

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., член-корр. РАН

_____ А.М.Кривцов
«___» _____ 2024 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
МАТЕРИАЛА С МИКРОСТРУКТУРОЙ**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с
микроструктурой

Выполнил

студент гр.5030103/00101

М.Д. Дёмин

Руководитель

доцент ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

П.М. Григорьева

Консультант

программист НОЦ

«Газпромнефть-Политех»

Д.М. Пашковский

Санкт-Петербург

2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШТМиМФ
А.М. Кривцов
«___» _____ 2024 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Дёмину Матвею Дмитриевичу, гр. 5030103/00101

1. Тема работы: Оценка эффективных механических характеристик материала с микроструктурой
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): постановка задачи определения эффективных механических характеристик материала с микроструктурой, описание подходов к моделированию материала с микроструктурой, решение задачи гомогенизации, определение эффективного предела текучести, анализ результатов, валидация на экспериментальных данных.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): отсутствует
6. Консультанты по работе: Пашковский Д.М., программист Научно-образовательного центра «Газпромнефть-Политех»
7. Дата выдачи задания: 28.02.2024

Руководитель ВКР _____ Григорьева П.М., доцент ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению 28.02.2024

Студент _____ Дёмин М.Д.

РЕФЕРАТ

На 50 с., 9 рисунков, 3 таблиц.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ДВУХФАЗНЫЙ МАТЕРИАЛ, ПОРИСТЫЙ МАТЕРИАЛ, СХЕМА МАКСВЕЛЛА, СХЕМА МОРИ-ТАНАКИ, ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА, ЭФФЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ ТЕКУЧЕСТИ

Работа посвящена определению эффективных механических свойств двухфазного материала. Для нахождения эффективных механических свойств материала решается задача гомогенизации. Во время решения в модели материала учитывается форма неоднородностей, их ориентация в материале, а также их взаимодействие посредством энергетических схем. В работе также рассматривается модель для определения предела текучести, учитывающая особенности микроструктуры материала. Результаты моделирования сравниваются с экспериментальными данными для пористого алюминия.

ABSTRACT

50 pages, 9 pictures, 3 tables.

KEYWORDS: TWO-PHASE MATERIAL, POROUS MATERIAL, MAXWELL SCHEME, MORI-TANAKA SCHEME, EFFECTIVE MECHANICAL PROPERTIES, EFFECTIVE YIELD STRENGTH

The work is devoted to determining the effective mechanical properties of a two-phase material. To find the effective mechanical properties of the material, the homogenization problem is solved. During solution, the material model takes into account the shape of inhomogeneities, their orientation in the material, and their interaction through energy schemes. The work also considers a model for determining the yield strength, taking into account the characteristics of the microstructure of the material. The simulation results are compared with experimental data for porous aluminum.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
ГЛАВА 1 Определение эффективных механических характеристик	9
1.1 Необходимые понятия	9
1.1.1 Общие свойства тензоров четвертого ранга	9
1.1.2 Изотропные тензоры четвертого ранга	10
1.1.3 Трансверсально-изотропные тензоры четвертого ранга	11
1.1.4 Тензор Грина	13
1.2 Эффективные свойства и микроструктурные параметры . .	14
1.2.1 Репрезентативный объем	14
1.2.2 Средние значения по объему и их связь с границей .	14
1.2.3 Микроструктурные параметры	17
1.3 Задача Эшелби	17
1.3.1 Первая задача Эшелби. Проблема включения (или собственной деформации)	17
1.3.2 Вторая задача Эшелби. Проблема неоднородности . .	19
1.4 Эффективные упругие свойства без учета взаимодействия неоднородностей	21
1.4.1 Эффективная упругость	21
1.4.2 Эффективная податливость	23
1.5 Эффективные упругие свойства с учетом взаимодействия неоднородностей	25
1.5.1 Схема Мори-Танаки	26
1.5.2 Схема Канауна-Левина	28
1.5.3 Схема Максвелла	29
1.5.4 Выбор формы области Ω	32
1.6 Учет разброса ориентаций неоднородностей	32
1.6.1 Функция распределения разброса ориентаций неоднородностей	33
1.6.2 Осреднение тензорного базиса	33

1.6.3	Осреднение эффективных характеристик с учетом взаимодействия между неоднородностями	34
ГЛАВА 2	Определение эффективного предела текучести	36
2.1	Необходимые понятия из теории пластичности	36
2.2	Оценка эффективного предела текучести двухфазного материала	37
ГЛАВА 3	Верификация математических моделей	41
3.1	Описание эксперимента по определению упругих модулей пористого алюминия	41
3.2	Верификация модели определения эффективных упругих модулей	42
3.3	Описание эксперимента по определению предела текучести .	45
3.4	Верификация модели определения эффективного предела текучести	47
	Заключение	48
	Список использованных источников	49

Введение

Во многих наукоемких сферах деятельности человека, таких как строительство, авиастроение и даже медицина, одной из основных задач является создание новых материалов, имеющих определенные свойства и особенности микроструктуры. Существуют различные подходы к созданию новых материалов. Например, в материаловедении происходит непосредственное создание новых образцов материалов, затем для них проводятся эксперименты и испытания, из которых и определяют свойства материалов. Однако этот процесс сопровождается, как правило, крупными производственными, временными и финансовыми расходами. Для оптимизации процесса разработки новых материалов предлагается создавать математические модели, которые на основе микроструктуры, помогали бы предсказывать эффективные характеристики создаваемых материалов.

Существует огромное количество математических моделей, позволяющих определить эффективные свойства неоднородного материала. Например, в работе [9] была предложена трехмерная конечно-элементная модель, позволяющая определить механические свойства пористого алюминия. Эта модель позволила учесть форму пор (сфера, эллипсоид, куб и параллелепипед) и оценить влияние формы на модуль Юнга рассматриваемого материала.

В работе [13] была продемонстрирована модель, аппроксимирующая неоднородный материал однородным. При этом модель не учитывала влияние неоднородностей друг на друга. Этот факт оказал серьезное влияние на расхождение экспериментальных данных с расчетными. Было показано, что при росте значений объемных долей, занимаемых неоднородностями, отклонение от экспериментальных данных становилось все более значительным. Для учета взаимного влияния неоднородностей могут быть использованы энергетические схемы. Сравнение моделей, использующих различные схемы учета взаимодействия неоднородностей, были продемонстрированы в работах [5], [10].

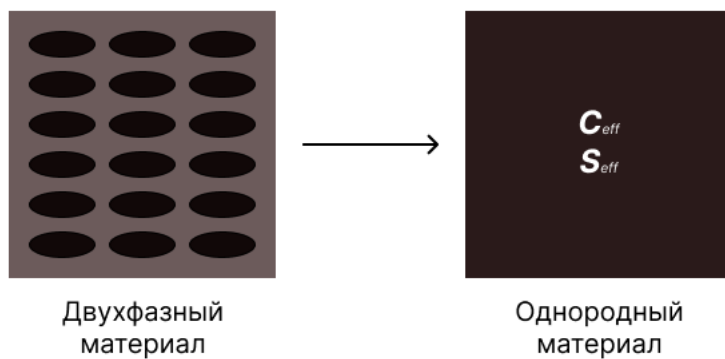
На базе этих моделей были построены и другие [14], позволяющие учитывать особенности разброса ориентации неоднородностей относительно их преимущественного направления. Учет формы неоднородностей в совокупности с учетом их преимущественного направления ориентации оказал

серьезное влияние на механические свойства материала. Так, например, было показано, что вертикальная ориентация неоднородностей приводит к увлечению модуля Юнга относительно горизонтального направления неоднородностей.

Основной целью работы является определение эффективных упругих модулей и предела текучести двухфазного материала с учетом особенностей микроструктуры. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- Подбор набора микроструктурных параметров;
- Выбор схемы учета взаимодействия неоднородностей;
- Решение задачи гомогенизации для двухфазного материала;
- Определение эффективного предела текучести;
- Верификация моделей на экспериментальных данных;

Для определения эффективных упругих модулей будет решаться задача гомогенизации для двухфазного материала, состоящего из изотропных матрицы и неоднородностей. В процессе решения этой задачи неоднородный материал аппроксимируется однородным материалом с анизотропными свойствами. Анизотропные свойства материала могут быть описаны тензорами эффективных упругих модулей и податливости. То есть в результате решения задачи гомогенизации будет получена тензорная функция, зависящая от конечного набора микроструктурных параметров, которые подробнее будут описаны в первой главе. Общая схема решения задачи гомогенизации может быть представлена следующим образом:



Для определения эффективного предела текучести будет использоваться подход, предложенный в работе [16] И. Севостьяновым и М. Качановым.

ГЛАВА 1

Определение эффективных механических характеристик

1.1 Необходимые понятия

1.1.1 Общие свойства тензоров четвертого ранга

Математические операции с тензорами четвертого ранга будут использоваться на протяжении всей работы. В силу этого необходимо определить, как можно представлять такие тензоры, какими свойствами они обладают, а также какие операции можно над ними производить.

Тензоры четвертого ранга, рассматриваемые в этой работе, будут обладать свойством симметричности. Следующее соотношение между компонентами тензора будет характеризовать его симметрию \mathbf{A} : $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$. Для некоторых тензоров, например, таких как тензор жесткости, симметрия будет подразумевать не только выполнение соотношения между компонентами, указанного выше, но и $A_{ijkl} = A_{klij}$. Любой тензор четвертого ранга, для компонент которого будут выполнены вышеуказанные соотношения, будет называться *симметричным*. Под антисимметричным тензором четвертого ранга будем понимать тензор со следующей связью между компонентами $A_{ijkl} = -A_{klij}$.

Определим операцию свертки (двойного скалярного произведения): $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}$ или в координатном виде $C_{ijkl} = A_{ijmn}B_{nmkl}$. Из симметричности тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} никоим образом не следует симметричность тензора \mathbf{C} . Только в случае, если свертка тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} является коммутативной, мы можем говорить о симметричности тензора \mathbf{C} , то есть $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$. Под коммутативностью будем понимать следующее соотношение: $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}$

Введем единичный тензор четвертого ранга \mathbf{I} . Этот тензор можно определить следующим образом: $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, т.е. в результате свертки тензора четвертого ранга с единичным тензором мы получаем сам тензор четвертого ранга. В компонентном виде тензор может быть представлен

$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, где символ Кронекера

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

Свертка единичного тензора с тензором второго ранга в результате даст симметричный тензор второго ранга (если тензор второго ранга был симметричным, свертка оставит его неизменным, если тензор имел антисимметричную часть - останется только симметричная).

Определим операцию транспонирования следующим образом: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ в случае симметричного тензора и $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ в случае антисимметричного тензора. В координатном виде эти соотношения представляются $A_{ijkl}^T = A_{klij}$ и $A_{ijkl}^T = -A_{klij}$, соответственно.

Транспонирование свертки: $(\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \cdot \mathbf{A}^T$.

Введем понятие обратного тензора. Тензор \mathbf{A} называется обратимым, если существует тензор \mathbf{A}^{-1} такой, что выполняется следующее равенство $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, следует отметить, если \mathbf{A} - симметричный тензор, то \mathbf{A}^{-1} также является симметричным.

