

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«__» _____ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Влияние водородных эффектов на прочность металлических сплавов и конструкций

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

направленность

01.03.03_03 Математическое моделирование процессов
нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5030103/00302

С.С. Перекрестов

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ,

к.ф.-м.н.

П.М. Григорьева

Санкт-Петербург
2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико – механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

_____ А.М. Кривцов

«__» _____ 2024 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Перекрестову Сергею Сергеевичу, гр. 5030103/00302

1. Тема работы: Влияние водородных эффектов на прочность металлических сплавов и конструкций.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024.
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации, связанные с темой исследования, справочная литература.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
 - 4.1 Аналитические и конечно-элементные методы определения критерия водородного растрескивания. Анализ литературных источников. Постановка задачи. Актуальность и новизна задачи;
 - 4.2 Определение концентрации водорода в металле со временем в зависимости от его выхода во внешнюю среду;
 - 4.3 Определение напряженно-деформированного состояния плоской круговой трещины, находящейся под действием растягивающих напряжений, с учетом индуцированных водородом деформаций;
 - 4.4 Определение устойчивости плоской круговой трещины в условиях водородной дегградации с использованием критерия Ирвина.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей):
не предусмотрено
6. Консультанты по работе: не предусмотрено
7. Дата выдачи задания: 28.02.2024.

Руководитель ВКР _____

П.М. Григорьева

Задание принял к исполнению 28.02.2024.

Студент _____

С.С. Перекрестов

РЕФЕРАТ

На 38 с., 22 рисунка, 1 таблица.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ, ВОДОРОДНАЯ ХРУПКОСТЬ, ГИДРОГЕННЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЕТАЛЛАХ, ВОДОРОДНОЕ РАЗРУШЕНИЕ

Тема выпускной квалификационной работы: «Влияние водородных эффектов на прочность металлических сплавов и конструкций»

В работе рассмотрена устойчивость упругой круглой трещины, находящейся в бесконечном пространстве, с учетом деформаций, индуцированных водородом. Было проведено сравнение поведения трещины без учета и с учетом влияния водорода. Проведена оценка влияния водорода на НДС трещины по критерию Ирвина.

ABSTRACT

38 pages, 22 figures, 1 table.

KEYWORDS: STRENGTH OF MATERIALS, HYDROGEN BRITTLENESS, HYDROGENIC EFFECTS IN METALS, HYDROGEN DESTRUCTION

The topic of the final qualifying work: «The influence of hydrogen effects on the strength of metal alloys and structures»

The paper considers the stability of an elastic circular crack located in infinite space, considering deformations induced by hydrogen. The crack behavior was compared without and considering the influence of hydrogen. An assessment of the effect of hydrogen on the crack VAT according to the Irwin criterion was carried out.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	9
ГЛАВА 2. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВОДОРОДА	11
ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ.....	12
ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ	22
ГЛАВА 5. КРИТЕРИЙ ИРВИНА.....	33
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	35
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	37

ВВЕДЕНИЕ

В современной промышленности наблюдается сильный интерес к высокопрочным сплавам и металлам. Этот интерес можно объяснить необходимостью повышения эффективности производства, снижения веса и повышения прочности конструкций, производящихся из металлов и их сплавов. Повышенный интерес также обусловлен тем, что современные технологии должны быть приспособлены к экстремальным условиям таким как, высокие температуры, среды с сильными химическими свойствами, а также интенсивные механические нагрузки.

Особое место среди проблем, которые возникают при производстве металлоконструкций, занимает водородное охрупчивание. Этому негативному влиянию водорода более подвержены высокопрочные сплавы и металлы.

Первыми проблемами в истории развития промышленности, связанные с негативным влиянием водорода, стали появления трещин в оборудовании для производства аммиака. Эту проблему удалось решить технологически, на производствах перестали пренебрегать воздействием водорода, а также начали следить за его концентрацией. Но проблема негативного влияния водорода на металлы и сплавы продолжала появляться на производстве.

Эта проблема актуальна и в наши дни. Актуальность можно объяснить тем, что водород окружает нас почти повсеместно, его можно встретить в обычной воде, в атмосфере в виде паров воды, а также в кислотах. Водород является основным компонентом в водородной энергетике, где его концентрация достигает почти 100%. При обработке металлов или изготовлении сплавов часто используется вода. Все эти причины не позволяют нам пренебрегать негативным влиянием водорода на сплавы и металлы.

На данном этапе развития науки построение универсальной модели для моделирования негативного влияния водорода на сплавы и металлы невозможно. Существуют две принципиально разные модели, которые позволяют моделировать воздействие водорода [13].

Первой моделью является HEDE модель (Hydrogen Enhanced Decohesion, или усиленная водородом декогезия) [10]. Основной идеей данной модели является предположение о том, что при накоплении концентрации водорода в металле или сплаве происходит уменьшение сцепления берегов трещины (когезии), и одновременно с этим происходит образование локальной зоны с большой концентрацией водорода в области максимального растягивающего среднего нормального напряжения.

Основоположником HEDE модели стал Ориани [11]. В своей работе он постулирует, что из-за насыщения металла водородом происходит уменьшение максимальных нормальных растягивающих усилий. Кроме того, за счет появления дислокаций изменяется радиус кривизны в устье трещины. Ориани утверждал, что если выполняется неравенство, которое включает в себе максимальные нормальные растягивающие напряжения и радиус кривизны в устье, а также другие параметры трещины, то трещина стабильна. Как только происходит нарушение неравенства, трещина начинает расти. В новом положении устья происходит рост нормальных напряжений, что влечет за собой рост концентрации водорода в локальной области. Рост концентрации водорода уменьшает когезионное взаимодействие в трещине, и трещина начинает раскрываться. Этот процесс происходит до момента, пока трещина не станет настолько большой, что сможет расти без водородного воздействия.

Важно отметить, что Ориани остается в рамках упругой теории развития трещин, которая хорошо работает только для хрупких металлов. Так же в его работе существует несколько неопределенностей. Он явно не описывает и не задает зависимость некоторых физических величин и коэффициентов. На данный момент HEDE модель состоит из следующих элементов:

1. уравнения упругой или вязкоупругой сплошной среды;
2. уравнения диффузии и захвата водорода ловушками кристаллической структуры;
3. модель водородной деградации параметров когезионного закона;

4. уравнение раскрытия трещины в когезионной зоне.

Второй моделью, описывающей водородную деградацию материалов, является HELP модель (hydrogen-enhanced localised plasticity, или усиленная водородом локализованная пластичность) [10]. Этот подход предложил Софронис [12]. Основная идея данного подхода заключается в том, что из-за насыщения металла водородом происходит локальный рост пластичности. Другими словами, под действием внутренних напряжений в вершине трещины концентрируется водород, и из-за этого возникает область локализованной пластичности.

Бичем впервые было экспериментально обнаружено, что при насыщении металлов или сплавов водородом происходит рост подвижности дислокаций, а также снижается энергетический порог их зарождения, а значит упрощается пластическое течение.

На данный момент HELP модель состоит из следующих элементов:

1. уравнения вязкоупругой сплошной среды с упрочнением;
2. модель водородной деградации параметров определяющего уравнения вязкоупругой сплошной среды с упрочнением;
3. уравнения диффузии и захвата водорода ловушками кристаллической структуры, дислокациями с учетом пластических деформаций.

HEDE и HELP модели принципиально отличаются друг от друга. HEDE модель рассматривает хрупкое разрушение в результате водородного охрупчивания без учета пластических деформаций. Наоборот, HELP модель интерпретирует влияние водорода как, снижение энергии, необходимой для появления дислокаций. Также существуют подходы, которые являются комбинацией HEDE и HELP моделей.

В этой работе предпринимается попытка сделать вклад в построение общей теории водородного охрупчивания, которая будет описывать феномен из общих принципов.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью работы является анализ поведения плоской круглой трещины, находящейся в бесконечном пространстве, к которому приложено внешнее давление p (рис. 1).

С помощью уравнений линейной теории упругости нужно найти НДС трещины, а после оценить влияние водорода на раскрытие трещины. Помимо упругих деформаций учитываются деформации, индуцированные водородом.

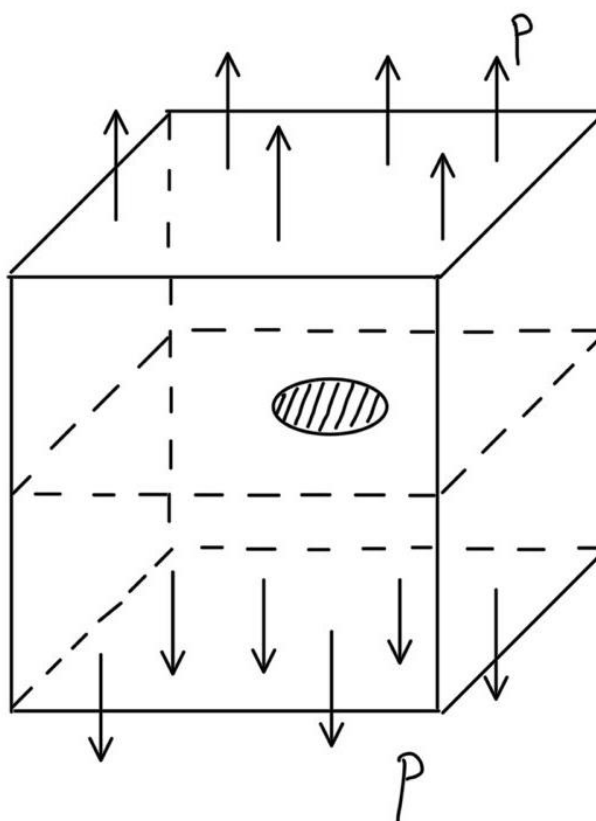


Рисунок 1. Постановка задачи

В задаче присутствует осевая симметрия, это означает, что некоторые компоненты в тензоре напряжений σ будут равны нулю. Кроме того, отсутствует кручение, значит перемещения, связанные с углом, будут так же равны нулю. Помимо осевой симметрии нужно учесть, что наша задача симметрична относительно плоскости, в которой находится трещина. Благодаря этому мы можем упростить нашу задачу и рассматривать не все бесконечное пространство, а только половину.

В плоскости, где находится трещина, внутри самой трещины должны выполняться условия: вертикальное нормальное напряжение, а также сдвиговое напряжение должны быть равны нулю. На остальной части плоскости должны выполняться условия: сдвиговое напряжение и вертикальное перемещение равны нулю. Равенство нулю вертикального нормального напряжения и вертикального перемещения можно объяснить с помощью принципа Сен-Венана [7]. По этому принципу давление p создает локальное напряженное состояние, а по мере удаления от участка приложения напряженное состояние быстро затухает и не оказывает никакого воздействия. Равенство нулю касательных напряжений можно объяснить тем, что в задаче присутствует осевая симметрия, а также внешние нагрузки не являются сдвиговыми. Также при отдалении от трещины вертикальное перемещение и нормальное напряжение должны быть ограничены, иначе могут получиться бесконечные перемещения или напряжения, что будет свидетельствовать о нефизичности результатов.

