САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Р Е Ф Е Р А Т

Дисциплина: История и философия науки

Тема: История научных исследований в области математического моделирования

Выполнил аспирант
Кафедры теоретическая механика
Физико-механического факультета

А. В. Киюц

Научный руководитель
д.ф.-м.н., проф.
А. М. Кривцов

“____” ___________2012 г.

Санкт-Петербург
2012

Оглавление

Введение

Создание в середине 20 века электронно-вычислительных машин (ЭВМ) можно сравнить по своей значимости с любым из самых выдающихся технических достижений в истории человечества. В то же время необходимо подчеркнуть их особую, специфическую роль. Обычные машины расширяют физические возможности людей в процессе трудовой деятельности, а ЭВМ являются их интеллектуальными помощниками. Распространение математических методов на базе ЭВМ вызвало появлению новых эффективных методов познания законов реального мира и их использование в практической деятельности. ЭВМ дали новые возможности увеличения производительности труда, дальнейшего развития производства, совершенствования управления.

Новый подход к изучению законов природы потребовал подготовки высококвалифицированных специалистов, в совершенстве владеющих технологией применения ЭВМ, способных реализовать их огромные и пока ещё далеко не исчерпанные возможности. ЭВМ, также как и любая машина, не работает без управления человеком. Человек «строит» математическую модель объекта (процесса) и создает вычислительный алгоритм, а машина производит расчет и выдает предварительные результаты, которые требуют дальнейшей обработки и анализа. Но машины должны «пройти» соответствующее «обучение», то есть получить программное обеспечение, как общего, так и проблемно-ориентированного характера, и это «обучение» проводит человек.

Повсеместное применение математических методов и ЭВМ в самых различных областях человеческой деятельности является характерной особенностью нашего времени. Стремительный процесс математизации науки, техники и всего народного хозяйства в целом начался в 50-х годах после появления и быстрого совершенствования ЭВМ. Этот процесс привел к формированию новой науки, такой как информатика, и современной прикладной математики, которая включает в себя широкий круг вопросов, связанных с применением математических методов на базе ЭВМ к решению задач народного хозяйства.

Математика является одна из самых древних наук человечества. Она зародилась на заре человеческой цивилизации из потребностей практики. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения производить арифметические вычисления и определенных геометрических представлений. Постепенно математика стала формироваться в стройную логическую систему, как составная часть общего комплекса научных знаний. Потребности естествознания, техники, всей практической деятельности людей постоянно ставили перед математикой новые задачи и стимулировали ее развитие. В тоже время прогресс в математике делал математические методы более эффективными, расширял сферу их применения и, тем самым, способствовал общему научно-техническому прогрессу.

В разное время роль математики в различных областях человеческой деятельности была различной. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его наиболее существенные черты и свойства на языке математических понятий и уравнений или, как теперь принято говорить, возможность построить математическую модель изучаемого объекта.[1]

Математическая модель основана на некотором упрощении идеализации и не тождественная объекту, а является его приближенным описанием. Однако благодаря такой замене реального объекта моделью появляется возможность сформировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика позволяет единообразно описать широкий круг факторов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т.е. спрогнозировать результаты будущих наблюдений. А ведь прогнозирование – всегда трудная задача, и оправдывающиеся прогнозы являются предметом особой гордости любой науки.

Сложность построения и исследования математической модели существенно зависит от сложности изучаемого объекта. Математические методы давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии, т.е. в науках, в которых изучаются наиболее простые формы движения материи. Математика стала языком этих наук, относящихся к разряду «точных». Значительную роль играет также математика в технике. Этим вплоть до недавнего времени исчерпывалась сфера широкого применения математических методов.

[1] Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. 192 с.

С появлением ЭВМ ситуация изменилась. Причиной этого стало расширение возможностей получить решение задач ранее считавшихся не решаемыми. В математике часто встречаются задачи, решения которых не удается получить в виде формулы, связывающей искомые величины с заданными. Про такие задачи говорят, что они не решаются в явном виде. Для их решения стремятся найти какой-нибудь бесконечный процесс, сходящийся к искомому ответу. Если такой процесс указан, то, выполняя некоторое число шагов и затем, обрывая вычисления (их нельзя продолжать бесконечно), мы получим приближенное решение задачи. Эта процедура связанна с проведением вычислений по строго определенной системе правил, которая задается характером процесса и называется алгоритмом.

С алгоритмами связана вся история математики. Само слово «алгоритм» является производным от имени средневекового узбекского ученого Аль-Хорезми. Еще древнегреческим ученым был известен алгоритм нахождения числа «пи» с высокой точностью. Ньютон в 1682 году предложил эффективный численный метод решения алгебраических уравнений, а Эйлер в 1768 году - численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение этих и других методов численного решения до появления ЭВМ затруднялось большим объемом вычислений.

Одним из не многих примеров применения численных методов до появления ЭВМ можно назвать открытие У. Леверье в 1846 году планеты Нептун. Однако в большинстве случаев исследователи стремились избегать больших вычислений. Поэтому сложные математические модели, для которых не удавалось получить ответ в виде формул, либо вообще не рассматривались, либо упрощались с помощью дополнительных предположений. Упрощение модели снижало степень ее соответствия изучаемому объекту, делало результаты исследования объекта менее точными и, следовательно, менее интересными, а иногда и приводило к ошибкам.

Вычислительная способность ЭВМ за время их существования, порядка 70 лет, увеличилась в сотни и тысячи миллионов раз. Такого скачка производительности не было ни в одной сфере человеческой деятельности за всю история человечества.

Применение численных методов на базе ЭВМ сразу существенно расширило класс математических задач, допускающих исчерпывающий анализ. Теперь уже исследователю при построении математической модели какого-то объекта не нужно стремиться к сильным упрощениям, которые были необходимы раньше для получения ответа в явном виде. Его внимание, прежде всего, должно быть направлено на то, чтобы правильно учесть все наиболее существенные особенности изучаемого объекта и отразить их в математической модели. После того как модель построена, встает вопрос о разработке алгоритма решения соответствующей математической задачи и о его реализации на ЭВМ. Таким образом, ЭВМ изменили подход к применению математики как метода исследования. Они вызвали переориентацию многих сложившихся направлений математики и развитие ряда новых.

