

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
Д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А.М. Кривцов
«__» _____ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**Моделирование и исследование variability ритмов сердца матери и
плода**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.03.03_02 «Биомеханика и медицинская инженерия»

Выполнил

Студент гр. 5030103/00201

В.А. Лобкова

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

И.Б. Сулова

Санкт-Петербург

2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы
студентке Лобковой Вероники Андреевны, гр. 5030103/00201

1. Тема работы: Моделирование и исследование variability ритмов сердца матери и плода
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024.
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные публикации по теме исследования.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): кардиологические сигналы и их математическое описание; Основные математические методы обработки кардиологических сигналов при изучении variability сердечного ритма; Аналитическое вычисление вейвлет преобразования и вейвлетного спектра мощности для модельного сигнала в виде одиночного гауссовского пика; Тестовый пример для исследования математических моделей ритмограммы матери и плода; Исследование моделей нестационарной ритмограммы матери и плода как частотно-модулированных сигналов; Построение RR_n – интервалов по заданным свойствам частотно-модулированных сигналов; Модели частотно-модулированных сигналов с заданием частоты и глубины модуляции; Применение вейвлет-преобразования для исследования моделей сердечного ритма матери и плода как частотно-модулированных сигналов; Вейвлет-спектры реальных записей ритмограмм матери и плода
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрены
6. Дата выдачи задания: 28.02.2024.

Руководитель ВКР:

Сулова И.Б. – доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению: 28.02.2024.

Студент:

В.А.Лобкова

РЕФЕРАТ

На 59 с., 38 рисунков, 2 таблицы, 1 приложение

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ ЭКГ, КАРДИО-РИТМ, КАРДИО-ИНТЕРВАЛЫ, МОДЕЛИРОВАНИЕ РИТМОГРАММЫ СЕРДЦА, ВАРИАБЕЛЬНОСТЬ СЕРДЕЧНОГО РИТМА, ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, СПЕКТР МОЩНОСТИ СИГНАЛА, ЛОКАЛЬНАЯ ЧАСТОТА.

Проанализированы математические модели ритмограммы сердца. Показано преимущество модели ритмограммы как частотно-модулированного сигнала, состоящего из гауссовских пиков на неравномерной временной шкале. Для анализа изменения частоты ритма во времени использовано непрерывное вейвлет преобразование с материнским вейвлетом Морле. Алгоритм обработки сигнала реализовался с использованием программного пакета Matlab и программы, реализованной на языке программирования python с использованием библиотек: Matplotlib, numpy, sympy и др.

THE ABSTRACT

59 pages, 38 pictures, 2 tables, 1 appendixe

KEYWORDS: ECG SIGNAL PROCESSING, CARDIO-RHYTHM, CARDIO-INTERVALS, HEART RHYTHMOGRAMM MODELLING, HEART RATE VARIABILITY, WAVELET TRANSFORM, SIGNAL POWER SPECTRUM, LOCAL FREQUENCY

Mathematical models of the heart rhythmogram were analyzed. The advantage of the rhythmogram model as a frequency-modulated signal consisting of Gaussian peaks on an uneven time scale is shown. To analyze the change in rhythm frequency over time, a continuous wavelet transforms with a mother Morlet wavelet was used. The signal processing algorithm was implemented using the Matlab software package, python scripts with library Matplotlib, numpy, sympy.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. КАРДИОЛОГИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ	10
1.1 Основные математические методы обработки кардиологических сигналов при изучении variability сердечного ритма.....	14
1.2 Аналитическое вычисление Вейвлет преобразования и спектра мощности Вейвлет преобразования для модельного сигнала в виде одиночного гауссовского пика.....	17
ГЛАВА 2. ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РИМОГРАММЫ МАТЕРИ И ПЛОДА.....	24
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РИТМОГРАММЫ МАТЕРИ И ПЛОДА КАК ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ.....	30
3.1 Построение RR_n – интервалов по заданным свойствам частотно модулированных сигналов.....	30
3.2 Модели частотно модулированных сигналов с заданием частоты и глубины модуляции.....	36
3.3 Применение вейвлет-преобразования для исследования моделей сердечного ритма матери и плода как частотно модулированных сигналов..	37
ГЛАВА 4. ВЕЙВЛЕТ СПЕКТРЫ РЕАЛЬНЫХ ЗАПИСЕЙ СЕРДЕЧНОГО РИТМА МАТЕРИ И РЕБЕНКА.....	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	53
Приложение.....	56

ВВЕДЕНИЕ

В медицинской практике огромное значение имеет изучение физиологических ритмов человеческого организма – биомедицинских сигналов, таких как частота сердечных сокращений, электрические сигналы мозга, регистрируемые с отведений коры головного мозга, дыхательные ритмы, циркадные ритмы, связанные с долговременным режимом функционирования всех систем жизнедеятельности человека. Все эти ритмические процессы связаны с взаимодействием симпатической и парасимпатической систем человека, которые в свою очередь отражают как внутреннее состояние всех органов, так и реакцию организма на внешние воздействия. Необходимо отметить существенно нестационарный характер биомедицинских сигналов, что приводит к особенностям математического моделирования этих процессов, связанных с необходимостью разработки специальных математических методов обработки сигналов такого вида.

Среди методов исследования физиологического состояния человеческого организма значительное место занимает математический анализ сердечного ритма. Он позволяет оценивать уровень здоровья, возможности адаптации, то есть запас здоровья, что ведет к развитию прогностической части медицинского обследования и предупреждению развития заболевания на ранних стадиях. Вариабельность сердечного ритма (BCP-HRV) проявляется в изменении интервалов между отдельными ударами сердца, то есть в изменении длительности сердечных циклов (PQRST – комплексов) [1], [21]. Вариабельность сердечного ритма как правило измеряется на основе ЭКГ (электрокардиограммы), в которой с помощью специального алгоритма распознается положение зубца (пика) PQRST – комплекса. Интервалы между соседними пиками ЭКГ называются RR – интервалами, а запись последовательности интервалов – ритмограммой (тахограммой) сердца.

В настоящее время существует несколько основных методов исследования variability сердечного ритма: статистические, геометрические, спектральные и методы нелинейного анализа [7].

1. Статистические методы анализа variability сердечного ритма состоят в вычислении средних по ансамблю характеристик: $RRNN = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} RR_n$ – средняя продолжительность кардио-интервала; $SDNN^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} [RR_n - RRNN]^2$ – стандартное отклонение RR -интервалов, которое характеризует variability в течение всей записи. Этот показатель сильно зависит от длительности записи. $RMSSD$ – квадратный корень из средней суммы квадратов разностей между соседними RR -интервалами (среднеквадратическое отклонение между соседними RR -интервалами) ритма. $NN50$ – количество случаев, в которых разница между длительностью последовательных RR -интервалов, превышает 50 мс. А также другие осредненные по ансамблю характеристики.

2. Геометрические методы, где последовательность RR -интервалов преобразуется в некоторую геометрическую структуру, например, в распределение плотности длины RR -интервалов, Лоренцовское распределение и другие распределения. Вычисляются ширина гистограммы, триангулярный индекс – интеграл плотности распределения к максимуму плотности распределения.

3. Спектральные методы, такие как быстрое преобразование Фурье (STFT), различные виды Вейвлет преобразования. [8], [19].

4. Методы нелинейной динамики (нелинейного анализа), такие как экспонента Ляпунова, информационная энтропия и др. [24]. Биомедицинские сигналы содержат хаотическую составляющую, связанную с физиологическим состоянием или патологией, которую, как предполагается, можно выявить используя методы нелинейной динамики. Однако достаточно значительных для диагностики фундаментальных результатов в изучении

вариабельности сердечного ритма нелинейными методами в настоящее время не получено.

Процесс вынашивания ребенка происходит в неразрывной взаимосвязи организмов матери и плода. Взаимодействие связано с работой двух основных генераторов: сердца матери и плода. Системы кровообращения матери и ребенка связываются и регулируются с помощью вариабельности сердечного ритма (HRV-BCP), которая является основным механизмом синхронизации ритма матери и плода [22].

Для выявления неблагоприятного течения беременности преобладают исследования вариабельности ритма матери и плода [8], [18], [19]. Существуют также многочисленные исследования вариабельности сердечного ритма отдельно плода. [9].

Можно предположить, что недостаточная информативность результатов, полученных при исследовании вариабельности сердечного ритма плода как показателя его состояния, связаны с тем, что оценка производится без учета состояния всей системы мать-плацента-плод. Наименее исследованы проблемы синхронизации и десинхронизации кардио-ритмов матери и плода, что в многом связано со сложным механизмом взаимодействия, в частности с его нестационарностью. Однако, взаимосвязь ритмов сердца матери и плода – это явление, которое может играть большую роль при изучении проблем вынашивания плода.

Основные биологические сигналы, которые могут быть получены при обследовании женщин врачами в процессе беременности это ЭКГ, которые разделяются на МЭКГ (материнская кардиограмма), ФЭКГ (кардиограмма плода). Сигнал ФЭКГ является сравнительно слабым, так как его амплитуда составляет менее 20% от амплитуды МЭКГ, и часто может быть зашумлен. Это связано, в частности, с реакцией на мышечные движения органов матери. Три основные характеристики, которые необходимо получить из ФЭКГ для диагностики состояния плода включают:

1. ЧСС;

2. Амплитуда различных волн;
3. Продолжительность этих же волн.

Если рассматривать двусторонние связи матери и плода, которые возникают в процессе беременности, то можно выделить следующие проблемы:

Проблема 1. (Проблемы эксперимента и предобработки) Неинвазивная регистрация сердечного ритма плода, разделение ритмов матери и плода, удаление артефактов. Этим темам посвящены работы [15], [23].

Проблема 2. Эффективные методы обработки сигналов для получения значимой диагностической информации при учете связанности систем матери и плода.

Указанные сложности как в регистрации, так и в обработке кардио-сигналов в связанной системе матери и плода, не позволяют до настоящего времени получить объективные всеми признаваемые параметры для неинвазивной диагностики осложнений беременности [22], [25].

Актуальность изучения взаимодействия и регуляции систем кровообращения матери и плода во время вынашивания беременности состоит в необходимости надежной количественной диагностики взаимного состояния матери и ребенка. Следует отметить, что достаточно достоверных результатов по этой проблеме известно не так много, что связано со сложностями как получения экспериментальных данных, так и математического моделирования, и обработки соответствующих существенно нестационарных биомедицинских сигналов. Любые результаты по данной проблеме могут внести вклад в своевременное фиксирование неблагоприятного течения беременности и его возможных причин. А устранение этих причин, в свою очередь, поможет решению проблем улучшения демографической ситуации в стране.

Объект исследования: биологическая система матери и плода в период беременности.

Предмет исследования: характеристики и взаимосвязь сердечных ритмов матери и плода в период беременности.

Цель исследования: построить и исследовать математические модели сердечного ритма матери и плода, как нестационарных сигналов с частотной модуляцией ритма.

Задачи работы:

- Построить математическую модель ритмов матери и плода при отсутствии варибельности ритма (равномерная ритмограмма) с учетом различных частотных диапазонов
- Вычислить аналитически, построить и сравнить соответствующие спектры Фурье-преобразования и Вейвлет-преобразования равномерной ритмограммы. Построить графики локальных частот в зависимости от времени.
- Построить математическую модель ритмов матери и плода при заданной варибельности ритма (нестационарная ритмограмма с частотной модуляцией). Вычислить величины RR – интервалов ритмограмм матери и плода.
- Вычислить аналитически, построить и сравнить соответствующие спектры Фурье-преобразования и Вейвлет-преобразования ритмограммы сердца как сигнала с частотной модуляцией. Построить графики локальных частот в зависимости от времени.
- Изучить поведение локальных частот сигналов с частотной модуляцией для моделей ритмограммы матери и ритмограммы плода. Рассмотреть влияние глубины и частоты модуляции на поведение локальной частоты как функции времени.
- Используя указанную методику построить графики вейвлет-спектров и локальных частот реальных записей ритма матери и ребенка.
- Сравнить поведение локальных частот модельных частотно-модулированных сигналов и реальных медицинских сигналов матери и плода.

ГЛАВА 1. КАРДИОЛОГИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Основной целью работы является моделирование нескольких частотно-модулированных сигналов и изучения поведения частоты в зависимости от времени. Изменение разности потенциалов, возникающих на поверхности тела при возбуждении сердца, записываются с помощью различных систем отведений. Каждое отведение состоит из пары электродов, один из которых подсоединен к положительному полюсу входа усилителя электрокардиографа, другой – к отрицательному. Так регистрируется разность потенциалов, существующая между двумя определенными точками электрического поля сердца, в которых установлены электроды.

В связи с тем, что многочисленные способы расстановки электродов могут привести к сложностям в трактовке ЭКГ существуют Международные клинические стандарты [21], предполагающие систему 12 отведений: три стандартных отведения, три усиленных однополюсных от конечностей и шесть грудных отведений. Реальная стандартная кардиограмма сердца приведена на Рис.1

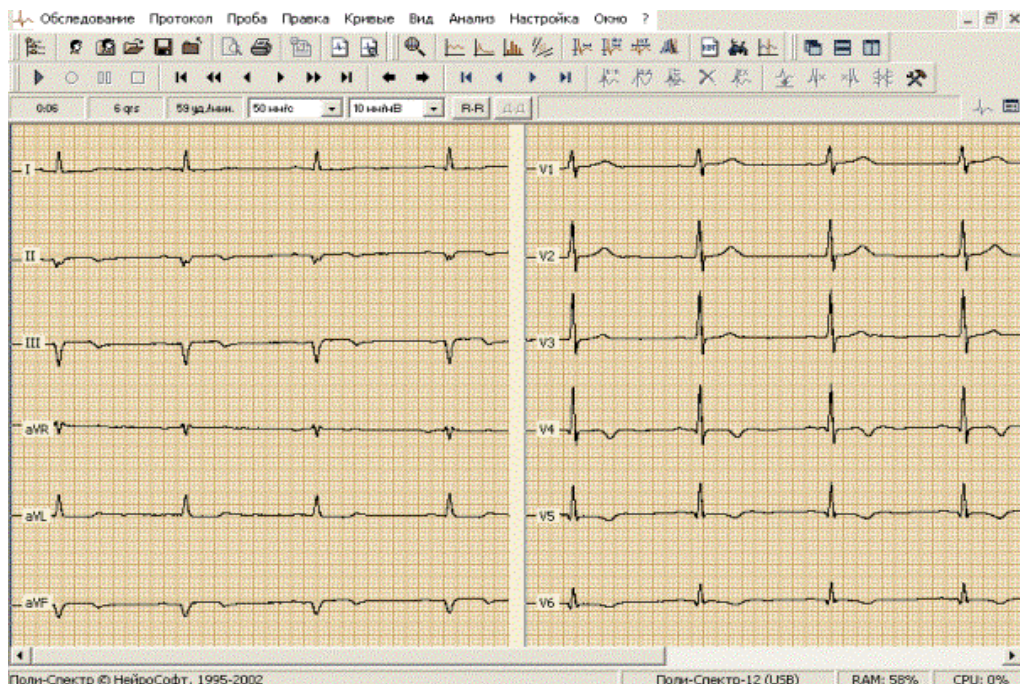


Рис 1. Кардиограмма сердца: 12 отведений.

Каждый удар сердца связывается с так называемым QRS – комплексом, приведенным на Рис. 2.

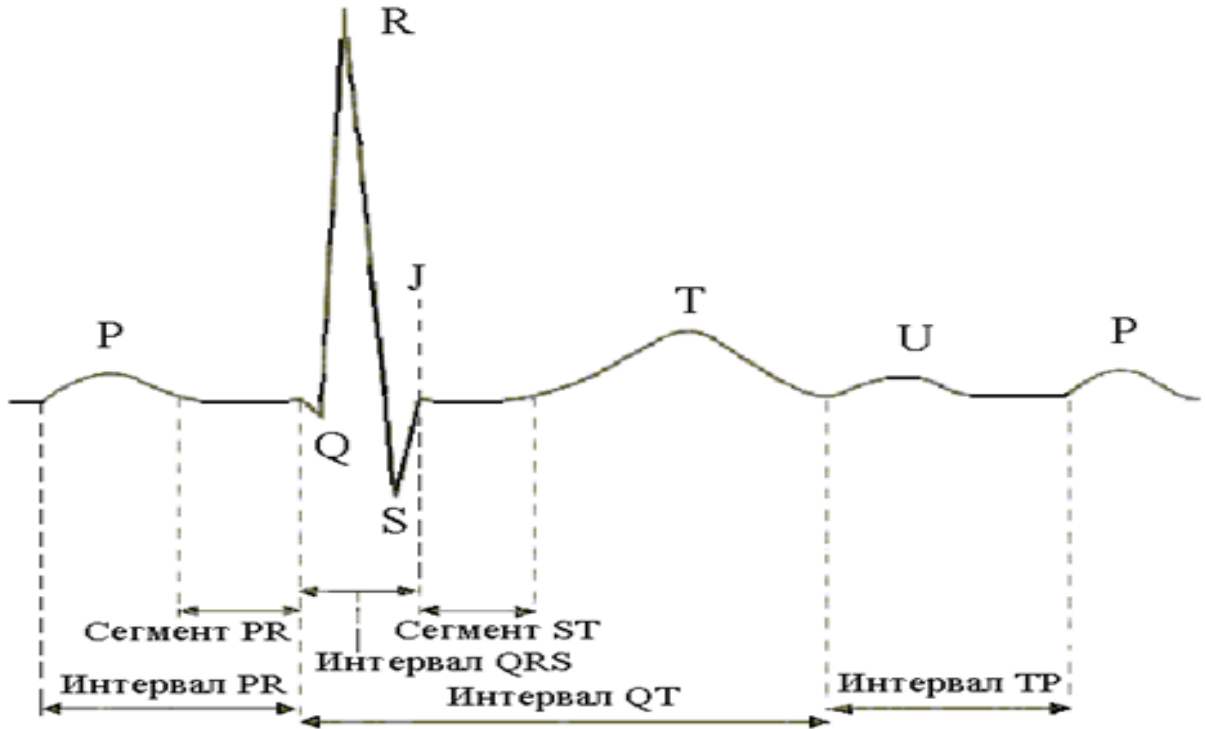


Рис.2. QRS – комплекс, соответствующий одному удару сердца

Вид QRS – комплекса показывает, что в определенные моменты времени наблюдается резкий скачок амплитуды сигнала (электрического потенциала), который по своей конфигурации напоминает гауссовский пик с максимумом в момент удара. Поэтому при моделировании ритма сердца оказывается вполне естественным использовать математическую модель сигнала как набора N -элементарных сигналов

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{N-1} z_0(t - t_n), \quad (1.1)$$

каждый из которых представляет собой гауссовский пик

$$z_0(t - t_n) = \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left(-\frac{(t-t_n)^2}{4\tau_0^2}\right) \quad (1.2)$$

соответствующий определенному удару сердца, где b_0 – амплитуда, τ_0 – длительность элементарного сигнала, t_n – момент удара.