Операции обращения и транспонирования переставимы: $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$.

Обращение свертки: $(\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \cdot \mathbf{A}^{-1}$

1.1.2 Изотропные тензоры четвертого ранга

Тензор называется изотропным, если он остается неизменным вследствие любого ортогонального преобразования \mathbf{Q} :

$$A_{ijkl}Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}Q_{sl} = A_{mnrst}$$

Любой изотропный тензор четвертого ранга может быть представлен в виде линейной комбинации двух базовых тензоров $\mathbf{\Lambda}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{E}\mathbf{E}$ и $\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_1$ следующим образом:

$$\mathbf{A} = a\mathbf{\Lambda}_1 + b\mathbf{\Lambda}_2$$

Следует отметить, что базовые тензоры обладают двумя свойствами: ортогональностью $\mathbf{\Lambda}_1 \cdot \cdot \mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{\Lambda}_2 \cdot \cdot \mathbf{\Lambda}_1 = 0$ и идемпотентностью $\mathbf{\Lambda}_i^2 = \mathbf{\Lambda}_i \cdot \cdot \mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{\Lambda}_i$, где $i = 1, 2$.

Данные свойства значительно упрощают операцию обращения $\mathbf{A}^{-1} = a^{-1}\mathbf{\Lambda}_1 + b^{-1}\mathbf{\Lambda}_2$ и свертывания $\mathbf{A}_1 \cdot \cdot \mathbf{A}_2 = a_1 a_2 \mathbf{\Lambda}_1 + b_1 b_2 \mathbf{\Lambda}_2$.

1.1.3 Трансверсально-изотропные тензоры четвертого ранга

Трансверсально-изотропным тензором четвертого ранга называется тензор невосприимчивый к преобразованиям \mathbf{Q} , представляющим из себя поворот относительно единичной оси $\mathbf{m} = m_i \mathbf{e}_i$. В этом случае плоскостями симметрии являются плоскость, проходящая через оси симметрии, и любая плоскость перпендикулярная оси симметрии.

В этом случае целесообразно использовать тензорный базис \mathbf{T}_i изотропных тензоров четвертого ранга. Это значительно упростит производимые нами вычисления. Любой трансверсально-изотропный тензор в этом базисе представим следующий образом:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^6 a_i \mathbf{T}_i \quad (1.1)$$

Все построения проводим на тройке векторов $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_s, \mathbf{m}$, причем $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_s \perp \mathbf{m}$.

Введем плоские части от единичных тензоров второго и четвертого рангов:

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{m}, \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s)$$

Вводим тензорный базис:

$$\mathbf{T}_1 = \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{T}_2 = \bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{2}\bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{T}_3 = \bar{\mathbf{E}}\mathbf{m}\mathbf{m}, \quad \mathbf{T}_4 = \mathbf{m}\mathbf{m}\bar{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{T}_5 = (\mathbf{m}\bar{\mathbf{E}}\mathbf{m})^s = \frac{1}{4}(\mathbf{e}_k \mathbf{m} \mathbf{e}_k \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{e}_k \mathbf{m} \mathbf{e}_k + \mathbf{m} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \mathbf{m} + \mathbf{e}_k \mathbf{m} \mathbf{m} \mathbf{e}_k)$$

$$\mathbf{T}_6 = \mathbf{m}\mathbf{m}\mathbf{m}\mathbf{m}$$

Укажем связь между компонентами тензора в тензорном базисе и базисе декартовой системы координат:

$$a_1 = \frac{1}{2}(A_{1111} + A_{1122}), \quad a_2 = 2A_{1212}, \quad a_3 = A_{1133}, \quad a_4 = A_{3311}$$

$$a_5 = 4A_{3131}, \quad a_6 = A_{3333}$$

Разложения некоторых тензоров:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{E}\mathbf{E} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 + \mathbf{T}_6, \quad \mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + 2\mathbf{T}_5 + \mathbf{T}_6$$

Наибольший интерес для нас будут представлять тензоры жесткости и податливости в законе Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

В случае изотропного материала тензор жесткости имеет следующий вид:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu \mathbf{I} = \sum_{i=1}^6 c_i \mathbf{T}_i$$

Он будет иметь следующие компоненты:

$$c_1 = \lambda + \mu = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{1}{2}(C_{1111} + C_{1122}), \quad c_2 = 2\mu = \frac{E}{1+\nu} = 2C_{1212},$$

$$c_3 = c_4 = \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = C_{1133}, \quad c_5 = 4\mu = \frac{2E}{(1+\nu)} = 4C_{1313},$$

$$c_6 = \lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = C_{3333}$$

Тензор податливости изотропного материала:

$$\mathbf{S} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{I} = \sum_{i=1}^6 s_i \mathbf{T}_i$$

Он будет иметь следующие компоненты:

$$s_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{1-\nu}{2E}, \quad s_2 = \frac{1}{2\mu} = \frac{1+\nu}{E}, \quad s_3 = s_4 = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{-\nu}{E},$$

$$s_5 = \frac{1}{\mu} = \frac{2(1 + \nu)}{E}, \quad s_6 = \frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Свойства свертки для тензорного базиса:

	\mathbf{T}_1	\mathbf{T}_2	\mathbf{T}_3	\mathbf{T}_4	\mathbf{T}_5	\mathbf{T}_6
\mathbf{T}_1	$2\mathbf{T}_1$	0	$2\mathbf{T}_3$	0	0	0
\mathbf{T}_2	0	\mathbf{T}_2	0	0	0	0
\mathbf{T}_3	0	0	0	\mathbf{T}_1	0	\mathbf{T}_3
\mathbf{T}_4	$2\mathbf{T}_4$	0	$2\mathbf{T}_6$	0	0	0
\mathbf{T}_5	0	0	0	0	$0.5\mathbf{T}_5$	0
\mathbf{T}_6	0	0	0	\mathbf{T}_4	0	\mathbf{T}_6

Свертка в тензорном базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = & (2a_1b_1 + a_3b_4)\mathbf{T}_1 + a_2b_2\mathbf{T}_2 + (2a_1b_3 + a_3b_6)\mathbf{T}_3 + \\ & + (2a_4b_1 + a_6b_4)\mathbf{T}_4 + \frac{1}{2}a_5b_5\mathbf{T}_5 + (a_6b_6 + 2a_4b_3)\mathbf{T}_6 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обратный тензор:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{a_6}{2\Delta}\mathbf{T}_1 + \frac{1}{a_2}\mathbf{T}_2 - \frac{a_3}{\Delta}\mathbf{T}_3 - \frac{a_4}{\Delta}\mathbf{T}_4 + \frac{4}{a_5}\mathbf{T}_5 + \frac{2a_1}{\Delta}\mathbf{T}_6 \quad (1.3)$$

$$\Delta = 2(a_1a_6 - a_3a_4)$$

1.1.4 Тензор Грина

Для дальнейших рассуждений необходимо ввести тензор Грина. В работе будут использованы материалы, которые при отсутствии неоднородностей были бы однородными (однородная матрица), для них тензор Грина зависит от разности $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$, где \mathbf{x} - радиус-вектор точки, в которой определяем поле, а \mathbf{x}' - радиус-вектор точки, находящейся внутри области.

В нашем случае тензор Грина позволяет найти поле перемещений неоднородности:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_V \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{f}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1.4)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}')$ - объемная сила, действующая по области V , занятой неоднородностью.

1.2 Эффективные свойства и микроструктурные параметры

В неоднородных материалах изменение полей деформаций и напряжений происходит на микроуровне. Таким образом эффективные свойства связывают не сами поля, а их осредненные по объему значения. В терминах упругости речь идет о связи между средними напряжениями и деформациями.

1.2.1 Репрезентативный объем

Репрезентативный объем должен представлять из себя достаточно крупный образец материала, который бы отражал всю информацию о его микроструктуре, важную для определения эффективных свойств. В то же время этот объем не должен быть слишком большим, чтобы макроскопические поля (при тех же нагрузках существующие в однородном материале) были бы незначительными по отношению к размерам репрезентативного объема.

Стоит понимать, что мы не всегда можем получить достоверную информацию об особенностях микроструктуры материала. Мы не можем наверняка предсказать форму неоднородностей, их расположение в материале, а также их количество. Поэтому наложение серьезных требований или ограничений к размеру репрезентативного объема не является целесообразным. К тому же если размер объема окажется слишком мал, можно всегда произвести осреднение по нескольким малым объемам.

1.2.2 Средние значения по объему и их связь с границей

Выразим средние значения по репрезентативному объему V и получим связь с значениями на границе.

Рассмотрим объем V как объединение двух объемов V_1 и V_2 , которые могут иметь отличные друг от друга свойства: $V = V_1 \cup V_2$.

Деформации:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \epsilon dV = \frac{1}{V} \int_{V_1} \epsilon dV + \frac{1}{V} \int_{V_2} \epsilon dV \quad (1.5)$$

Напряжения:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{V} \int_{V_1} \boldsymbol{\sigma} dV + \frac{1}{V} \int_{V_2} \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1.6)$$

Для начала рассмотрим случай изолированности неоднородностей (V_k) в матрице (V_m):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{V} \int_{V_m} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{V} \sum_k \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (1.7)$$

Перейдем к осредненным величинам деформаций по объемам матрицы и неоднородностей (нижний индекс in):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{V_m}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle + \frac{V_{in}}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in} \rangle \quad (1.8)$$

Аналогичное рассуждение можно провести для напряжений:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{V_m}{V} \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle + \frac{V_{in}}{V} \langle \boldsymbol{\sigma}_{in} \rangle \quad (1.9)$$

Рассмотрим некоторый объем (необязательно репрезентативный). Запишем закон Гука в двух формах, через тензор жесткости и тензор податливости:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}_a \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{S}_a \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (1.10)$$

В случае рассмотрения репрезентативного объема тензоры жесткости и податливости становятся эффективными.

Закон Гука не гарантирует симметричности тензоров жесткости и податливости. Свойство симметрии этих тензоров будет следовать из существования упругого потенциала. Чтобы была возможность использовать закон Гука в случае осредненных тензоров деформаций и напряжений необходимо потребовать совместимости осредненных величин с их определением через упругий потенциал. Линейный упругий потенциал имеет следующий вид:

$$2f(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.11)$$

Его осредненное по объему значение, с учетом выражения (1.11):

$$2\langle f(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle \quad (1.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$$

И для гарантированного выполнения выражений (1.11) необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.13)$$

называемого условием Хилла. Это условие позволит обеспечить симметрию тензора жесткости.

Перейдем к рассмотрению граничных условий.

1. Перемещения на границе объема.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\partial V} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{x}$$

\mathbf{x} - радиус-вектор, задающий положение, а $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ - деформация на границе объема, которая будет равна $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, при условии, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ - поле деформаций для однородного материала, свободного от внешних воздействий.