Сегодня ЭВМ является одним из определяющих факторов научно-технического прогресса. Их применение способствует ускорению развития ведущих отраслей народного хозяйства, открывает принципиально новые возможности проектирования сложных систем при значительном сокращении сроков их разработки и внедрения в производство, обеспечивает выбор оптимальных режимов производсвенно-технологических процессов, создает условия для совершенствования управления и повышения производительности труда. Если обычно машины брали на себя физические функции человека в процессе производства, то ЭВМ расширили его интеллектуальные возможности в умственной деятельности. Они являются одним из важных факторов превращения науки в непосредственную производительную силу нашего общества. Без ЭВМ не могли бы развиваться многие крупные научно-технические проекты (космические исследования, атомная энергетика, сверхзвуковая авиация и т.д.).

Благодаря ЭВМ идет интенсивный процесс математизации не только естественных и технических, но также и общественных наук, важное значение приобрело применение математических методов в экономике. Математическое моделирование начинает широко использоваться в химии, геологии, биологии, медицине, психологии, лингвистике. Большое внимание уделяется подготовке высококвалифицированных кадров, способных реализовать те огромные возможности, которые открывает эффективное использование ЭВМ.

1 История математики

Историю математического моделирования невозможно рассмотреть без изучения истории развития самой математики. Математическое моделирование как метод познания окружающего мира достаточно молод, но фундаментальные основы для него были заложены практически на всех периодах развития математики.

1.1 Начало развития математики

На ранних этапах развития математики четко прослеживалась грань между двумя направлениями: прикладным и теоретическим. Эти два направления взаимодействовали относительно слабо, можно даже говорить о двух почти автономных ветвях математики – о прикладной и о теоретической математике.

Математика Древнего Египта была больше прикладной, она была непосредственно связана с задачами землемерия, вычисления объемов сосудов, практического счета, исчисления времени и т.д. Такой же характер имела математика в Древней Мексике.

Теоретическая математика, по-видимому, возникла впервые в Древней Греции в связи с софистикой и отчетливо отделялась от прикладной. Древнегреческая наука выработала дедуктивный способ построения теории, согласно которому все утверждения в той или оной области выводятся с помощью методов формальной логики из некоторых, не доказываемых утверждений – аксиом. Этот способ изложения считается одной из характерных важнейших черт математики. Стройность дедуктивного способа произвела столь большое впечатление на последующие поколения, что были сделаны попытки (впрочем, безуспешные) придать и другим областям знания строго дедуктивную форму. Известна такая попытка даже в философии.

Архимед – ученый, которого и по сей день считают одним из самых математиков мира, в третьем веке до н.э. «боролся» против господствовавших в то время взглядов, предписывавших проводить резкую грань между теоретической математикой и математикой прикладной. Ни в одной книге Евклида (325 -265 до н.э.) нельзя найти вычисления площади какой-нибудь поверхности, потому что это относилось к геодезии, как называли тогда прикладную геометрию.

Нельзя найти там и арифметических вычислений, составлявших, по тогдашним представлениям и терминологии, «логистику», а не арифметику – подлинную наука, предметов которой была теория чисел.[2] Архимед придавал своим исследованиям практическую ориентацию. Он описал, как практически определять площади и объемы тел. Всем известны его технические изобретения: винт Архимеда, параболические зеркала, с помощью которых он поджег вражеский флот.

Архимед применял способ Антифона и Брисона для вычисления площади круга, считая, что вписанный в круг и описанный около круга правильные 96-угольники с достаточно хорошим приближение определяют длину окружности. Вычисляя величины сторон этих многоугольников для окружностей с различными диаметрами, он устанавливает следующее значение числа «Пи»:
$3{,}140 < \pi < 3{,}142.$

Еще одним представителем античной математике является Аполлоний Пергский (262-190 до н.э.), который в своих трудах ввел общую теорию эллипса, параболы и гиперболы и другие общеизвестные понятия геометрии.

Работы Архимеда и Аполлония завершают эпоху великих открытий древнегреческой математики.

1.2 Эпоха взаимосвязи теоретической и прикладной математики

Границы между теоретической и прикладной математики «стираются» в эпоху научного Возрождения – работы Галилео Галилея (1564-1642гг.), Иоганн Кеплера (1571-1630гг.) и других ученых, для которых математика становится одним из основных орудий естествознания.

Потребности, связанные с познанием природы, способствовали развитию математики. В 16-17 веках оба направления непрерывно взаимодействовали и развивали друг друга. В этот период многие понятия математики появлялись из задач естествознания или геометрии, после создания это понятие развивалось по внутренним математическим законам, некоторые из результатов теоретического развития вновь применялись в естествознании. Известным примером такого развития служит создание дифференциального и интегрального исчислений.

[2] Флорика Кымпан. История числа Пи. 216 с.

Галилей пропагандировал применение математических методов при изучении явлений природы и привел образцы такого применения. В его трудах можно увидеть гармонию эксперимента и теории, что является духом современной науки. В своих «Беседах» (1938 г.) Галилей пришел к математическому изучению движения, к зависимости между расстоянием, скоростью и ускорением.[3] Исследуя ускорение движения, Галилей вывел понятие мгновенное ускорение, как сумму всех приращений скорости тела, полученных телом с начала движения.

Иоганн Кеплер в 1609 г. публикует труд «Новая астрономия», в котором по результатам наблюдения за Марсом приводит два закона, впоследствии названные в честь него. Первый закон Кеплера гласит, что траектория движения Марса представляет собой не круг, а эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Второй закон Кеплера – радиус-вектор, соединяющий Марс и Солнце, в равное время описывает равные площади, т.е. чем дальше планета от Солнце, тем медленнее она двигается.