Зависимость изменяющейся длины RR_n интервалов между ударами сердца от номера удара называется ритмограммой или тахограммой сердца (Рис.3).

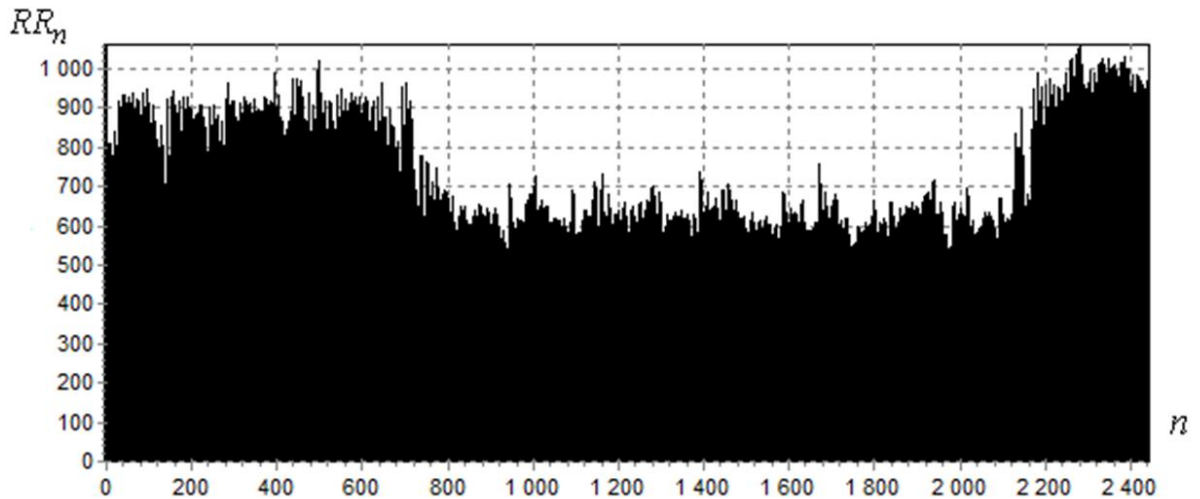


Рис. 3 Ритмограмма сердца, которая регистрируется во время медицинских исследований.

Если рассмотреть график, где по оси ординат откладывается длительность интервала между ударами, а по оси абсцисс – номера ударов, считая их равномерно расположенными на оси с интервалом в 1 сек (Рис.4), то этот процесс будет соответствовать модели сердечного ритма, как сигнала с некоторой амплитудной модуляцией.

На Рис.4 амплитуды A_s гауссовских пиков изменяются во времени по закону $A_s = 1 + \varepsilon \sin(2\pi f_m t_s)$, где $\varepsilon = 0,5$ – глубина модуляции, $f_m = 0,2$ Гц – частота модуляции, ширина пиков равна 0,02 сек.

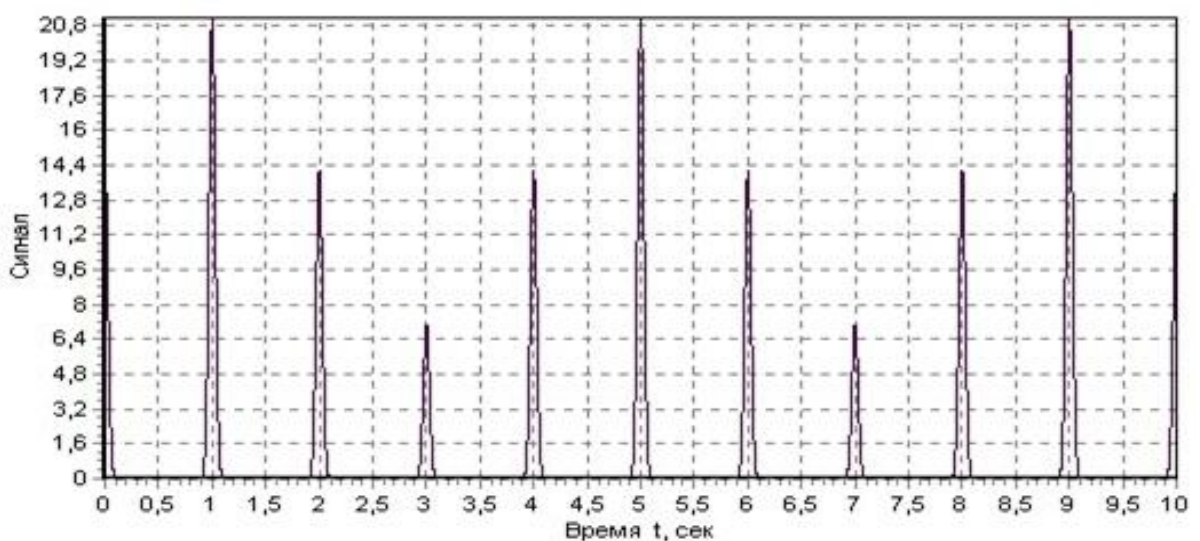


Рис. 4. Модель сердечного ритма как набора гауссовских пиков одинаковой ширины, где амплитуды сигнала изменяются по заданному закону (амплитудная модуляция)

Если расположить одинаковые по высоте гауссовские пики на оси времени именно в те моменты времени, которые соответствуют моментам реальных сердечных ударов (Рис.5), то получим модель частотно-модулированного сигнала (Рис.5).

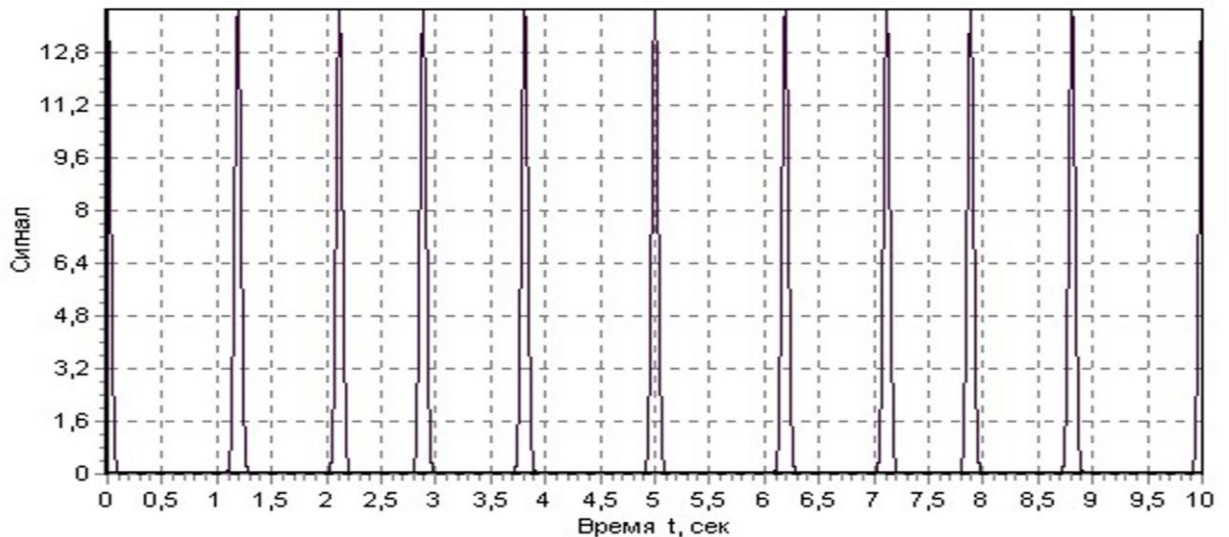


Рис. 5 Модель сердечного ритма как набора гауссовских пиков одинаковой ширины, где интервалы между ударами изменяются по заданному закону (частотная модуляция)

Для упрощения модели Рис.5 используются гауссовские пики одинаковой амплитуды, которые задаются формулой (1.1), а для моделирования неравномерного ритма как частотно-модулированного сигнала используется сумма (1.2) гауссовских пиков, расположенных на временной оси по заданному закону $t_s = sT_s + \varepsilon \sin(2\pi f_m sT_s)$, где $\varepsilon = 0,5$ – глубина модуляции, $f_m = 0,2$ Гц – частота модуляции, ширина пиков равна 0,02 сек. Отметим, что спектры мощности амплитудно-модулированного сигнала и частотно-модулированного сигнала с одинаковыми частотой и глубиной модуляции будут иметь различный вид. Причем спектр частотно-модулированного сигнала больше соответствует характеру спектра реальной ритмограммы. В данной работе используется модель сердечного ритма как частотно-модулированного сигнала, предложенная в [3], [17], [19].

Так как глобальная область исследования касается обработки ритмов сердца матери и плода, то при задании сигналов, сигнал с меньшей частотой

будет условно «материнским», а сигнал с большей частотой – «детским (или фетальным)».

1.1 Основные математические методы обработки кардиологических сигналов при изучении variability сердечного ритма

В настоящее время наиболее распространенными методами обработки сигналов сердечного ритма являются так называемые спектральные методы, к которым можно отнести Фурье-преобразование и Вейвлет-преобразование.

Разложение в интеграл Фурье для вещественного сигнала $z(t)$, изменяющегося во времени, имеет вид

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (2.1)$$

что означает спектральное представление функции на бесконечном интервале частот как суммы элементарных гармоник (волн) с частотой ν и амплитудой $Z(\nu)$. Спектральная компонента $Z(\nu)$ сигнала $z(t)$ определяется как комплексное преобразование Фурье.

$$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (2.2)$$

Можно ввести в рассмотрение круговую частоту $\Omega = 2\pi\nu$, измеряемую в радианах в секунду, в то время как частота ν измеряется в Герцах. Квадрат нормы сигнала $\|z(t)\|^2$, определяющий энергию сигнала, и квадрат модуля спектральной компоненты $|Z(\nu)|^2$, называемый спектром мощности, связаны равенством Парсеваля:

$$\|z(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\nu)|^2 d\nu \quad (2.3)$$

При использовании Фурье-анализа в кардиологии [7], предполагается стационарность процессов. Например, чтобы удовлетворить условию стационарности при обработке ЭКГ исключаются все участки резкого изменения ритма (аритмия, экстрасистолы). Но регистрация аритмии как раз служит показателем проблем сердечно-сосудистой системы.

Стандартное преобразование Фурье указывает на наличие в сигнале различных частот, но не показывает их изменение во времени. Чтобы устранить этот недостаток стали применять так называемое оконное преобразование Фурье. Интегрирование по бесконечному интервалу заменяется интегрированием по некоторому интервалу с центром в определенный момент времени. Этот интервал называется окном. Затем центр окна смещается и опять вычисляется интеграл. Таким образом удается фиксировать изменение частот во времени. Если окно имеет форму гауссовского пика, то оконное преобразование Фурье превращается в преобразование Габора. Но в обоих случаях результат зависит от размера окна: при малом окне хорошо выявляются высокочастотные компоненты, но не прослеживаются низкочастотные колебания и наоборот. Выбор же ширины окна требует априори знаний о поведении сигнала, что в большинстве случаев как раз и является проблемой.

Этого недостатка интегральных преобразований с фиксированным окном удастся избежать в Вейвлет-преобразовании. Этот вид преобразования представляет собой разложение сигнала по функциям, полученным из так называемого материнского Вейвлета, путем сжатий, растяжений и сдвигов [16], [17].

$$V(\nu, t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} Z(s) \psi^*(\nu(s - t)) ds, \quad (2.4)$$

где $\psi(x)$ – материнский Вейвлет, * – означает комплексное сопряжение.

Материнский вейвлет, играющий роль окна, автоматически изменяется при изменении частоты ν . Вклад в (2.4) дают те составляющие сигнала, которые похожи на материнский вейвлет. Выбор материнского вейвлета влияет на частотное и временное разрешение сигнала.

Следует заметить, что в математической литературе используется несколько другая форма Вейвлет-преобразования

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(s) \psi^*\left(\frac{s-b}{a}\right) ds,$$

где a – масштаб, b – сдвиг; $\psi(x)$ – материнский Вейвлет.

Если рассмотреть спектры мощности вейвлет-преобразований $|V(v, t)|^2$ и $|W(a, b)|^2$ для гармонического сигнала с заданной частотой f_0 , то максимум на этой частоте будет иметь только $|V(v, t)|^2$. Для $|W(a, b)|^2$ максимум будет сдвинут. Кроме того, $W(a, b)$ искажает амплитудные соотношения нескольких сигналов с различными частотами [2].

В данной работе мы будем использовать Вейвлет-преобразование с вейвлетной функцией (материнским вейвлетом) Морле, поскольку именно этот вейвлет для гармонических сигналов показывает максимумы в спектрах на истинных частотах этих сигналов. Формула для материнского вейвлета Морле:

$$\psi(x) = D_m \exp\left(-\frac{x^2}{2m^2}\right) [\exp(2\pi i x) - \exp(-\Omega_m^2)], \quad (2.5)$$

где $\Omega_m = m\pi\sqrt{2}$, $D_m = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{\Omega_m(1-2\exp(-\frac{3}{2}\Omega_m^2)+\exp(-2\Omega_m^2))}}$, m – управляющий

параметр. Если $m = 1$, получаем стандартный вейвлет Морле.

Изменение масштаба и сдвиги в вейвлете Морле (2.5) при $m = 1$ приведены на Рис.6.

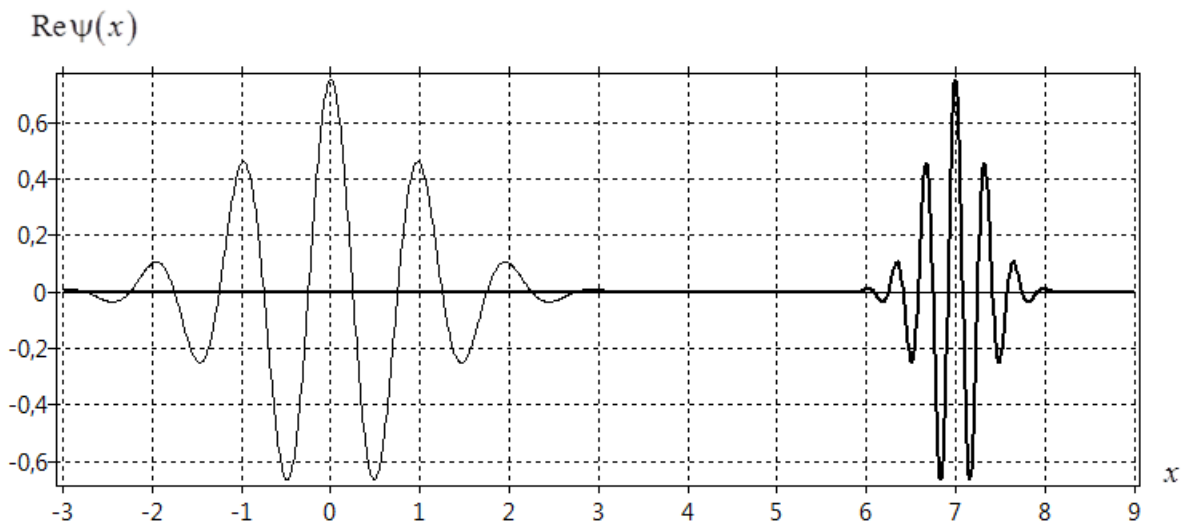


Рис. 6. Графики $Re\psi(x)$ (тонкая линия) и $Re\psi(3(x-7))$ (толстая линия) для стандартного вейвлета Морле ($m = 1$)

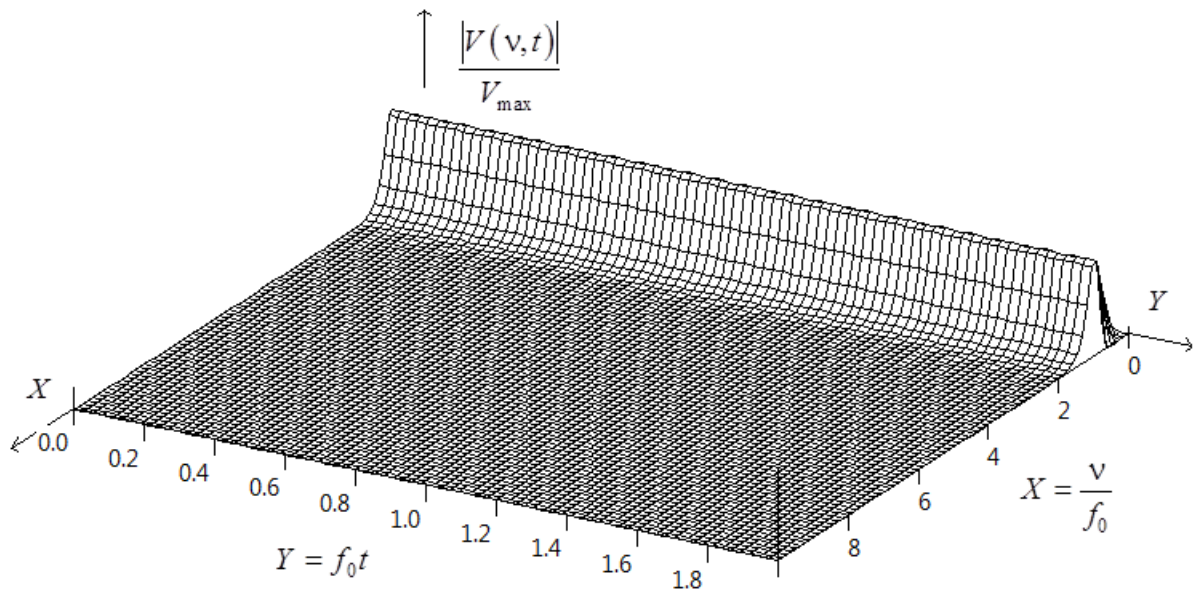


Рис. 7. График вейвлет-спектра для гармонического сигнала $Z(t) = \cos 2\pi f_0 t$, вычисленного с вейвлетом Морле ($m=1$)

Формула обращения для Вейвлет-преобразования

$$Z(t) = \frac{2}{c_\psi} \int_0^\infty dv \int_{-\infty}^\infty ds \cdot \text{Re}[V(v,s)\psi(v(s-t))] . \quad (2.6)$$

Аналог равенства Парсеваля для вейвлет преобразования (2.6)

$$\int_{-\infty}^\infty Z^2(t) dt = \frac{2}{c_\psi} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dv \frac{|V(v,t)|^2}{v}, \quad (2.7)$$

$$\frac{2}{c_\psi} \frac{|V(v,t)|^2}{v} = \varepsilon(v,t), \quad (2.8)$$

где $\varepsilon(v,t)$ – мгновенное распределение энергии сигнала по частотам, вычисленное в момент времени t , $c_\psi = \int_{-\infty}^\infty \frac{|\overline{\psi(F)}|^2}{F} dF$, $\overline{\psi(F)}$ – Фурье-компонента материнского вейвлета.