Используя условие Хилла, получаем:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.14)$$

2. Сила на границе объема.

$$\mathbf{t}|_{\partial V} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$$

\mathbf{n} - внешняя нормаль к поверхности объема, а $\boldsymbol{\sigma}_0$ - напряжение на границе объема, которая будет равна $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$, при условии, $\boldsymbol{\sigma}_0$ - поле напряжений для однородного материала, свободного от внешних воздействий.

Используя условие Хилла, получаем:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.15)$$

1.2.3 Микроструктурные параметры

Для количественного описания микроструктуры материала необходимо использовать некоторые параметры, которые бы содержали в себе информацию о интересующих нас физических свойствах материала. Как было отмечено ранее, анизотропные свойства материала могут быть описаны при помощи некоторой тензорной функции, зависящей от конечного числа параметров. Эти параметры и называются обобщенными микроструктурными параметрами. Они должны отражать в себе вклад в рассматриваемое физическое свойство со стороны отдельных неоднородностей, чтобы функция, представляющая это свойство, была однозначной.

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{F}(params)$$

В этой работе в качестве микроструктурных параметров будут использоваться:

- Объемная доля: $\varphi = \sum_i \frac{V_i}{V}$ - отношение объема, занимаемого одинаковыми неоднородностями, к объему всего материала.
- Физические свойства матрицы и неоднородностей: $\mathbf{C}_k = \lambda_k \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu_k \mathbf{I}$, где $k = \{0, i\}$ для матрицы и i -ой неоднородности соответственно
- Параметры формы неоднородности: a_i, b_i, c_i - геометрические размеры.
- Преимущественное направление неоднородностей, характеризуемое вектором преимущественной ориентации \mathbf{m} .

1.3 Задача Эшелби

Это задача об определении связи поля внутри неоднородности с полем на границе неоднородности.

1.3.1 Первая задача Эшелби. Проблема включения (или собственной деформации)

Включение, представляющее из себя область V_1 в бесконечном линейном упругом материале, подвергается заданной собственной деформации

$\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — (малой) деформации, которая существовала бы в V_1 воздействия со стороны окружающей среды. Собственная деформация не обязательно однородна в V_1 . Обычно она известна и, следовательно, рассматривается как заданная величина. Затем область V_1 упруго деформируется до исходной формы и вставляется обратно.

Алгоритм решения выглядит следующим образом [3]:

1. Включение вынимается из материала. После оно принимает такую форму Γ_* , которую бы имело включение в случае отсутствия напряжений. Относительно начального состояния произошла деформация.
2. Чтобы вернуть включение в свой исходный вид с границей Γ_0 с внешней нормалью \mathbf{n} , на ее поверхности необходимо приложить воздействие \mathbf{t}_* , соответствующее напряженному состоянию. $\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*$. То есть усилие на поверхности $\mathbf{t}_* = -\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{n}$
3. Вернем включение в материал, сохраняя усилие на границе Γ_0 . Чтобы вернуть включение в начальное состояние, необходимо компенсировать усилие на границе Γ_0 . В данном случае под компенсация означает, что на поверхности действует усилие $\mathbf{t}_{\Gamma_0} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{n}$

Представим усилия, как объемные силы с плотностью $\mathbf{f}_{\Gamma_0} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{\delta}_{\Gamma_0}$, где $\boldsymbol{\delta}_{\Gamma_0}$ - векторная дельта-функция, определяющаяся соотношением $\int_V \varphi(x) \boldsymbol{\delta}_{\Gamma_0} dV = \int_{\Gamma_0} \varphi(x) \mathbf{n} d\Omega$, где $\varphi(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция, называемаяся основной.

В итоге уравнение равновесия, с учетом закона Гука для сплошной среды $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{\Gamma_0} = 0 \quad (1.16)$$

Введем характеристическую функцию χ :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in V_1 \\ 0, & x \notin V_1 \end{cases} .$$

Учтем, что $\nabla \chi(x) = -\boldsymbol{\delta}_{\Gamma_0}$.

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot \mathbf{C} \chi(x) \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla \cdot \mathbf{C} \chi(x) \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* = f_{\Gamma_0}\end{aligned}\quad (1.17)$$

Вычислим перемещения, используя тензор Грина:

$$\mathbf{u}(x) = \int_V \mathbf{G}(x - x') \cdot \mathbf{f}_{\Gamma_0}(x') dV' = \int_V (\mathbf{G}(x - x') \nabla') \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*(x') dV' \quad (1.18)$$

С учетом, что собственные деформации одинаковы:

$$\mathbf{u}(x) = \int_V \mathbf{G}(x - x') \nabla' dV' \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (1.19)$$

Этот интеграл представляет собой функцию влияния области: в результате дает перемещения, порожденные одинаковым напряжением в области V' .

Нас интересует поле деформаций, в случае одинаковых собственных деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \left(\nabla \int_V \mathbf{G}(x - x') \nabla' dV' \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \right)^S \quad (1.20)$$

Введем тензор Хилла, который будет обладать симметрией по перестановке диад и компонент внутри диад. Такое свойство симметрии возникает из-за тензора Грина, который обладает идентичным свойством симметрии.

$$\mathbf{P} = \left(\nabla \int_V \mathbf{G}(x - x') \nabla' dV' \right)^S \quad (1.21)$$

Таким образом деформации принимают вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (1.22)$$

1.3.2 Вторая задача Эшелби. Проблема неоднородности

Область V_1 , называемая неоднородностью, обладает упругими свойствами, отличными от свойств окружающего материала. Последний подвергается

ется дистанционно приложенной нагрузке.

Теперь учтем, что мы рассматриваем двухфазный материал с отличными тензорами жесткости для однородной матрицы и неоднородности \mathbf{C}_0 и \mathbf{C}_1 соответственно. Закон Гука в этом случае:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{C}_0 + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)\chi(x)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{C}\chi(x)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.23)$$

Тогда уравнение баланса принимает следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)\chi(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot \Delta\mathbf{C}\chi(x) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (1.24)$$

Перемещения и деформации в этом случае описываются следующими равенствами:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) - \int_V \mathbf{G}(x - x') \nabla' \cdot \Delta\mathbf{C}(x') \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x') dV' \quad (1.25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(x) - \left[\nabla \int_V \mathbf{G}(x - x') \nabla' \cdot \Delta\mathbf{C}(x') \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x') dV' \right]^S \quad (1.26)$$

В обоих уравнениях первое слагаемое определяет поле для материала с отсутствующими неоднородностями, а второе - с их учетом.

Если собственные деформации будут одинаковыми и равными $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}$ в области V_1 , то выражение для поля деформаций можно переписать, используя тензор Хилла.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{in} \quad (1.27)$$

Введем тензор концентрации деформации:

$$\boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon = [\mathbf{I} + \mathbf{P} \cdot (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)]^{-1} \quad (1.28)$$

где $\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$

Введем тензор концентрации напряжений:

$$\boldsymbol{\Lambda}_\sigma = [\mathbf{I} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)]^{-1} \quad (1.29)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_0 \cdot \cdot \mathbf{P} \cdot \cdot \mathbf{C}_0$

Внутри области V_1 напряжения и деформации одинаковые при однородных граничных условиях. Таким образом мы можем выразить напряжения и деформации внутри области через внешне приложенную нагрузку.

Через тензор концентрации деформации может быть выражена деформация внутри неоднородности:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{in} = \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.30)$$

Через тензор концентрации напряжений может быть выражено напряжение внутри неоднородности:

$$\boldsymbol{\sigma}_{in} = \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.31)$$

1.4 Эффективные упругие свойства без учета взаимодействия неоднородностей

1.4.1 Эффективная упругость

Для начала будет рассмотрен простейший случай нахождения эффективной упругости без учета взаимодействия неоднородностей.

Пользуясь результатами полученными в пункте 1.3.2 и уравнением (1.10), с учетом рассмотрения репрезентативного объема, имеем следующий вид закона Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}_{eff} \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}_{eff} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.32)$$

Перепишем выражения (1.8) и (1.9) с учетом $V_m = V - \sum_i V_i$, $V_{in} = \sum_i V_i$:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{V - \sum_i V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle \quad (1.33)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{V - \sum_i V_i}{V} \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \langle \boldsymbol{\sigma}_{in}^i \rangle \quad (1.34)$$

Воспользуемся законом Гука для матрицы:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{C}_0 \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle$$

и неоднородности:

$$\boldsymbol{\sigma}_{in}^i = \mathbf{C}_i \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle$$

Подставим эти выражения в выражение (1.34):

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{C}_0 \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{C}_i \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle \quad (1.35)$$

Выражая из (1.33) деформацию матрицы и подставляя в (1.35), получаем:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}_0 \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle \quad (1.36)$$

Воспользуемся выражением (1.30) для деформаций внутри неоднородности, полученным в задаче Эшелби, тогда напряжение примет вид:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \left[\mathbf{C}_0 + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i \right] \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.37)$$

Сравнение выражение выше с выражением (1.32), получаем выражение для тензора эффективной жесткости:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i \quad (1.38)$$

Также следует отметить, что выражение (1.38) может быть преобразовано в случае, если неоднородности имеют одинаковую форму и упругие модули:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \varphi (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon \quad (1.39)$$

Здесь φ - объемная доля неоднородностей, а \mathbf{C}_1 - тензор жесткости неоднородностей.

Тензор упругих модулей в базисе \mathbf{T}_i примет вид:

$$\mathbf{C} = (\lambda + \mu)\mathbf{T}_1 + 2\mu\mathbf{T}_2 + \lambda\mathbf{T}_3 + \lambda\mathbf{T}_4 + 4\mu\mathbf{T}_5 + (\lambda + 2\mu)\mathbf{T}_6 \quad (1.40)$$

Рассмотрим неоднородность сфероидальной формы ($a_1 = a_2 = a$, a_3)
Тензор Хилла в тензорном базисе для сфероидальной неоднородности [5]:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^6 p_k(\gamma)\mathbf{T}_i, \quad \gamma = \frac{a_3}{a} \ll 1$$

Введем коэффициент k_0 :

$$k_0 = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \frac{1}{2(1 - \nu_0)}$$

Тогда тензор Хилла в базисе \mathbf{T}_i примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \frac{\pi(2 - k_0)\gamma}{16\mu_0}\mathbf{T}_1 + \frac{\pi(4 - k_0)\gamma}{16\mu_0}\mathbf{T}_2 + \frac{-\pi k_0\gamma}{8\mu_0}\mathbf{T}_3 + \frac{-\pi k_0\gamma}{8\mu_0}\mathbf{T}_4 + \\ & + \frac{1}{4\mu_0}\left(1 - \frac{\pi(1 + k_0)\gamma}{4}\right)\mathbf{T}_5 + \frac{1}{\mu_0}\left(1 - k_0 - \frac{\pi(2 - k_0)\gamma}{4}\right)\mathbf{T}_6 \end{aligned} \quad (1.41)$$

1.4.2 Эффективная податливость

Для начала будет рассмотрен простейший случай нахождения эффективной податливости без учета взаимодействия неоднородностей.