Во второй половине 17-ого века в работах двух гениев этого столетия – Ньютона (1642-1727 гг.) и Лейбница (1646-1716 гг.) появляются понятия и основы дифференцирования и интегрирования. Всему миру Исаак Ньютон известен как автор закона Всемирного тяготения. В работе «Математические принципы натурной философии» (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687 г.) содержится аксиоматическое построение механики и закон тяготения – закон, управляющий падением яблока на землю и движением Луны вокруг Земли. Установленный эмпирическим путем закон Кеплера о движении планет Ньютон вывел математическим путем.

Следующим гением в математике и естествознании можно назвать Леонарда Эйлера (1707-1783 гг.). Эйлера можно назвать самым плодовитым математиком своего времени, если только не всех времен. Во время жизни было опубликовано около 530 книг и статей, после смерти Петербургская академия наук публикует его многочисленные рукописи, что доводит число его работ до 770. Труды Эйлера охватывают все области математики того времени.

Одними из самых интересных трудов для методов математического моделирования являются «Дифференциальное исчисление» (Institutiones calculi differentialis, 1755 г.) и три тома «Интегральное исчисление» (Institutiones calculi Integralis, 1768-1774 гг.).

[3] Дирк Ян Стройк. Краткий очерк истории математики. 328 с.

В этих работах отражены вопросы не только элементарного дифференциального и интегрального исчисления, но и теория дифференциальных уравнений, теоремы Тейлора. В работе «Интегральное исчисление» приведен всем известный метод численного решения дифференциального уравнения, в последствии названый Методом Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (1)$$

В работах «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736 г.) и «Теория движения твердых тел» (1765 г.) Эйлер развивает аналитические методы ньютоновской динамики материальной точки. Большое внимание Эйлера было посвящено астрономии, в частности теории движения Луны, многие исследования в этой области были изложены в «Теории движения планет и комет» (Theoria motus planetarum et cometarum, 1774 г.).

Огромная продуктивность Эйлера была и остается поводом для изумления и восхищения каждого, кто пытался изучать его труды, - задача не столь трудная, как это кажется, так как латынь Эйлера очень проста и его обозначения почти современны, - пожалуй, было бы лучше сказать, что наши обозначения почти Эйлеровы![4]

Математики всегда признавали, что обязаны Эйлеру многим. «Читайте Эйлера, - обычно говорил молодым математикам Лаплас, читайте Эйлера, это наш общий учитель». Влияние Эйлера было исключительно велико. Прямых учеников у Эйлера было немного, но его труды были настольными в 18 веке и далеко за его пределами для всех творческих математиков, а работу многих он непосредственно направлял путем переписки. Методы, теории, задачи Эйлера продолжали вдохновлять творчество ученых на протяжении всего 19 века. Его математическое творчество в главном определялось глубокими связями между теоретическими и прикладными исследованиями, направленными на решение актуальных проблем естествознания и техники. Он внес вклад не только в разработку рациональной механики точки, твердого тела, жидкостей и газов, небесной механики и теории упругости, но и в проектирование и теорию реактивных гидротурбин, в теорию зубчатых передач, в совершенствование конструкций и методов расчета телескопов и микроскопов, в корабельное дело, в черчение географических карт и т.д. В задачах физики и техники Эйлер с великим искусством выделял собственно математическое содержание и затем переходил к разработке приемов, позволяющих найти подходящее для практики числовое

[4] Дирк Ян Стройк. Краткий очерк истории математики. 328 с.

значение задачи. При всем многообразии интересов Эйлера центральное место в них принадлежит анализу. Из 30 томов математической серии его собрания сочинений 19 отведено анализу, за этим идут теория чисел (4 ½ тома), геометрия (4 тома), алгебра (1 ½ тома) и комбинаторика с теорией вероятностей (1 том). По мимо отдельных приемов и формул, мы обязаны Эйлеру основанием нескольких больших дисциплин, которые лишь в зачаточной форме существовали ранее: теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и с частными производными, вариационного исчисления, элементарной теории функций комплексного переменного. И он же положил начало теории суммирования рядов, разложениям функций в тригонометрические ряды, теории специальных функций и отдельных интегралов, дифференциальной геометрии поверхностей и, наконец, теории чисел, как особой науке.

Эйлер уступал в построении обобщающих концепций более молодому Жозефу Луи Лагранжу (1736 - 1813), который ярче отразил в своей теории аналитических функций и аналитической механике духовные устремления эпохи просвещения, в других сферах мышления приведших к созданию новых больших философских, исторических, социально - политических систем. Лагранж во многом непосредственно следовал за Эйлером, углубляя и совершенствуя его методы и концепции.

Поиски общих алгоритмов, методов и концепций, накопленных и переработанных исторических материалов, становятся основным направлением творчества Лагранжа. Творчество Лагранжа нашло яркое выражение в его трудах по вариационному исчислению, аналитической механике, теории аналитических функций, а также и по алгебре.

Лагранж принял участие в разработке одной из основных проблем своего времени, теории движения Луны. Он дал первые частные решения задачи трех тел. Теорема Лагранжа утверждает, что можно найти такое начальное положение трех тел, при котором их орбитами будут подобные эллипсы, описываемые за одно и тоже время (1772 г.). В 1767 г. появился его мемуар “О решении численных уравнений” (Sur la resolution des equations numeriques), в котором он изложил методы отделения вещественных корней алгебраического уравнения и их приближенного вычисления с помощью непрерывных дробей. За этим в 1770 г. последовали “Размышления об алгебраическом решении уравнений” (Reflexions sur la resolution algebrique desequations), в которых рассматривается основной вопрос, почему те методы, которые позволяют решать уравнение четвертой степени, ничего не дают для степени, большей четырех.

Вторую часть своей жизни Лагранж посвятил созданию больших трудов: “ Аналитической механики ”(Mecanique analytique. 1788г.), “Теории аналитических функций” (Theorie des fonctions analytique,. 1797г.) и ее продолжения – “Лекции по исчислению функций” (Lecons sur le calcul des fonctions. 1801 г.). Обе книги по теории функций являются попыткой подвести надежный фундамент под анализ, сведя его к алгебре.