1.2 Аналитическое вычисление вейвлет преобразования и спектра мощности Вейвлет-преобразования для модельного сигнала в виде одиночного гауссовского пика

Будем строить модель ритмограммы как совокупность гауссовских пиков с одинаковой амплитудой (3.1), но расположенных определенным неравномерным образом на оси времени. Совокупность таких пиков задаётся формулой:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^N \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left(-\frac{(t-t_n)^2}{4\tau_0^2}\right) \quad (3.1)$$

Центры во времени гауссовских пиков t_n в моделях реальных кардио-сигналов располагаются неравномерно на оси времени, что соответствует понятию variability сердечного ритма (HRV), которая имеет место в любых кардио-сигналах.

Одновременно будем рассматривать тестовый упрощенный сигнал, состоящий из гауссовских пиков, равномерно расположенных на оси времени для того, чтобы отработать и проверить всю вычислительную схему метода от построения модели до исследования свойств сигналов с помощью Вейвлет-преобразования.

Но прежде всего, мы должны получить аналитическое выражение для одиночного гауссовского пика. Отметим, что именно модель удара сердца, как гауссовского пика с заданными параметрами, позволяет получить аналитическое выражение для Вейвлет-преобразования и Вейвлет-спектра мощности этого сигнала. А затем на основании этого аналитического выражения можно эффективно и правильно вычислять все требуемые спектральные характеристики для модели кардио-сигнала, состоящего из серии гауссовских пиков, которые соответствуют нерегулярным ударам сердца.

Для расчёта Вейвлет-преобразования одиночного гауссовского сигнала требуется вычислить Фурье-преобразование функции (1.2).

$$\widetilde{Z}_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_0(t) \exp\{-2\pi i f t\} dt \quad (3.2)$$

Дополнительные пояснения для вычисления.

В аргументе экспоненты необходимо выделить полный квадрат:

$$\begin{aligned} -\frac{(t-2t_n)^2}{4\tau_0^2} - 2\pi i f t &\Rightarrow t^2 - 2t_n t + t_n^2 + 8\tau_0^2 \pi i f t = t^2 - 2t(t_n - 4\tau_0^2 \pi i f) + t_n^2 - \\ 8\tau_0^2 \pi i f t_n + 8\tau_0^2 \pi i f t_n - 16\tau_0^4 \pi^2 f^2 t_n^2 + 16\tau_0^4 \pi^2 f^2 t_n^2 &= t^2 - 2t(t_n - 4\tau_0^2 \pi i f) + \\ (t_n - 4\tau_0^2 \pi i f)^2 + 8\tau_0^2 \pi i f t_n + 16\tau_0^4 \pi^2 f^2 t_n^2 &= (t - t_n + 4\tau_0^2 \pi i f)^2 + 8\tau_0^2 \pi i f t_n + \\ 16\tau_0^4 \pi^2 f^2 t_n^2. \end{aligned}$$

Для суммы гауссовских пиков имеем:

$$\tilde{Z}(f) = \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \sum_{n=1}^N \exp\{-2\pi i f t_n\} \exp\left\{-\frac{(t-t_n)^2}{4\tau_0^2}\right\}. \quad (3.3)$$

Для вычисления Вейвлет-преобразования по формуле (2.4) будем использовать материнский вейвлет Морле, который задаётся формулой (2.5):

Фурье-компонента материнского вейвлета является вещественной функцией, поэтому при сопряжении не отличается от себя же.

$$\tilde{\psi}^*\left(\frac{f}{v}\right) = \frac{D_m \Omega_m}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\Omega_m^2 \left(\frac{f}{v} - 1\right)^2\right\} \left(1 - \exp\left\{-2\Omega_m^2 \frac{f}{v}\right\}\right), \quad (3.4)$$

где $\Omega_m = m\pi\sqrt{2}$. Для вычисления вейвлет-преобразования одного гауссовского сигнала $Z_0(t - t_n)$ используется формула (2.4):

$$V(v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_0(f) \tilde{\psi}^*\left(\frac{f}{v}\right) \exp(2\pi i f t) df.$$

Введём замену переменной: $F = \frac{f}{v}, \Rightarrow df = v dF$, тогда получаем Вейвлет-преобразование в виде:

$$V(v, t) = v \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}_0(vF) \tilde{\psi}^*(F) \exp(2\pi i v F t) dF. \quad (3.5)$$

Подставив (3.3) и (3.4) в (3.5), получим выражение для Вейвлет-преобразования одиночного гауссовского пика из модельного сигнала ритмограммы сердца:

$$\begin{aligned} V(v, t) &= \frac{D_m \Omega_m}{\sqrt{\pi}} v b_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi i v F t_n) \cdot \exp(-4\pi^2 v^2 F^2 \tau_0^2) \\ &\quad \cdot \exp[-\Omega_m^2 (F - 1)^2] \cdot [1 - \exp(-2\Omega_m^2 F)] \cdot \exp(2\pi i v F t) \cdot dF = \\ &= \frac{D_m \Omega_m}{\sqrt{\pi}} v b_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp[2\pi i v F (t - t_1)] (\exp[-4\pi^2 v^2 F^2 \tau_0^2 - \Omega_m^2 (F - 1)^2] - \\ &\quad - \exp[-4\pi^2 v^2 F^2 \tau_0^2 - \Omega_m^2 (F - 1)^2 - 2\Omega_m^2 F]). \end{aligned}$$

Для удобства расчёта обозначим: $v(t - t_n) = x$. Раскроем скобки и перепишем выражение в показателе второй экспоненты в виде:

$$\begin{aligned} -4\pi^2 v^2 F^2 \tau_0^2 - \Omega_m^2 (F - 1)^2 &= (-4\pi^2 v^2 \tau_0^2 - \Omega_m^2) F^2 + 2\Omega_m^2 F - \Omega_m^2 \\ -4\pi^2 v^2 F^2 \tau_0^2 - \Omega_m^2 (F - 1)^2 - 2\Omega_m^2 F &= (-4\pi^2 v^2 \tau_0^2 - \Omega_m^2) F^2 - \Omega_m^2. \end{aligned}$$

Таким образом, на данном этапе вычислений мы можем найти коэффициент при F^2 в итоговом выражении. Это можно обосновать тем, что

для вычисления интеграла вида: $\int \exp\{f(x)\}dx$, где $f(x)$ является полиномом второй степени, то для простоты вычислений выделяется полный квадрат в показателе экспоненты, тем самым получая выражение в показателе вида: $ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$. Можно заметить, что коэффициент при слагаемом с самой высокой степенью сохраняет свое значение.

Выделяем слагаемые при F^2 , и так как этот коэффициент сохранит свое значение при интегрировании, а также подставляем уже известные коэффициенты для Вейвлет-преобразования:

$$\begin{aligned} -4\pi^2\nu^2\tau_0^2 - \Omega_m^2 &= -\left(4\pi^2\nu^2\tau_0^2 + \underbrace{\Omega_m^2}_{2m^2\pi^2}\right) = -\Omega_m^2\left(1 + \frac{4\pi^2\nu^2\tau_0^2}{\Omega_m^2}\right) = \\ &= -\Omega_m^2\left(1 + \frac{4\pi^2\nu^2\tau_0^2}{2m^2\pi^2}\right) = -\Omega_m^2\left(1 + \frac{2\nu^2\tau_0^2}{m^2}\right) \stackrel{\text{при } m=1}{=} -\underbrace{\Omega_m^2}_{2\pi^2}(1 + 2\nu^2\tau_0^2) = \\ &= -2\pi^2(1 + 2\nu^2\tau_0^2) = -2\pi^2a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент при полном квадрате может быть записан, как $a = \sqrt{1 + 2\nu^2\tau_0^2}$. То есть при указанных обозначениях выражения в показателях экспоненты при $\Omega_m^2 = 2\pi^2$ примут вид:

$$\begin{aligned} -4\pi^2\nu^2F^2\tau_0^2 - \Omega_m^2(F - 1)^2 &= -2\pi^2a^2F^2 + 4\pi^2F - 2\pi^2, \\ -4\pi^2\nu^2F^2\tau_0^2 - \Omega_m^2(F - 1)^2 - 2\Omega_m^2F &= -2\pi^2a^2F^2 - 2\pi^2. \end{aligned}$$

Итого, интеграл для вычисления Вейвлет-преобразования примет вид:
 $V(\nu, t) = D_m\sqrt{2\pi\nu}b_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[2\pi ixF]\{\exp[-2\pi^2a^2F^2 + 4\pi^2F - 2\pi^2] - \exp[-2\pi^2a^2F^2 - 2\pi^2]\}dF = D_m\sqrt{2\pi\nu}b_0[I_1 - I_2]$.

Получаем два интеграла, в которых определяем неизвестные коэффициенты для выделения полного квадрата:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\underbrace{2\pi^2a^2}_A F^2 + \left(\underbrace{4\pi^2 + 2\pi i x}_{B_1}\right)F - 2\pi^2\right]dF,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\underbrace{2\pi^2a^2}_A F^2 + \left(\underbrace{2\pi i x}_{B_2}\right)F - 2\pi^2\right]dF.$$

Вычислим значение коэффициентов. Для первого интеграла:

$$-AF^2 + B_1F - 2\pi^2 = -A \left[F^2 - \frac{B_1}{A}F + \frac{1}{a^2} \right] = -A \left[\left(F - \frac{B_1}{2A} \right)^2 - \left(\frac{B_1^2}{4A^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] =$$

$$-A \left(F - \frac{B_1}{2A} \right)^2 + A \left(\frac{B_1^2}{4A^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

Для второго интеграла:

$$-AF^2 + B_1F - 2\pi^2 = -A \left(F - \frac{B_2}{2A} \right)^2 - A \left(\frac{B_2^2}{4A^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{2\pi^2 a^2} = \sqrt{2}\pi a$$

Таким образом, неизвестно только 3 коэффициента: A, B₁, B₂.

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{\sqrt{A}} \exp \left[A \left(\frac{B_1^2}{4A^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A \left(F - \frac{B_1}{2A} \right)^2} d\sqrt{A}F - \frac{1}{\sqrt{A}} \exp \left[A \left(\frac{B_2^2}{4A^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A \left(F - \frac{B_2}{2A} \right)^2} d\sqrt{A}F = \sqrt{\pi} \cdot \exp \left(\frac{-A}{a^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi a} \left[\exp \left(A \frac{B_1^2}{4A^2} \right) - \exp \left(A \frac{B_2^2}{4A^2} \right) \right]$$

Для упрощения выражения воспользуемся интегралом Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A \left(F - \frac{B_1}{2A} \right)^2} d\sqrt{A}F = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A \left(F - \frac{B_2}{2A} \right)^2} d\sqrt{A}F = \sqrt{\pi}.$$

Тогда Вейвлет -преобразование примет вид:

$$V(v, t) = D_m \sqrt{2\pi} v b_0 [I_1 - I_2]$$

$$= D_m \sqrt{2\pi} v b_0 \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi a} \exp \left(\frac{-A}{a^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\pi a} \left[\exp \left(\frac{B_1^2}{4A} \right) - \exp \left(\frac{B_2^2}{4A} \right) \right]$$

Упростим выражение перед квадратными скобками:

$$D_m \sqrt{2\pi} v b_0 \exp \left(\frac{-A}{a^2} \right) = D_m \sqrt{2\pi} v b_0 \frac{1}{\sqrt{2}\pi a} \exp \left(\frac{-2\pi^2 a^2}{a^2} \right) = \frac{D_m b_0}{a} \exp(-2\pi^2).$$

Вычислим показатели экспоненты в скобках:

$$\frac{B_1^2}{4A} = \frac{(4\pi^2 + 2\pi i x)^2}{4 \cdot 2\pi^2 a^2} = \frac{4\pi^2 (2\pi + i x)^2}{4 \cdot 2\pi^2 a^2} = \frac{(2\pi + i x)^2}{2a^2} = \frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{2\pi i x}{a^2} - \frac{x^2}{2a^2},$$

$$\frac{B_2^2}{4A} = \frac{(2\pi i x)^2}{4 \cdot 2\pi^2 a^2} = -\frac{x^2}{2a^2}.$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$\left[\exp \left(\frac{B_1^2}{4A} \right) - \exp \left(\frac{B_2^2}{4A} \right) \right] = \exp \left(\frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{2\pi i x}{a^2} - \frac{x^2}{2a^2} \right) - \exp \left(-\frac{x^2}{2a^2} \right) =$$

$$= \exp \left(-\frac{x^2}{2a^2} \right) \left[\exp \left(\frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{2\pi i x}{a^2} \right) - 1 \right].$$

Таким образом, получаем выражение для Вейвлет-преобразования модельного сигнала:

$$\begin{aligned} V(v, t) &= \frac{D_m b_0}{a} \exp(-2\pi^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi^2}{a^2} + \frac{2\pi i x}{a^2}\right) - 1 \right] = \\ &= \frac{D_m b_0}{a} \exp(-2\pi^2) \cdot \exp\left(\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right] = \\ &= \frac{D_m b_0}{a} \exp\left[-\frac{2\pi^2(a^2-1)}{a^2}\right] \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где $a = \sqrt{1 + 2\nu^2\tau_0^2}$, $x = \nu(t - t_n)$, $2\pi^2 = \Omega_m^2$.

Отметим, что наиболее информативным при анализе сердечного ритма является спектр мощности Вейвлет преобразования сигнала $|V(v, t)|^2$, который показывает сдвиг активности ритма в область более высоких или низких частот, что, в свою очередь, характеризует изменение физиологического состояния организма.

Для расчёта спектра мощности $|V_0(v, t)|^2$ одиночного гауссовского пика необходимо умножить Вейвлет-преобразование сигнала на сопряжённое ему выражение:

$$\begin{aligned} |V_0(v, t)|^2 &= V_0(v, t) \cdot \bar{V}_0(v, t) = \\ &= \left(\frac{D_m b_0}{a}\right)^2 \exp\left[-\frac{4\pi^2(a^2-1)}{a^2}\right] \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \left[\exp\left(\frac{2\pi i x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{2\pi i x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Подробнее упрощение выражения при перемножении скобок приведено ниже.

$$\begin{aligned} &\left[\exp\left(\frac{2\pi i x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right] \left[\exp\left(-\frac{2\pi i x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right] = \\ &\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \right] = \\ &\cos^2\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + \\ &\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) \right) + \exp\left(-\frac{4\pi^2}{a^2}\right) = 1 - \\ &2 \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + \exp\left(-\frac{4\pi^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, спектр мощности одиночного модельного сигнала в виде гауссовского пика постоянной амплитуды вычисляется по формуле:

$$|V_0(v, t)|^2 = \left(\frac{D_m b_0}{a}\right)^2 \exp\left[-\frac{4\pi^2(a^2-1)}{a^2}\right] \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{2\pi^2}{a^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + \exp\left(-\frac{4\pi^2}{a^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{a^2}\right) + \exp\left(-\frac{4\pi^2}{a^2}\right)\right] \quad (3.6)$$

$$\text{где } a = \sqrt{1 + 2v^2\tau_0^2}, \quad x = v(t - t_1), \quad D_m = \frac{(2\pi)^{1/4}}{\sqrt{\Omega_m(1 - 2 \exp(-\frac{3}{2}\Omega_m^2) + \exp(-2\Omega_m^2))}},$$

$$\Omega_m^2 = 2\pi^2 \text{ при } m = 1$$

Далее с помощью формулы (3.6), полученной аналитически для одиночного пика, можно вычислить Вейвлет-преобразование и спектр мощности Вейвлет-преобразования сигнала, состоящего из заданного количества пиков. Количество пиков будет очевидно зависеть от времени регистрации кардио-сигнала.

Сначала проведем все расчеты для модельных сигналов (условно матери и ребенка) с равномерным ритмом. Частота ритма ребенка предполагается равной удвоенной частоте ритма матери. Затем исследуем частотно-модулированные модельные сигналы матери и ребенка, где серия гауссовских пиков располагается на неравномерной временной шкале. При этом будем исследовать изменение характеристик при задании различных глубин и частот модуляции.