Пользуясь результатами полученными в пункте 1.3.2 и уравнением (1.10), с учетом рассмотрения репрезентативного объема, имеем следующий вид закона Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{S}_{eff} \cdots \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{S}_{eff} \cdots \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1.42)$$

Перепишем выражения (1.8) и (1.9) с учетом $V_m = V - \sum_i V_i$, $V_{in} = \sum_i V_i$:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{V - \sum_i V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle \quad (1.43)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{V - \sum_i V_i}{V} \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \langle \boldsymbol{\sigma}_{in}^i \rangle \quad (1.44)$$

Воспользуемся законом Гука для матрицы:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{S}_0 \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle$$

и неоднородности:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i = \mathbf{S}_i \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle$$

Подставим эти выражения в выражение (1.43):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{S}_0 \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{S}_i \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_{in}^i \rangle \quad (1.45)$$

Выражая из (1.44) напряжение матрицы и подставляя в (1.45), получаем:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{S}_0 \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_{in}^i \rangle \quad (1.46)$$

Воспользуемся выражением (1.31) для напряжений внутри неоднородности, полученным в задаче Эшелби, тогда деформация примет вид:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = [\mathbf{S}_0 + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\sigma^i] \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (1.47)$$

Сравнение выражение выше с выражением (1.42), получаем выражение для тензора эффективной податливости:

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\sigma^i \quad (1.48)$$

Также следует отметить, что выражение (1.48) может быть преобразовано в случае, если неоднородности имеют одинаковую форму и упругие модули:

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \varphi (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \quad (1.49)$$

Здесь φ - объемная доля неоднородностей, а \mathbf{S}_1 - тензор податливости

неоднородностей.

Тензор податливости \mathbf{S} в базисе \mathbf{T}_i имеет вид:

$$\mathbf{S} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathbf{T}_1 + \frac{1}{2\mu}\mathbf{T}_2 - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + \frac{1}{\mu}\mathbf{T}_5 + \frac{2(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\mathbf{T}_6 \quad (1.50)$$

Рассмотрим неоднородность сфероидальной формы ($a_1 = a_2 = a$, a_3)
Тензор \mathbf{Q} в тензорном базисе для сфероидальной неоднородности [5]:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^6 q_k(\gamma)\mathbf{T}_i, \quad \gamma = \frac{a_3}{a} \ll 1$$

Введем коэффициент k_0 :

$$k_0 = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} = \frac{1}{2(1 - \nu_0)}$$

Тогда второй тензор Хилла в базисе \mathbf{T}_i примет вид:

$$\mathbf{Q} = \mu_0\left(4k_0 - 1 - \frac{\pi(7k_0 - 2)\gamma}{4}\right)\mathbf{T}_1 + 2\mu_0\left(1 - \frac{\pi(4 - k_0)\gamma}{8}\right)\mathbf{T}_2 + \frac{\pi\mu_0(3k_0 - 1)\gamma}{2}(\mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4) + \pi\mu_0(2k_0 + 1)\gamma\mathbf{T}_5 + \pi\mu_0 k_0 \gamma \mathbf{T}_6 \quad (1.51)$$

1.5 Эффективные упругие свойства с учетом взаимодействия неоднородностей

В предыдущем пункте были получены выражения для нахождения эффективных тензоров жесткости и податливости без учета взаимодействия неоднородностей друг с другом. Цель этого пункта, получить выражения эффективных свойств, которые бы учитывали взаимодействия неоднородностей и позволяли бы получать корректные результаты даже при больших значениях объемной доли. Будут рассмотрены три схемы для учета взаимодействия:

1. Схема Мори-Танаки [12]

2. Схема Канауна-Левина [8]

3. Схема Максвелла [7]

1.5.1 Схема Мори-Танаки

Каждая неоднородность помещается в однородное поле, которое равно осредненному по объему матрицы полю.

Основная идея учета взаимодействия будет определяться следующим выражением:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle = \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle = \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{eff} \quad (1.52)$$

Вновь воспользуемся выражением (1.31), а также используем (1.52):

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \frac{V - \sum_i V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_m \rangle + \sum_i \frac{V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle = \\ &= \left[\frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{I} + \sum_i \frac{V_i}{V} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{eff} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Выразим из выражения (1.53) эффективную деформацию:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = \left[\frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{I} + \sum_i \frac{V_i}{V} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \right]^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.54)$$

Теперь найдем тензор напряжений, используя выражение (1.32) с учетом (1.53):

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \mathbf{C}_0 \cdot \left[\boldsymbol{\varepsilon}_0 - \sum_i \frac{V_i}{V} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle \right] + \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{C}_i \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle = \\ &= \mathbf{C}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{in}^i \rangle \end{aligned} \quad (1.55)$$

Используя (1.52), преобразуем (1.55) к следующему виду:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \left[\sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \right] \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{eff} \quad (1.56)$$

Осталось лишь использовать выражение (1.54) и получить конечный вид выражения для тензора напряжений:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \{ \mathbf{C}_0 + [\sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i] \cdot [\frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{I} + \sum_i \frac{V_i}{V} \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i]^{-1} \} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.57)$$

Сравнивая выражения (1.30) и (1.57), получаем выражения для эффективного тензора жесткости с учетом взаимодействия неоднородностей:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + [\sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i] \cdot [\frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{I} + \sum_i \frac{V_i}{V} \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i]^{-1} \quad (1.58)$$

Введем тензор вклада жесткости:

$$\mathbf{N}_i = (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^i \quad (1.59)$$

Тогда выражение (1.58) примет вид:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + [\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i] \cdot [\frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{I} + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0)^{-1} \cdot \cdot \mathbf{N}_i]^{-1} \quad (1.60)$$

В случае одинакового размера, формы и упругих модулей неоднородностей можно перейти к объемной доле неоднородностей φ :

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \varphi \mathbf{N} \cdot \cdot [(1 - \varphi) \mathbf{I} + \varphi (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)^{-1} \cdot \cdot \mathbf{N}]^{-1} \quad (1.61)$$

Введем тензор вклада податливости:

$$\mathbf{H}_i = (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\sigma^i \quad (1.62)$$

Тогда можно получить выражение для податливости аналогичное (1.60):

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + [\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{H}_i] \cdot [\frac{V - \sum_i V_i}{V} \mathbf{I} + \sum_i \frac{V_i}{V} (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0)^{-1} \cdot \cdot \mathbf{H}_i]^{-1} \quad (1.63)$$

В случае одинакового размера, формы и упругих модулей неоднород-

ностей можно перейти к объемной доле неоднородностей φ :

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \varphi \mathbf{H} \cdot \cdot [(1 - \varphi) \mathbf{I} + \varphi (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^{-1} \cdot \cdot \mathbf{H}]^{-1} \quad (1.64)$$

1.5.2 Схема Канауна-Левина

Идея этой схемы схожа с указанной в пункте 1.5.2.: помещаем изолированную неоднородность в однородное поле, которое будет являться эффективным, а также не будет пересекаться с другими зонами, окружающими неоднородности. Особенность этой схемы заключается в том, что она позволяет учитывать ориентацию неоднородности посредством использования характеристической функции, которая определяется некоторым статистическим распределением, и форму неоднородности (что понадобится нам в дальнейшем).

Эллипсоидальная форма области, в которую помещается изолированная неоднородность, имеющая некоторую ориентацию, будет определяться симметричным тензором второго ранга $\boldsymbol{\alpha}$.

Основное отличие этой схемы как раз заключается в этом тензоре $\boldsymbol{\alpha}$, появление которого преобразует выражение для эффективной деформации к следующему виду:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \cdot \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i]^{-1} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (1.65)$$

В этом уравнении $\mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha})$ - тензор Хилла для эллипсоидальной зоны, окружающей неоднородность, которая характеризуется тензором $\boldsymbol{\alpha}$.

Осредненный тензор напряжений находим из тех же соображений, что были использованы в предыдущем пункте, разница лишь в использовании формулы (1.65) вместо (1.54):

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \mathbf{C}_0 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \left[\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \right] \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = \\ &= \left\{ \mathbf{C}_0 + \left[\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \right] \cdot \cdot \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \cdot \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \right]^{-1} \right\} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

Сравнивая выражения (1.30) и (1.66), получим выражения для эффек-

тивного тензора жесткости:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \left[\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \right] \cdot \cdot \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \cdot \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \right]^{-1} \quad (1.67)$$

Выполним операцию свертки для двух множителей, обособленных квадратными скобками и получим следующее выражение для эффективного тензора жесткости:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \left[\left(\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \right)^{-1} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \right]^{-1} \quad (1.68)$$

Выражение для эффективного тензора податливости принимает вид:

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \left[\left(\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{H}_i \right)^{-1} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \right]^{-1} \quad (1.69)$$

В случае одинакового размера, формы и упругих модулей неоднородностей можно перейти к объемной доле неоднородностей φ :

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \left[(\varphi \mathbf{N})^{-1} - \mathbf{P}(\boldsymbol{\alpha}) \right]^{-1} \quad (1.70)$$

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \left[(\varphi \mathbf{H})^{-1} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \right]^{-1} \quad (1.71)$$

1.5.3 Схема Максвелла

В рассматриваемом материале выделяется некоторая большая область Ω , содержащая неоднородности, эффективная жесткость которой нам пока неизвестна. Затем производится расчет возмущения поля в некоторой удаленной точке, вызванный областью Ω , а также возмущение поля в этой же удаленной точке, вызванное невзаимодействующими друг с другом неоднородностями, вошедшими в область Ω .

В терминах тензоров вклада жесткости \mathbf{N}_{eff} области Ω и \mathbf{N}_i невзаимодействующих неоднородностей возмущение поля в удаленной точке можно описать следующим образом:

1. Влияние со стороны области Ω :

$$\frac{V_\Omega}{V} \mathbf{N}_{eff} \quad (1.72)$$

2. Влияние со стороны невзаимодействующих неоднородностей:

$$\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \quad (1.73)$$

Приравнивание двух этих величин дает следующее выражение:

$$\frac{V_\Omega}{V} \mathbf{N}_{eff} = \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{N}_i \quad (1.74)$$

Эффективный тензор вклада жесткости может быть найден в случае, если Ω имеет эллипсоидальную форму. Воспользуемся выражением (1.59) и (1.28), чтобы получить тензор вклада жесткости для области Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{eff} &= (\mathbf{C}_{eff} - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda}_\varepsilon^\Omega = (\mathbf{C}_{eff} - \mathbf{C}_0) \cdot \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{P}_\Omega \cdot \cdot (\mathbf{C}_{eff} - \mathbf{C}_0)]^{-1} = \\ &= [(\mathbf{C}_{eff} - \mathbf{C}_0)^{-1} + \mathbf{P}_\Omega]^{-1} \end{aligned} \quad (1.75)$$

\mathbf{P}_Ω - тензор Хилла области Ω .