‘”Аналитическая механика” Лагранжа – наиболее ценный его руд. В этой книге вся мощь усовершенствованного анализа использована в механике точек и твердых тел. Результаты математиков восемнадцатого века здесь обработаны и развиты с единой точки зрения. Благодаря полному использованию вариационного исчисления самого Лагранжа оказалось возможным объединить различные принципы статики и динамики, в статике – путем использования принципа виртуальных скоростей, в динамике – принципа Даламбера. Это естественным образом привело к обобщенным координатам и к уравнениям движения в их лагранжевой форме :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=F_i \qquad (2)$$

Еще одним из ведущих математиков восемнадцатого века является Пьер Симон Лаплас (1749-1827). Двумя большими трудами Лапласа, в которых дана сводка не только его исследований, но и всех предыдущих работ в соответствующих областях, являются “Аналитическая теория вероятностей” (Theorie analytique des probabilities, 1812г.) и “Небесная механика” (Mecanique celeste, 1799-1825 гг., 5 тт.). Обоим монументальным произведениям, сопутствовали развернутые популярные изложения, “Философский опыт относительно вероятностей” (Essai philosophique sur les probabilities, 1824 г.) и “Изложение системы мира” (Exposition du systeme du monde, 1796 г.).

В “Изложение” содержит гипотезу о происхождении Солнечной системы из постепенно охлаждающейся туманности под действием е вращения – гипотеза, близкая к космогонической гипотезе, гораздо менее удовлетворительно развитой ранее Кантом (1755 г.).

В гигантской пятитомной “Небесной механике”, которую он публиковал на протяжении четверти века, Лаплас подвел итоги как собственным исследованиям в этой области, так и трудам своих предшественников, начиная с Ньютона. Он дал глубокий анализ всех известных движений тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения и доказал ее устойчивость в смысле практической неизменности средних расстояний планет от Солнца и незначительности колебаний остальных элементов их орбит. Наряду с массой специальных результатов, касающихся движений отдельных планет, спутников и комет, фигуры планет, теории приливов и т.д., важнейшее значение имело общее заключение, опровергашее мнение, что поддержание настоящего вида Солнечной системы требует вмешательства каких-то посторонних сверхъестественных сил. Термин “уравнение Лапласа”

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \qquad (3)$$

напоминает нам о том, что одной из частей “Небесной механики” является теория потенциала. (Само это уравнение было найдено Эйлером в 1752 г. при выводе некоторых основных уравнений гидродинамики).

Работы Лапласа по теории вероятностей в XVIII веке охватывают 1774 - 1786 гг. “Философский опыт относительно вероятностей” – это легко читающееся введение в теорию вероятностей. Оно содержит лапласово “отрицательное” определение вероятности с помощью “равновероятных событий”: “Теория вероятностей состоит в сведении всех событий одного и того же рода к некоторому числу равновероятных случаев, т. е. случаев, относительно осуществления которых мы в раной мере не осведомлены, и в определении числа тех случаев, которые благоприятны для события, вероятность которого мы ищем”.

Вопросы, касающиеся вероятностей, согласно Лапласу возникают потому, что мы частично осведомлены, частично нет. Установление статистической значимости расхождений между эмпирическими данными, а также задача о влиянии того или иного фактора на исследуемый признак явились важнейшими задачами математической статистики со второй половины 19 века.

В “Исследованиях об интегрировании дифференциальных уравнений в конечных разностях и об их применении к теории случаев ” (Recherches sur l’’integration des equations differentielles aux differences finies, et sur leur usage dans la theorie des hazards. Mem. Ac. Paris, (1773) 1776) Лаплас по существу дал сборник решения теоретико-вероятностных задач при помощи уравнений в конечных разностях.

Впервой книге “Аналитическая теория” подробно освещается теория производящих функций одной и двух переменных, вычисление интегралов и решение конечно-разносных уравнений. Во второй книге даются основы собственно теории вероятностей в применении к дискретным случайным величинам, доказательство предельных теорем Муавра – Лапласа и приложения теории вероятностей к математической обработке наблюдений, статистике народонаселения и “нравственным наукам”. Работами Лапласа завершился классический этап развития теории вероятностей. Были доказаны первые предельные теоремы, широко применялись конечно-разностные уравнения и способы приближенного вычисления определенных интегралов. В качестве вспомогательного средства начало допускаться интегрирование функций комплексного переменного.

1.3 Дальнейшее развитие прикладной математики в 19 веке

В 19 веке на смену вольному полету мысли пришла пора повышенной строгости, доказательности, чёткого обоснования применяемых методов, пересмотра оснований и укрепления фундамента всей математики. И это, разумеется, не исключало смелости мысли, а предполагало её.

В начале 19 веке происходит новое значительное расширение области приложений математического анализа. Если до этого времени основными отделами физики, требовавшими большого математического. аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика. Получают широкое развитие важнейшие разделы механики непрерывных сред, из которых только гидродинамики несжимаемой идеальной жидкости была создана еще в 18 веке Д. Бернулли, Л. Эйлером, Ж. Д'Аламбером и Ж. Лагранжем. Быстро растут и математические. запросы техники. В начале 19 века — эти вопросы термодинамики паровых машин, технической, механики, баллистики. В качестве основного аппарата новых областей механики и математической физики, усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений с частными производными и особенно теория потенциала. В этом направлении работает большинство крупных аналитиков начала 19 веке — К. Гаусс, Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, П. Дирихле, Дж. Грин, М.В. Остроградский.

И самым первым на строгую ревизию двухтысячелетней давности постулатов Евклида «со всеми их первобытными недостатками» пошел «Коперник геометрии» Лобачевский, идеи которого обрели силу, к великому сожалению, только после его смерти. То же случилось и с гениальными провидцами Абелем и Галуа, не дожившими до триумфа своих идей, затрагивающих самые основания математики и открывающих ей новые пути в будущее.

