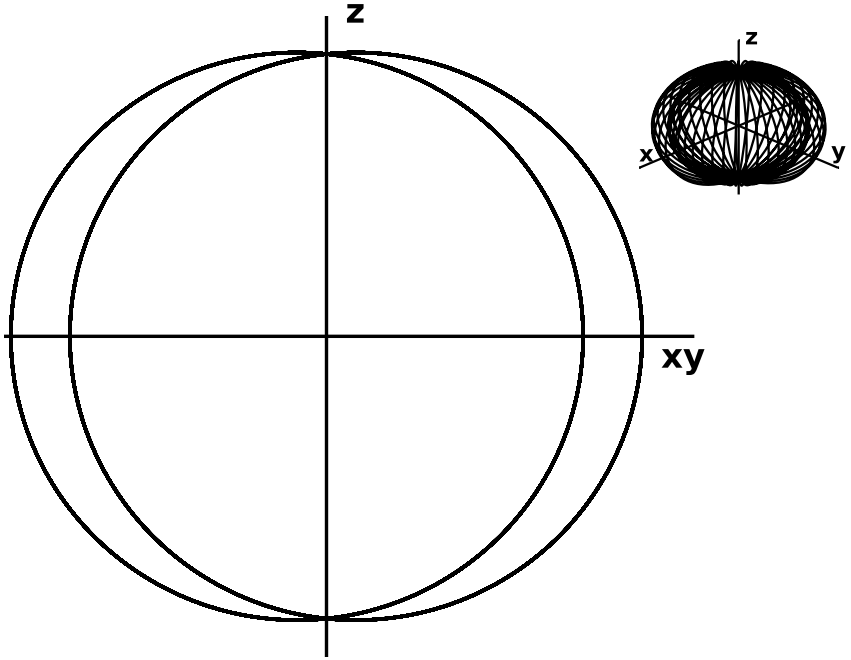


Анализ решения. Толщина заметаемого слоя

$$\text{Слой будет тонким, если } S = \frac{b}{j}\frac{|\mathbf{K}_2^Q|}{|\mathbf{K}_1|} \ll 1. \tag{15}$$