Преобразуем выражение (1.74), используя эффективный тензор вклада жесткости (1.75):

$$\frac{V}{V_\Omega} [(\mathbf{C}_{eff} - \mathbf{C}_0)^{-1} + \mathbf{P}_\Omega] = V \left[\sum_i V_i \mathbf{N}_i \right]^{-1} \quad (1.76)$$

Тогда эффективный тензор жесткости, при условии эллипсоидальной формы области Ω :

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \left[\left(\frac{1}{V_\Omega} \sum_i V_i \mathbf{N}_i \right)^{-1} - \mathbf{P}_\Omega \right]^{-1} \quad (1.77)$$

В терминах тензоров вклада податливости \mathbf{H}_{eff} области Ω и \mathbf{H}_i невзаимодействующих неоднородностей возмущение поля в удаленной точке можно описать следующим образом:

1. Влияние со стороны области Ω :

$$\frac{V_\Omega}{V} \mathbf{H}_{eff} \quad (1.78)$$

2. Влияние со стороны невзаимодействующих неоднородностей:

$$\sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{H}_i \quad (1.79)$$

Приравнивание двух этих величин дает следующее выражение:

$$\frac{V_\Omega}{V} \mathbf{H}_{eff} = \sum_i \frac{V_i}{V} \mathbf{H}_i \quad (1.80)$$

Эффективный тензор вклада податливости может быть найден в случае, Ω имеет эллипсоидальную форму. Воспользуемся выражением (1.62) и (1.29), чтобы получить тензор вклада податливости для области Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{eff} &= (\mathbf{S}_{eff} - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot \mathbf{\Lambda}_\sigma^\Omega = (\mathbf{S}_{eff} - \mathbf{S}_0) \cdot \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{Q}_\Omega \cdot \cdot (\mathbf{S}_{eff} - \mathbf{S}_0)]^{-1} = \\ &= [(\mathbf{S}_{eff} - \mathbf{S}_0)^{-1} + \mathbf{Q}_\Omega]^{-1} \end{aligned} \quad (1.81)$$

\mathbf{Q}_Ω - тензор, определенный в (1.29) для области Ω .

Преобразуем выражение (1.80), используя эффективный тензор вклада жесткости (1.81):

$$\frac{V}{V_\Omega} [(\mathbf{S}_{eff} - \mathbf{S}_0)^{-1} + \mathbf{Q}_\Omega] = V \left[\sum_i V_i \mathbf{H}_i \right]^{-1} \quad (1.82)$$

Тогда эффективный тензор жесткости, при условии эллипсоидальной формы области Ω :

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \left[\left(\frac{1}{V_\Omega} \sum_i V_i \mathbf{H}_i \right)^{-1} - \mathbf{Q}_\Omega \right]^{-1} \quad (1.83)$$

Стоит отметить тот факт, что левая часть уравнений (1.77) и (1.83) предполагает учет взаимодействия неоднородностей друг с другом внутри области Ω , в то время как левая часть этих уравнения предполагает рассмотрение изолированных неоднородностей. Это несоответствие делает полученный результат чувствительным к выбору формы области Ω .

1.5.4 Выбор формы области Ω

Как было указано в предыдущем пункте, мы можем использовать только эллипсоидальную форму области Ω , иначе мы не сможем воспользоваться формулами (1.59) и (1.28). Также форма области Ω должна корректно отражать форму отдельных неоднородностей, их ориентацию и свойства.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда однородности одинаковые и имеют параллельную ориентацию.

Воспользуемся результатами работы МакКартни [11]: лучшая форма для нахождения эффективных свойств - это форма неоднородности, то есть: $\mathbf{P}_\Omega = \mathbf{P}$ или $\mathbf{Q}_\Omega = \mathbf{Q}$.

В таком случае выражение для эффективного тензора жесткости (податливости) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{eff} &= \mathbf{C}_0 + \varphi \{ (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)^{-1} + (1 - \varphi) \mathbf{P} \}^{-1} = \\ &= \mathbf{C}_0 + \varphi \{ (1 - \varphi) \mathbf{N}^{-1} + \varphi (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)^{-1} \}^{-1} \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{eff} &= \mathbf{S}_0 + \varphi \{ (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^{-1} + (1 - \varphi) \mathbf{Q} \}^{-1} = \\ &= \mathbf{S}_0 + \varphi \{ (1 - \varphi) \mathbf{H}^{-1} + \varphi (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^{-1} \}^{-1} \end{aligned} \quad (1.85)$$

Таким образом эффективный тензор жесткости (податливости) будет определяться исключительно формой неоднородностей и свойствами матрицы и неоднородностей. Также следует отметить, что в случае параллельно расположенных одинаковых неоднородностей схемы Максвелла и Канауна-Левина совпадают.

1.6 Учет разброса ориентаций неоднородностей

Как было отмечено в параграфе 1.2.3, эффективные свойства могут зависеть от преимущественного направления неоднородностей. В рассуждениях, проведенных в этой главе ранее, мы считали, что сфероидальные неоднородности имели одинаковое направление - параллельное. В этом параграфе мы учтем преимущественное направление неоднородностей и получим эффективные свойства материала, с учетом этой особенности.

1.6.1 Функция распределения разброса ориентаций неоднородностей

Как было отмечено ранее одним из микроструктурных параметров является вектор преимущественной ориентации \mathbf{m} . Дальнейшие рассуждения проводим в сферической системе координат. Единичный вектор \mathbf{m} направляем вдоль оси симметрии сфероидальной неоднородности. В этой системе координат используются два угла: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \theta \leq \pi$. Выражение для вектора \mathbf{m} в сферической системе координат имеет вид:

$$\mathbf{m}(\varphi, \theta) = \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \mathbf{e}_3 \quad (1.86)$$

Введем функцию ориентации неоднородностей. Это функция плотности вероятности, определенная на полусфере единичного радиуса Φ . Для этой функции должно выполняться условие нормировки:

$$\int_{\Phi} \Psi(\varphi, \theta) d\Psi = 1 \quad (1.87)$$

В рассматриваемом случае преимущественной ориентации, сопровождающейся случайным разбросом, подходит следующая плотность вероятности:

$$\Psi_{\lambda}(\varphi, \theta) = \Psi_{\lambda}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} [(\lambda^2 + 1)e^{-\lambda\varphi} + \lambda e^{-\lambda\frac{\pi}{2}}] \quad (1.88)$$

Параметр λ , являющийся неотрицательным, отвечает за преимущественное направление неоднородностей: при $\lambda = 0$ наблюдается случайное распределение направлений неоднородностей, при $\lambda \rightarrow \infty$ - параллельное направление неоднородностей.

1.6.2 Осреднение тензорного базиса

При преимущественном распределении сфероидальных неоднородностей по ориентациям для осреднения элементов тензорного базиса их необходимо проинтегрировать по поверхности полусферы Φ :

$$\langle \mathbf{T}_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi} \mathbf{T}_i d\Phi \quad (1.89)$$

После интегрирования в случае случайного распределения направлений ($\lambda = 0$) компоненты базиса примут вид:

$$\langle \mathbf{T}_1 \rangle = \frac{1}{15}(2\mathbf{I} + 6\mathbf{E}\mathbf{E}) = \frac{1}{15}(7\mathbf{T}_1 + 2\mathbf{T}_2 + 6\mathbf{T}_3 + 6\mathbf{T}_4 + 4\mathbf{T}_5 + 8\mathbf{T}_6)$$

$$\langle \mathbf{T}_2 \rangle = \frac{1}{15}(6\mathbf{I} - 2\mathbf{E}\mathbf{E}) = \frac{1}{15}(\mathbf{T}_1 + 6\mathbf{T}_2 - 2\mathbf{T}_3 - 2\mathbf{T}_4 + 12\mathbf{T}_5 + 4\mathbf{T}_6)$$

$$\langle \mathbf{T}_3 \rangle = \langle \mathbf{T}_4 \rangle = \frac{1}{15}(-2\mathbf{I} + 4\mathbf{E}\mathbf{E}) = \frac{1}{15}(3\mathbf{T}_1 - 2\mathbf{T}_2 + 4\mathbf{T}_3 + 4\mathbf{T}_4 - 4\mathbf{T}_5 + 2\mathbf{T}_6)$$

$$\langle \mathbf{T}_5 \rangle = \frac{1}{15}(6\mathbf{I} - 2\mathbf{E}\mathbf{E}) = \frac{1}{15}(\mathbf{T}_1 + 6\mathbf{T}_2 - 2\mathbf{T}_3 - 2\mathbf{T}_4 + 12\mathbf{T}_5 + 4\mathbf{T}_6)$$

$$\langle \mathbf{T}_6 \rangle = \frac{1}{15}(2\mathbf{I} + \mathbf{E}\mathbf{E}) = \frac{1}{15}(2\mathbf{T}_1 + 2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 + 4\mathbf{T}_5 + 3\mathbf{T}_6)$$

1.6.3 Осреднение эффективных характеристик с учетом взаимодействия между неоднородностями

1. Схема Мори-Танаки:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \varphi \langle \mathbf{N} \rangle \cdot \cdot [(1 - \varphi)\mathbf{I} + \varphi(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)^{-1} \cdot \cdot \langle \mathbf{N} \rangle]^{-1} \quad (1.90)$$

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \varphi \langle \mathbf{H} \rangle \cdot \cdot [(1 - \varphi)\mathbf{I} + \varphi(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^{-1} \cdot \cdot \langle \mathbf{H} \rangle]^{-1} \quad (1.91)$$

2. Схема Максвелла (Канауна-Левина) в случае совпадения форм области Ω и неоднородности:

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_0 + \varphi \left\{ (1 - \varphi) \langle \mathbf{N} \rangle^{-1} + \varphi (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0)^{-1} \right\}^{-1} \quad (1.92)$$

$$\mathbf{S}_{eff} = \mathbf{S}_0 + \varphi \left\{ (1 - \varphi) \langle \mathbf{H} \rangle^{-1} + \varphi (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0)^{-1} \right\}^{-1} \quad (1.93)$$

Таким образом для учета ориентаций неоднородностей в материале необходимо осреднить лишь два тензора: тензор вклада жесткости \mathbf{N} и тензор вклада податливости \mathbf{H} .

Осреднение этих тензоров сводится лишь к осреднению компонент тензорного базиса по формулам, приведенным в пункте 1.6.2:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle &= \sum_i n_i \langle \mathbf{T}_i \rangle, \\ \langle \mathbf{H} \rangle &= \sum_i h_i \langle \mathbf{T}_i \rangle \end{aligned} \quad (1.94)$$

Отметим тот факт, что любой симметричный тензор (коими и являются \mathbf{N} , \mathbf{H}), представленный в тензорном базисе может быть осреднен следующим образом:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \sum_i a_i \langle \mathbf{T}_i \rangle = \sum_i \hat{a}_i \mathbf{T}_i \quad (1.95)$$

Причем его компоненты \hat{a}_i находятся по формулам:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{15} (7a_1 + a_2 + 3a_3 + 3a_4 + 0.5a_5 + 2a_6)$$

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{15} (2a_1 + 6a_2 - 2a_3 - 2a_4 + 3a_5 + 2a_6)$$

$$\hat{a}_3 = \hat{a}_4 = \frac{1}{15} (6a_1 - 2a_2 + 4a_3 + 4a_4 - a_5 + a_6)$$

$$\hat{a}_5 = \frac{1}{15} (4a_1 + 12a_2 - 4a_3 - 4a_4 + 6a_5 + 4a_6)$$

$$\hat{a}_6 = \frac{1}{15} (8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 3a_6)$$

ГЛАВА 2

Определение эффективного предела текучести

Известно, что наличие неоднородностей приводит к изменению пластичности в упругопластических материалах (происходит уменьшение напряжений). При рассмотрении таких материалов необходимо учитывать особенности их микроструктуры: объемная доля неоднородностей, их форма и относительная ориентация. В этой главе будет найден предел текучести для рассматриваемого материала из условия пластичности представленного в работе [16].