Среди этих пионеров борьбы за строгость и чистоту математики, рядом с именами Гаусса, Вейерштрасса, Чебышёва и его учеников Ляпунова и Маркова, девизом которых была «строгость, строгость и строгость», мы с благодарностью называем имя выдающегося французского учёного Огюстена Луи Коши (1789-1857), великого труженика, по продуктивности сравнимого разве что с Эйлером или с Бальзаком, написавшим 90 томов «Человеческой комедии».

О продуктивности Коши-математика свидетельствует целый ряд терминов, определений и понятий, вошедших в науку, таких, как признак Коши, критерий Коши, задачи Коши, интеграл Коши, уравнения Коши–Римана и Коши–Ковалевской, относящиеся к разным разделам математического анализа, математической физики, теории чисел, и других дисциплин. Всего же он написал 700 работ (по другим источникам 800), с неимоверной легкостью переходя от одной области научного знания к другой.

Между тем, именно та быстрота, с которой Коши переходил от одного предмета к другому, дала ему возможность проложить в науке множество новых путей. В геометрии он обобщил теорию многогранников, дал новый способ исследования поверхностей второго порядка, дал интересные исследования касания, выпрямления и квадратуры кривых и установил правила приложения анализа к геометрии. В анализе Коши первый усмотрел огромное значение мнимого переменного и возможность его геометрического представления, дал новые формулы конечных разностей для интерполирования, в своих работах об определенных интегралах он дал основание для многих последующих работ по двоякопериодическим функциям, положил основания теории подстановок, дал прочные основания теории сходимости рядов, нашел правило для определения числа корней уравнения между данными пределами, дал способ интегрирования уравнений с частными производными. В механике заменил понятие о непрерывности материи понятием о непрерывности геометрических переменных, исследовал движение световой волны в условиях двойного преломления, дал знаменитую теорию волн на поверхности тяжелой жидкости. В физике дал общее уравнение движения светового эфира, установил законы преломления и отражения, не прибегая к сомнительным гипотезам. В астрономии дал новый способ вычисления движения планет.

В области теории дифференциальных уравнений Коши принадлежат: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных уравнений (задача Коши), основные теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных и метод интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка.

Задача Коши - одна из основных задач теории дифференциальных уравнений состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям.

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие). Этим мотивируется терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $t = 0$, а решение отыскивается при $t > 0$.

2 Методы решения задачи Коши

Рассматривая историю математического моделирования нельзя не обратить внимание на историю развития задачи Коши. Задача Коши, как упоминалось выше, является центральной задачей в теории дифференциальных уравнений, так как позволяет найти численное решение дифференциальных уравнений.

Изучая какие-либо физические явления, создается их математическое описание или математические модели. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений или систем уравнений. Например, такими оказывается модели различных явлений механики сплошной среды, теплопереноса, механики твердых тел и т.д.

1. Как упоминалось выше, одним из первых методов численного решения задачи Коши предложил Леонард Эйлер в 1768 году.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (4)$$

2. Другой метод решения задачи Коши предложил Джон Адамс. С 1841 года английский астроном и математик Джон Адамс занимался вопросом объяснения «неправильной» траектории движения планеты Уран.

Принял решение… приступить как можно скорее после получения степени к исследованию неправильностей в движении Урана, которые ещё до сих пор не объяснены. Моя цель — установить, можно ли их приписать действию не обнаруженной ещё планеты за Ураном, определить приближенно элементы её орбиты и пр., что приведет, вероятно, к открытию планеты.[5] Вот как писал Адамс о своем решении заняться изучением движения Урана и поиске новой планеты.

В 1855 году Адамсом опубликовал свой метод численного решения задачи Коши, который впоследствии был назван его именем.

[5] Гребеников Е.А., Рябов Ю. А. Поиски и открытия планет. 224 с.

Метод Адамса второго, третьего и четвертого порядков, соответственно:

$$y_{i+1} = y_i + {h\big(3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\big)}\Big/_{2} \qquad (5)$$

$$y_{i+1} = y_i + {h\big(23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})\big)}\Big/_{12} \qquad (6)$$

$$y_{i+1} = y_i + {h\big(55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})\big)}\Big/_{24} \qquad (7)$$

Для решения уравнений методом Адамса требуется знание одной или более предыдущих точек интегрирования. Для нахождения этих значениях можно использовать метод Эйлера.

Преимущество метода Адамса перед методом Эйлера является его лучшая устойчивость и меньшая погрешность при одном и том же шаге интегрировании.

3. Около 1900 года два немецких математика Карл Рунге и Мартин Вильгельм Кутта предложили метод, названный впоследствии их именами.

$$y_{i+1} = y_i + {h(K1_i + 2K2_i + 2K3_i + K4_i)}\Big/_{6} \qquad (8)\text{ , где}$$

$$K1_i = f(x_i, y_i);$$

$$K2_i = f\left(x_i + {h}/_{2}, y_i + {K1_i}/_{2}\right);$$

$$K3_i = f\left(x_i + {h}/_{2}, y_i + {K2_i}/_{2}\right);$$

$$K4_i = f\left(x_i + {h}/_{2}, y_i + {K3_i}/_{2}\right).$$

Эти метод является модифицированным и усовершенствованным методом Эйлера.

В последствии в начале 20 века были созданы и другие методы решения задачи Коши, например метод Эйлера-Коши и метод Милна, относящиеся к, так называемым, методам прогноза и коррекции.

Без использования методов Эйлера, Рунге-Кутта, Адамса и др. для решения задачи Коши нельзя представить математическое моделирование какого-либо физического процесса.

3 Этапы вычислительного эксперимента

Бурное развитие ЭВМ привело к широкому распространению математического моделирования, как способа изучения физических и других явлений. Теоретические исследования процессов с помощью метода математического моделирования получили название вычислительный эксперимент. Основой вычислительного эксперимента является теоретическая база – прикладная математика, а техническая – мощные ЭВМ.