ГЛАВА 2. ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РИМОГРАММЫ МАТЕРИ И ПЛОДА

Для моделирования и исследования ритмов сердца матери и плода сначала рассмотрим тестовые периодические сигналы с периодами $T_1 = 1$ с, то есть частота матери равна 1 Гц, и $T_2 = 0.5$ с, то есть частота ребенка равна 2 Гц. По приведённым данным периода и частоты сигналов видно, что расстояния между пиками «материнского» сигнала 1 секунда, а «фетального» (сигнала плода) - 0.5 секунд

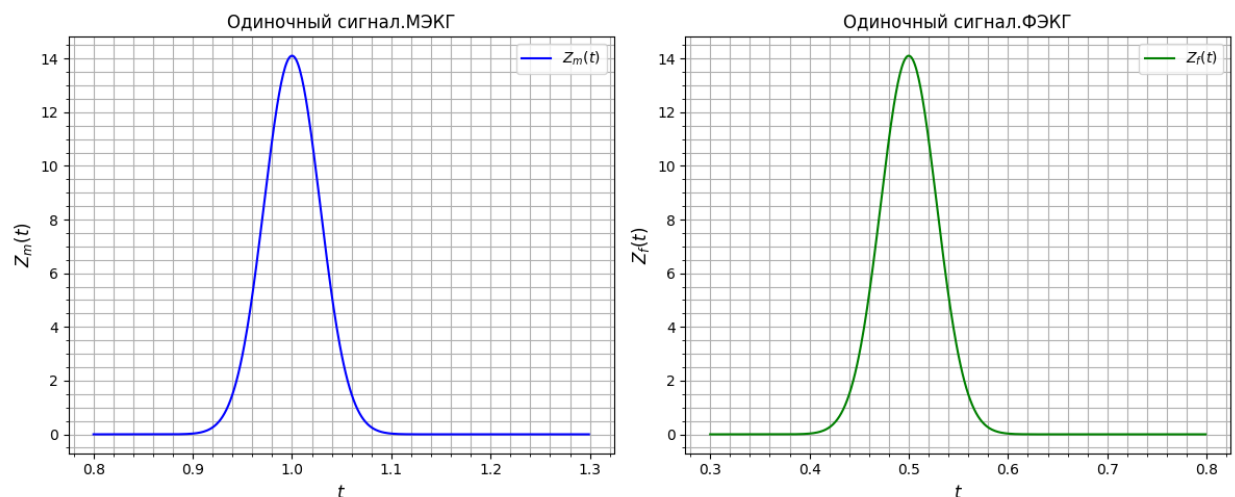


Рис. 8. График одиночного гауссовского пика в модели «материнского» (левый график) и фетального (правый график) ритма для $\tau_0 = 0,02$ с, $b_0 = 1$

Будем исследовать математические модели ритмограмм, состоящие из серий гауссовских пиков. Одинаковые по длительности отрезки ритмограммы матери и плода будут иметь вид:

$$Z_1(t) = \sum_{n=1}^{60} \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left\{-\frac{(t-t_{1n})^2}{4\tau_0^2}\right\}, t_{1n} = nT_1 \quad (4.1)$$

$$Z_2(t) = \sum_{n=1}^{120} \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left\{-\frac{(t-t_{2n})^2}{4\tau_0^2}\right\}, t_{2n} = nT_2 \quad (4.2)$$

Рассмотрим серию гауссовских пиков (Рис. 9), состоящую из 20 пиков для матери и 40 пиков для плода. Все пики имеют одинаковую амплитуду и расположены на одинаковом расстоянии, так как частота постоянная.

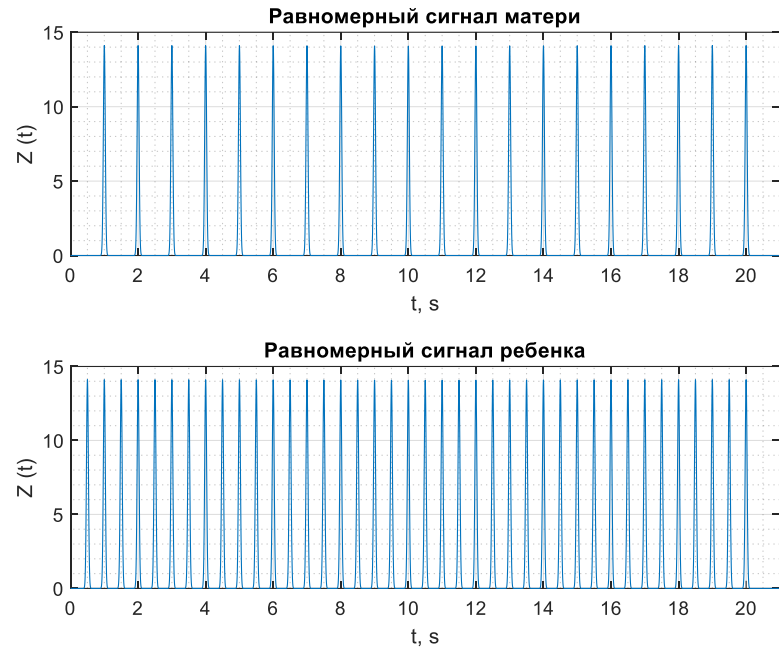


Рис. 9. Серия гауссовских пиков для сигнала матери и плода на равномерно центрированных на шкале времени.

Сравним Фурье-преобразование, мощности Фурье-спектров и Вейвлет-спектров этих сигналов.

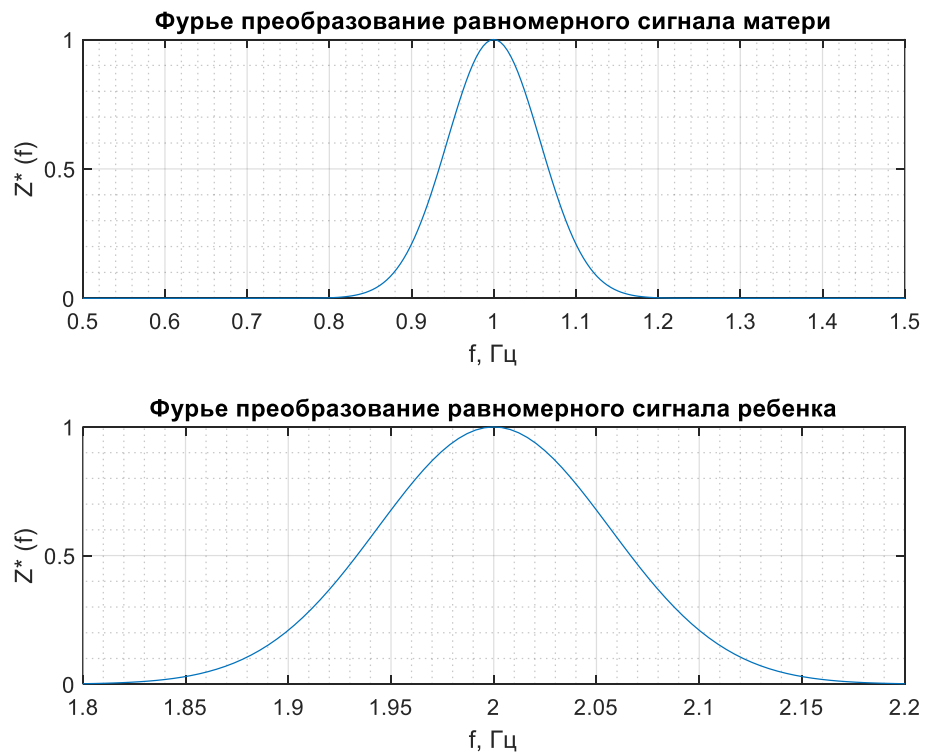


Рис. 11. График спектра мощности Фурье-преобразования сигналов матери и плода, где верхняя строка соответствует гауссовским пикам с частотой $f_1 = 1$ Гц (материнский сигнал), нижняя строка – $f_2 = 2$ Гц (фетальный сигнал)

Фурье спектр мощности на Рис.11 идентичен для двух периодических сигналов с различной частотой, что подтверждает предположение о том, что классический Фурье-анализ не дает полной информации о частотных свойствах медицинских сигналов, которые регистрируются в течение определенного конечного интервала времени и могут иметь в своем составе множество ритмических составляющих с различными частотами.

Рассмотрим Вейвлет-преобразование тестового сигнала ритмограммы, состоящего из 20 гауссовских пиков для материнского сигнала и 40 гауссовских пиков для сигнала плода, равномерно расположенных на оси времени.

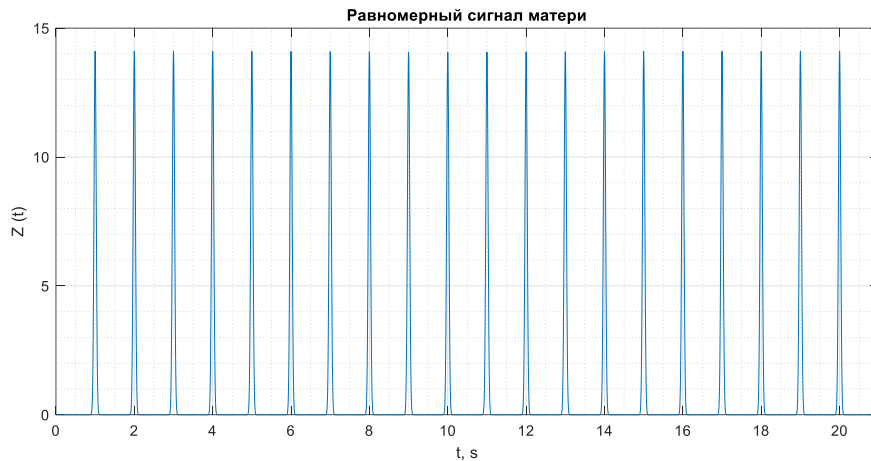


Рис.12. Тестовый модельный сигнал (без вариабельности ритма) из двадцати гауссовских пиков с частотой 1 Гц (условно материнский)

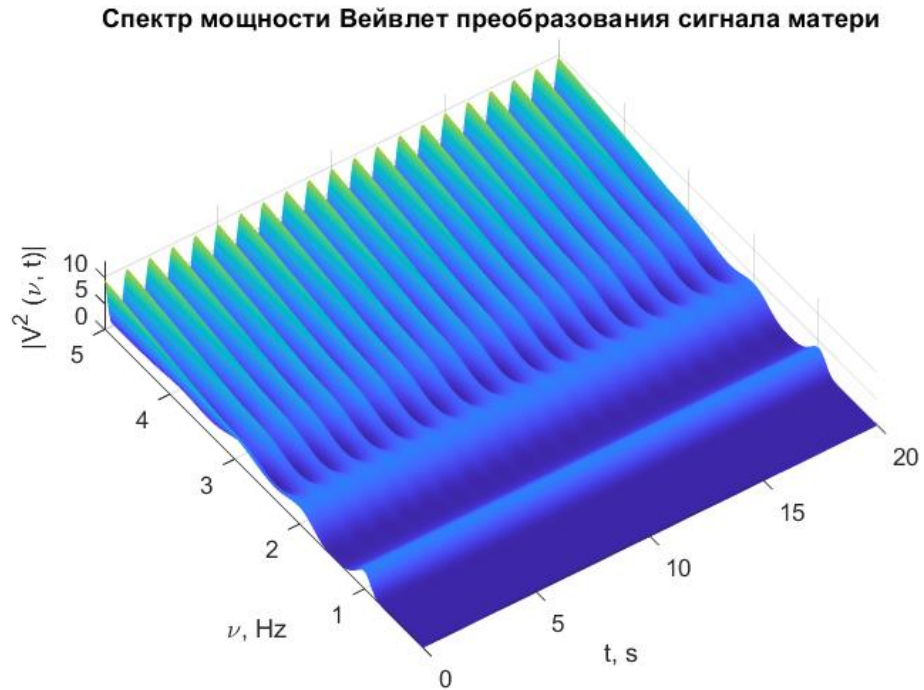


Рис.13. Вейвлетный спектр мощности $|V(\nu, t)|^2$ тестового модельного сигнала (без вариабельности ритма) из двадцати гауссовских пиков с частотой 1 Гц

На рис.12 отчетливо видны двадцать пиков, соответствующих моментам времени 1, 2, 3, ..., 20 с, что показывает на Рис. 13 очевидный факт максимума мощности в момент каждого из двадцати ударов сердца.

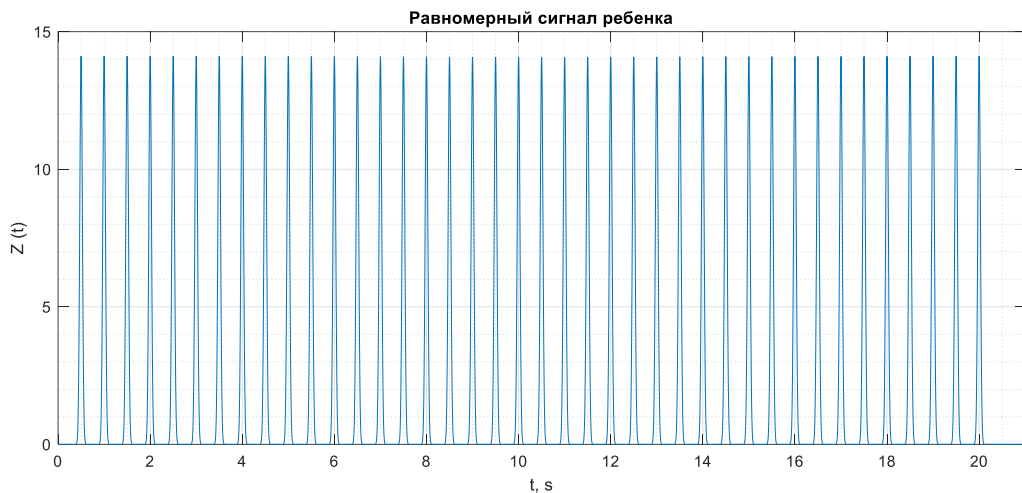


Рис.14. Тестовый модельный сигнал (без вариабельности ритма) из сорока гауссовских пиков с частотой 2 Гц (условно сигнал плода)

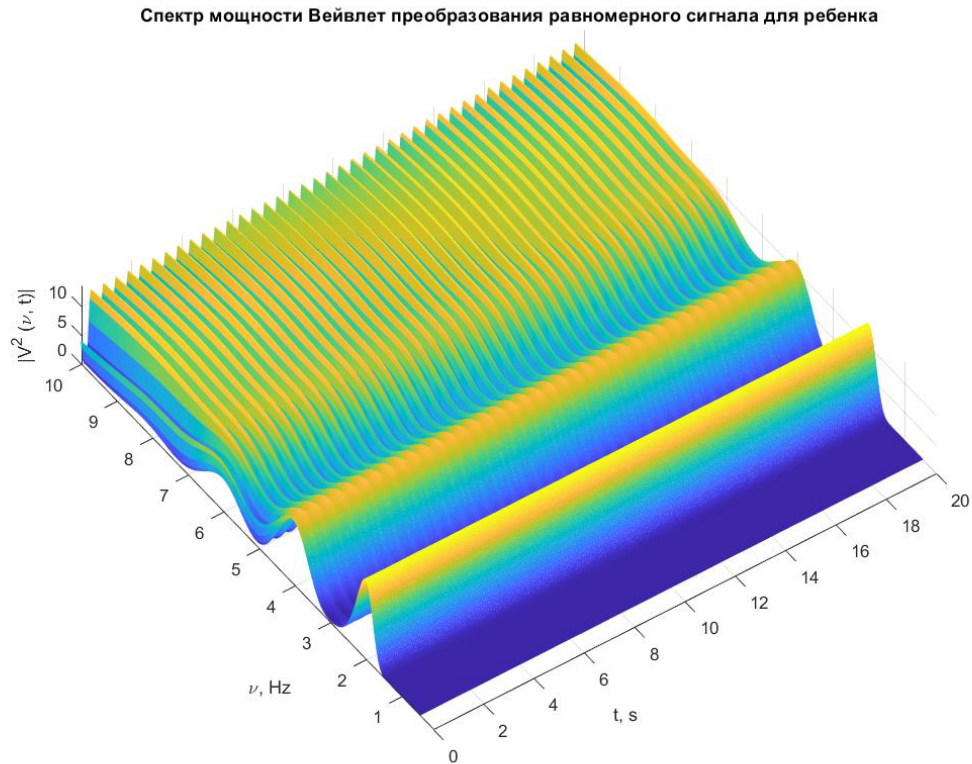


Рис. 15. Вейвлетный спектр мощности $|V(\nu, t)|^2$ тестового модельного сигнала (без вариабельности ритма) из двадцати гауссовских пиков с частотой 2 Гц

На рис.14 сорок пиков следуют друг за другом через временные интервалы 0.5 с, что соответствует сигналу с удвоенной частотой. При этом на Рис. 15 всплески мощности расположены друг относительно друга на расстоянии в 0.5 с, что показывает факт максимума мощности в момент удара.

Если фиксировать в $|V(\nu, t)|^2$ моменты времени t и находить частоты, на которых достигается максимум $|V(\nu, t)|^2$, то получится некоторая зависимость частот $\nu_{max}(t)$ от времени. Эта функция частоты от времени называется локальной частотой [19]. Приведем графики локальных частот тестовых модельных сигналов.

Так, для условно материнского сигнала рассматриваемая полоса частот от 0.8 Гц до 1.3 Гц, а для условно сигнала плода от 0.3 Гц до 2.5 Гц.