2.1 Необходимые понятия из теории пластичности

Нагружение материала приводит к его деформации, при этом деформирование может быть как упругим, так и пластическим. Для построения математических моделей, описывающих процессы деформирования, важно понимать, когда происходит переход от упругих деформаций к пластическим. В случае одноосного нагружения этот переход определяется достижением напряжений характерного значения, называемого пределом текучести. В случае с многоосными нагружениями необходимо использовать понятие поверхности пластичности, которая определяется в пространстве напряжений (девиаторов напряжений). Компоненты соответствующих тензоров определяют точки этих пространств. В случае многоосного нагружения достижение поверхности пластичности соответствует началу пластического деформирования материала. В качестве меры напряженного состояния используется тензор напряжений (или его девиатор), поэтому уравнение поверхности пластичности определяется именно этим тензором:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{2.1}$$

В качестве условия для начала пластического течения может быть выбрано одно из двух: условие Треска или вон Мизеса. В пространстве на-

пряжений форма поверхности пластичности будет представлять из себя шестигранную призму при условии Треска и круговой цилиндр при условии вон Мизеса. Предпочтение будет отдано второму условию, так как в первом могут возникать особые точки при построении поверхности текучести. Условие начала пластичности вон Мизеса для изотропного материала:

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2} dev(\sigma) \cdot dev(\sigma)} - \sigma_T = 0 \quad (2.2)$$

В случае, когда поверхность пластичности не меняется при деформациях, модель материала называют идеальной упругопластической, то есть предел текучести является постоянной величиной. В этом случае поверхность пластичности называют поверхностью текучести.

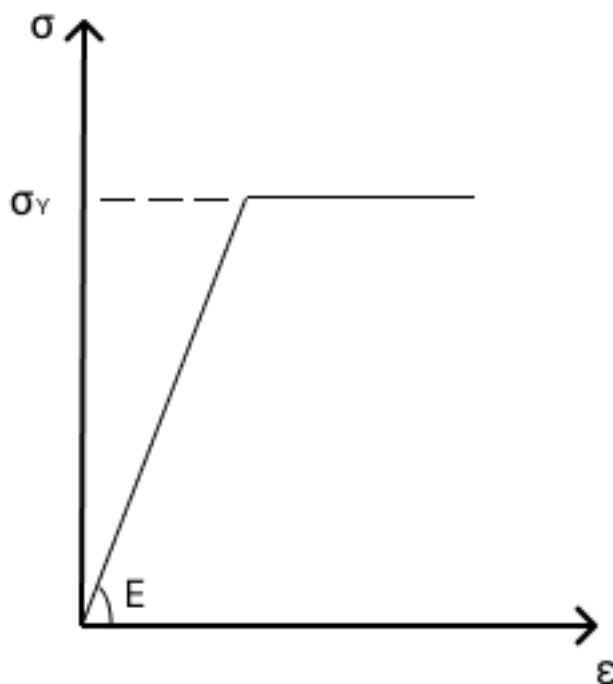


Рисунок 2.1 — Идеальное упругопластическое тело

2.2 Оценка эффективного предела текучести двухфазного материала

Появление неоднородностей в матрице приводит к увеличению девиатора деформаций. Однако начало пластического течения происходит при тех же значениях деформаций, что и у материала с отсутствующими неод-

нородностями (матрица). Наличие такого значения деформаций, позволяет сделать вывод о том, что матрица остается упругой вплоть до значений напряжений близких к пределу текучести. Возникновение неоднородностей приводит к снижению значений напряжений, как следствие, уменьшению предела текучести. Получение условия пластичности будет строится на предположении о том, что наличие неоднородностей в материале не влияет на значения деформаций, при которых начинается пластическое течение, но влияет на значения напряжений.

Макроскопические деформации могут быть выражены через напряжения посредством использования эффективного тензора податливости:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{S}_0 + \varphi\zeta\mathbf{H}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3)$$

Здесь $\zeta = \frac{3\sqrt{dev(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \cdot dev(\boldsymbol{\sigma})}}{tr(\boldsymbol{\sigma})}$ - коэффициент связывающий интенсивность касательных напряжений с средним гидростатическим давлением. Суммарный эффект влияния неоднородностей описывается тензором вклада \mathbf{H} , причем $\tilde{\mathbf{H}} = (1 - \varphi)^{-1}\varphi\zeta\mathbf{H} = (1 - \varphi)^{-1}\varphi\zeta \sum_i h_i T_i$. то есть $\tilde{h}_i = (1 - \varphi)^{-1}\varphi\zeta h_i$

Для нахождения условия пластичности понадобится условие пластичности Мизеса для изотропной матрицы:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{dev(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \cdot dev(\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[tr(\boldsymbol{\sigma}^2) - \frac{1}{3} tr^2(\boldsymbol{\sigma}) \right]} = \tau_* \quad (2.4)$$

В зоне упругих деформаций:

$$dev(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \cdot dev(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{dev(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \cdot dev(\boldsymbol{\sigma})}{4\mu_0^2}, \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \quad (2.5)$$

При наступлении пластического течения изотропной матрицы:

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon}^2) = \frac{1}{2\mu_0^2} \left[\tau_*^2 + \frac{(1 - 2\nu_0)^2}{6(1 + \nu_0)^2} tr^2(\boldsymbol{\sigma}) \right] \quad (2.6)$$

Используем факт о совпадении значений деформаций для матрицы и неоднородного материала, соответствующих началу пластического течения, и формулу (3.1), тогда след квадрата деформаций можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) &= \left[(\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \cdot \mathbf{E} = \\ &\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \left[(\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \cdot (\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) \right] \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) \cdot \cdot (\mathbf{S}_0 + \tilde{\mathbf{H}}) = \sum_i \psi_i T_i$ и компоненты ψ_i могут быть найдены следующим образом:

$$\psi_1 = \frac{1 - 2\nu_0 + 3\nu_0^2}{8\mu_0^2(1 + \nu_0)^2} + \frac{\tilde{h}_1(1 - \nu_0) - \nu_0\tilde{h}_3}{\mu_0(1 + \nu_0)} + 2\tilde{h}_1^2 + \tilde{h}_3^2, \quad \psi_2 = \left(\frac{1}{2\mu_0} + \tilde{h}_2 \right)^2$$

$$\psi_3 = \psi_4 = -\frac{\nu_0(2 - \nu_0)}{4\mu_0^2(1 + \nu_0)^2} + \frac{(2 - \nu_0)\tilde{h}_3 - 2\nu_0\tilde{h}_1 - \nu_0\tilde{h}_6}{2\mu_0(1 + \nu_0)} + (2\tilde{h}_1 + \tilde{h}_6)\tilde{h}_3$$

$$\psi_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} + \tilde{h}_5 \right)^2, \quad \psi_6 = \frac{2\nu_0^2 + 1}{4\mu_0^2(1 + \nu_0)^2} + \frac{\tilde{h}_6 - 2\nu_0\tilde{h}_3}{\mu_0(1 + \nu_0)} + 2\tilde{h}_6^2 + 2\tilde{h}_3^2$$

Приравнивание правых частей (3.4) и (3.5) с учетом изотропности матрицы и неоднородностей позволяет получить выражение для предела текучести:

$$\tau_*^2 = \frac{1}{2} (A_1 \text{tr}^2(\boldsymbol{\sigma}) + A_2 \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})) \quad (2.8)$$

В случае сферических неоднородностей имеем следующие компоненты A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{4(1 + \nu)^2} + \frac{\varphi^2}{(1 - \varphi)^2} \frac{(1 - \nu)^2}{32(1 + \nu)^2} \quad (2.9)$$

$$A_2 = 1 + \frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{15(1 - \nu)}{7 - 5\nu} + \frac{\varphi^2}{(1 - \varphi)^2} \frac{225(1 - \nu)^2}{4(7 - 5\nu)^2} \quad (2.10)$$

Учитывая, что неоднородности имеют сфероидальную форму и случайную ориентацию, имеем следующие компоненты A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{8(1-2\nu_0)}{3(1+\nu_0)} B + \frac{\varphi^2}{(1-\varphi)^2} \frac{16}{3} B^2 \quad (2.11)$$

$$A_2 = 1 + 8 \frac{\varphi}{1-\varphi} D + 16 \frac{\varphi^2}{(1-\varphi)^2} D^2 \quad (2.12)$$

Коэффициенты B и D выражаются через компоненты второго тензора Хилла q_i , найденные в (1.51):

$$B = \frac{2q_2q_5(8q_1 + 22q_3 + 17q_6) + (q_1q_6 - q_3^2)(20q_2 - 43q_5)}{60q_2q_5(q_1q_6 - q_3^2)}$$

$$D = \frac{2q_2q_5(q_1 + q_3 + 4q_6) + (q_1q_6 - q_3^2)(32q_2 - 19q_5)}{60q_2q_5(q_1q_6 - q_3^2)}$$

ГЛАВА 3

Верификация математических моделей

3.1 Описание эксперимента по определению упругих модулей пористого алюминия

Верификация данных для модели определения упругих модулей проводится с использованием экспериментальных данных, полученных для пористого алюминия (AlMg1Si0.6), которые были описаны в работе [15]. Определение модуля Юнга в этой работе происходит по свободным колебаниям образца. Цилиндрический образец с диаметром $d = 17$ мм и длиной $L = 300$ мм подвергался продольным вибрациям методом ударного молота [4]. Модуль Юнга может быть вычислен через резонансную частоту f_n по формуле:

$$E = \rho \left(\frac{2Lf_n}{n} \right)^2$$

где n - порядок резонансной частоты гармонических колебаний, ρ - плотность материала.

Значения модуля Юнга в зависимости от пористости образца приведены в таблице 3.1.

Объем образца был вычислен по формуле $V = \pi \frac{d^2}{4} L$. В качестве формы неоднородности использовался сфероид с соотношением сторон $\gamma = \frac{b}{a} = 0.7$. Механические свойства матрицы и пор: $E_0 = 70$ ГПа, $\nu_0 = 0.33$ ГПа, $E_1 = 0.0001$ Па, $\nu_1 = 0.0001$ Па соответственно. Варьирование объемной доли производилось за счет изменения определяющего размера неоднородности.