Рассматривать пространство будем в рамках механики сплошной среды. Для решения задачи понадобится уравнение баланса сил, а также условие совместности деформации (уравнение Бельтрами-Митчелла).

Закон баланса сил в векторном виде [6]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$$

Условие совместности деформации в векторном виде:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \nabla \nabla \text{tr} \boldsymbol{\sigma} + 2\rho (\nabla \mathbf{f})^s + \frac{\nu}{1 - \nu} \rho \nabla \mathbf{f} \mathbf{E} = 0$$

ГЛАВА 2. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВОДОРОДА

Для того чтобы решать задачу о нахождении НДС трещины, нам нужно задать функцию концентрации водорода в явном виде. Большинство реакций твердых тел с газами можно описать следующим дифференциальным уравнением [15]:

$$\frac{dc}{dt} - k(1 - c)^n = 0, \quad (2.1)$$

Здесь c – концентрация, k – константа Аррениуса, n – эмпирический порядок реакции.

В большинстве изученных случаев показатель n равен единице или дробному числу и остается постоянным на протяжении всей реакции. Примем n равным единице и получим дифференциальное уравнение относительно функции концентрации:

$$\frac{dc}{dt} - k(1 - c) = 0, \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) будет выглядеть следующим образом:

$$c(t) = 1 + De^{-kt}$$

Для того, чтобы найти константу интегрирования D нужно задать начальное условие. В начальный момент времени концентрация водорода в трещине равна нулю, то есть $c(0) = 0$. Подставим это начальное условие и получим:

$$c(t) = 1 - e^{-kt}, \quad (2.3)$$

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для начала запишем закон баланса сил в векторном виде:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (3.1)$$

В нашей задаче массовые силы отсутствуют, то есть $\mathbf{f} = 0$. Также будем считать, что наша задача является квазистатической, то есть $\ddot{\mathbf{u}} = 0$. Учитывая это, закон баланса сил будет выглядеть следующим образом:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (3.2)$$

Запишем $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений в компонентном виде, учитывая симметричность этого тензора:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \sigma_\varphi \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \tau_{rz} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z + \tau_{rz} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \sigma_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \quad (3.3)$$

Касательные напряжения, связанные с углом φ , равны нулю из-за осевой симметрии задачи.

Далее распишем оператор набла в цилиндрической системе координат, так как задача будет решаться именно в этих координатах:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (3.4)$$

Также полезно будет записать деривационные формулы в цилиндрической системе координат [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r$$

Подставим формулу (3.3) и (3.4) в уравнение (3.2) и получим закон баланса сил в компонентном виде:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\sigma_r}{r} \mathbf{e}_r - \frac{\sigma_\varphi}{r} \mathbf{e}_r + \frac{\tau_{rz}}{r} \mathbf{e}_z + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \mathbf{e}_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \mathbf{e}_z = 0, \quad (3.5)$$

Спроецируем это уравнение на оси r и z и получим систему из двух скалярных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Рассматриваемое пространство является сплошной средой, поэтому тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ должен удовлетворять условию совместности деформации или по-другому уравнению Бельтрами-Митчелла. Запишем это условие в векторном виде:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\text{tr}\boldsymbol{\sigma} + 2\rho(\nabla\mathbf{f})^s + \frac{\nu}{1-\nu}\rho\nabla\mathbf{f}\mathbf{E} = 0, \quad (3.7)$$

Учитывая то, что в нашей задаче массовые силы отсутствуют ($\mathbf{f} = 0$), перепишем уравнение Бельтрами-Митчелла:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (3.8)$$

Возьмем первый инвариант от обеих частей уравнения (3.8) и получим:

$$\Delta\text{tr}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\Delta\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.9) следует, что первый инвариант тензора напряжений является гармонической функцией:

$$\Delta\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0$$

Учитывая, что $\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z$, получим уравнение (3.10), которое назовем условием совместности деформации:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) = 0, \quad (3.10)$$

Теперь запишем соотношение Дюамеля-Неймана, которое связывает тензор напряжений и тензор деформаций, учитывая то, что у нас есть концентрационные деформации. В первом приближении будем считать, что тензор концентрационных деформации шаровой.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - 3\alpha c)\mathbf{E} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha c\mathbf{E}), \quad (3.11)$$

Мы хотим получить зависимость напряжений от перемещений, для этого нам нужно знать, как связаны деформации и перемещения. В линейной теории упругости эта связь выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla), \quad (3.12)$$

В нашей задаче кручение отсутствуют, поэтому окружное смещение $u_\varphi = 0$. Вектор перемещений в компонентном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z, \quad (3.13)$$

Подставим уравнение (3.13) в уравнение (3.12) и получим выражение тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ через перемещения \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z, \quad (3.14)$$

Возьмем первый инвариант от уравнения (3.14) и получим, что след тензора деформаций будет равен:

$$\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (3.15)$$

Подставим уравнения (3.14) и (3.15) в уравнение (3.11) и получим выражение для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) + 2\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{u_r}{r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$

Таким образом можем выписать связь компонент тензора напряжений с перемещениями:

$$\begin{cases} \sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c, \\ \sigma_\varphi = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c, \\ \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c, \\ \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{cases} \quad (3.16)$$

Зададимся произвольной функцией $\Phi = \Phi(r; z)$, которую будем называть упругим потенциалом. Зададим компоненты перемещений u_r и u_z через упругий потенциал Φ :

$$u_r = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad (3.17)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu) \tilde{\Delta} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (3.18)$$

Подставим уравнения (3.17) и (3.18) в компоненты тензора напряжений в системе (3.16) и получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \tilde{\Delta} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c, \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \tilde{\Delta} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c, \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\nu) \tilde{\Delta} \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha c, \\ \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left((1-\nu) \tilde{\Delta} \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right). \end{array} \right. \quad (3.19)$$

$$\text{Здесь } \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Связь u_r и u_z с функцией $\Phi(r; z)$ задавалась таким образом, чтобы при подстановке компонент тензора напряжений из системы (3.19) в систему (3.6) выполнялись балансовые соотношения.

Подставим в условие совместности деформации (3.10) компоненты тензора напряжений из системы (3.19):

$$\tilde{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial z} [(1+\nu) \tilde{\Delta} \Phi] - 3(3\lambda + 2\mu) \alpha c \right) = 0$$

Тогда получим следующее уравнение:

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta} \Phi = 0, \quad (3.20)$$

Умножим уравнение (3.20) на $r J_0(\xi r)$ и проинтегрируем по r от 0 до ∞ , получим уравнение (3.21). Здесь ξ - спектральный параметр, $\xi \geq 0$. $J_0(\xi r)$ -Бесселева функция 0-го порядка.

$$\int_0^{+\infty} \tilde{\Delta} \tilde{\Delta} \Phi r J_0(\xi r) dr = 0, \quad (3.21)$$

Мы сделали интегральное преобразование уравнения (3.20). Такое преобразование называется интегральным преобразованием Фурье-Бесселя [3].

Немного преобразуем оператор $\tilde{\Delta}$:

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Обозначим за $\tilde{\Delta}_r$:

$$\tilde{\Delta}_r = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Тогда $\tilde{\Delta}$ примет вид:

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Перепишем уравнение (3.20):

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta} \Phi = \left(\tilde{\Delta}_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\tilde{\Delta}_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = \left(\tilde{\Delta}_r \tilde{\Delta}_r + 2 \tilde{\Delta}_r \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \Phi = 0$$

$\Phi(r; z)$ можно записать, как обратное преобразование Фурье-Бесселя от функции $H_\xi(z)$, которая является трансформантой этого интегрального преобразования. Запишем это:

$$\Phi(r; z) = \int_0^\infty H_\xi(z) \xi J_0(\xi r) d\xi, \quad (3.22)$$

$J_0(\xi r)$ является решением уравнения Бесселя, поэтому выразим ее из этого уравнения:

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} \right) = -\xi^2 J_0(\xi r) \leftrightarrow \tilde{\Delta}_r J_0(\xi r) = -\xi^2 J_0(\xi r)$$

Учитывая уравнение (3.22), найдем $\tilde{\Delta}_r \Phi$:

$$\tilde{\Delta}_r \Phi = \int_0^\infty H_\xi(z) \xi \underbrace{\tilde{\Delta}_r J_0(\xi r)}_{-\xi^2 J_0(\xi r)} d\xi = -\xi^2 \int_0^\infty H_\xi(z) \xi J_0(\xi r) d\xi = -\xi^2 \Phi$$

Тогда $\tilde{\Delta}_r \tilde{\Delta}_r \Phi$ будет равно:

$$\tilde{\Delta}_r \tilde{\Delta}_r \Phi = \tilde{\Delta}_r (-\xi^2 \Phi) = -\xi^2 \tilde{\Delta}_r \Phi = \xi^4 \Phi$$

Значит уравнение (3.20) будет выглядеть:

$$\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}\Phi = \xi^4\Phi - 2\xi^2\Phi + \frac{\partial^4\Phi}{\partial z^4} = 0, \quad (3.23)$$

Подставим уравнение (3.22) в уравнение (3.23):

$$\int_0^\infty (\xi^4 H_\xi(z) - 2\xi^2 H_\xi(z) + \frac{\partial^4 H_\xi(z)}{\partial z^4}) \xi J_0(\xi r) d\xi = 0$$

В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно трансформанты $H_\xi(z)$:

$$\xi^4 H_\xi(z) - 2\xi^2 H_\xi(z) + \frac{\partial^4 H_\xi(z)}{\partial z^4} = 0, \quad (3.24)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 2\xi^2\lambda^2 + \xi^4 = 0, \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) имеет два действительных корня, каждый из которых является корнем кратности 2:

$$\lambda_1 = \xi, \lambda_2 = -\xi$$

Тогда решение уравнения (3.24) будет выглядеть следующим образом [14]:

$$H_\xi(z) = C_1 e^{\xi z} + C_2 z e^{\xi z} + C_3 e^{-\xi z} + C_4 z e^{-\xi z}, \quad (3.26)$$