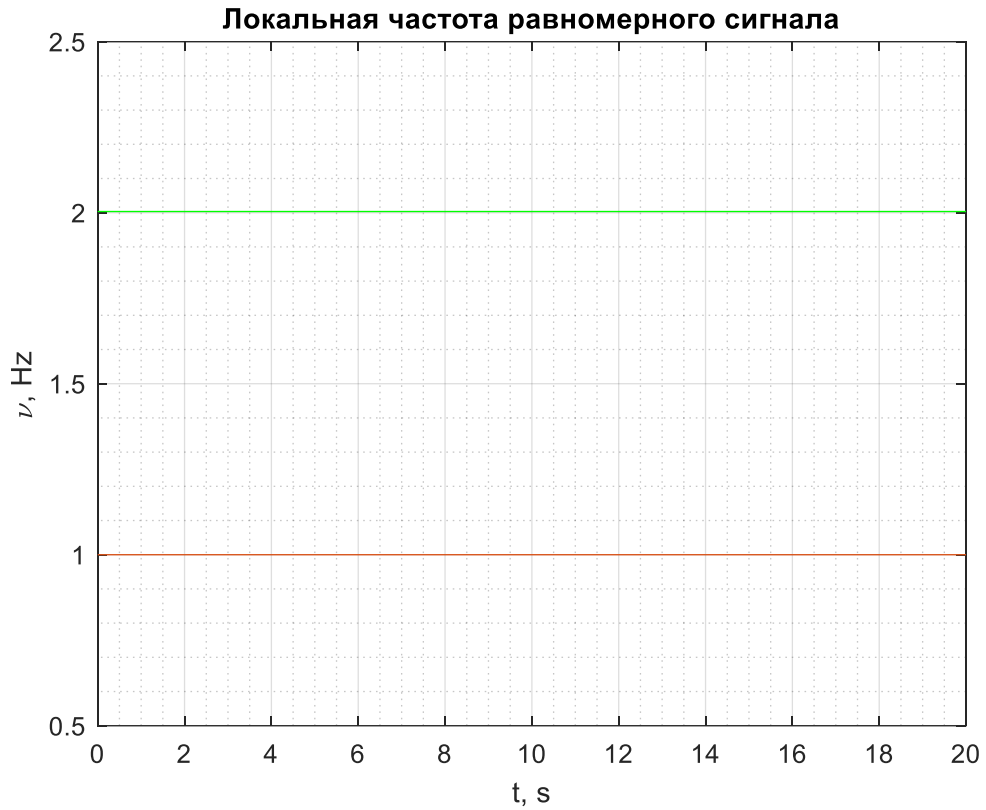


Рис. 16. Зависимость локальной частоты от времени для тестовых модельных сигналов (без варибельности ритма): условно материнского (1 Гц) - красная линия и условно плода (2 Гц) – зеленая линия

На рис.15 локальная частота не меняется от времени в обоих случаях, что очевидно для тестовых сигналов, но одновременно показывает правильность предложенной методики вычисления локальной частоты с помощью Вейвлет-преобразования.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РИТМОГРАММЫ МАТЕРИ И ПЛОДА КАК ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

3.1 Построение RR_n - интервалов по заданным свойствам частотно-модулированных сигналов

Рассмотрим модели ритмограммы матери и плода как частотно-модулированных сигналов. Пусть есть два сигнала с частотной модуляцией.

Модулированный сигнал $f(t)$, в котором частота изменяется по синусоидальному закону, представляется в виде несущей частоты f_0 , безразмерной амплитуды изменения частоты ε (глубина модуляции) и модулирующей частоты f^{mod} (частота модуляции). Предположим, что для сигнала матери:

$$f_1(t) = f_1^0 [1 + \varepsilon_1 \sin(2\pi f_1^{mod} t)], \quad (5.1)$$

где $f_0^1 = 1$ Гц, $\varepsilon_1 = 0.1$, $f_1^{mod} = 0.2$ Гц.

Для ребенка (child) такой модулированный сигнал $f(t)$ можно представить в виде

$$f_2(t) = f_2^0 [1 + \varepsilon_2 \sin(2\pi f_2^{mod} t)], \quad (5.2)$$

где $f_2^0 = 2$ Гц $\varepsilon_2 = 0,2$; $f_2^{mod} = 0,4$ Гц.

В формулах (5.1), (5.2): ε_1 , ε_2 – глубина модуляции первого и второго сигналов, f_1^{mod} , f_2^{mod} – частота модуляции первого и второго сигналов.

Изменение частоты во времени является характерной особенностью сердечного ритма, или вариабельностью сердечного ритма. В рамках данной модели каждый из двух сигналов представляется в виде суммы гауссовских пиков одинаковой амплитуды и ширины, центры которых расположены на неравномерной шкале времени. Ширину гауссовских пиков считаем одинаковой для обеих моделей $\tau_0 = 0,02$ сек, а амплитуду $b_0 = 1$.

$$Z_1(t) = \sum_{n=1}^{60} \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left\{-\frac{(t-t_{1n})^2}{4\tau_0^2}\right\}, \tau_0 = 0,02 \text{сек.} \quad (5.3)$$

$$Z_2(t) = \sum_{n=1}^{120} \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0} \exp\left\{-\frac{(t-t_{2n})^2}{4\tau_0^2}\right\}, \tau_0 = 0,02 \text{сек.} \quad (5.4)$$

Центры гауссовских пиков t_n определяются из соотношения:

$$t_n = t_{n-1} + RR_n,$$

где номер n изменяется в пределах $n = 1, 2, \dots, N$, где N - суммарное количество сердечных ударов, величины промежутков между ударами сердца RR_n , а также времена локализации гауссовских пиков t_n измеряются в секундах. Предположим, что начальный (нулевой) гауссовский пик локализован в момент времени $t_0 = 0$. Величины промежутков времени, измеряемые в секундах, представляют собой вектор $RR = \{RR_1; RR_2; \dots; RR_N\}$. Для реальных кардиологических измерений величины RR_n берутся из записи кардиографа.

В данной синусоидальной модели изменения частоты со временем необходимо найти явные выражения для RR_n . Отметим, что в реальной медицинской ситуации эти интервалы известны из записи ритмограммы сердца (Рис.3). Но для исследования модели сигнала с частотной модуляцией нам потребуется решить обратную задачу, то есть сопоставить заданному изменению частоты соответствующие изменения RR_n - интервалов между ударами сердца.

Построим алгоритм нахождения зависимости RR_n - интервалов от времени при заданной частотной модуляции сигнала. Если начальный удар сердца происходит в нулевой момент времени $t_0 = 0$, то следующий удар сердца t_1 произойдет в момент времени $t_1 = RR_1$, причем величина $RR_1(t_1) = 1/f(t_1)$, определяется локальной частотой $f(t)$ зависящей от времени t . Трансцендентное уравнение для определения RR_1 имеет вид:

$$t_1 = RR_1(t_1) = \frac{1}{f(t_1)} = \frac{1}{f_0(1 + \varepsilon \sin(2\pi f \text{mod } t_1))}. \quad (5.5)$$

Решение такого трансцендентного уравнения представлено на рис. 17.

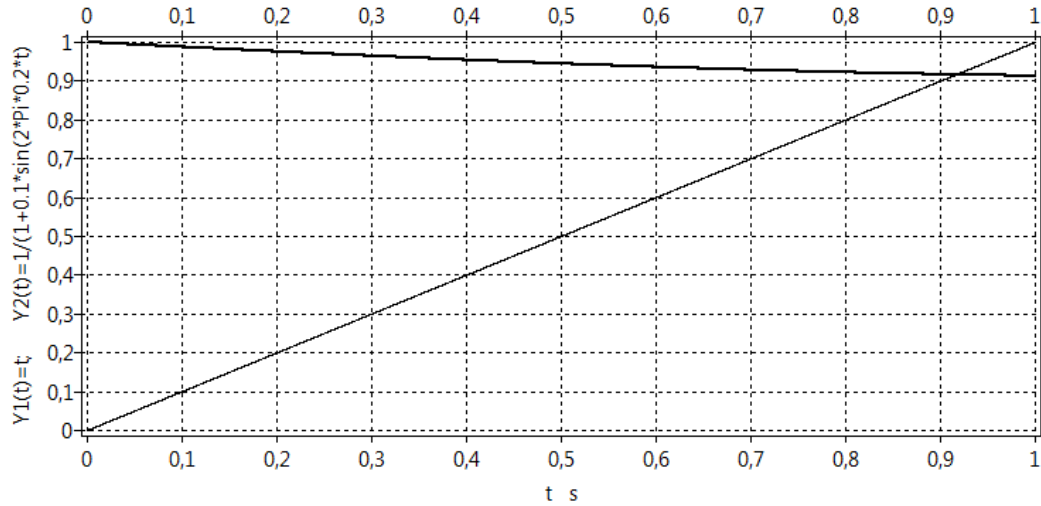


Рис.17. Тонкой линией построена функция $Y1(t) = t$. Толстой линией построена функция $Y2(t) = \frac{1}{f_0^1(1+\varepsilon_1 \sin(2\pi f_1^{mod}t))}$ для $f_0=1$ Гц, $\varepsilon_1=0,1$, $f_1^{mod}=0,2$ Гц. Момент времени $t_1 = RR_1$ пересечения двух кривых приблизительно равен $t_1 \approx 0,9163$ сек.

Второй удар сердца в такой простейшей модели произойдет в момент времени t_2 , для которого справедливо трансцендентное уравнение (5.6):

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{F_0(1+\varepsilon_m \sin(2\pi F_m t_2))}. \quad (5.6)$$

В уравнение (5.6) входит найденное для предыдущего этапа время t_1 , причем промежуток времени между вторым и первым ударом сердца равен $RR_2 = t_2 - t_1$. Решение трансцендентного уравнения представлено на Рис. 18.

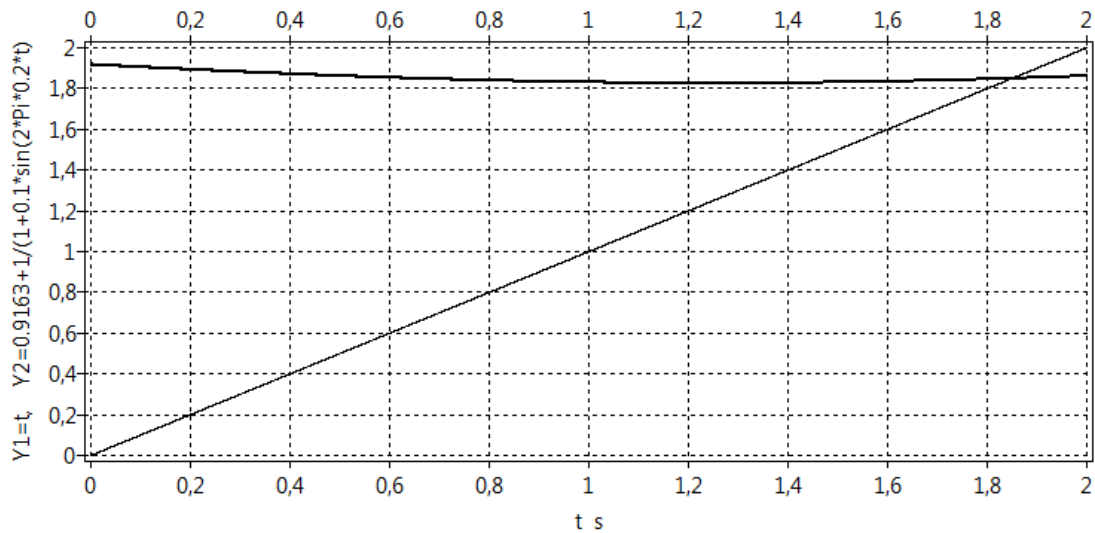


Рис.18. Тонкой линией построена функция $Y1(t) = t$. Толстой линией построена функция $Y2(t) = 0.9163 + \frac{1}{f_0(1+\varepsilon \sin(2\pi f^{mod}t_2))}$ для $f_0=1$ Гц, $\varepsilon = 0,1$, $f^{mod}=0.2$ Гц. Момент времени t_2 пересечения двух кривых приблизительно равен $t_2 \approx 1.8482$ сек.

Таким образом, второй удар сердца происходит через время $RR_2 = t_2 - t_1 \approx 932$ мс. Общая последовательность ударов сердца (центры гауссовских пиков) t_{n+1} определяется по известному предыдущему найденному значению t_n из решения трансцендентного уравнения, заданного по формуле (5.7).

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{f_0(1 + \varepsilon \sin(2\pi f^{mod} t_{n+1}))}, \quad (5.7)$$

справедливого для $n \geq 1$. После нахождения решения трансцендентного уравнения для t_{n+1} величина промежутка времени между сердечными ударами RR_{n+1} определяется из соотношения $RR_{n+1} = t_{n+1} - t_n$.

ТАБЛИЦА 1. Точки расположения гауссовских пиков, соответствующих ударам сердца в моделях частотно-модулированных сигналов матери и плода

Номер удара	Время удара сердца материнского сигнала $f_0^1=1$ Гц, $\varepsilon_1=0.1$, $f_1^{mod}=0.2$ Гц	Время удара сердца фетального сигнала $f_2^0 = 2$ Гц, $\varepsilon_1 = 0.2$, $f_2^{mod} = 0.4$ Гц
1.	0.9163	0.4254
2.	1.8482	0.8535
3.	2.8987	1.3907
4.	4.0036	2.0073
5.	5.0032	2.5058
6.	5.9194	2.9308
7.	6.8516	3.3595
8.	7.9025	3.8989
9.	9.0072	4.5146
10.	10.0064	5.0117
11.	10.9225	5.4361
12.	11.8549	5.8655
13.	12.9063	6.4072
14.	14.0108	7.0218
15.	15.0096	7.5175

16.	15.9255	7.9415
17.	16.8582	8.3715
18.	17.9101	8.91545
19.	19.0145	9.5291
20.	20.0128	10.0233
21.		10.4469
22.		10.8776
23.		11.4238
24.		12.0364
25.		12.5292
26.		12.9524
27.		13.3837
28.		13.9322
29.		14.5437
30.		15.0350
31.		15.4578
32.		15.8899
33.		16.4406
34.		17.0510
35.		17.5409
36.		17.9633
37.		18.3961
38.		18.9492
39.		19.5583
40.		20.0468

ТАБЛИЦА 2. RR_n -интервалы между ударами сердца в моделях частотно-модулированных сигналов матери и плода

Номер интервала	RR _n интервалы материнского сигнала	Локальная частота материнского сигнала	RR _n интервалы фетального сигнала	Локальная частота фетального сигнала
1.	0.9319	1.0913	0.4306	2.3606
2.	1.0504	1.0730	0.5462	2.3221
3.	1.1049	0.9519	0.6125	1.8308
4.	0.9995	0.9050	0.4927	1.6324
5.	0.9161	1.0004	0.4232	2.0292
6.	0.9321	1.0914	0.4313	2.3629
7.	1.0509	1.0727	0.5484	2.3183
8.	1.1047	0.9515	0.6114	1.8231
9.	0.9991	0.9051	0.4913	1.6354
10.	0.9160	1.0008	0.4227	2.0352
11.	0.9324	1.0916	0.4320	2.3652
12.	1.0513	1.0724	0.5507	2.3146
13.	1.1045	0.9511	0.6103	1.8156
14.	0.9987	0.9053	0.4899	1.6385
15.	0.9159	1.0012	0.4224	2.0410
16.	0.9326	1.0918	0.4327	2.3674
17.	1.0518	1.0722	0.5531	2.3107
18.	1.1043	0.9507	0.6091	1.8080
19.	0.9983	0.9055	0.4885	1.6417
20.	0.9157	1.0016	0.4220	2.0469
21.			0.4335	2.3696
22.			0.5554	2.3067
23.			0.6079	1.8005
24.			0.4871	1.6450
25.			0.4216	2.0529

26.			0.4343	2.3717
27.			0.5577	2.3026
28.			0.6066	1.7930
29.			0.4857	1.6485
30.			0.4213	2.0588
31.			0.4351	2.3737
32.			0.5601	2.2983
33.			0.6053	1.7855
34.			0.4843	1.6521
35.			0.4209	2.0648
36.			0.4359	2.3757
37.			0.5624	2.2939
38.			0.6039	1.7781
39.			0.4829	1.6559
40.			0.4206	2.0708

3.2 Модели частотно-модулированных сигналов с заданием частоты и глубины модуляции

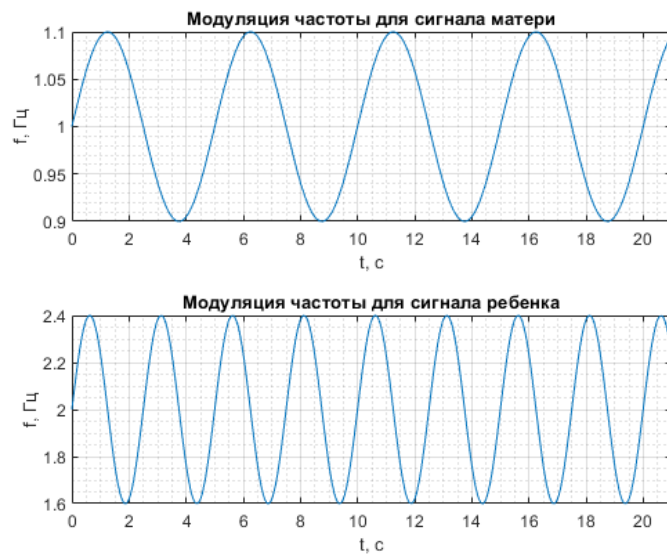


Рис. 19. Частотная модуляция сигнала, соответствующая формулам (5.1) – модуляции условно материнского сигнала, и (5.2) – модуляция условно сигнала плода.

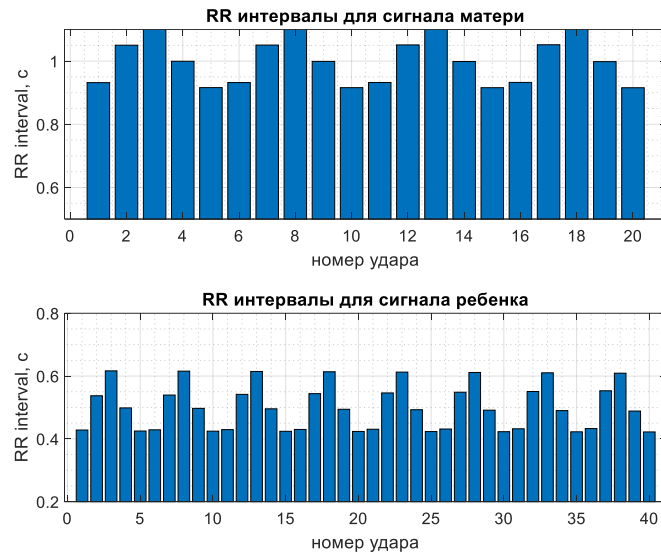


Рис. 20. RR-интервалы материнской ритмограммы (верхняя диаграмма) и ритмограммы плода (верхняя диаграмма) в зависимости от номера удара

На Рис. 19 и 20 показаны зависимости RR-интервалов между соседними ударами сердца, причем Рис. 20 показывает ритмограмму как амплитудно-модулированный сигнал на равномерной шкале времени. Как отмечалось в параграфе 1.1, модель амплитудно-модулированного сигнала и модель частотно-модулированного сигнала имеют различные виды спектров, причем спектр частотно-модулированного сигнала в большей степени похож на спектры реальных ритмограмм. Поэтому в дальнейшем будет использоваться модель сердечного ритма матери и плода как частотно-модулированного сигнала.

