Баланс потока энергии в консервативных средах

А. М. Кривцов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт проблем машиноведения РАН

24 августа 2023 (доклад)
29 августа 2023 (коррекция)

Содержание

Введение
Часть 1: Общая теория
- Подход энергетической динамики
- Энергетическая динамика в различных разделах физики
- Локальные уравнения баланса
- Глобальные величины
- Аналогия в переносе энергии и массы

Часть 2: Сохранение потока энергии
- Скалярная упругая среда
- Скалярная кристаллическая решетка
- Электромагнитное поле в вакууме
- Квантовая частица в вакууме
- Поток энергии в различных разделах физики
- Пример: фантомы в двумерной решетке

Часть 3: Изменение потока энергии
- Скалярная упругая среда, движение фантома
- Квантовая частица в потенциальном поле
- Механическая интерпретация квантовой задачи
- Энергетическая динамика и теорема Эренфеста

Выводы

Введение

Процессы, осуществляющие волновой перенос энергии:

- распространение механических волн в упругих средах,
- перенос тепла в кристаллических твердых телах,
- распространение электромагнитной энергии в вакууме,
- перенос вероятности в квантовых системах,
- гравитационные волны на поверхности жидкости,
- перенос массы в общей теории относительности,
- ...

Во всех этих явлениях ключевую роль играет поток энергии.

Вопрос: Как единообразно описать эти различные по физической природе процессы?

Введение

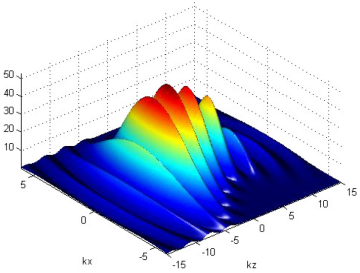
Поток энергии в различных разделах физики:

- Н. А. Умов. 1874. Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце.
- Ф. М. Морс, Г. Фешбах. 1958. Методы теоретической физики (том I, гл. 3). М.: ИЛ.
- С. В. Измайлов. 1962. Курс электродинамики (§15). М.: Гос. уч.-пед. изд. минпросв. РСФСР.
- М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. 1979. Теория волн. М.: Наука.
- В. М. Бабич, А. П. Киселев. 2014. Упругие волны. Высокочастотная теория. СПб.: БХВ.

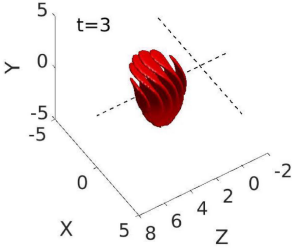
Введение

Локализованные возмущения, несущие поток энергии:

a)



b)



(a) Плотность энергии локализованного акустического импульса [1].
(b) Поверхность уровня локализованного решения трехмерного волнового уравнения [2].

[1] J. Lekner. 2006. Localized oscillatory acoustic pulses. JPCM.
[2] A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, A. P. Kiselev. 2023. Nonparaxial Tilted Waveobjects. JLT.

Часть I

Общая теория

Подход энергетической динамики[1–3]

Носитель — субстанция (среда или поле), в которой может осуществляться волновой перенос энергии.

Фантом — *эффективное* материальное тело, распределение массы в котором пропорционально распределению энергии в носителе.

Энергетическая динамика — теория, описывающая волновой перенос энергии на основе аналогии с классической динамикой материальных тел.

[1] A.M. Krivtsov. Dynamics of matter and energy. ZAMM. 2022.
[2] J.A. Baimova et al. Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices. PRE. 2023.
[3] V.A. Kuzkin. Acoustic transparency of the chain-chain interface. PRE. 2023.

Энергетическая динамика в различных разделах физики

Раздел	**носитель**	**фантом**
Теория упругости	упругая среда	фантом
Физика твердого тела	кристаллическая решетка	фонон
Электродинамика	электромагнитное поле	фотон (совокупность фотонов)
Квантовая механика	распределение вероятности	квантовая частица

Локальные уравнения баланса

Баланс энергии

$$\dot{\epsilon} = -\nabla \cdot \mathbf{q},$$

ϵ — локальная энергия (полная удельная энергия малого элемента среды),
$\mathbf{q}$ — вектор локального потока энергии.

Баланс потока энергии

$$\dot{\mathbf{q}} = -\nabla \cdot \mathbf{g} + \varphi,$$

$\mathbf{g}$ — тензор суперпотока энергии (поток потока),
φ — подвод потока энергии.