Для того, чтобы найти константы в уравнении (3.26) для функции $H_\xi(z)$ нужно задать граничные условия. Поскольку в наше итоговое решение основной вклад будет вносить давление p , удобно ввести вспомогательную задачу: $\sigma_z = \sigma_z' + p$, здесь σ_z' описывает отклонения от величины p . На сторонах трещины $r < a, z = 0$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\sigma_z = 0, \tau_{rz} = 0$$

Тогда для вспомогательной задачи получим следующие ГУ:

$$\sigma_z' = -p, \tau_{rz} = 0 \quad (r < a, z = 0)$$

На остальной части плоскости трещины ($r > a, z = 0$) должны выполняться следующие ГУ:

$$\tau_{rz} = 0, u_z = 0 \quad (r > a, z = 0)$$

Поскольку задача является симметричной, будем рассматривать полупространство ($z > 0$). Также на бесконечности смещения и напряжения вспомогательной задачи стремятся к нулю. Условия на бесконечности будут выглядеть следующим образом:

$$u_z|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \sigma_z'|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Перед тем как подставить ГУ, нужно переписать перемещения и напряжения вспомогательной задачи через трансформанту $H_\xi(z)$. Сначала распишем u_z :

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu)\tilde{\Delta}\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{1+\nu}{E} \int_0^{+\infty} [2(1-\nu)\tilde{\Delta}(H_\xi(z)J_0(\xi r)) - \frac{d^2}{dz^2}(H_\xi(z)J_0(\xi r))] \xi d\xi \end{aligned}$$

Распишем отдельно $\tilde{\Delta}(H_\xi(z)J_0(\xi r))$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(H_\xi(z)J_0(\xi r)) &= H_\xi(z) \frac{\partial^2 J_0(\xi r)}{\partial r^2} + \frac{H_\xi(z)}{r} \frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} + J_0(\xi r) \frac{d^2 H_\xi(z)}{dz^2} = \\ &= \frac{-\xi^2}{2} H_\xi(z) J_0(\xi r) + \frac{\xi^2}{2} H_\xi(z) J_2(\xi r) - \frac{\xi}{r} H_\xi(z) J_1(\xi r) + J_0(\xi r) \frac{d^2 H_\xi(z)}{dz^2} \\ \tilde{\Delta}(H_\xi(z)J_0(\xi r)) &= -\xi^2 H_\xi(z) J_0(\xi r) + \\ &+ \frac{\xi^2}{2} H_\xi(z) \left(J_0(\xi r) - \frac{2J_1(\xi r)}{\xi r} + J_2(\xi r) \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

Получившееся выражение можно еще упростить, если ввести в рассмотрение одно из свойств функций Бесселя [4]:

$$J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0$$

Для $n = 1$ это свойство будет выглядеть следующим образом:

$$J_2(x) - \frac{2}{x} J_1(x) + J_0(x) = 0, \quad (3.28)$$

Подставим уравнение (3.28) в уравнение (3.27) и получим:

$$\tilde{\Delta}(H_\xi(z)J_0(\xi r)) = -\xi^2 H_\xi(z) J_0(\xi r)$$

Тогда получим выражение для u_z через трансформанту $H_\xi(z)$:

$$\frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu)\tilde{\Delta}\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right] = \frac{1+\nu}{E} \int_0^{+\infty} \left[(1-2\nu) \frac{d^2 H_\xi(z)}{dz^2} - 2(1-\nu)H_\xi(z)\xi^2 \right] J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad (3.29)$$

Проделаем те же операции для оставшихся напряжений и перемещений и получим:

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \int_0^{+\infty} \frac{dH_\xi(z)}{dz} J_1(\xi r) \xi^2 d\xi, \quad (3.30)$$

$$\sigma_z' = \int_0^{+\infty} \left[(1-\nu) \frac{d^3 H_\xi(z)}{dz^3} - (2-\nu) \frac{dH_\xi(z)}{dz} \xi^2 \right] J_0(\xi r) \xi d\xi - \alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt}), \quad (3.31)$$

$$\tau_{rz} = \int_0^{+\infty} \left[\nu \frac{d^2 H_\xi(z)}{dz^2} + (1-\nu)H_\xi(z)\xi^2 \right] J_1(\xi r) \xi^2 d\xi, \quad (3.32)$$

$$\sigma_r = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \nu \right) \xi^2 \frac{dH_\xi(z)}{dz} + \nu \frac{d^3 H_\xi(z)}{dz^3} \right] J_0(\xi r) - \frac{\xi^2}{2} \frac{dH_\xi(z)}{dz} J_2(\xi r) \xi d\xi - \alpha(1 - e^{-kt}), \quad (3.33)$$

$$\sigma_\varphi = \int_0^{+\infty} \left[\nu J_0(\xi r) \left(-\frac{\xi^2}{2} \frac{dH_\xi(z)}{dz} + \frac{d^3 H_\xi(z)}{dz^3} \right) + \frac{\xi}{r} \frac{dH_\xi(z)}{dz} \right] \xi d\xi - \alpha(1 - e^{-kt}), \quad (3.34)$$

Из условий на бесконечности следует равенство нулю констант C_1 и C_2 , значит:

$$H_\xi(z) = C_3 e^{-\xi z} + C_4 z e^{-\xi z}$$

Подставим уравнение (3.32) в условие для τ_{rz} и получим уравнение для C_3 и C_4 :

$$C_3 \xi - 2\nu C_4 = 0 \leftrightarrow C_3 = \frac{2\nu}{\xi} C_4$$

Перепишем функцию $H_\xi(z)$ с учетом связи C_3 и C_4 :

$$H_\xi(z) = C_4 \left(\frac{2\nu}{\xi} e^{-\xi z} + z e^{-\xi z} \right), \quad (3.35)$$

Подставим уравнения (3.29) и (3.31) в условия на u_z и σ_z' и получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} C_4 \xi^3 J_0(\xi r) d\xi = \alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt}) - p, r < a \\ \int_0^{+\infty} C_4 \xi^2 J_0(\xi r) d\xi = 0, r > a \end{cases}$$

Введем обозначения $\xi = x$, $f(x) = C_4 x^2$ и перепишем систему:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} x f(x) J_0(xr) dx = \alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt}) - p, r < a \\ \int_0^{+\infty} f(x) J_0(xr) dx = 0, r > a \end{cases}, \quad (3.36)$$

Система интегральных уравнений такого вида будет иметь решение следующего вида [8]:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \int_0^a \sqrt{r} \varphi(r) J_{\frac{1}{2}}(xr) dr, \quad (3.37)$$

Здесь функция $\varphi(r)$ выглядит следующим образом [8]:

$$\varphi(r) = \frac{2r}{\pi} (\alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt}) - p) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta, \quad (3.38)$$

Для удобства введем функцию $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt}) - p$$

Перепишем уравнение (3.38):

$$\varphi(r) = \frac{2r}{\pi} \beta(t) \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta}_1 = \frac{2r}{\pi} \beta(t), \quad (3.39)$$

Подставим значение $\varphi(r)$ из (3.39) в уравнение (3.37):

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \frac{2}{\pi} \int_0^a r \sqrt{r} J_{\frac{1}{2}}(xr) dr, \quad (3.40)$$

Функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить с помощью элементарных функций [9]:

$$J_{\frac{1}{2}}(xr) = \sqrt{\frac{2}{\pi x r}} \sin(xr), \quad (3.41)$$

Подставим уравнение (3.41) в уравнение (3.40) и найдем функцию $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \beta(t) \left(\frac{a \sin(ax)}{x^2} - \frac{\cos(ax)}{x} \right), \quad (3.42)$$

Вспомним введенные обозначения: $\xi = x, f(x) = C_4 x^2$. С помощью уравнения (3.42) найдем значение константы C_4 :

$$C_4 = \frac{2}{\pi} \beta(t) \left(\frac{a \sin(a\xi)}{\xi^4} - \frac{\cos(a\xi)}{\xi^3} \right), \quad (3.43)$$

Подставим из уравнения (3.43) найденную константу C_4 в уравнение (3.35) и получим функцию $H_\xi(z)$:

$$H_\xi(z) = \frac{2}{\pi} \beta(t) \left(\frac{a \sin(a\xi)}{\xi^4} - \frac{\cos(a\xi)}{\xi^3} \right) \left(\frac{2\nu}{\xi} e^{-\xi z} + z e^{-\xi z} \right), \quad (3.44)$$

Из уравнения (3.44) подставим значение функции $H_\xi(z)$ в уравнения (3.29) и (3.31), положим $z = 0$, и найдем значения u_z и σ_z' в плоскости, где находится трещина:

$$u_z = -\frac{4(1-\nu)^2}{\pi E} (p - \alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt})) a \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, r < a, \quad (3.45)$$

$$\sigma_z' = \frac{2(p - \alpha(3\lambda + 2\mu)(1 - e^{-kt}))}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}} - \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) \right), r > a, \quad (3.46)$$

ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Трещина находится в бесконечном пространстве, материалом которого является титан. В таблице 1 представлены его свойства [2]:

Таблица 1. Параметры титана

Наименование параметра	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Скорость реакции, с^{-1}	Коэффициент расширения, $\frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Значение	105	0.35	0.005	0.36

Построим графики зависимостей $u_z(r; t)$ и $\sigma_z(r; t)$ в разные моменты времени t и для разных значений радиальной переменной r .