Пористость	Модуль Юнга, ГПа	Пористость	Модуль Юнга, ГПа
0.851562	3.04	0.740699	6.2
0.84027	4.25	0.732148	6.28
0.823922	4.18	0.729558	8.01
0.822941	3.86	0.72737	6.65
0.811623	3.54	0.71907	6.42
0.811271	4.03	0.708255	7.07
0.808756	4.6	0.70564	7.36
0.808605	3.81	0.7032	8.79
0.805034	5.12	0.70315	10.06
0.797791	3.78	0.701892	9.83
0.797288	3.76	0.699453	8.39
0.79603	3.81	0.69812	8.58
0.795024	4.32	0.697692	8.9
0.793767	3.82	0.696862	8.77
0.793264	4.21	0.695579	8.55
0.783706	5.04	0.694372	10.24
0.777369	5.53	0.6906	8.8
0.762278	5.8	0.686802	8.59
0.759562	5.35	0.685544	11.54
0.756293	5.06	0.685519	11.18
0.75428	5.76	0.681772	8.47
0.745226	6.05	0.0	70.0

Таблица 3.1 Модуль Юнга при различных значениях пористости φ

3.2 Верификация модели определения эффективных упругих модулей

В ходе работы было построено две модели, использующие две различные энергетические схемы для учета взаимодействия неоднородностей - схемы Мори-Танаки и Максвелла. В результате расчетов были получены зависимости отношения $\frac{E_{eff}}{E_0}$ эффективного модуля Юнга к модулю Юнга матрицы от пористости φ в зависимости от соотношения сторон $\gamma = \frac{b}{a}$, где a - определяющий размер, b - размер по вертикальной оси для этих

двух моделей. На рисунках 3.2 и 3.3 графики представляют из себя непрерывные монотонно убывающие вогнутые кривые. Следует отметить, что при нулевом значении пористости отношения равняется единице, что говорит об однородности материала. При значении пористости равном единице, отношение близко к нулю, но нулевым не является, так как поры имели ненулевые механические характеристики. Это свидетельствует о том, что материал полностью состоит из пор. Также на графиках 3.4 и 3.5 проиллюстрированы отклонения $\delta = \sum_{i=1}^N \frac{|E_{exp}^i - E_{mod}^i|}{N} =$, где $E_{index} = \frac{E_{eff}}{E_0}$ от экспериментальных данных при различных значениях соотношений сторон сфероида γ . Наилучшее сходство с экспериментальными данными получено при $\gamma = 0.7$, что говорит о корректности построенной модели. Отклонение в этом случае составило $\delta = 0.0113$. Также на рисунке 3.6 показано сравнение моделей при соотношении сторон $\gamma = 0.7$. Из графика видно, что отличия между этими моделями практически отсутствуют. Это подтверждается отклонением $\delta = 4e - 17$ отношений модулей Юнга.

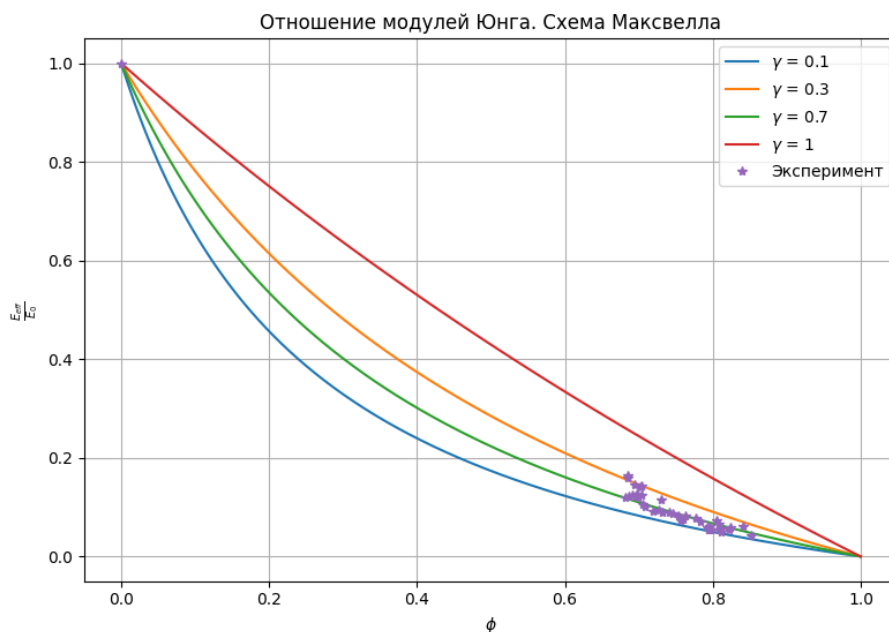


Рисунок 3.1 — Зависимость модуля Юнга в зависимости от пористости ϕ при разных γ .

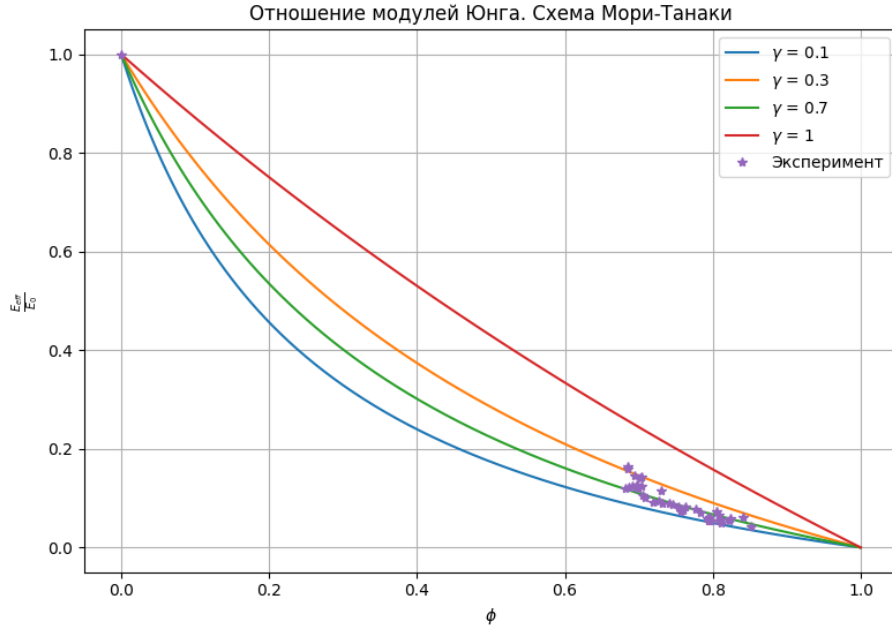


Рисунок 3.2 — Зависимость модуля Юнга в зависимости от пористости ϕ при разных γ .

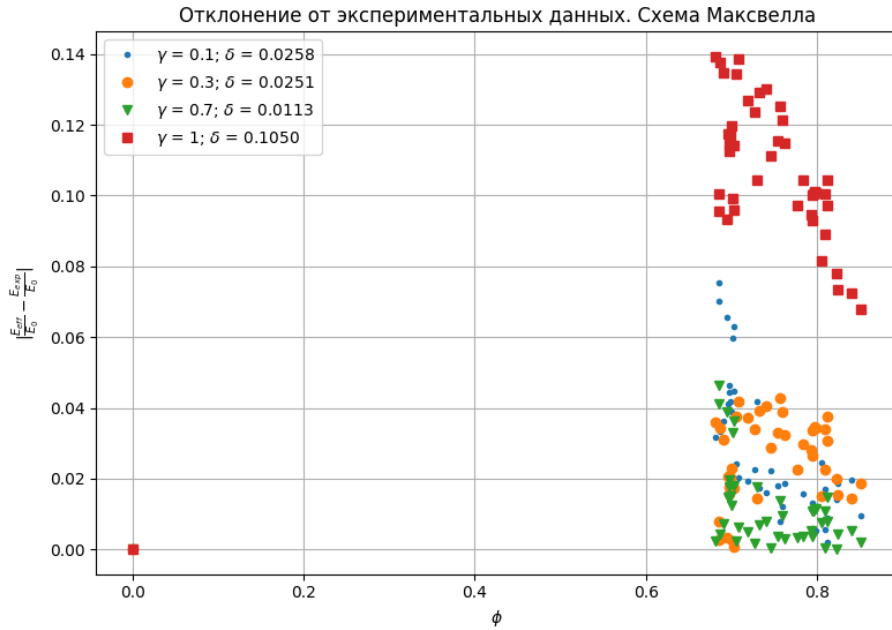


Рисунок 3.3 — Отклонение модуля Юнга в зависимости от пористости ϕ при разных γ .

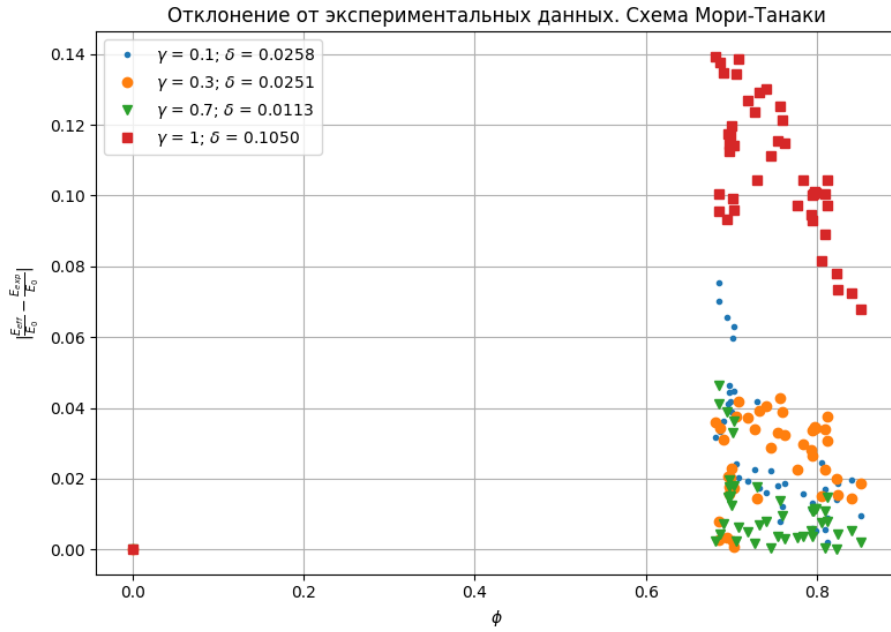


Рисунок 3.4 — Отклонение модуля Юнга в зависимости от пористости ϕ при разных γ .

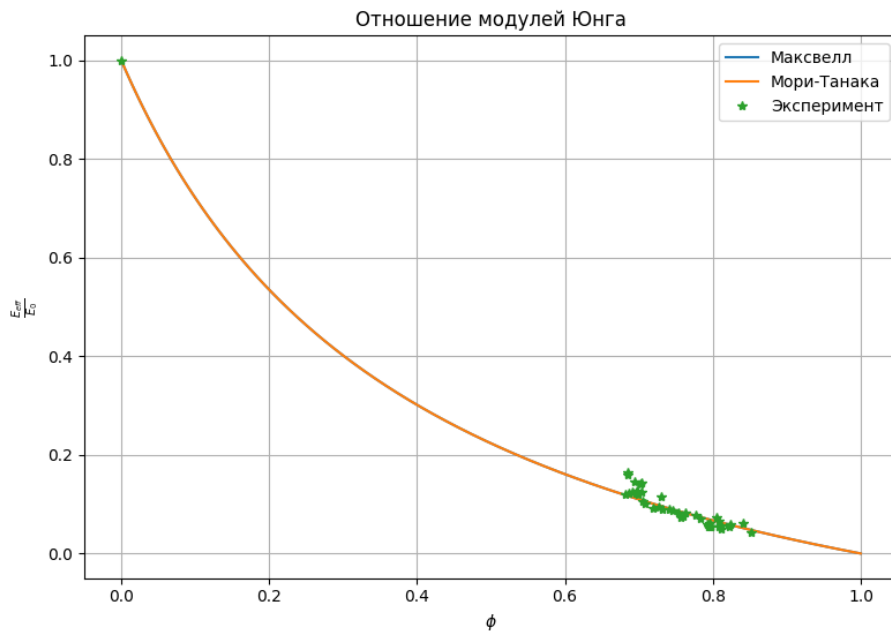


Рисунок 3.5 — Зависимость модуля Юнга в зависимости от пористости ϕ при разных γ . Сравнение моделей.