Точка над символом — производная по времени, ∇ — набла-оператор (векторный оператор дифференцирования по пространственным координатам), точка между символами — скалярное произведение векторных или тензорных величин.

Глобальные величины

Глобальные уравнения баланса

$$\dot{E} = 0, \qquad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Phi},$$

где

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \int \epsilon \, \mathrm{d}V, \qquad \mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathbf{q} \, \mathrm{d}V, \qquad \mathbf{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \int \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}V,$$

— глобальные энергия, поток и подвод потока энергии.

Энергетический центр

$$\mathbf{r}_{\mathrm{c}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{E} \int \mathbf{r} \, \epsilon \, \mathrm{d}V \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q} = E \, \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}.$$

Уравнение энергетической динамики (аналог 2-го закона Ньютона):

$$E \, \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathbf{\Phi}.$$

Аналогия в переносе энергии и массы

	носитель	**фантом**	
энергия	E	m	масса
поток энергии	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{p}$	импульс
подвод потока энергии	$\mathbf{\Phi}$	$\mathbf{f}$	внешняя сила
энергетический центр	x_c		центр масс

Связь энергетических и массовых величин

$$E = mc^2, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{p}c^2, \qquad \mathbf{\Phi} = \mathbf{f}c^2,$$

где c — характерная скорость распространения волн в носителе.

Часть II

Сохранение потока энергии

Скалярная упругая среда

Уравнение движения (волновое уравнение)

$$\rho \ddot{u} = C \nabla^2 u,$$

где u — перемещение точек среды, ρ и C — плотность и жесткость среды.

Локальная энергия

$$\epsilon = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 + \frac{C}{2} (\nabla u)^2.$$

Локальный поток энергии

$$\mathbf{q} = -C \dot{u} \, \nabla u.$$

Скалярная кристаллическая решетка

Уравнение движения

$$m\ddot{u} = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(u_{\alpha} - u),$$

где u — перемещение отсчетного атома, u_{α} — перемещение атома, отстоящего от отсчетного на вектор $\mathbf{a}_{\alpha}$, α — номер атома в окружении отсчетного атома, m — масса атома, C_{α} — жесткость межатомной связи.

Локальная энергия

$$\epsilon = \frac{m}{2}\dot{u}^2 + \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}}{4}(u_{\alpha} - u)^2.$$

Локальный поток энергии (V_0 — объем элементарной ячейки кристаллической решетки)

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{2V_0}\sum_{\alpha} C_{\alpha}\mathbf{a}_{\alpha}\dot{u}\,(u_{\alpha} - u).$$

Электромагнитное поле в вакууме

Уравнения движения (СИ)

$$\dot{\mathbf{E}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}, \qquad \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, c — скорость света в вакууме, крест обозначает векторное произведение.

Локальная энергия

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right).$$

Локальный поток энергии (вектор Умова-Пойтинга)

$$\mathbf{q} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Квантовая частица в вакууме

Уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi,$$

где ψ — волновая функция, i — комплексная единица, $\hbar$ — приведенная постоянная Планка, m — масса частицы, U — потенциал внешнего поля, $\mathbf{r}$ — пространственная координата.

Локальная энергия (E — полная энергия возмущения)

$$\epsilon = E|\psi|^2.$$

Локальный поток энергии ($\mathbf{j}$ — поток вероятности)

$$\mathbf{q} = E\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right).$$

Поток энергии в различных разделах физики

Раздел	**формула**[1]	**стандартная интерпретация**
Теория упругости	$-C\dot{u}\,\nabla u$	поток полной механич. энергии
Физика твердого тела	$\frac{1}{2V_0}\sum_\alpha C_\alpha \mathbf{a}_\alpha \dot{u}\,(u-u_\alpha)$	импульс фонона
Электродинамика	$\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$	вектор Умова-Пойтинга
Квантовая механика	$\frac{E\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)$	поток вероятности

[1] Приведены формулы для локального потока энергии, глобальный поток получается в результате интегрирования по пространству.