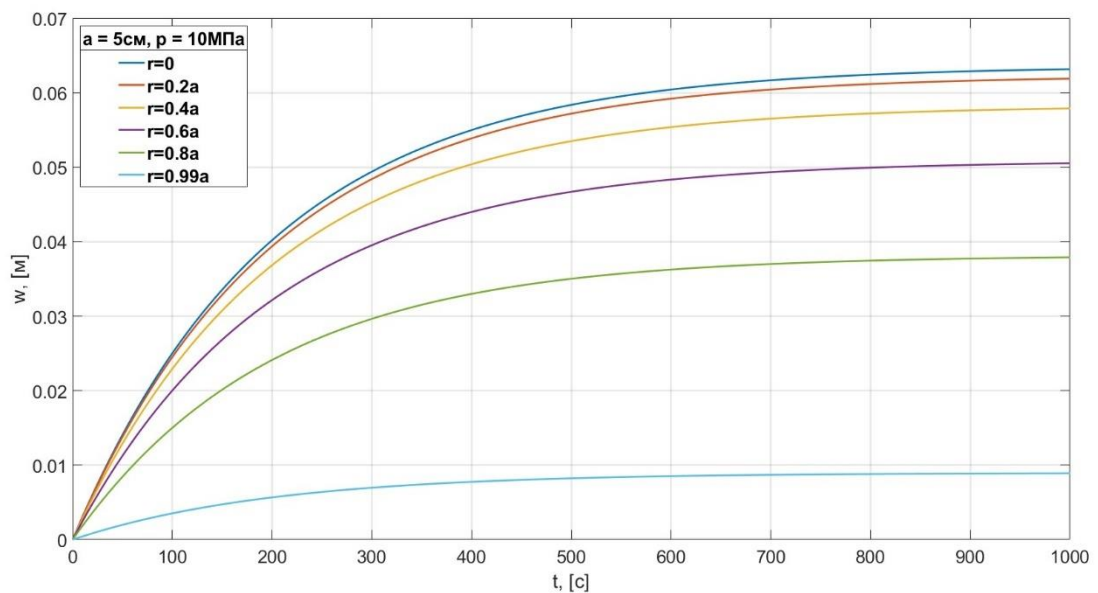


Рисунок 2. Графики зависимости раскрытия от времени для разных значений r при $a = 5 \text{ см}$, $p = 10 \text{ МПа}$

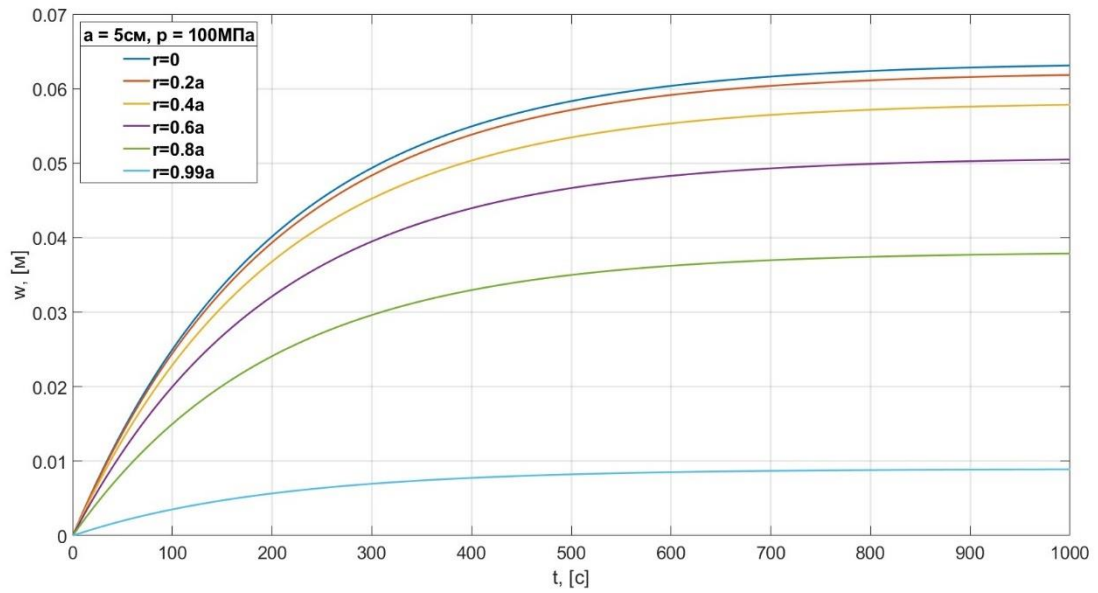


Рисунок 3. Графики зависимости раскрытия от времени для разных значений r при $a = 5$ см, $p = 100$ МПа

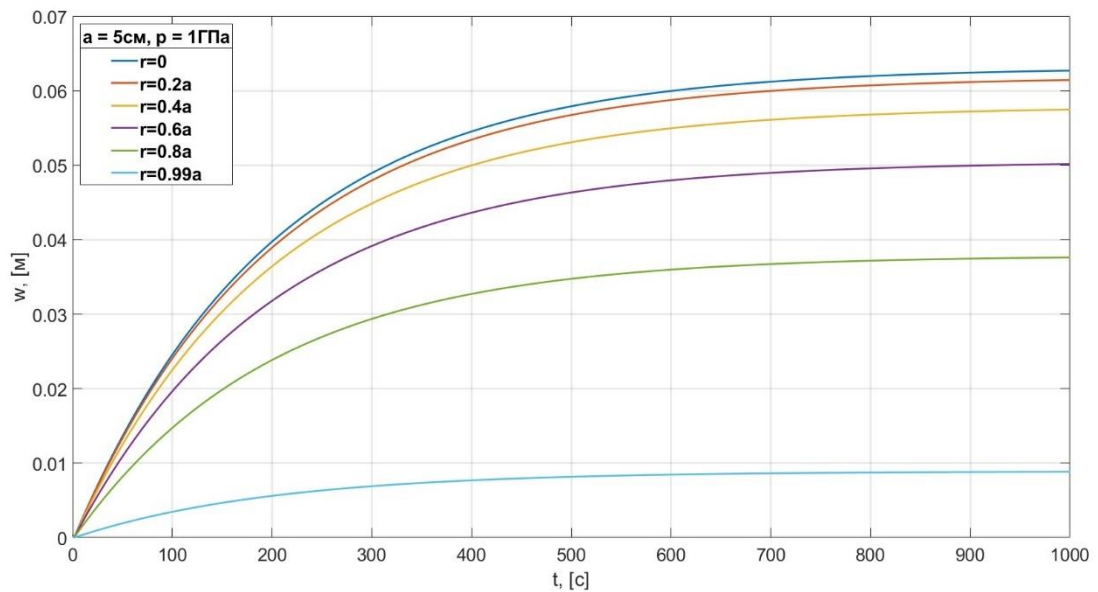


Рисунок 4. Графики зависимости раскрытия от времени для разных значений r при $a = 5$ см, $p = 1$ ГПа

Из рисунков 2–4 можно увидеть, что величина раскрытия трещины уменьшается по мере приближения к краю трещины, максимальное раскрытие будет находиться в центре трещины, а минимальное на берегу трещины. Кроме этого, можем видеть, что начиная с момента времени $t = 900$ с трещина перестает расти.

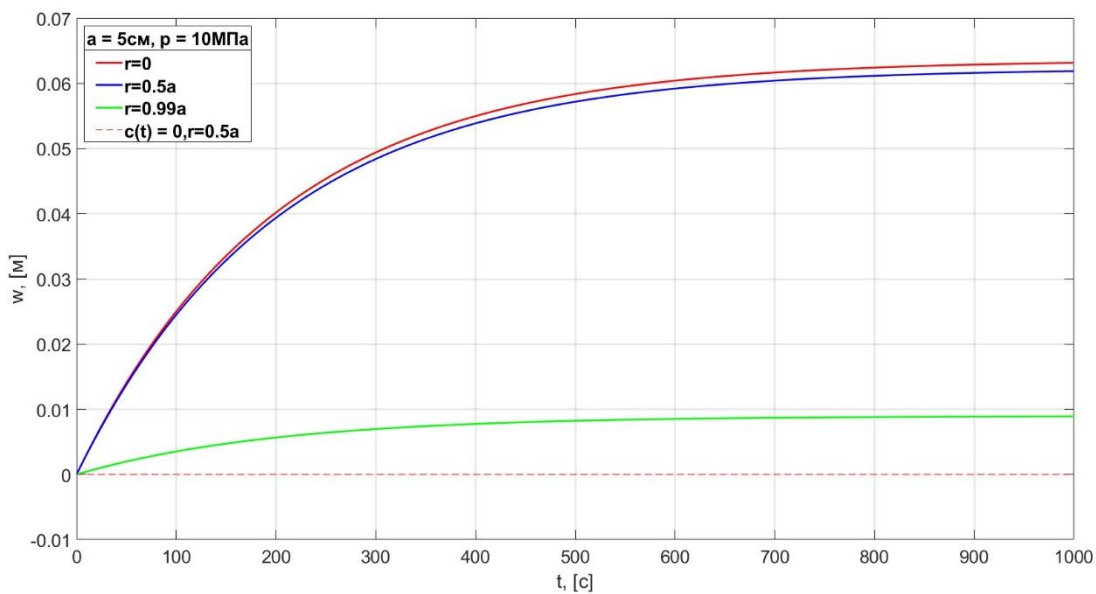


Рисунок 5. Графики зависимости раскрытия от времени для разных значений r с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 10$ МПа

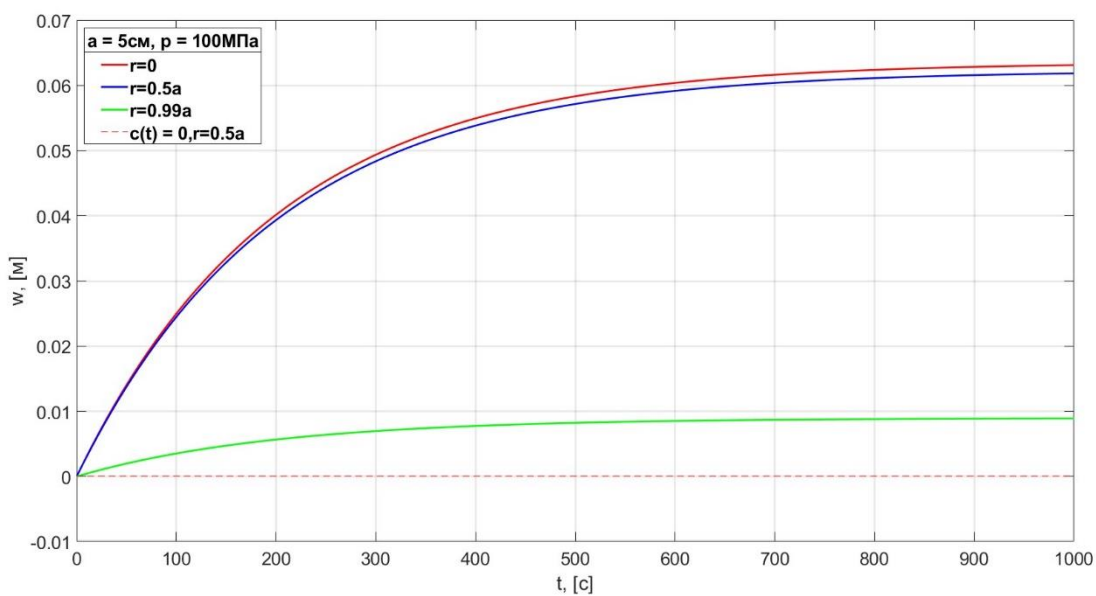


Рисунок 6. Графики зависимости раскрытия от времени для разных значений r с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 100$ МПа