3.3 Применение Вейвлет-преобразования для исследования моделей сердечного ритма матери и плода как частотно-модулированных сигналов

Рассмотрим частотно модулированный сигнал с параметрами для матери: $f_0^1=1$ Гц, $\varepsilon_1=0.01$, $f_1^{mod}=0.02$ Гц; для плода: $f_2^0 = 2$ Гц $\varepsilon_1 = 0.02$; $f_2^{mod} = 0.04$ Гц. Для сигнала с приведенными параметрами рассчитывается модуляция по формулам (5.1) для материнского сигнала и (5.2) для сигнала плода. Изменение частоты модулированного сигнала приведено на Рис.21.

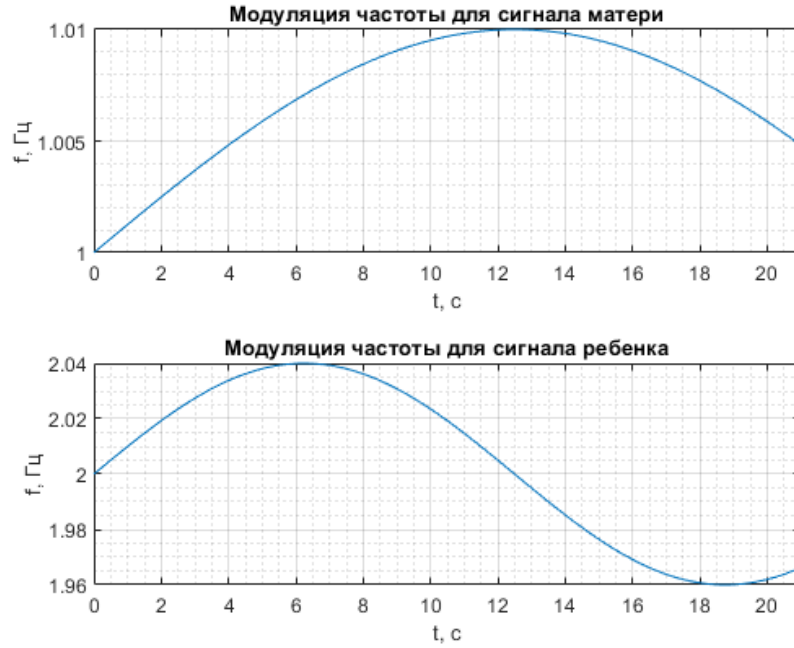


Рис. 21. Заданное изменение частоты во времени для модельных сигналов матери и плода

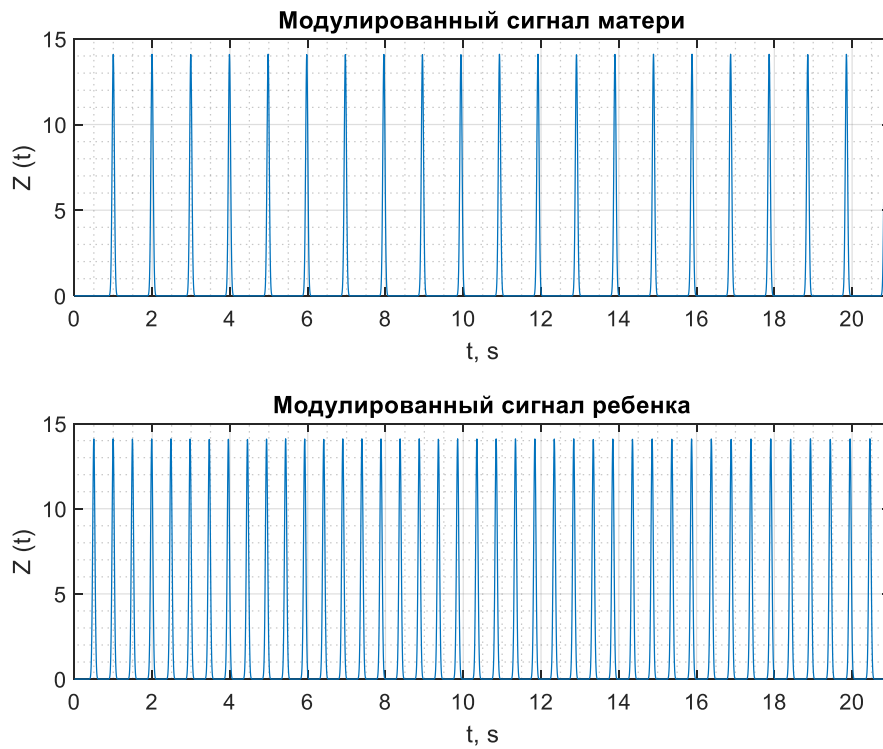


Рис. 22. Модели частотно-модулированных сигналов матери (формула (5.3) верхний график) и плода (формула (5.4) нижний график)

Соответствующие сигналам на Рис.22, диаграммы RR-интервалов для Рис. 22 приведены на Рис. 23.

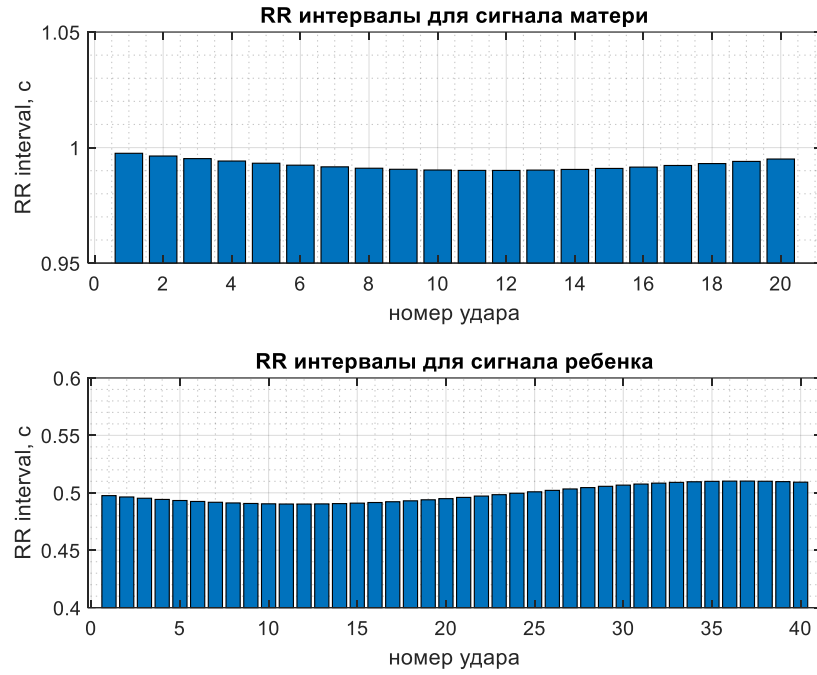


Рис. 23. RR- интервалы для модельных частотно-модулированных сигналов матери и ребенка

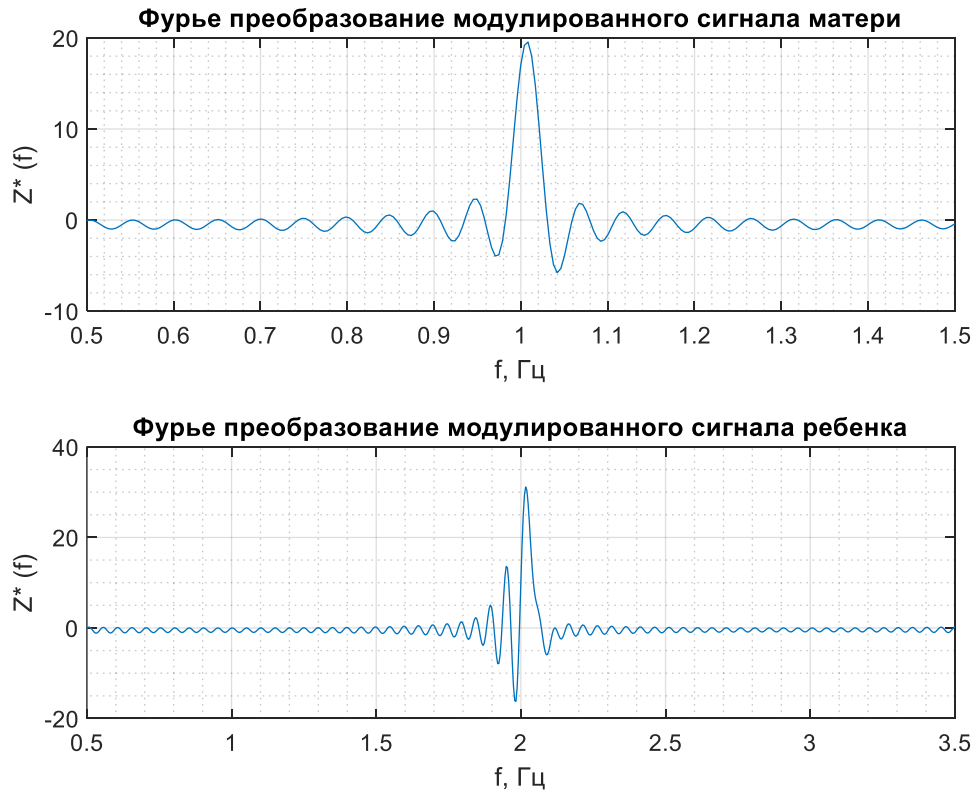


Рис.24. Фурье спектры сигналов, изображенных на Рис.18

Если рассмотреть Фурье-спектры на Рис. 24 для сигналов Рис.22, то они явно показывают основную частоту 1 Гц для матери и 2 Гц для ребенка, но

анализ того, что вносит дополнительная частотная модуляция по этим спектрам провести невозможно. На Рис.24 также возникают дополнительные пики, связанные с краевыми эффектами сигнала конечной протяженности.

Рассмотрим результаты, полученные с помощью Вейвлет-преобразования сигналов, изображенных на Рис.18.

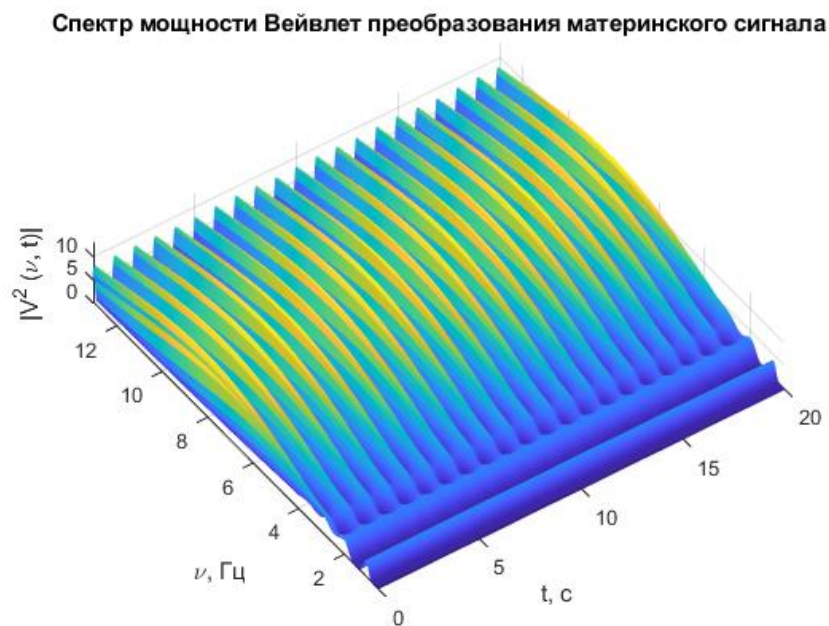


Рис. 25. Спектр мощности $|V(\nu, t)|^2$ Вейвлет-преобразования модельного (условно материнского) сигнала с частотой модуляции $f_1^{mod} = 0.02$ Гц и глубиной модуляции $\varepsilon_1 = 0.02$ длительностью 20 сек.

На основании методики, изложенной в статье [12], можно получить график изменения во времени локальной частоты материнского сигнала, изображенный на Рис. 26.

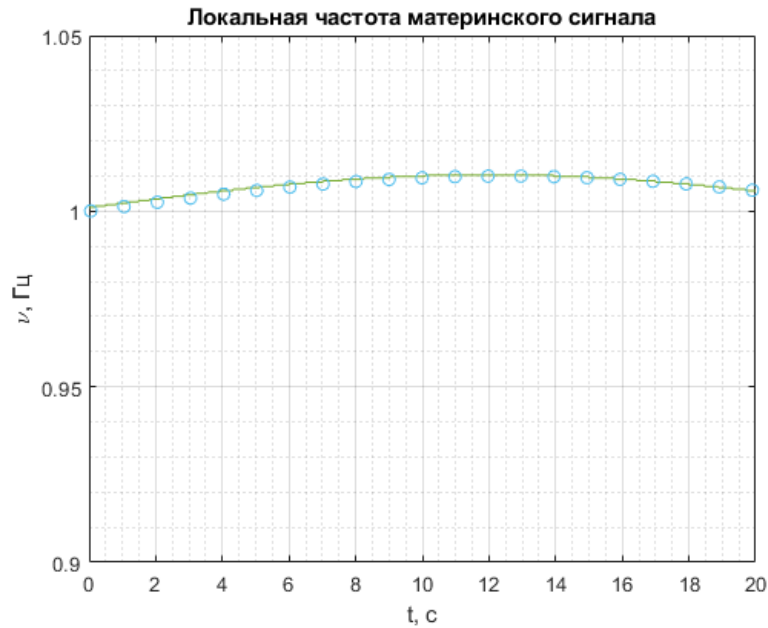


Рис.26. График изменения во времени локальной частоты модельного (условно материнского) сигнала с частотой модуляции $f_1^{mod} = 0.02$ Гц и глубиной модуляции $\varepsilon_1 = 0.02$ длительностью 20 сек.

Проводя аналогичные вычисления для модельного частотно-модулированного сигнала плода, получаем соответствующие спектр мощности Вейвлет преобразования на Рис. 27 и график изменения во времени локальной частоты на Рис. 28.

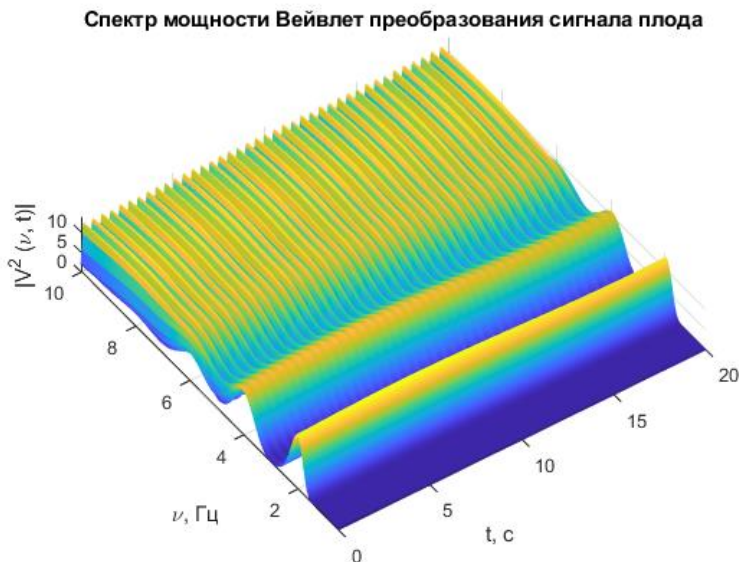


Рис. 27. Спектр мощности $V(\nu, t)|^2$ вейвлет-преобразования модельного (условно материнского) сигнала с частотой модуляции $f_1^{mod} = 0.01$ Гц и глубиной модуляции $\varepsilon_1 = 0.02$ длительностью 20 сек.

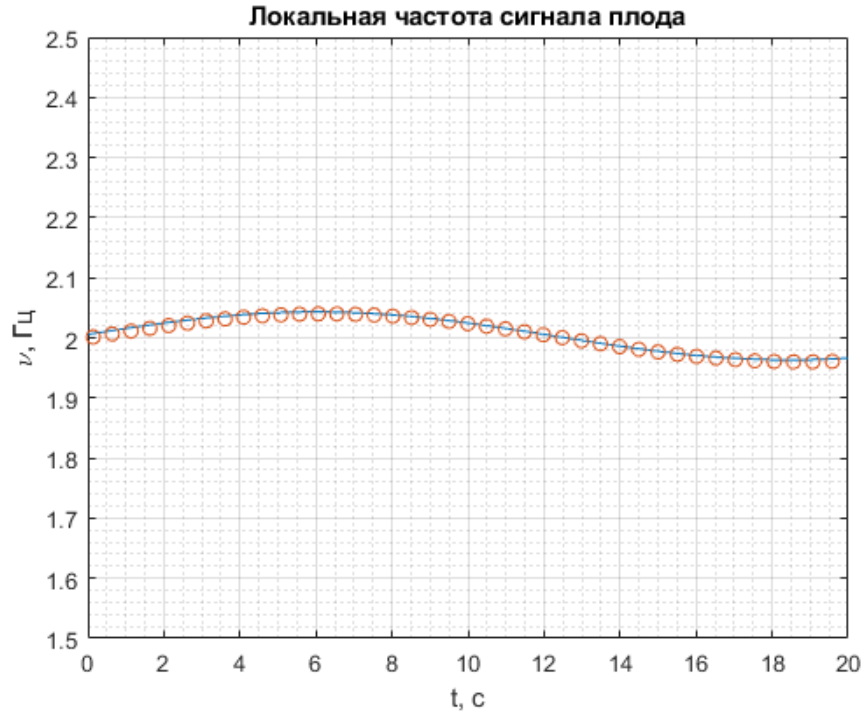


Рис. 28. График изменения во времени локальной частоты модельного (условно сигнала плода) сигнала с частотой модуляции $f_2^{mod} = 0.04$ Гц и глубиной модуляции $\varepsilon_1 = 0.02$ длительностью 20 сек.