$S = 1.4$



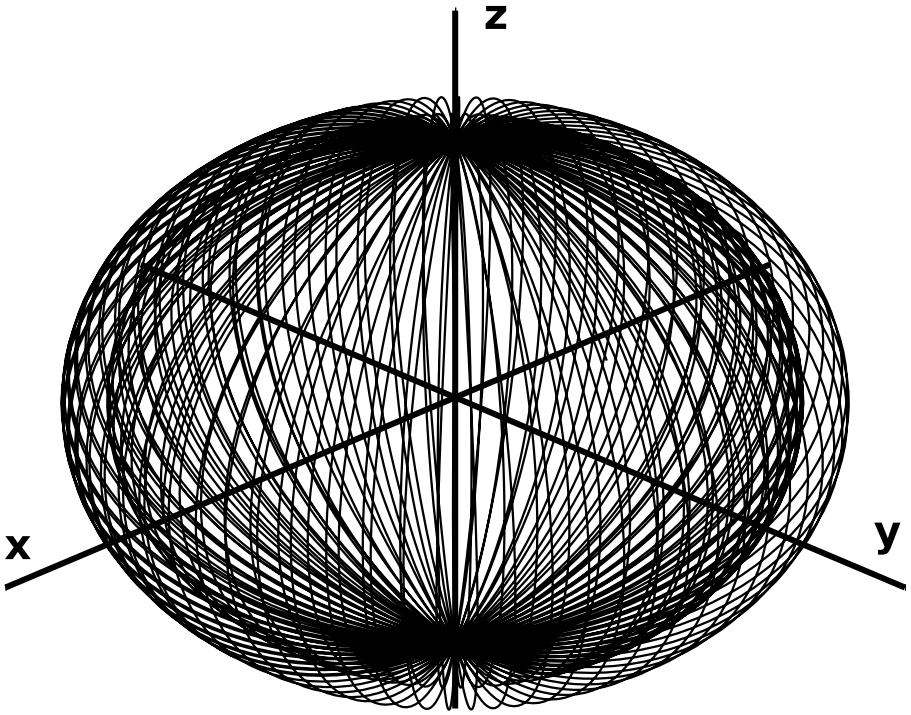
$S = 0.2$

Анализ решения. Полярный угол

Для производной полярного угла φ получена формула

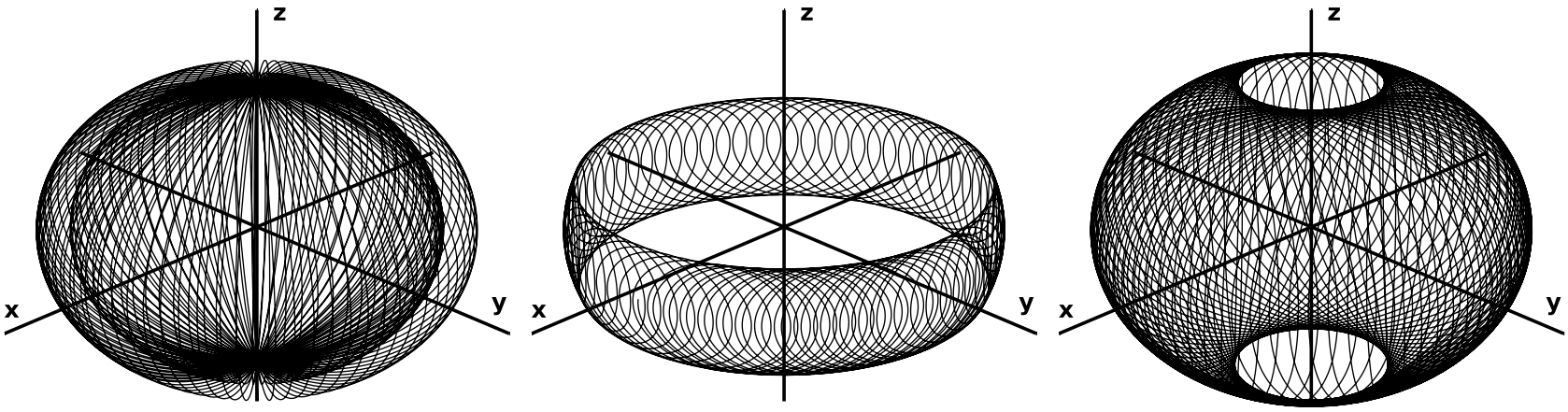
$$\dot{\varphi} = -\frac{q(R - R_p)^2}{2\left|\mathbf{K}_2^Q\right| \tilde{R}^2 R_p}, \qquad \varphi|_{t=0} = 0, \tag{16}$$

где $\tilde{R}$ — плоская часть вектора $\mathbf{R}$ (лежащая в плоскости xy). Из (16) следует, что полярный угол монотонно возрастает.



Годографы векторов $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$

Доказано, что годографы векторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ не проходят через полюса, а производные полярных углов не являются знакопостоянными. Представленное на рисунках поведение векторов характерно для рассматриваемого частного случая.



$\mathbf{R}$ $\mathbf{K}_1$ $\mathbf{K}_2$

Основные результаты

В ходе работы:

- сформулированы условия реализации частного решения $\mathbf{K}_1^2 = \mathrm{const}$;
- сформулировано условие прохождения траектории через полюса;
- найден параметр, отвечающий за толщину заметаемого слоя.

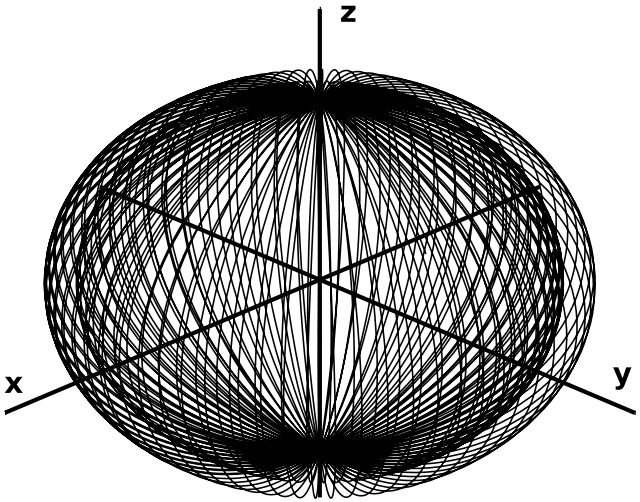
Доказано, что при выполнении ограничений на начальные условия траектория тела-точки:

- лежит между двух сфер конечного радиуса;
- периодически достигает полюсов;
- имеет монотонно возрастающий полярный угол.

Обсуждение результатов

Траектория тела-точки

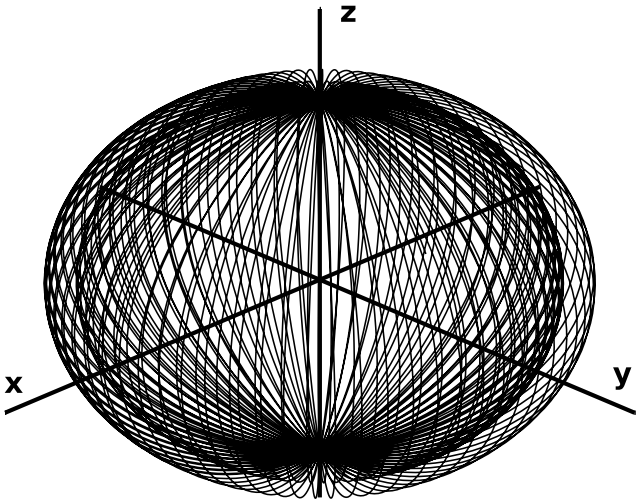
- является пространственной;
- образует сферический слой в линейном приближении.



Обсуждение результатов

Траектория тела-точки

- образует не сферический, а эллиптический слой;
- имеет выделенное направление.



Спасибо за внимание!