3.3 Описание эксперимента по определению предела текучести

Верификация данных проводится с использованием результатов численной симуляции нагружения пористого алюминия, описанной в работе

[17]. Механические свойства матрицы и пор: $K_0 = 77.9$ ГПа, $\mu_0 = 24.9$ ГПа, $K_1 = 0.0001$ Па, $\mu_1 = 0.0001$ Па соответственно. Поры моделируются сферами. Число пор в процессе расчетов остается неизменным и равным 20. Репрезентативный объем $V = 1\text{ м}^3$. Варьирование объемной доли производилось за счет изменения определяющего размера неоднородности. Для определения предела текучести использовался график напряженно-деформированного состояния материала при различных значениях пористости:

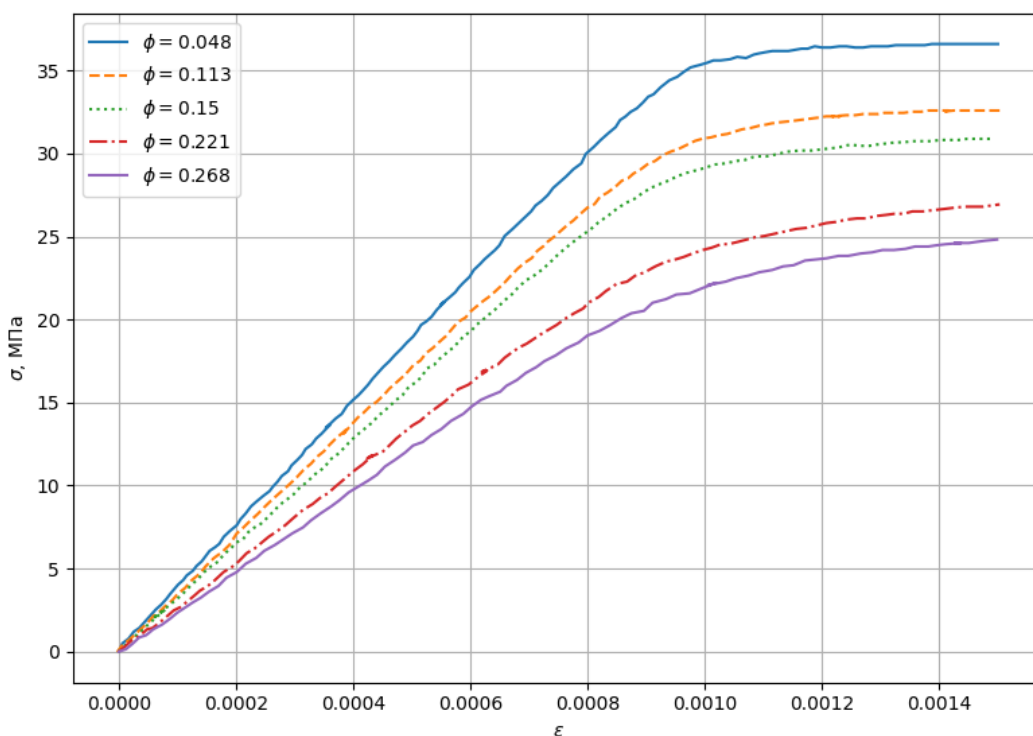


Рисунок 3.6 — Напряженно-деформированное состояние при различных значениях пористости φ

В таблице 3.2 представлены значения предела текучести при различных значениях пористости.

Пористость	0.048	0.113	0.15	0.221	0.268
Предел текучести, МПа	36.67	32.65	30.81	25.10	22.42

Таблица 3.2 Предел текучести при различных значениях пористости φ

3.4 Верификация модели определения эффективного предела текучести

В результате расчетов была получена зависимость эффективного предела текучести τ^* от пористости φ в случае соотношения сторон $\gamma = \frac{b}{a} = 1$, где a - определяющий размер, b - размер по вертикальной оси. Следует отметить, что эффективный предел текучести вычислялся при условии пористости $1 - \varphi$. Из графика можно видеть характерное убывание предела текучести с ростом пористости, что подтверждает экспериментальные наблюдения. Сравнение с экспериментальными данными позволяет сделать вывод о корректности модели, так как среднее отклонение от результатов симуляции составляет: $\delta = \sum_{i=1}^N \frac{|\tau_{exp}^i - \tau_{mod}^i|}{\tau_{exp}^i N} = 0.381$.

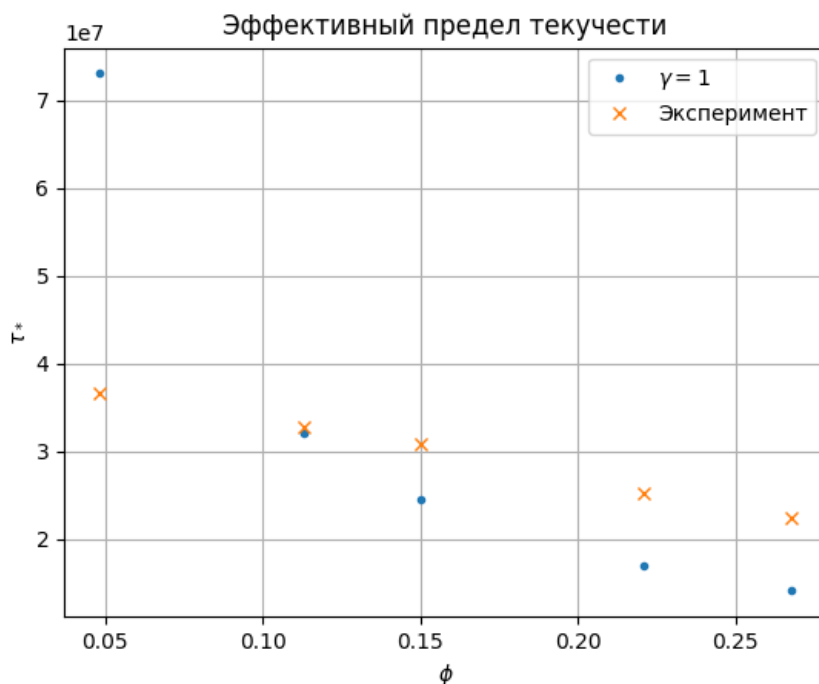


Рисунок 3.7 — Зависимость предела текучести τ_* в зависимости от пористости φ при $\gamma = 1$

Заключение

В работе были определены эффективные механические свойства пористого материала с учетом взаимодействия неоднородностей друг на друга. Была учтена особенность формы неоднородностей для случая сферы и сфероида. В обоих случаях была учтена особенность ориентации неоднородностей при помощи функции ориентации неоднородностей для случая случайного распределения неоднородностей в материале. Была проведена верификация моделей на основе экспериментальных данных для пористого алюминия. Отклонение отношения эффективного модуля Юнга к модулю Юнга матрицы составило $\delta = 0.0113$ в двух моделях. Таким образом модели дают достаточно точные результаты, позволяющие определить упругие модули материала, без проведения реальных испытаний.

Также была построена модель для определения предела текучести неоднородного материала с учетом особенностей его микроструктуры. Модель учитывает особенности формы неоднородностей, а также их случайное распределение в материале. Была проведена верификация модели для пористого алюминия. Отклонение эффективного предела текучести составило $\delta = 0.381$. Таким образом модель дает достаточно точные результаты, позволяющие определить предел текучести материала, без проведения реальных испытаний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – Рипол Классик, 2013.
2. Трусов П. В., Швейкин А. И. Теория пластичности. – 2011.
3. Фрейдин А. Б. Задача Эшелби: учебное пособие для реализации основных профессиональных обязательных программ по направлению подготовки магистров 15.04. 03 «Прикладная механика». – 2022.
4. Bruel K., Kjaer L. Mechanical Vibration and Shock Measurements, K //Larsen Son, Soborg. – 1980.
5. Kachanov M., Sevostianov I. Micromechanics of materials, with applications. – Cham: Springer, 2018. – Т. 249.
6. Markov K. Z. Elementary micromechanics of heterogeneous media //Heterogeneous media: Micromechanics modeling methods and simulations. – Boston, MA : Birkhäuser Boston, 2000. – С. 1-162.
7. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – Т. 1.
8. Kanaun S. K. Approximation of a self-consistent field for the elastic composite medium //Zhurnal Prikladnoy Mehaniki y Tekhnicheskoy Fisiki (J. Appl. Mech. Tech. Phys.)(2). – 1977. – С. 166-169.
9. Konstantinidis I. C. et al. Model for determining mechanical properties of aluminum closed-cell foams //Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2005. – Т. 43. – №. 2. – С. 157-167.
10. Koudelka P. et al. Effective elastic moduli of closed-cell aluminium foams–homogenization method //11th IMEKO TC15 Youth Symposium on Experimental Solid Mechanics 2012. – 2012. – С. 244-250.
11. McCartney L. N. Maxwell’s far-field methodology predicting elastic properties of multiphase composites reinforced with aligned transversely isotropic spheroids //Philosophical Magazine. – 2010. – Т. 90. – №. 31-32. – С. 4175-4207.

12. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions //Acta metallurgica. – 1973. – T. 21. – №. 5. – C. 571-574.
13. Sevostianov I., Kachanov M. Effective properties of heterogeneous materials: Proper application of the non-interaction and the “dilute limit” approximations //International Journal of Engineering Science. – 2012. – T. 58. – C. 124-128.
14. Sevostianov I., Kachanov M. Modeling of the anisotropic elastic properties of plasma-sprayed coatings in relation to their microstructure //Acta Materialia. – 2000. – T. 48. – №. 6. – C. 1361-1370.
15. Sevostianov I., Kováčik J., Simančík F. Elastic and electric properties of closed-cell aluminum foams: Cross-property connection //Materials Science and Engineering: A. – 2006. – T. 420. – №. 1-2. – C. 87-99.
16. Sevostianov I., Kachanov M. On the yield condition for anisotropic porous materials //Materials Science and Engineering: A. – 2001. – T. 313. – №. 1-2. – C. 1-15.
17. Zohdi T. I., Kachanov M., Sevostianov I. On perfectly plastic flow in porous material //International Journal of Plasticity. – 2002. – T. 18. – №. 12. – C. 1649-1659.