На Рис. 26, 28 кружками отмечены точки, полученные данные из Таблицы 2 для проверки правильности нахождения локальных частот с помощью Вейвлет-преобразования. Частоте модуляции $f_1^{mod} = 0.02$ Гц в модели материнского сигнала соответствует период колебаний локальной частоты $T_1 = 50$ с, а частоте модуляции $f_2^{mod} = 0.04$ Гц в модели фетального сигнала соответствует период колебаний локальной частоты $T_2 = 25$ с.

Рассмотрим влияние частоты модуляции на изменение локальной частоты для модельных сигналов матери и плода на Рис. 29 и 30.

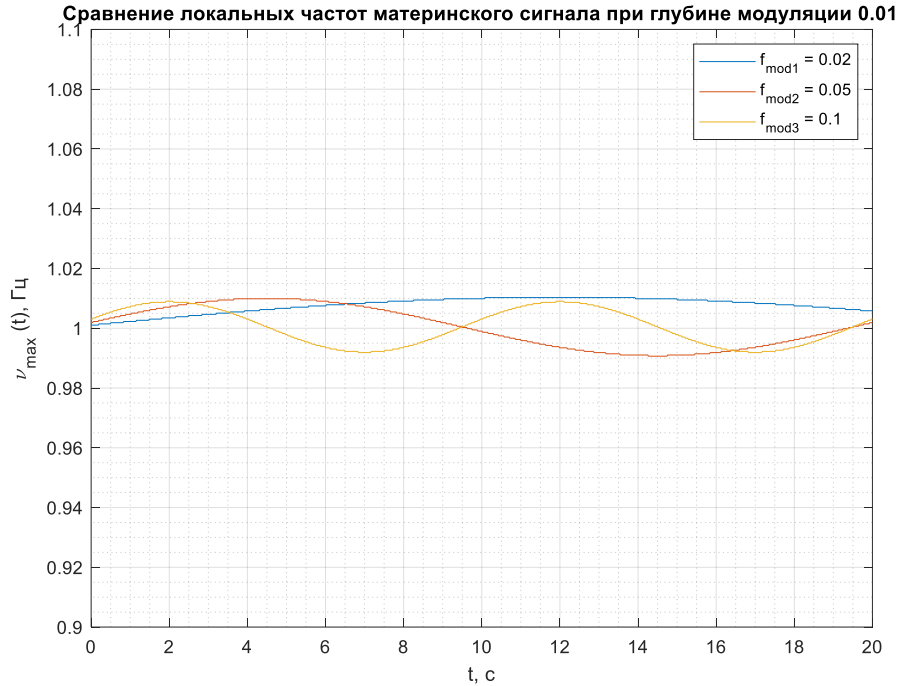


Рис. 29. Графики изменения локальной частоты модели материнского сигнала при различных частотах модуляции: синяя линия $\rightarrow f_1^{\text{mod}} = 0.02$ Гц; красная $\rightarrow f_1^{\text{mod}} = 0.05$ Гц; желтая $\rightarrow f_1^{\text{mod}} = 0.1$ Гц.

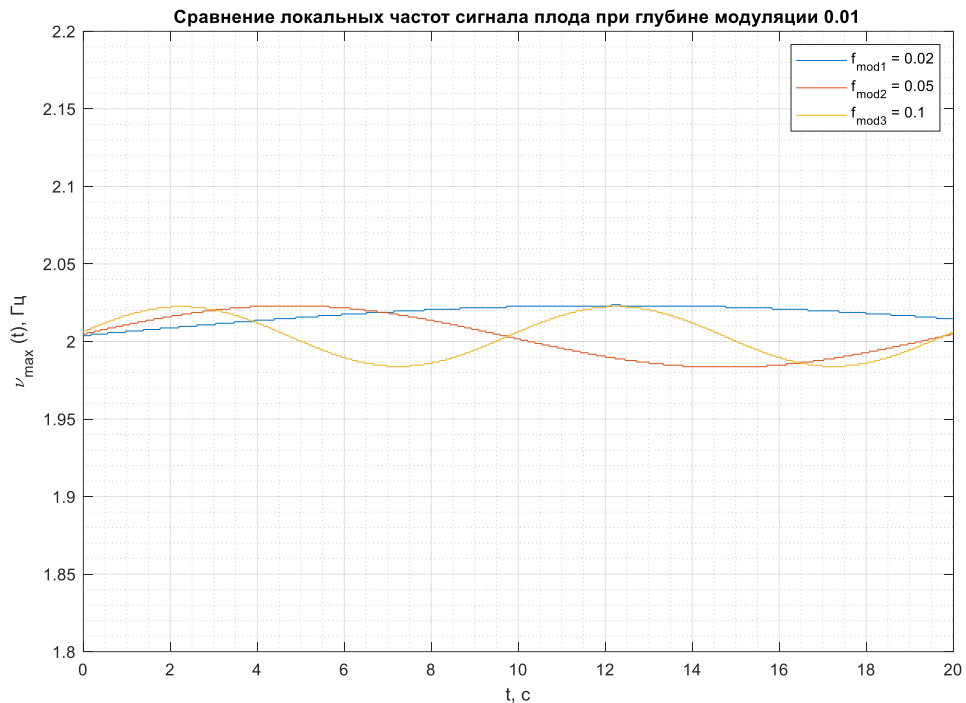


Рис. 30. Графики изменения локальной частоты модели сигнала плода при различных частотах модуляции: синяя линия $\rightarrow f_2^{\text{mod}} = 0.02$ Гц; красная $\rightarrow f_2^{\text{mod}} = 0.05$ Гц; желтая $\rightarrow f_2^{\text{mod}} = 0.1$ Гц

Сравнение поведения локальной частоты при фиксированной глубине модуляции ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 0.01$) но при различных частотах модуляции как в случае материнского Рис.29, так и в случае фетального ритма Рис.30 показывает, что колебания локальных частот модельных сигналов сглаживаются (период колебаний увеличивается) при уменьшении частоты модуляции, что является ожидаемым эффектом. На обоих рисунках синяя линия соответствует малой частоте модуляции $f^{mod} = 0.02$ Гц, красная: $f^{mod} = 0.05$ Гц, желтая: $f^{mod} = 0.1$ Гц. Отметим также, что при одинаковых частоте и глубине модуляции локальные частоты совпадают по своему характеру поведения, то есть синхронизируются. При этом колебания происходят на фоне разных несущих частот: в случае материнского сигнала это 1 Гц, а в случае фетального сигнала это 2 Гц, то есть колебания происходят в разных частотных диапазонах.

Перейдем к оценке влияния глубины модуляции ε для материнского и фетального сигналов на поведение локальной частоты.

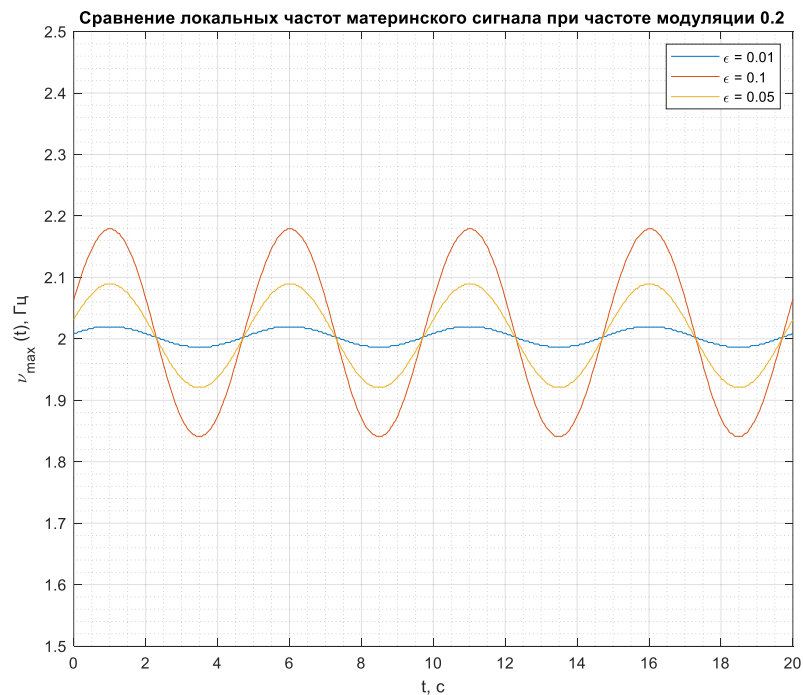


Рис. 31. Графики изменения локальной частоты модели материнского сигнала при различных глубинах модуляции: синяя линия $\rightarrow \varepsilon_1 = 0.01$; желтая $\rightarrow \varepsilon_1 = 0.05$; красная $\rightarrow \varepsilon_1 = 0.1$. Частота модуляции фиксирована и равна 0.2 Гц.

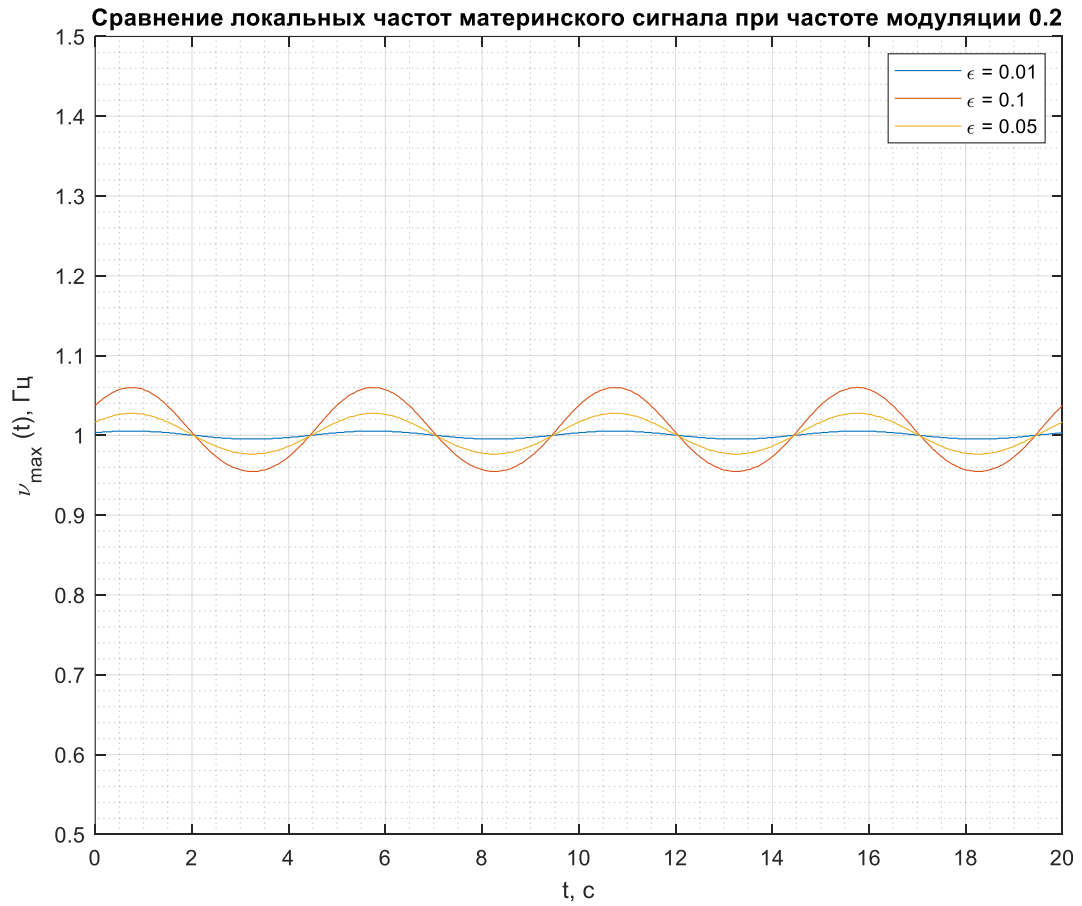


Рис. 32. Графики изменения локальной частоты модели материнского сигнала при различных глубинах модуляции: синяя линия $\rightarrow \epsilon_1 = 0.01$; желтая $\rightarrow \epsilon_1 = 0.05$; красная $\rightarrow \epsilon_1 = 0.1$. Частота модуляции фиксирована и равна 0.2 Гц.

Сравнение поведения локальной частоты при разных глубинах модуляции (Рис.31 и Рис.32) показывает, что увеличение глубины модуляции приводит в обоих случаях к увеличению амплитуды колебаний локальной частоты. Однако в случае модели фетального сигнала амплитуда колебаний локальной частоты возрастает более интенсивно, что говорит о более сильном влиянии глубины модуляции на изменение локальной частоты при более высокой несущей частоте, которая в этом случае равна 2 Гц в отличие от несущей частоты модельного материнского сигнала равной 1 Гц.

ГЛАВА 4. ВЕЙВЛЕТ-СПЕКТРЫ РЕАЛЬНЫХ ЗАПИСЕЙ СЕРДЕЧНОГО РИТМА МАТЕРИ И РЕБЕНКА

Рассмотрим записи сердечного ритма матери и плода на Рис. 33, полученные во время глюкозо-толерантного теста длительностью 2000 с. Отметим, что данные записи ритма были сделаны для беременной женщины с осложнениями беременности, связанными с наличием диабета. На графиках ритма Рис. 33 можно наблюдать очень сильную вариабельность ритма, как у матери, так и у плода. Моменты ударов сердца матери и ребенка не совпадают, поэтому нужно учитывать некоторый начальный сдвиг по времени и возможную задержку реакции сердечно-сосудистой системы ребенка на изменение состояния материи. Поэтому простым наложением графиков ритма повторение ребенком вариабельности ритма матери не отследить. Нужно еще учитывать наличие артефактов, связанных с мышечными движениями, а также разницу в способах регистрации ритмов матери и плода. Регистрация частоты сердечных сокращений плода производится ультразвуковым датчиком на основе эффекта Доплера (доплерография) в отличие от обычной электрокардиограммы (ЭКГ) матери.

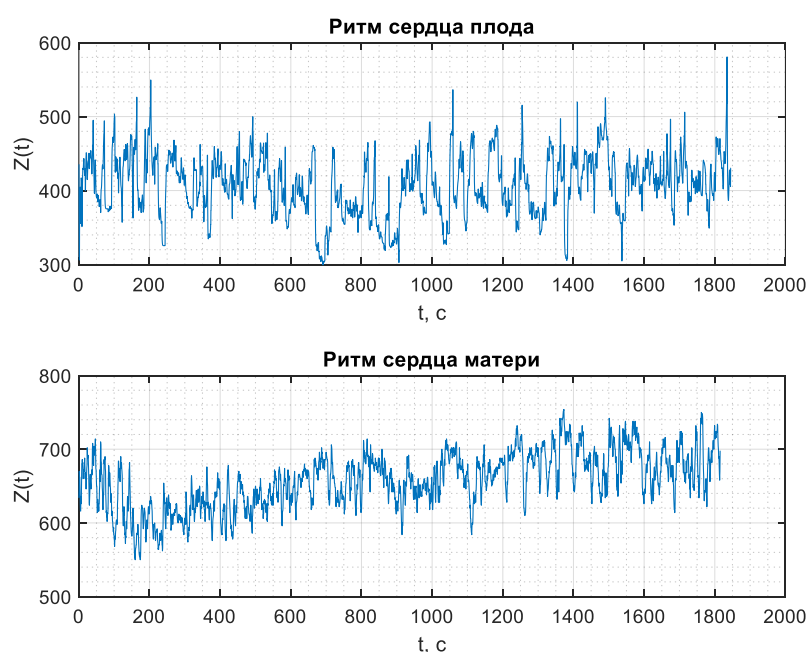


Рис. 33. Запись реальных сигналов сердечного ритма матери и плода во время глюкозотолерантного теста в течение 2000 сек.

Сократим период рассмотрения ритмограммы до 20 с (Рис. 34), чтобы была возможность сравнивать периоды изменения локальных частот реальной записи и модели ритма с частотной модуляцией.

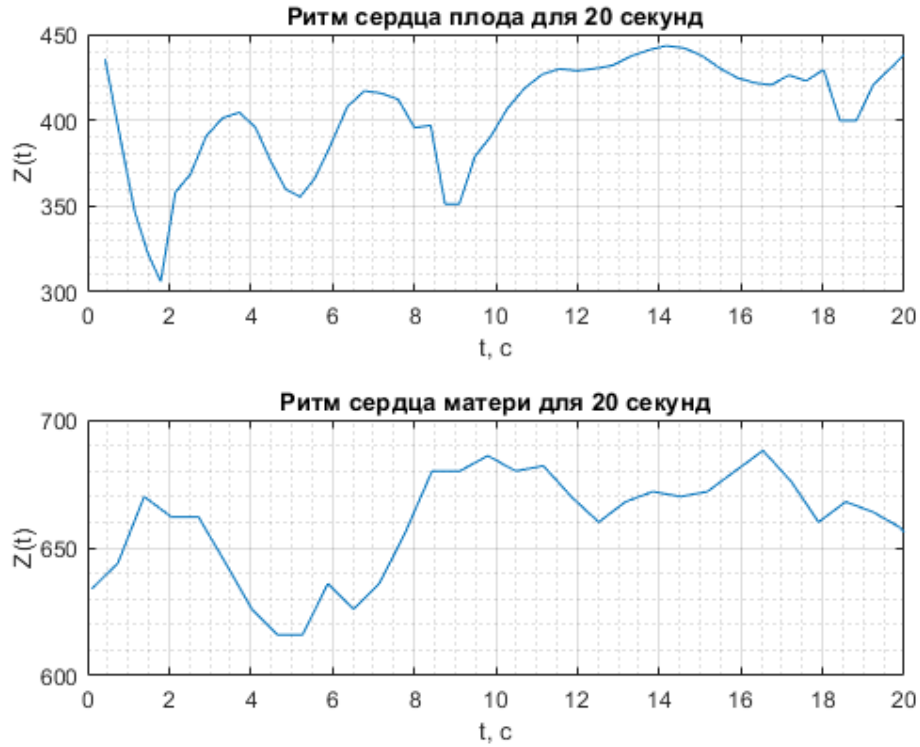


Рис. 34. Запись реальных сигналов сердечного ритма матери и плода во время глюкозотолерантного теста в течение 20 сек.