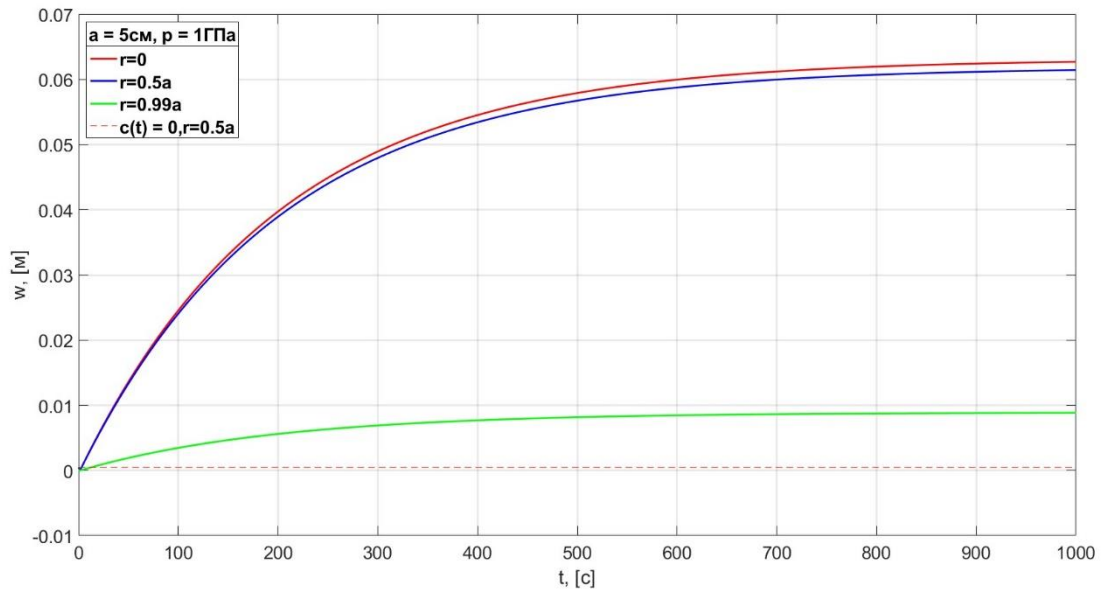


Рисунок 7. Графики зависимости раскрытия от времени для разных значений r с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 1$ ГПа

На рисунках 5–7 пунктирной линией нарисован график раскрытия трещины, когда нет учета деформаций [5], индуцированных водородом, то есть $c(t) = 0$. Графики раскрытия с учетом деформаций от водорода значительно отличаются от графика без их учета.

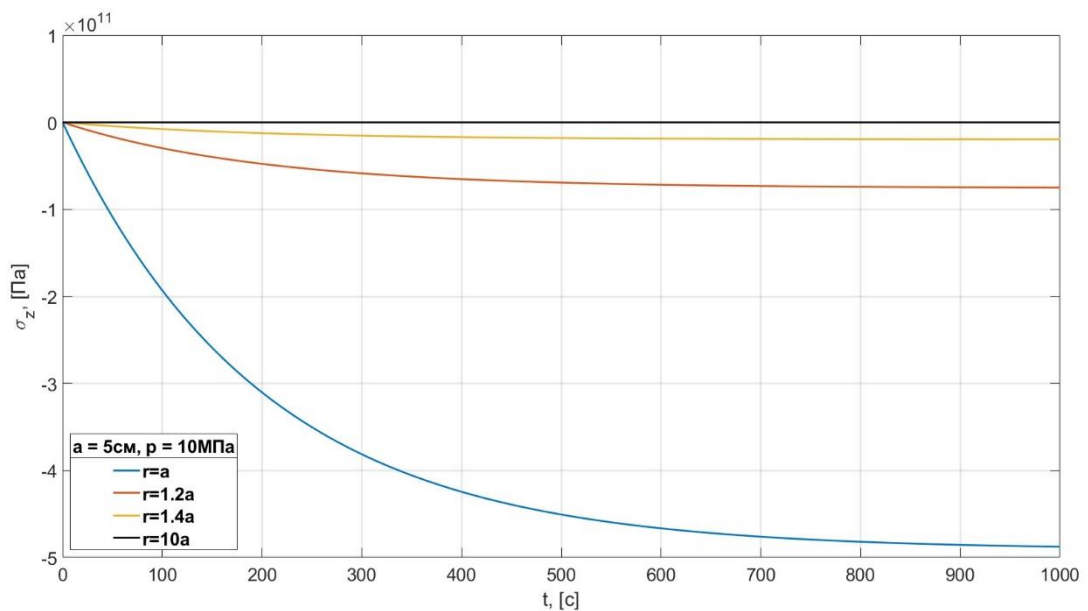


Рисунок 8. Графики зависимости σ_z от времени для разных значений r при $a = 5$ см, $p = 10$ МПа

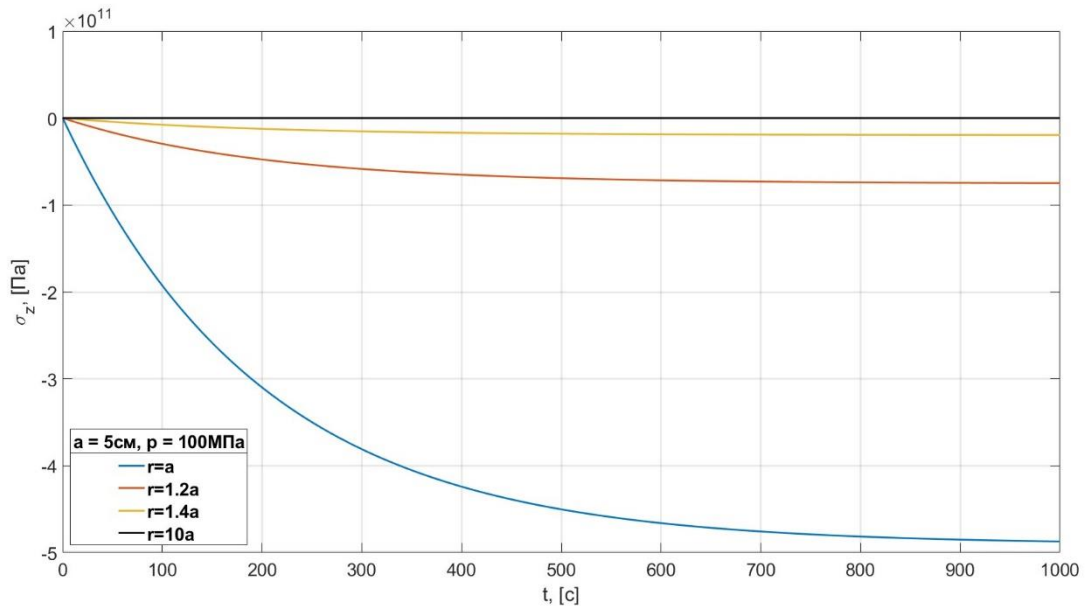


Рисунок 9. Графики зависимости σ_z от времени для разных значений r при $a = 5$ см, $p = 100$ МПа

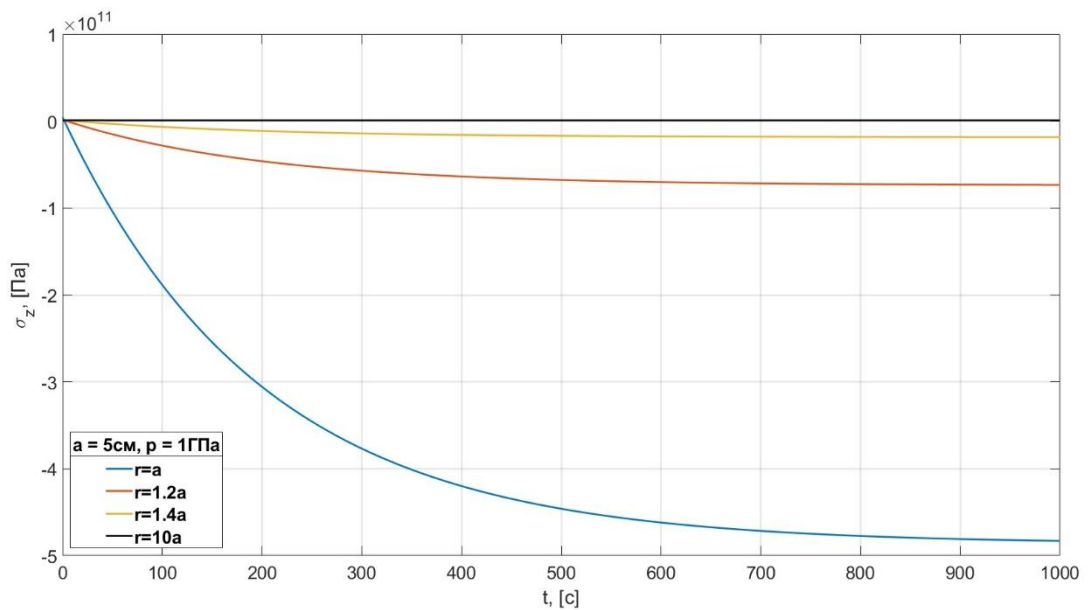


Рисунок 10. Графики зависимости σ_z от времени для разных значений r при $a = 5$ см, $p = 1$ ГПа

Из рисунков 8–10 видно, что напряжение принимает свое максимальное значение на краю трещины. По мере удаления от трещины значение напряжения уменьшается, и на больших расстояниях равно нулю.