Сохранение потока энергии

Уравнение баланса, глобальные поток энергии и подвод потока

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathbf{q}\,\mathrm{d}V, \qquad \mathbf{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \int \varphi\,\mathrm{d}V.$$

Рассматривались задачи с однородным носителем, где $\varphi = 0$ и поток сохраняется:

$$\dot{\mathbf{Q}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Q} = \mathrm{const}$$

Из постоянства потока следует равномерность движения энергетического центра:

$$\mathbf{Q} = E\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathrm{const}.$$

Скорость энергетического центра совпадает со средней групповой скоростью

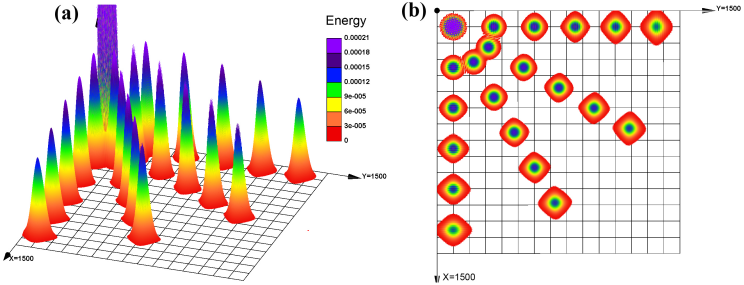
$$\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \langle \mathbf{v}_{\mathrm{g}} \rangle, \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{g}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\mathbf{k}},$$

где ω — частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\langle ... \rangle$ — осреднение по всем гармоникам.

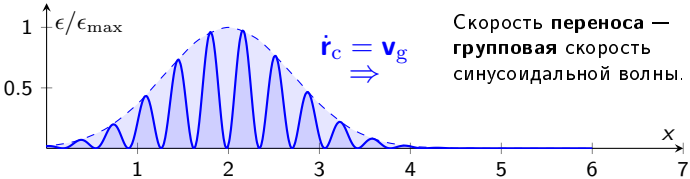
Пример: фантомы в двумерной решетке

Поперечные колебания квадратной однородной гармонической решетки.

Сила равна нулю, движение равномерное.



Структура фантома:



$\dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{v}_g$
$\Rightarrow$

Скорость **переноса** — **групповая** скорость синусоидальной волны.

J.A. Baimova, N.M. Bessonov, A.M. Krivtsov. PRE. 2023.

Часть III

Изменение потока энергии

Изменение потока энергии

Уравнение баланса, глобальные поток энергии и подвод потока

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathbf{q}\,\mathrm{d}V, \qquad \mathbf{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \int \boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}V.$$

Для неоднородного носителя $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ и поток не сохраняется:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Phi} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Q} \neq \mathrm{const}$$

Следовательно, энергетический центр движется неравномерно:

$$\mathbf{Q} = E\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} \neq \mathrm{const}, \qquad E\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathbf{\Phi}.$$

Скорость энергетического центра в неоднородной среде можно рассматривать как обобщение групповой скорости:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{g}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{Q}}{E} \equiv \dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}.$$

Скалярная упругая среда

Уравнение движения (неоднородное волновое уравнение)

$$\rho \ddot{u} = \nabla \cdot (C \nabla u),$$

где u — перемещение точек среды, ρ и C — плотность и жесткость среды.

Локальная энергия

$$\epsilon = \frac{\rho}{2} \dot{u}^2 + \frac{C}{2} (\nabla u)^2.$$

Локальный поток энергии

$$\mathbf{q} = -C \dot{u} \nabla u.$$

Подвод потока энергии (при постоянной плотности среды)

$$\varphi = \frac{1}{2} (\nabla C) \dot{u}^2.$$

Скалярная упругая среда: движение фантома

Динамика фантома:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathbf{f}.$$

Выражение для силы

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2c^2}\int (\nabla C)\,\dot{u}^2\,\mathrm{d}V \approx \frac{m\nabla C}{2\rho}.$$

Уравнение движения

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2\rho}\nabla C.$$

- Постоянная жесткость: $C = \mathrm{const}$. Сила отсутствует, движение равномерное:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = 0.$$

- Линейная жесткость: $C = \mathbf{b}\cdot\mathbf{r}$. Постоянная сила, движение равноускоренное:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \frac{\mathbf{b}}{2\rho}.$$

- Обратная жесткость: $C = A/|\mathbf{r}|$. Сила Ньютона, движение в гравитационном поле:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = -\frac{A}{2\rho|\mathbf{r}_{\mathrm{c}}|^3}\,\mathbf{r}_{\mathrm{c}}.$$

Квантовая частица в потенциальном поле

Уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\dot{\psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right]\psi,$$

где ψ — волновая функция, i — комплексная единица, $\hbar$ — приведенная постоянная Планка, m — масса частицы, U — потенциал внешнего поля, $\mathbf{r}$ — пространственная координата.