Технологический цикл вычислительного эксперимента в настоящее время принято разделять на пять этапов:

- построение физической, а потом математической модели изучаемого процесса и определение области применения данной модели;
- разработка метода расчета данной математической задачи – вычислительного алгоритма;
- создание программы для реализации разработанного алгоритма на ЭВМ;
- проведение расчетов на ЭВМ;
- обработка результатов расчета и уточнение математической модели, при необходимости.

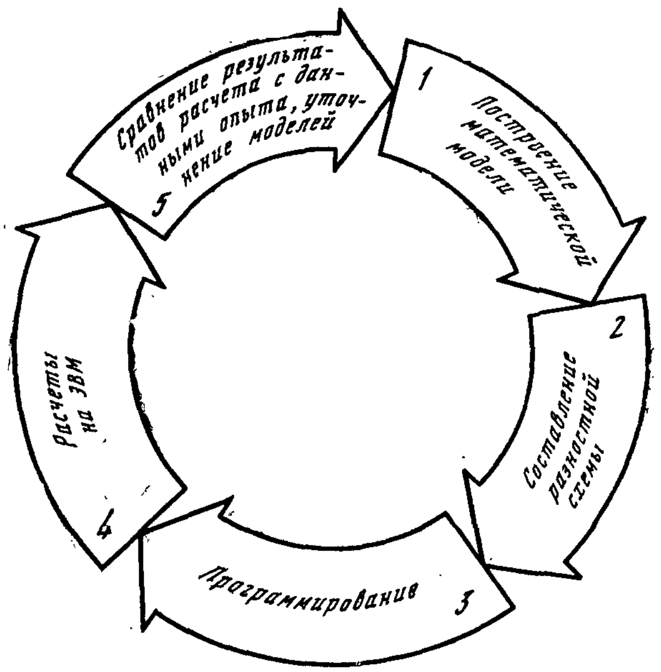

Рисунок 1. Схема технологического цикла вычислительного эксперимента

Рассмотри более подробно этапы вычислительного эксперимента.

Первый этап включает создание физической модели, фиксирующей разделения всех действующих в рассматриваемом явлении факторов на главные, которые учитываются, и второстепенные, которые на данном этапе отбрасываются. На основании этого формируются допущения и рамки применения модели, в которых будут справедливы полученные на ее основе результаты. Составленная физическая модель записывается в математических терминах и формулах, как отмечалось выше, это, как правило, дифференциальные уравнения. Создание математической модели, изучаемых процессов в настоящее время, из-за их сложности проводится объединенными усилиями специалистов в данной предметной области и математиков, представляющих себе уровень развития соответствующего раздела прикладной математики.

Второй этап вычислительного эксперимента представляет собой разработку метода расчета сформулированной математической задачи, или как говорят, вычислительного алгоритма. Вычислительный алгоритм представляет собой последовательность цепочек алгебраических формул, на основе численных методов решения уравнений, по которым ведутся вычисления, и логических условий, позволяющих установить нужную последовательность применения этих формул.

Вопросами определения лучшего алгоритма для решения уравнений составляющих математическую модель занимается теория численных методов — раздел вычислительной математики, который стал особенно интенсивно развиваться с появлением ЭВМ.[6]

Целью этой теории является создание эффективных методов решения поставленной задачи с заданной точностью за минимальное количество действий (арифметических, логических), т.е. с минимальными затратами машинного времени.

Производительность ЭВМ постоянно растет в геометрической прогрессии, не специалист может сказать, что с наличием современных ЭВМ не требуется большое внимание эффективным численным методам. Потребности исследователей превышает предложения, которые исходят от создателей ЭВМ. Стремительное развитие науки и техники вызывает быстрый рост сложности задач, которые они ставят перед прикладной математикой.

---

[6] А.А. Самарский. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиции математического моделирования. – 176 с.

Третьим этапом вычислительного эксперимента является создание программы для реализации разработанного алгоритма на ЭВМ. На этом этапе начинается «тесное» общение между человеком и машиной. В начальный период существования ЭВМ математические и логические действия разбивались на отдельные операции: сложить, разделить, сравнить и т.д., которые программировались отдельно. Единообразная работа занимала у программиста много рабочего времени и требовала большой аккуратности. Каждую ошибку или описку приходилось потом подолгу «вылавливать» в тестовых расчетах.[7]

Развитие языков программирования шло в сторону упрощения процесса диалога человека с машиной, в сторону создания языков программирования напоминающих естественное общение человека. В результате появились и постоянно появляются или усовершенствуются языки программирования, с помощью которых человек вести диалог с ЭВМ становится легче. Каждый язык программирования ориентирован на свои задачи и на свой тип ЭВМ.

Современное программирование — это уже не ремесло, где все определяется искусством и опытом исполнителя, а самостоятельная наука со своими фундаментальными принципами, подходами, методами.[8]

Четвертый этап – это проведение расчетов на ЭВМ. Этот этап вычислительного эксперимента наиболее похож на натурный эксперимент. Различие состоит в том, что в натурном эксперименте исследователь задает вопросы природе, а в вычислительном эксперименте исследователь с помощью ЭВМ ставит эти вопросы математической модели. В обеих случаях исследователь получает некоторую цифровую информацию, которую необходимо еще расшифровать проанализировать. В натурном эксперименте в некоторых случаях не удается непосредственно измерить или определить параметры процесса, приходится извлекать из косвенных данных. Во-вторых, точность измерения параметров процесса зависит от точности приборов, с помощью которых производится измерение. Вычислительный эксперимент позволяет определить любые параметры процесса, скорость изменения этих параметров. Точность этой информации определяется достоверностью самой математической модели. По этой причине в сложных прикладных исследованиях никогда не начинают вести полномасштабные расчеты сразу же после написания программы. В прочем это можно сказать для любой модели. Окончательным расчетам всегда предшествует

[7, 8] А.А. Самарский. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиции математического моделирования. – 176 с.