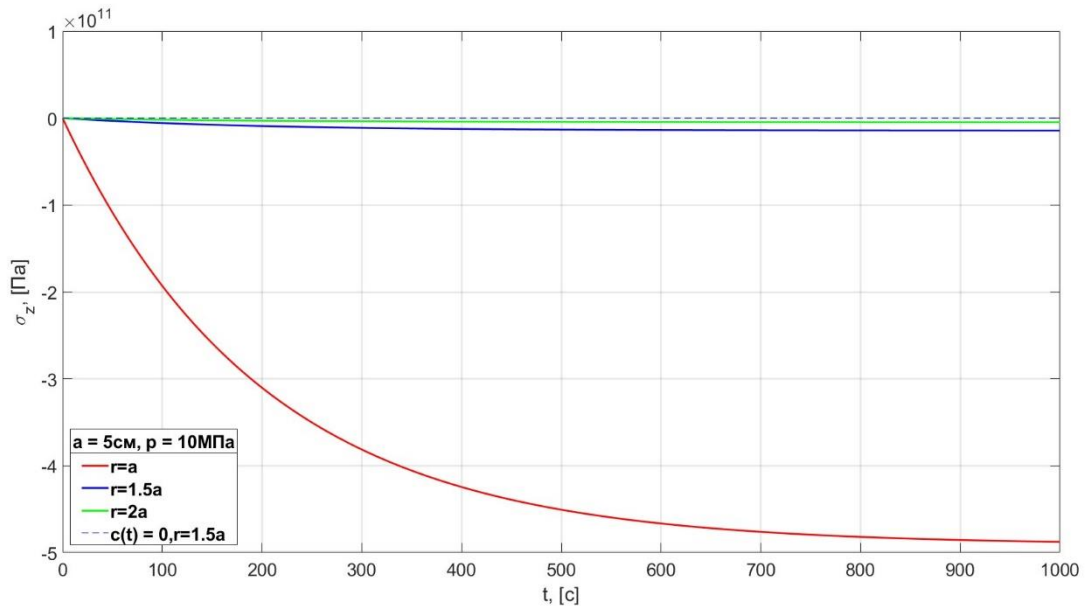


Рисунок 11. Графики зависимости σ_z от времени для разных значений r с учетом концентрации и без учета при $a = 5 \text{ см}$, $p = 10 \text{ МПа}$

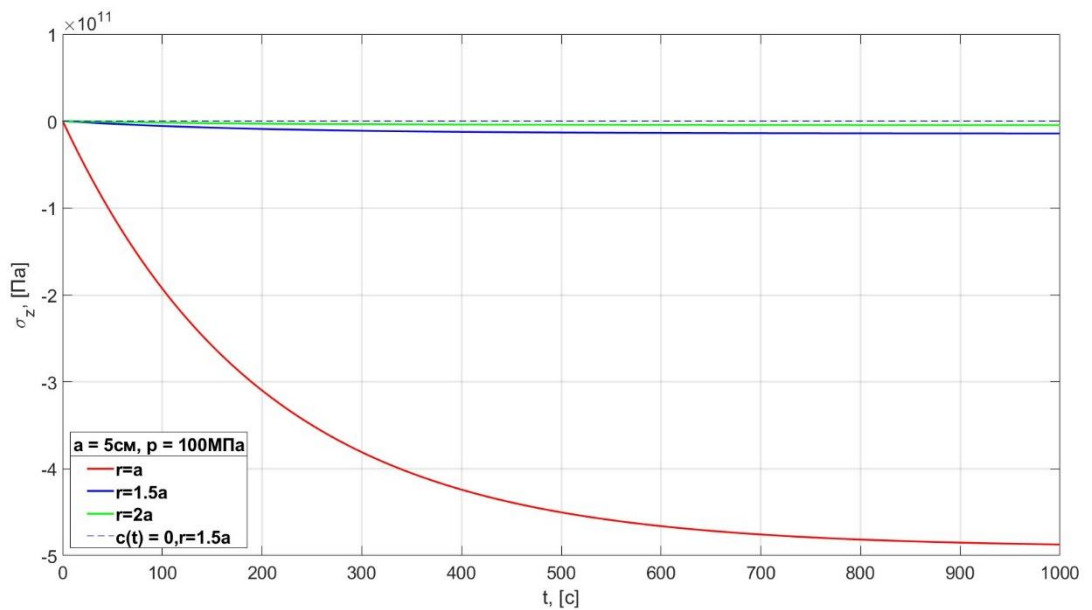


Рисунок 12. Графики зависимости σ_z от времени для разных значений r с учетом концентрации и без учета при $a = 5 \text{ см}$, $p = 100 \text{ МПа}$

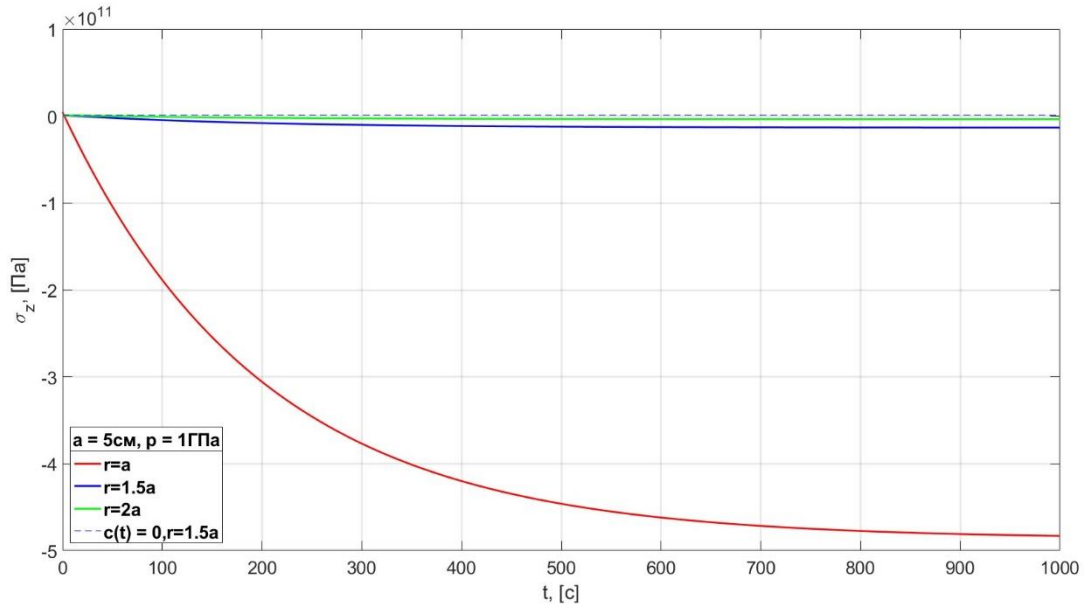


Рисунок 13. Графики зависимости σ_z от времени для разных значений r с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 1$ ГПа

На рисунках 11–13 пунктирной линией построен график зависимости σ_z от времени, когда, когда нет учета деформаций, индуцированных водородом, то есть $c(t) = 0$. Видно, что при отдалении от трещины, графики зависимости напряжения от времени с учетом и без учета деформаций начинают совпадать, поэтому можем сделать вывод, что на больших расстояниях можно пренебречь влиянием водорода.

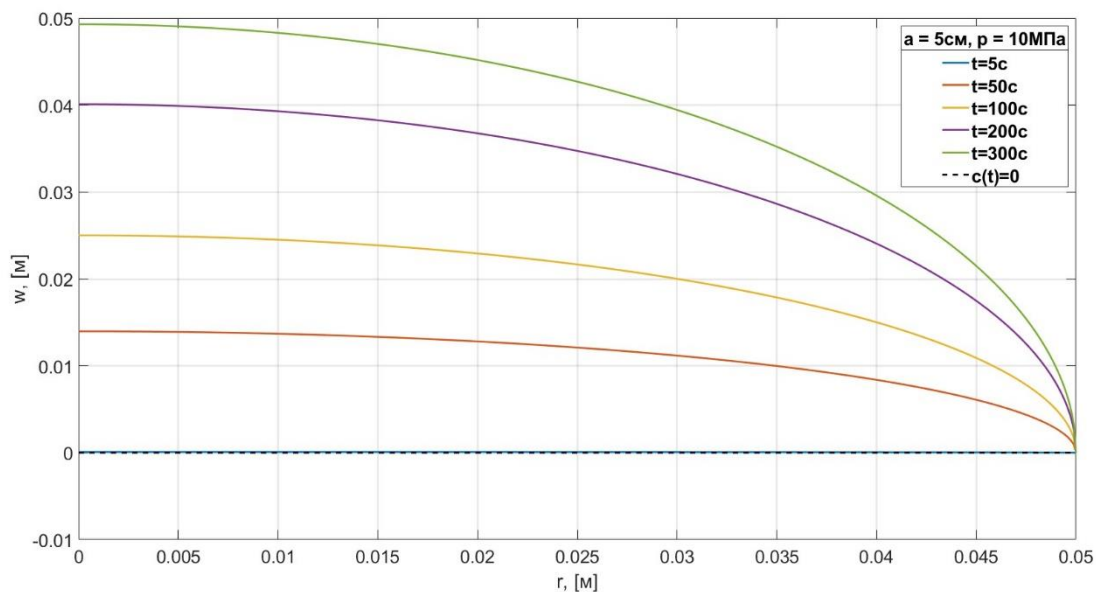


Рисунок 14. Графики зависимости раскрытия от r в разные моменты времени с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 10$ МПа

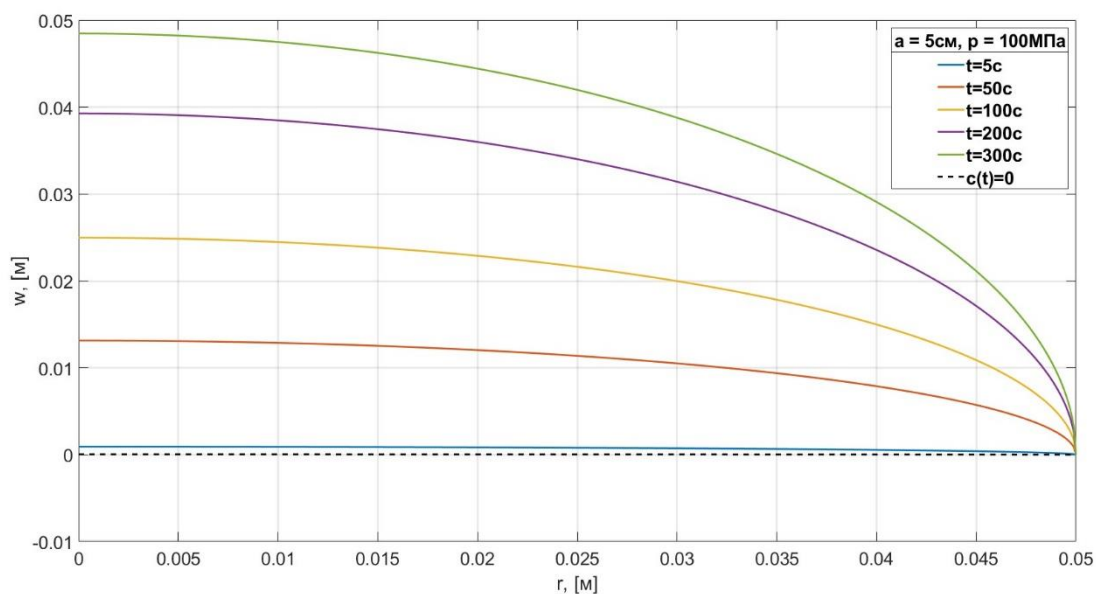


Рисунок 15. Графики зависимости раскрытия от r в разные моменты времени с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 100$ МПа