Локальная энергия (E — полная энергия возмущения)

$$\epsilon = E|\psi|^2.$$

Локальный поток энергии ($\mathbf{j}$ — поток вероятности)

$$\mathbf{q} = E\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right).$$

Подвод потока энергии

$$\varphi = -E|\psi|^2\,\nabla U(\mathbf{r})/m.$$

Механическая интерпретация квантовой задачи

Модель: упругая моментная среда[2] в упругом окружении.

Уравнение динамики среды (эквивалентно уравнению Шрёдингера)

$$\rho\ddot{u} + C\Delta^2 u = 0, \qquad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 - \gamma(\mathbf{r}),$$

где u — перемещение точек среды, ρ и C — плотность и жесткость среды, $\gamma(\mathbf{r})$ — приведенная жесткость упругого окружения.

Локальные энергия и поток энергии

$$\epsilon = \frac{\rho}{2}\dot{u}^2 + \frac{C}{2}(\Delta u)^2, \qquad \mathbf{q} = C\left(\dot{u}\,\nabla\Delta u - \nabla\dot{u}\,\Delta u\right).$$

Связь с характеристиками квантовой задачи

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2E}}\left(\sqrt{C}\Delta u - i\sqrt{\rho}\dot{u}\right), \qquad U(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\gamma(x), \qquad \frac{\hbar}{m} = 2\sqrt{\frac{A}{\rho}}.$$

[2] В 1D — балка Бернулли-Эйлера, в 2D — пластина Кирхгофа-Лява.

Энергетическая динамика и теорема Эренфеста

Уравнение динамики (энергии и массы; $E = mc^2$, $\mathbf{\Phi} = \mathbf{f}c^2$)

$$E\,\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathbf{\Phi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\,\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}} = \mathbf{f}.$$

Теорема Эренфеста (переход от квантовой к классической механике; $\mathbf{F} = -\nabla U$):

$$m\langle\mathbf{r}\rangle^{\cdot\cdot} = \big\langle\mathbf{F}(\mathbf{r})\big\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad m\langle\mathbf{r}\rangle^{\cdot\cdot} \approx \mathbf{F}(\langle\mathbf{r}\rangle),$$

где квантовая, энергетическая и массовая интерпретации осреднения:

$$\langle\mathcal{F}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{F}\,|\psi|^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{E}\int \mathcal{F}\,\epsilon\,\mathrm{d}V = \frac{1}{m}\int \mathcal{F}\rho\,\mathrm{d}V.$$

Связь с энергетической динамикой

$$\mathbf{r}_{\mathrm{c}} = \langle\mathbf{r}\rangle, \qquad \mathbf{f} = \langle\mathbf{F}\rangle.$$

Выводы

1. Наряду с балансом энергии важную роль в различных разделах физики играет баланс потока энергии.
2. Уравнение баланса потока энергии аналогично уравнению баланса импульса.
3. Указанная аналогия лежит в основе энергетической динамики и позволяет описывать волновой перенос энергии независимо от физической природы процесса.
4. В однородном носителе поток энергии сохраняется[3], в неоднородном — изменение потока определяет динамику переноса энергии, а поток может использоваться для обобщения понятия групповой скорости.
5. Пример применения энергетической динамики — получение идентичных уравнений для движения квантовой частицы в потенциальном поле и движения возмущения в моментной среде с упругим окружением.

[3] точно для скалярного носителя и в среднем для векторного носителя

Подсекция III-7. Механика дискретных сред, неклассические модели механики сплошных сред

Доклады, в которых энергетическая динамика используется для анализа волновых процессов в различных упругих средах:

14.20–14.40: В. А. Кузькин. Акустическая прозрачность интерфейса двух цепочек.

17.40–18.00: С. А. Щербинин, А. М. Кривцов. Эволюция возмущений в слабонелинейных упругих средах.

18.40–19.00: Ю. А. Баимова, Н. М. Бессонов, А. М. Кривцов. Движение локализованных волн в скалярной гармонической решетке.

Спасибо за внимание!

Дополнительная информация: tm.spbstu.ru/TC