период проведения тестовых расчетов. Данные расчеты позволяют найти и исправить ошибки программирования алгоритма модели. Также эти расчеты позволяют выяснить, насколько адекватна составленная модель реальному процессу. Для этого проводят расчет в нескольких «контрольных» точках, в которых известны параметры натурного эксперимента. Сопоставление этих данных позволяет уточнить, при необходимости, математическую модель или убедится в ее адекватности.

После проведения вышеописанных работ с программой можно приступать к исследованию процесса с помощью математической модели в тех условиях, где натурный эксперимент не проводился или не возможен вообще.

Пятым этапом является работа по обработки результатов расчета, их всесторонний анализ и выводы. По результатам расчета становится ясна необходимость уточнения модели или результаты расчета пригодны к дальнейшему использованию и передачи в «работу». Как правило, эти две стороны очень тесно связаны, выясняются новые качественные формы протекания процесса, неожиданные режимы работы, в результате чего появляется необходимость уточнить модель. Математическая модель уточняется, усложняется и начинается новый цикл вычислительного эксперимента.

4 Открытия, сделанные методами математического моделирования

1. Классическим примером, который часто указывается в популярной литературе, является открытие планеты Нептун. Открытие было сделано математически, «на кончике пера». Урбен Жан Жозеф Леверье на основе данных «неправильности» орбиты Урана предположил, что возмущающим фактором является неизвестная планета, находящаяся за орбитой Урана. Леверье рассматривал математическую модель на основе закона всемирного тяготения Ньютона для трех тел – Солнца, Урана и неизвестной планеты. Над решением данной задачи Леверье работал около 2 лет, в 1845 году представил свои расчеты астраному Иоганну Галле.

Независимо от Леверье расчет орбиты неизвестной планеты вел Джон Адамс, который в том же году представил свои расчеты Кембриджской обсерватории.

2. В работах академика Алексея Николаевича Крылова, посвященных вопросам теории кораблей, приводятся математические модели конструкций кораблей, ставшие теоретической основой отечественного кораблестроения. По результатам моделирования строились первые русские крейсера. Математическое моделирование в этом случае имело ярко выраженную практическую направленность. Данные модели требовали большой вычислительной работы и совершенствование методов расчета. В 1911 году издана книга Крылова «Лекции о приближенных вычислениях», являющаяся первой в мире научной литературой по курсу численных методов.

3. Еще одним ярким примером применения математического моделирования до появления ЭВМ стало решение вопроса появления «флаттера». Во время экспериментальных полетов самолетов в предвоенные годы на некоторых критических режимах неожиданно возникали резкие вибрации конструкции самолета, и машина разваливалась в воздухе на части, данное явление получило название «флаттер». Причина вибраций и последующего разрушения конструкции является явление резонанса, в результате которого колебания неудержимо нарастают и превышают предельно допустимые. Экспериментальные данные, полученные из экспериментов в аэродинамической

трубе, не позволяли решить данную проблему. Применение математического моделирования позволило количественно оценить явление.

Одним из основных авторов теории флаттера был сотрудник Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) Мстислав Всеволодович Келдыш, впоследствии академик, трижды Герой Социалистического Труда, Президент Академии наук СССР.

Элементы конструкции самолета представляют собой системы с бесконечным числом степеней свободы. Для вычисления собственных частот таких систем требуется построение надежной и эффективной математической модели, но в тоже время простой, пригодной для расчета. Такую модель удалось построить Келдышу, с ее помощью были созданы надежные практические методы борьбы с опасным явлением. Данная работа дала начало новому разделу в теоретической математике.

Как уже отмечалось, сложность математической модели определяется сложностью исследуемого процесса, а с другой стороны – точностью, предъявляемой к результатам. Сложность модели не должна превышать предел, определяемый возможностями математического аппарата, которым располагает исследователь. «Не тот настоящий механик, кто умеет составлять уравнение движения, а кто их составляет так, что они интегрируются» - эта фраза Николая Егоровича Жуковского хорошо отражает проблему нахождения «золотой середины» между сложностью модели и точностью.

Данное обстоятельство сдерживало применение математических моделей в науке и технике в те времена, когда приходилось решать вручную. Простые модели хорошо и быстро решались, но не удовлетворяли запросам практики, а сложные – требовали такого объема вычисления, что нельзя было их решить за короткий срок.

Адамс и Леверье решали задачу взаимного движения трех тел под воздействием силы всемирного тяготения, на которую понадобилось около двух лет. Но расчет оптимальной траектории полета космического корабля с Земли на Луну не мог быть решен в XIX веке, хотя для расчета используется та же математическая модель, но требуется значительно больший объем вычислений.

После появления ЭВМ в середине XX века использование математических моделей для расчета физических процессов стало повсеместно. Однако развитие производительности ЭВМ не успевает за «запросами» исследователей, так как предъявляемые требования к результатам расчета заставляют исследователей применять все более сложные математические модели. До настоящего времени слова Жуковского актуальны.

4. Послевоенные годы XX века необходимость в ядерном оружии и ракетной техники стимулировало бурное развитие методов, алгоритмов численного решения и ЭВМ. Большие объемы и небывалая сложность расчета задач атомной физики не могли быть проведены без применения ЭВМ. Исследования методом математического моделирования процессов распада атомного ядра позволили за достаточно короткий срок и при минимальном количестве натурных экспериментов ученым двух стран СССР и США создать не зависимо друг от друга ядерное оружие. (Первые испытания атомной бомбы: США - 1945 год, СССР – 1949 год.) Дальнейшее исследования в области контролируемого распада атомов урана дало возможность создания атомных электростанций. Первая в мире промышленная электростанция была запущена в 1954 году в СССР. Таким образом достижения человечества в области атомной физики и промышленности полностью обязано методу математического моделирования.

5. Еще одним интересным примером открытия сделанном на ЭВМ является обнаружение нового физического эффекта – эффекта Т-слоя. В 60-х годах 20 века в Институте прикладной математики АН СССР проводилось изучение с помощью методов математического моделирования возможности создания магнитогидродинамического генератора. Поток горячего газа, подаваемый под давлением через трубу, «выплескивается» в пространство между двумя параллельными пластинами. Растекаясь далее в радиальном направлении, он взаимодействует с магнитным полем, силовые линии которого Параллельны оси трубы. Возникает импульс тока.