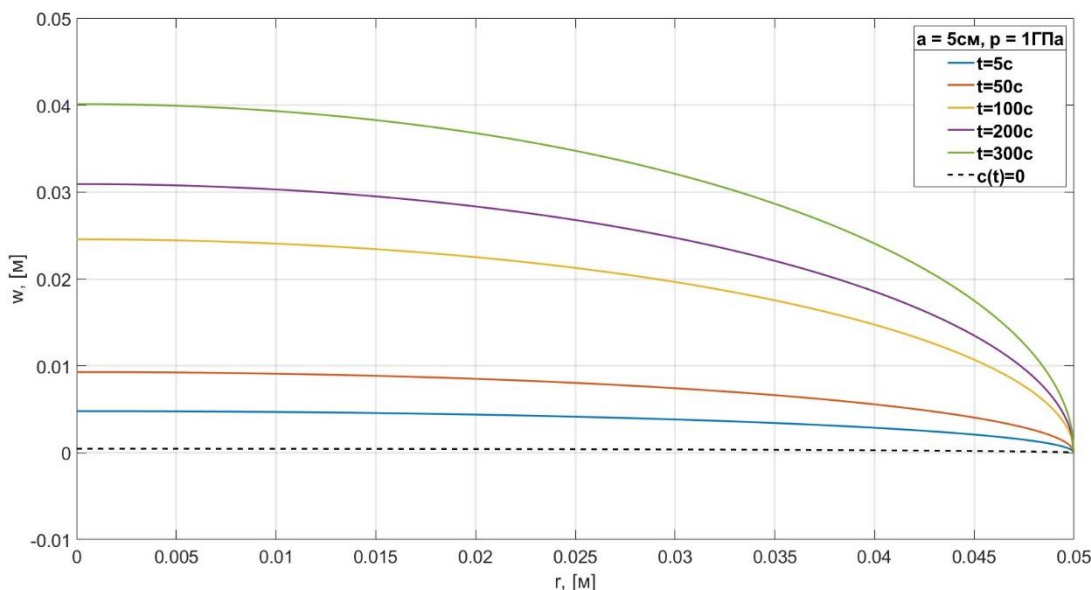


Рисунок 16. Графики зависимости раскрытия от r в разные моменты времени с учетом концентрации и без учета при $a = 5$ см, $p = 1$ ГПа

Из рисунков 14–16 можем также видеть, что значение раскрытия убывает по мере приближения к краю трещины и имеет максимальное значение в центре трещины. Также можно сделать вывод, что раскрытие увеличивается при увеличении времени. Это происходит из-за того, что водород постепенно накапливается в трещине и начинает все больше и больше влиять на раскрытие. Также можем увидеть, что в начальный промежуток времени графики с учетом и без учета деформаций, индуцированных водородом, не сильно отличаются, поэтому при нахождении раскрытия трещины в начальный промежуток времени мы можем не учитывать влияние водорода.

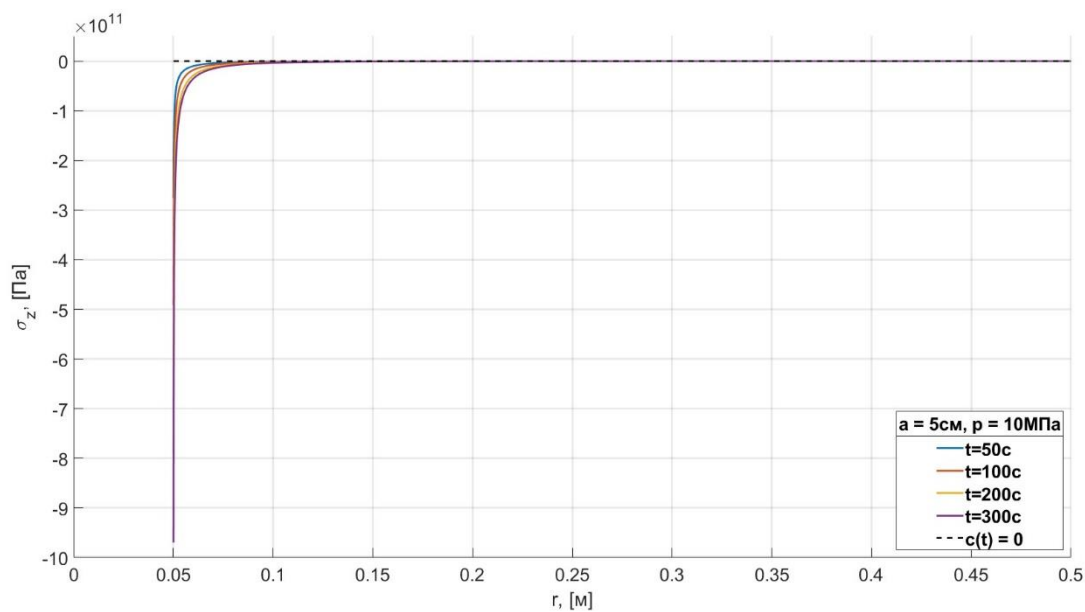


Рисунок 17. Графики зависимости σ_z от r в разные моменты времени с учетом концентрации и без учета при $a = 5 \text{ см}$, $p = 10 \text{ МПа}$

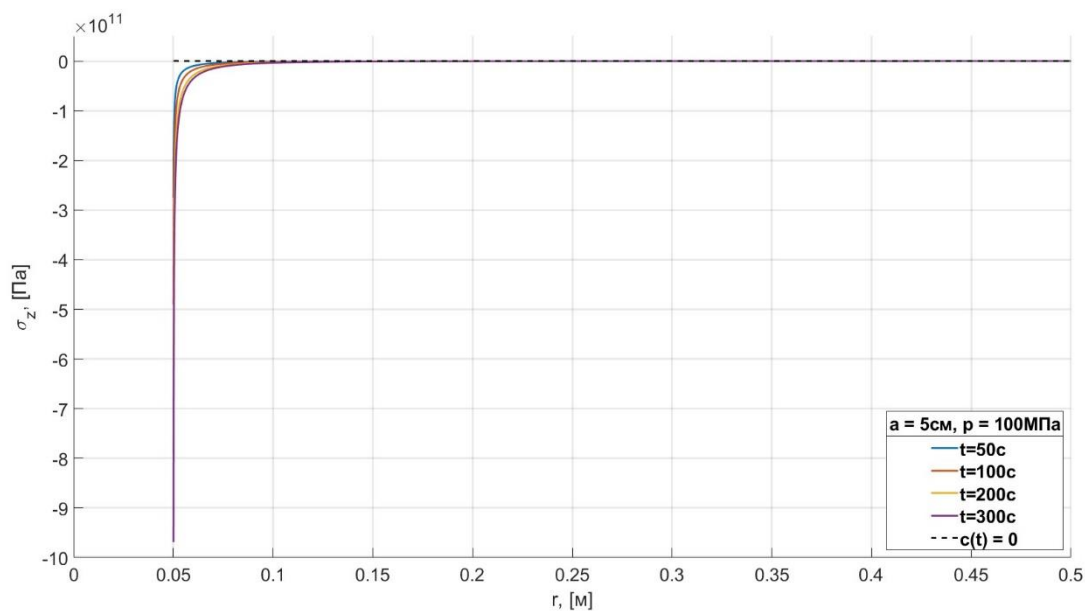


Рисунок 18. Графики зависимости σ_z от r в разные моменты времени с учетом концентрации и без учета при $a = 5 \text{ см}$, $p = 100 \text{ МПа}$

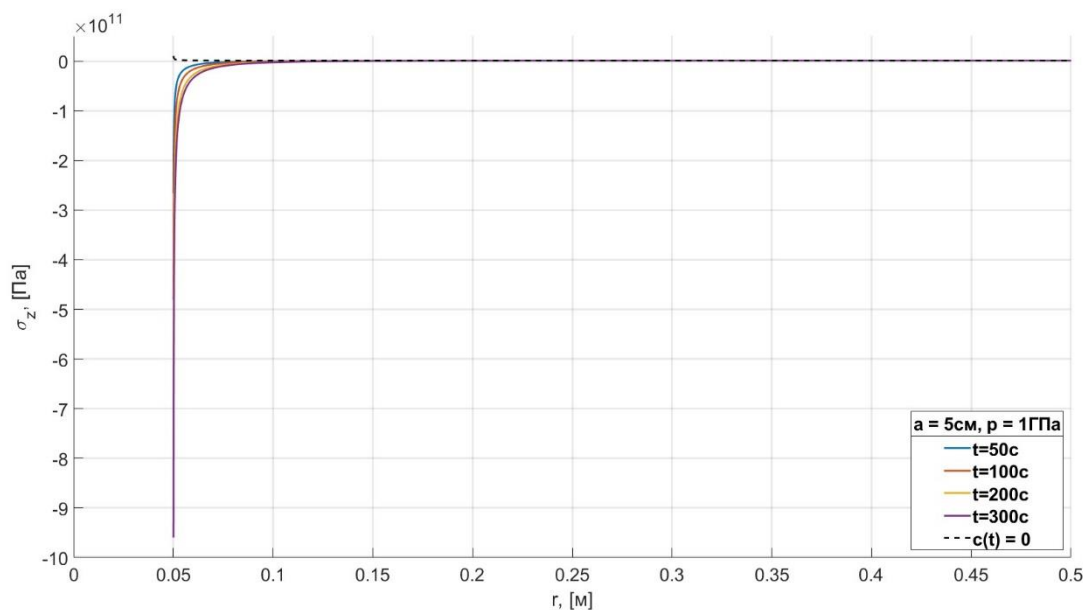


Рисунок 19. Графики зависимости σ_z от r в разные моменты времени с учетом концентрации и без учета при $a = 5\text{ см}$, $p = 1\text{ ГПа}$

Из рисунков 17–19 можем увидеть, что на больших расстояниях от трещины влиянием водорода можно пренебречь.

Из рисунков 2–19 можно увидеть, что соответствующие графики, построенные для разных значений давления p , слабо отличаются. Это свидетельствует о том, что основной вклад в НДС трещины привносит влияние водорода. Также можем видеть, что в общем случае графики, построенные с учетом деформаций от водорода, отличаются от графиков, построенных без учета этих деформаций. Из этого можно сделать вывод, что влияние водорода на развитие трещины существенно и им нельзя пренебрегать.