Применим непрерывное Вейвлет-преобразование к сигналам, приведенным на Рис. 34.

Спектр мощности Вейвлет преобразования реального сигнала матери

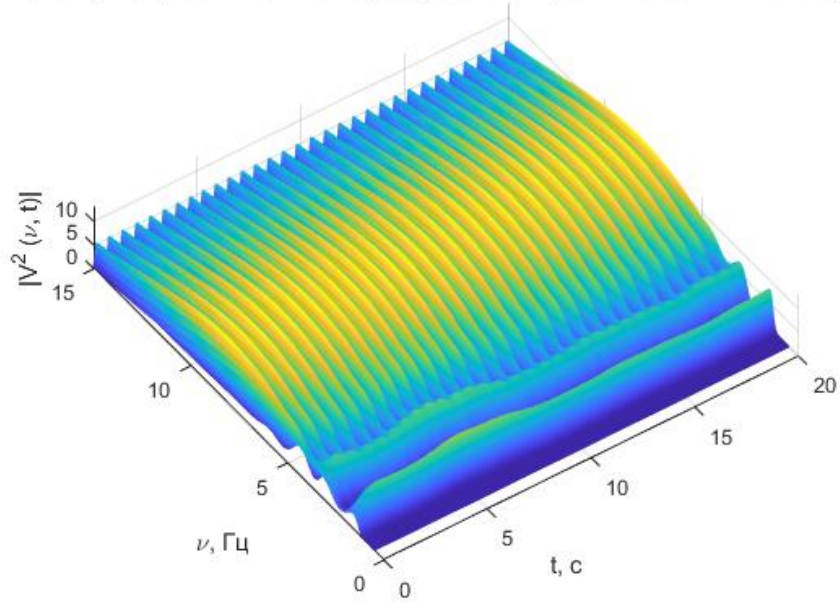


Рис. 35. Вейвлетный спектр мощности сигнала ритмограммы матери во время проведения глюкозотолерантного теста на интервале времени 20 сек.

Спектр мощности Вейвлет преобразования реального сигнала плода

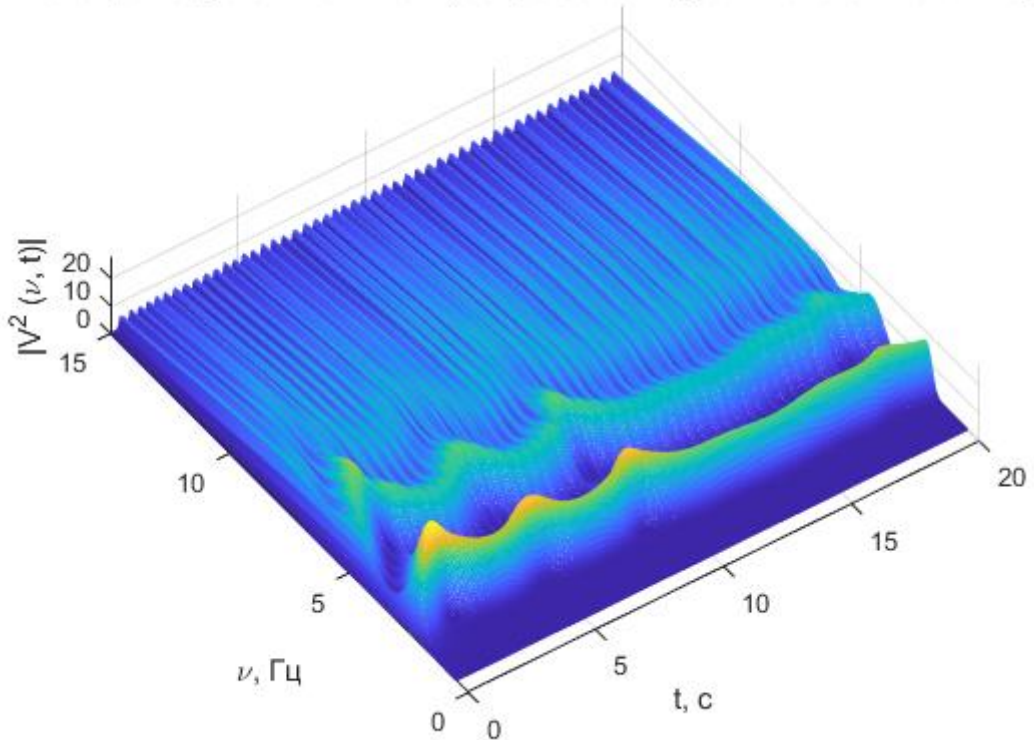


Рис. 36. Вейвлетный спектр мощности сигнала ритмограммы плода во время проведения глюкозотолерантного теста на интервале времени 20 сек.

Трехмерные графики мощности спектра вейвлет-преобразования (Рис. 35 и 36) имеют на низких частотах порядка [0-5 Гц] выраженные хребты, которые позволяют отследить поведение локальной частоты ритма, то есть линию, проведенную по максимумам этих хребтов. Эта частота отражает любые искажения основной частоты ритма, которые связаны, согласно многим исследованиям, с изменениями в физиологическом состоянии пациента, что является диагностической информацией.

Очевидно, что локальная частота для реальной записи не будет идеально периодической, как это имеет место для модельного сигнала с заданной постоянной частотой модуляции. Но даже неидеальные колебания локальной частоты, полученные для реального сигнала, дают возможность изучать взаимосвязь ритмов матери и плода, что представляет собой важную задачу синхронизации ритмов матери и плода до сих пор не получившую достаточно достоверных результатов.

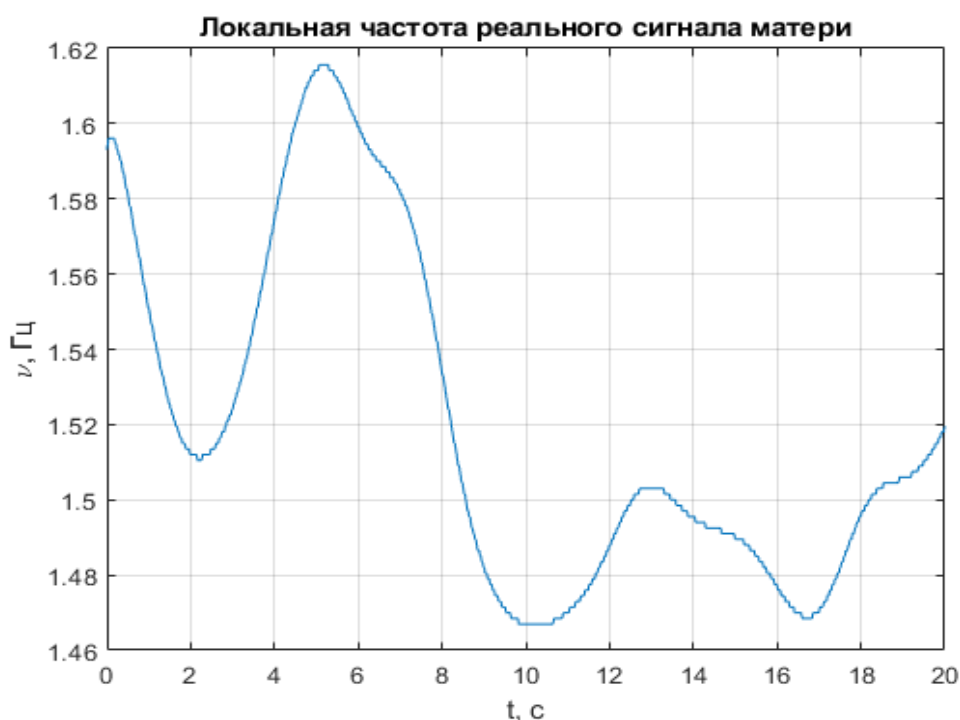


Рис. 37. График изменения во времени локальной частоты для реального сигнала ритмограммы матери во время глюкозотолерантного теста на интервале 20 сек.



Рис. 38. График изменения во времени локальной частоты для реального сигнала ритмограммы плода во время глюкозотолерантного теста на интервале 20 сек.

На Рис.38 изменение локальной частоты плода отслеживает тенденцию локальной частоты матери. Можно осуществить повторное применение вейвлет-преобразования уже к функции локальной частоты. В этом случае появляется возможность отследить тренд и переходные процессы перестройки частоты.

На Рис. 37 для локальной частоты матери можно фиксировать один мощный пик на частоте 5 Гц, в то время как на графике локальной частоты плода (Рис.38) мы видим 3 выраженных пика на частотах 1.8 Гц, 5 Гц, 7 Гц с последующим резким уменьшением частоты сердцебиений, но тенденция смещения ритма в область низких частот прослеживается в обоих случаях. То есть можно с определенностью заключить, что ритм ребенка отслеживает тенденцию ритма матери. Смещение же в область низких частот соответствует ухудшению физиологического состояния испытуемого субъекта.

Если обсуждать вопрос соответствия результатов поведения локальных частот для модели частотно модулированного сигнала и в случае реального сигнала, то очевидно, что можно приближать поведение модельного сигнала к

реальной ситуации, если брать в модели несколько частот модуляции и изменять при этом глубину модуляции, что может быть предметом дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- В работе были построены математические модели сердечного ритма матери во время беременности и ее ребенка.
- Использовалась модель частотно-модулированного сигнала, которая имеет преимущество перед моделью сигнала с амплитудной модуляцией поскольку строится на основе гауссовских пиков, неравномерно расположенных на оси времени. Так как один гауссовский пик как один удар сердца имеет аналитическое вейвлет-преобразование, а вся ритмограмма может быть представлена как суперпозиция этих пиков. Это позволяет эффективно вычислять вейвлет-преобразование для кардио-сигналов с любым количеством сердечных ударов.
- Было показано, что вейвлет-преобразование, в отличие от Фурье-преобразования, позволяет отслеживать изменения частоты кардио-сигнала во времени.
- С помощью вейвлет-преобразования были построены графики временной зависимости локальных частот сигналов с различной частотой и глубиной модуляции.
- Метод вейвлет-преобразования был применен к реальной записи сердечного ритма матери и плода, полученной при проведении глюкозотолерантного теста. Получены графики изменения локальных частот, показывающие сильную вариабельность сердечного ритма как для матери, так и для ребенка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баевский Р. М. Анализ вариабельности сердечного ритма: история и философия, теория и практика // Клиническая информатика и телемедицина, 2004, № 1, с. 54—64.
2. Божокин С.В. Введение в теорию непрерывного вейвлетного преобразования. СПб., Книжное издательство «Страта», <http://www.strata.spb.ru>, 2020, — 160 с.
3. Божокин С.В., Лесова Е.М., Самойлов В.О., Толкачев П.И. Биофизика. 2012. Т. 57 № 4, с . 696–712.
4. Божокин С.В., Суслова И.Б. Введение в теорию сигналов: учеб. Пособие, СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 120 с.
5. Божокин С.В., Суслова И.Б. Основы теории обработки биомедицинских сигналов, СПб, Изд-во СПбПУ, 2016. -148 с.
6. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.: РХД, 2004.464 с.
7. Игошева Н.Б. Методы анализа сердечного ритма / Н.Б. Игошева, А.Н. Павлова, Т.Г. Анищенко. – Саратов : Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. – 120 с.
8. Клещеногов С.А., Флейшман А.Н. Спектральный компьютерный анализ кардиоритма беременных: оценка течения и прогнозирование осложнений беременности: Метод. пособие для практических врачей. Новокузнецк, 2003.
9. Коган, И.Ю. Оценка функционального состояния плода при беременности и в родах /Коган И.Ю., Полянин А.А., Павлова Н.Г. //Журнал акушерства и женских болезней. – 2003. – Т. LII, Вып. 2. – С. 110_115.
10. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
11. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М. : Мир, 2005. – 671 с.

12. Божокин С.В., Суслова И.Б. Повторное вейвлет-преобразование нестационарного сигнала с частотной модуляцией. Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 12, с.26-32.
13. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2008. 448 с.
14. Чуи К. Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.412 с.
15. Шамарин СВ. Международные стандарты кардиотокографии. Системный анализ и управление в биомедицинских системах. 2010;9(2):357-365. Электронный доплеровский фетальный мониторинг и непрямая ЭКГ плода в современном акушерстве (обзор). Научные результаты биомедицинских исследований. 2023;9(2):234-253. DOI: 10.18413/2658-6533-2023-9-2-0-7, URL: <https://rrmedicine.ru/journal/annotation/3078/>.
16. Bozhokin S.V. and Lykov S.N. Advanced Course in Theoretical Physics. Wavelets. Textbook. Politekh. Univ., St. Petersburg, 2007, pp. 1-252.
17. Bozhokin S.V. Continuous Wavelet Transform and Exactly solvable Model of Nonstationary Signals, Technical Physics, V.57, N7, 2012, pp.900-906, DOI: 10.1134/S1063784212070067.
18. Bozhokin S.V., Negrusha N.A. and Suslova I.B. Wavelet-based technique to detect gestational complications by analyzing non-stationary heart rate variability. Indian Journal of Fundamental and Applied Life Sciences ISSN: 2231-6345 (Online) An Open Access, Online International Journal Available at <http://www.cibtech.org/jls.htm> 2015 Vol. 5 (4) October-December, pp.55-68.
19. Bozhokin S.V., Suslova I.B. Analysis of non-stationary HRV as a frequency modulated signal by double continuous wavelet transformation method. 2014. Biomedical Signal Processing and Control, 10, 34–40.
20. Cohen A. Numerical Analysis of Wavelet Method. North-Holland: Elsevier Science, 2003. 335 p., Advances in Wavelet Theory and Their Applications in Engineering, Physics and Technology / Ed. by D. Baleanu. Rijeka: InTech, 2012. 634 p.

21. Heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. Task force of the European society of cardiology and the North American society of pacing and electrophysiology // *Eur.Heart J. journal*, 1996, v. 17. c. 354—381.
22. Hildebrandt G. and Klein H.R. Phase coordination between maternal and fetal heart rhythm during pregnancy. *Klin Wochenschr.* 1979, 57:87-91.
23. Reza S., Gari D. Review of fetal ECG processing: Issues and promising directions, *The Open Pacing, Electrophysiology and Therapy Journal (TOPETJ)*, 3: 4 – 20, November 2010.
24. Ribeiro M, Monteiro-Santos J, Castro L, Antunes L, Costa-Santos C, Teixeira A, Henriques TS. Non-linear Methods Predominant in Fetal Heart Rate Analysis: A Systematic Review *Front Med (Lausanne)*. 2021. doi: 3389/fmed.2021.661226.
25. Van Leeuwen P, Geue D, Lange S, Gronemeyer D Modeling fetal-maternal heart-rate interaction. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine* 2009, 28(6), 49-53.
26. Westerhuis M.E. et al. Intrapartum fetal monitoring: from stethoscope to ST analysis of the ECG. *Ned. Tijdschr. Geneeskd.* 2009. v. 153, p. 259.

Приложение

```

n = 80;
iter = 1500;

f_1m = 2;
eps_m = 0.01;
fmodm = 0.02;

eps_m1 = 0.01;
fmodm1 = 0.05;

eps_m2 = 0.01;
fmodm2 = 0.1;

Tm = [];
t0 = -10;

for i = (0:n)
    f = @(t) t-t0- 1/(f_1m*(1+eps_m*sin(2*pi*fmodm*t)));
    val = fzero(f, t0);
    Tm = [Tm val];
    t0 = val;
end

Tm1 = [];
t0 = -10;

for i = (0:n)
    f = @(t) t-t0- 1/(f_1m*(1+eps_m1*sin(2*pi*fmodm1*t)));
    val = fzero(f, t0);
    Tm1 = [Tm1 val];
    t0 = val;
end

Tm2 = [];
t0 = -10;

for i = (0:n)
    f = @(t) t-t0- 1/(f_1m*(1+eps_m2*sin(2*pi*fmodm2*t)));
    val = fzero(f, t0);
    Tm2 = [Tm2 val];
    t0 = val;
end

Wm = zeros(iter, iter);
Wm1 = zeros(iter, iter);
Wm2 = zeros(iter, iter);
t = linspace(-11,30, iter);
nu = linspace(0.5, 2.5, iter);

for i = 1:iter
    for j = 1:iter
        Re_v = 0;
        Im_v = 0;
        for k = Tm
            [Re, Im] = CalcWavelet(t(j), nu(i), k);
            Re_v = Re_v+Re;
            Im_v = Im_v+Im;
        end
    end
end

```



```

        Wm(i, j) = Re_v.^2+Im_v.^2;
    end
end

for i = 1:iter
    for j = 1:iter
        Re_v = 0;
        Im_v = 0;
        for k = Tm1
            [Re, Im] = CalcWavelet(t(j), nu(i), k);
            Re_v = Re_v+Re;
            Im_v = Im_v+Im;
        end
        Wm1(i, j) = Re_v.^2+Im_v.^2;
    end
end

for i = 1:iter
    for j = 1:iter
        Re_v = 0;
        Im_v = 0;
        for k = Tm2
            [Re, Im] = CalcWavelet(t(j), nu(i), k);
            Re_v = Re_v+Re;
            Im_v = Im_v+Im;
        end
        Wm2(i, j) = Re_v.^2+Im_v.^2;
    end
end

max_num = [];
max_num1 = [];
max_num2 = [];
for i = 1:iter
    [~, ind1] = max(Wm(:,i));
    max_num = [max_num nu(ind1)];
    [~, ind2] = max(Wm1(:,i));
    max_num1 = [max_num1 nu(ind2)];
    [~, ind3] = max(Wm2(:,i));
    max_num2 = [max_num2 nu(ind3)];
end

figure
plot(t, max_num);
hold on
plot(t, max_num1);
hold on
plot(t, max_num2);
grid on
grid minor
xlim([0, 20])
ylim([1.8, 2.2])
xlabel('t, c')
ylabel('\nu_{max} (t), Гц')
title('Сравнение локальных частот сигнала плода при глубине модуляции 0.01')
legend('f_{mod1} = 0.02', 'f_{mod2} = 0.05', 'f_{mod3} = 0.1')

```

Листинг 1. Программа для сравнения локальных частот плода при одинаковой глубине модуляции равной 0.01.