Проведенные расчеты показали, что картина течения процесса была иной по сравнению с ожидаемой. Расчеты выявили образование горячего высокоэлектропроводного слоя газа на границе вакуума и газа. Результат ученым показался необычным, настолько противоречащим тому, что ожидалось исходя из здравого смысла, что заподозрили наличие в алгоритме дефекта. Искали ошибки, изменяли различные параметры, все ради того, чтобы уничтожить непонятный «счетный» эффект. Однако все было напрасно – высокотемпературный слой упорно возникал в расчетах. Постепенно пришло понимание, что это не ошибка математической модели, алгоритма, программы, а свойство изучаемой магнитногидродинамической модели течения плазмы.

Но ученым еще предстояло определить, является ли это результатом упрощенной математической модели или это физический эффект. В последствии стало ясно, что эффект Т-слоя - физический эффект, который не удавалось зафиксировать в натурном эксперименте из-за сложности повторения параметров эксперимента.

Комитет по делам открытий и изобретений проявил определенную смелость, создав прецедент и признав открытием чисто теоретическую работу. В 1968 году в государственном реестре под номером 55 появилось описание нового физического эффекта – эффекта Т-слоя. Свидетельства на открытия были выданы академику А. Н. Тихонову, докторам физико-математических наук Л. М. Дегтяреву, Л. А. Заклязьминскому, С. П. Курдюмову, В. С. Соколову, А. П. Фаворскому, П. П. Волосевичу, А. А. Самарскому. [5]

Через несколько лет и целенаправленные поиски позволили обнаружить эффект Т-слоя в натурном эксперименте.

6. Современные методы математического моделирования и производительность ЭВМ позволяют рассматривать и глобальные модели.

Под руководством академика Н.Н. Моисеевым в ВЦ АН СССР В.В. Александров и Г.Л. Стенчиков проводили математическое моделирование последствий ядерной войны. Результаты этого моделирования дали человечеству, в том числе и политикам, неопровержимые аргументы против ядерной войны, даже так называемой «ограниченной ядерной войны».

Открытия, сделанные на основе вычислительного эксперимента, все чаще встречаются в настоящее время. В последние годы многие Нобелевские премии в области физики, химии, медицины были присуждены работам, основу которым составляло математическое моделирование.

Заключение

Взаимосвязь теоретической и прикладной математики отчетливо проявляется в эпоху научного Возрождения. В этот период были заложены многие основы, без которых нельзя представить современную прикладную математику. Дальнейшее развитие математики тесно связано с необходимостью математически описывать явления природы открываемые человечеством, например нельзя описать движение тел без теории дифференциального и интегрального исчисления.

Как уже упоминалось, создания ЭВМ привело к интеллектуальной революции, по значимости большую, чем промышленная революция, начавшаяся в 17 веке. Бурное развитие ЭВМ и методов математического моделирования во второй половине 20 веке привело к стремительному внедрению математического моделирования, как метода исследования объектов, практически во все области человечества, даже в такие, как биология, медицина, экономика и др.

Методы математического моделирования позволяют провести научные исследования, не отходя от ЭВМ, не ставить полномасштабный натурный эксперимент. Сейчас уже трудно представить какую ни будь область человеческой деятельности, где можно обойтись без применения методов математического моделирования и ЭВМ. Ни один натурный эксперимент в настоящее время не начинается без предварительного анализа с применением вычислительного эксперимента и обработкой полученных данных. Натурный эксперимент становится доказательством, подтверждением правильности математической модели примененной для расчета, изучения объекта.

Современный подход исследования законов природы нельзя представить без математического моделирования. На одной из старейших кафедр СПБГПУ «Теоретической механики» накоплен большой опыт применения вычислительного эксперимента.

На кафедре Теоретической механики накоплен большой опыт использования метода динамики частиц, применяемый для моделирования механики дискретных сред. Для обеспечения вычислительных экспериментов имеется два компактных супер-ЭВМ (КС-ЭВМ-1ТФ) производства Российского федерального ядерного центра - Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), одного из крупнейших институтов занимающихся математическим моделированием.

С 2003 года кафедра сотрудничает с Институтом геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского (ГЕОХИ РАН) в области изучения и создание математической модели на основе метода динамики частиц образования системы «Земля-Луна». В рамках данного проекта защищена кандидатская диссертация А.А. Ле-Захаровы, готовится к изданию книга «Разработка алгоритмов расчета столкновительной динамики гравитирующих частиц для моделирования образования системы Земля-Луна в результате гравитационного коллапса пылевого облака».

Список литературы

1. Андрюшин И.А., Чернышев А.К., Юдин Ю.А. Укрощение ядра. – Саров, 2003. – 481 с.

2. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: НАУКОВА ДУМКА, 1976. – 269 с.

3. Гребеников Е.А., Рябов Ю. А. Поиски и открытия планет. - 2-е изд., перераб и доп. - М.: НАУКА, 1984. – 224 с.

4. Дирк Ян Стройк. Краткий очерк истории математики. – М.: НАУКА, 1969. – 328 с.

5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: МИР, 1975. – 541 с.

6. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М.: НАУКА, 1989. – 688 с.

7. Самарский А.А.. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиции математического моделирования – М.: НАУКА, 1988. – 176 с.

8. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

9. Софронов И.Д. Математическое моделирование во ВНИИЭФ. Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 9(44). – М.: ЯНУС-К, 2005. – 265-281 с.

10. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 192 с.

11. Трусов П.В.. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие. – М.: ЛОГОС, 2005. – 440 с.

12. Флорика Кымпан. История числа Пи. – М.: НАУКА, 1971. – 216 с.

13. Юшкевич А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах. Том третий. Математика XVIII столетия. – М.: НАУКА, 1972. – 495 с.