ГЛАВА 5. КРИТЕРИЙ ИРВИНА

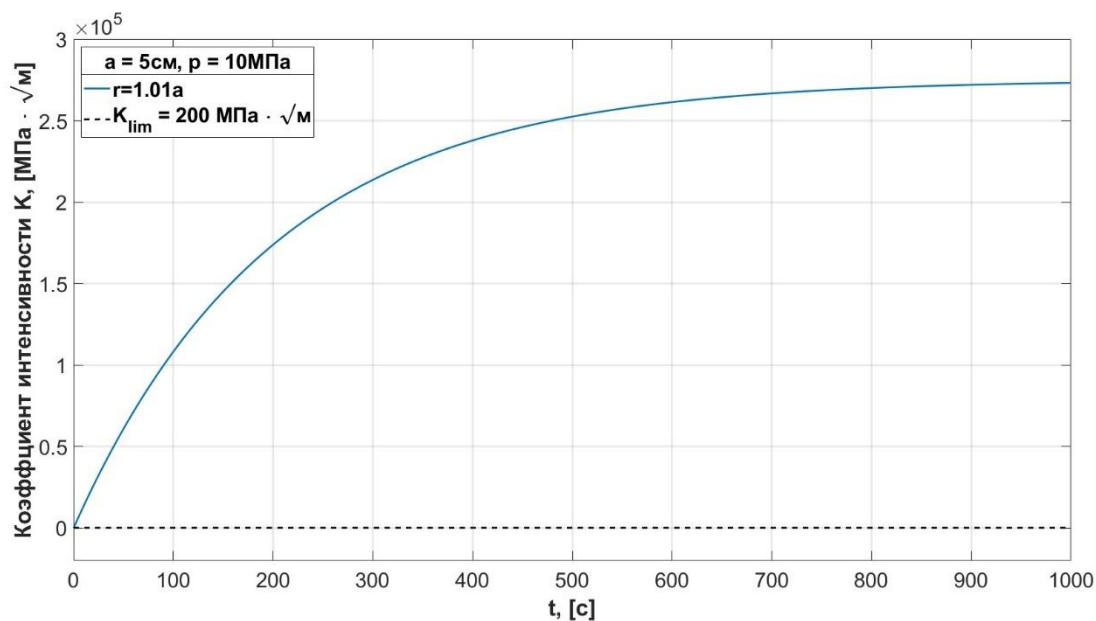


Рисунок 20. График зависимости коэффициента интенсивности от времени t на краю трещины при $a = 5$ см, $p = 10$ МПа

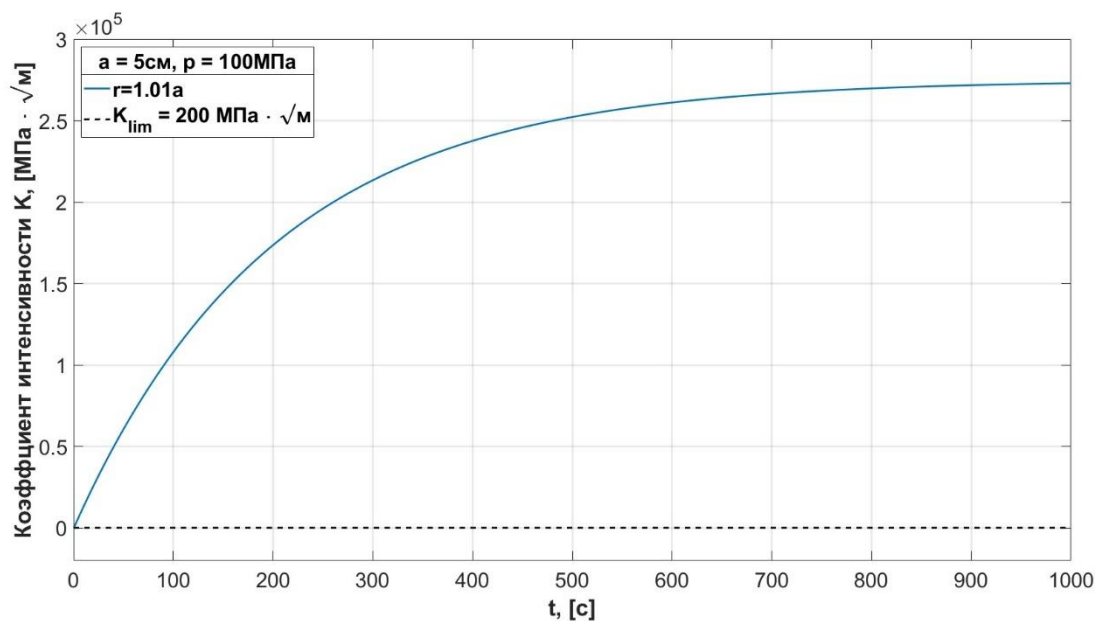


Рисунок 21. График зависимости коэффициента интенсивности от времени t на краю трещины при $a = 5$ см, $p = 100$ МПа

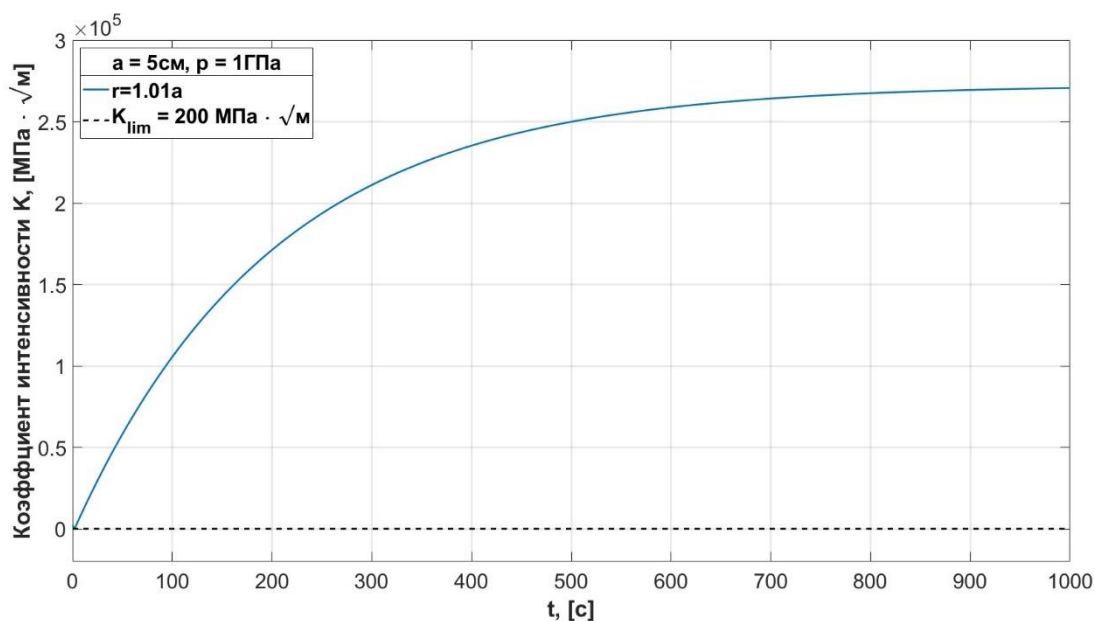


Рисунок 22. График зависимости коэффициента интенсивности от времени t на краю трещины при $a = 5 \text{ см}$, $p = 1 \text{ ГПа}$

На рисунках 20–22 представлены графики зависимости коэффициента интенсивности от времени. Пунктирной линией на графиках отмечено предельное значение коэффициента интенсивности, равное 200 МПа . Видно, что коэффициент достигает предельное значение еще в первые секунды. Это означает, что практически сразу, как водород начинает накапливаться в трещину, титан разрушается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была решена задача исследования влияния водородных деформаций на развитие трещины в бесконечном пространстве, растягиваемом вертикальной симметричной нагрузкой.

Проведённый анализ показал, что водород, накапливающийся в зоне трещины, оказывает значительное воздействие на механические свойства материала и, соответственно, на процесс развития трещины. Выявлено, что водородные деформации оказывают столь сильное влияние, что их нельзя игнорировать при моделировании и прогнозировании поведения материалов в условиях повышенной водородной концентрации.

Полученные результаты работы качественно согласуются с практическими наблюдениями и экспериментальными данными. Это подтверждает корректность выбранного метода и подхода к решению задачи. В реальных промышленных и эксплуатационных условиях также наблюдается значительное влияние водорода на развитие трещин в металлических конструкциях. Это особенно важно для тех отраслей, где используются металлы и сплавы, подверженные воздействию водорода, такие как энергетика, транспорт и аэрокосмическая промышленность.

Для достижения более точных и надёжных результатов необходимо продолжать исследование и совершенствование модели. В частности, в дальнейшем представляется целесообразным усложнить модель, вводя зависимость концентрации водорода не только от времени, но и от пространственной переменной. Это позволит учесть пространственное распределение водорода в материале и его влияние на локальные механические свойства, что приведет к более точному описанию процесса трещинообразования.

Кроме того, в дальнейших исследованиях следует рассмотреть возможность учёта различных типов напряжённого состояния и сложных форм трещин, что также может значительно повлиять на результаты

моделирования. Усилия должны быть направлены на разработку комплексных моделей, которые смогут более полно учитывать все факторы, влияющие на развитие трещин в металлах под воздействием водорода. Это позволит не только лучше понимать фундаментальные процессы, но и разрабатывать более эффективные методы предотвращения и контроля водородного растрескивания в различных инженерных приложениях.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего совершенствования методов диагностики и прогнозирования состояния материалов, работающих в условиях воздействия водорода, а также для разработки новых материалов с повышенной стойкостью к водородному воздействию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арфкен Г. Тензорное исчисление для физики: краткое руководство. Москва: Мир, 1985. –144 с.
2. Белов А.Н. Титан и его сплавы: Учебник для вузов. Москва: Металлургия, 1982. –120 с.
3. Ванцафф Г.Н., Лукичев В.Г. Теория специальных функций и их приложения. Москва: Физматлит, 2002. –368 с.
4. Гаврилов В.С., Денисова Н.А., Калинин А.В. Функции Бесселя в задачах математической физики / Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2014. – 8-9 с.
5. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Москва: Наука, 1974. – 247-251 с.
6. Лурье А.Л. Теоретическая механика. Москва: Наука, 1987. –78 с.
7. Седов Л.С. Теория упругости. Москва: Наука, 1971. –50 с.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, 1968. – 198-202 с.
9. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Специальные функции в задачах математической физики / Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012. – 7-8 с.
10. Яковлев Ю.А., Полянский В.А., Седова Ю.С., Беляев А.К. Модели влияния водорода на механические свойства металлов и сплавов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2020. – 140-145 с.
11. Oriani, R. A. A mechanistic theory of hydrogen embrittlement of steels. *Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie*. 1972. Vol. 76, No. 8.
12. Sofronis P., Birnbaum H.K. Mechanics of the hydrogen dislocation-impurity interactions I. Increasing shear modulus // *J. Mech. Phys. Solid*. – 1995. – Vol. 43, no. 1. –49-90 с.

13. Thompson A.W., Bieler, T.R. Hydrogen Effects in Metals. Wiley, 2012.
–35 c.
14. Farlow S.J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.
Dover Publications, 1993. –58 c.
15. Homer E. Kissinger, Reaction Kinetics in Differential Thermal Analysis
// National Bureau of Standards, Washington, 1957. – 1702-1703 c.