XIII ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
21-25 АВГУСТА
2023

Движение локализованных волн в скалярной гармонической решетке

Баимова Ю.А.[1,2], Бессонов Н.М.[2], Кривцов А.М.[2,3]

Зав. лабораторией

[1]Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа

[2]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

[3]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург

Санкт-Петербург 2023

Содержание

Введение

Аналитическое описание

Численное моделирование

Заключение

Введение

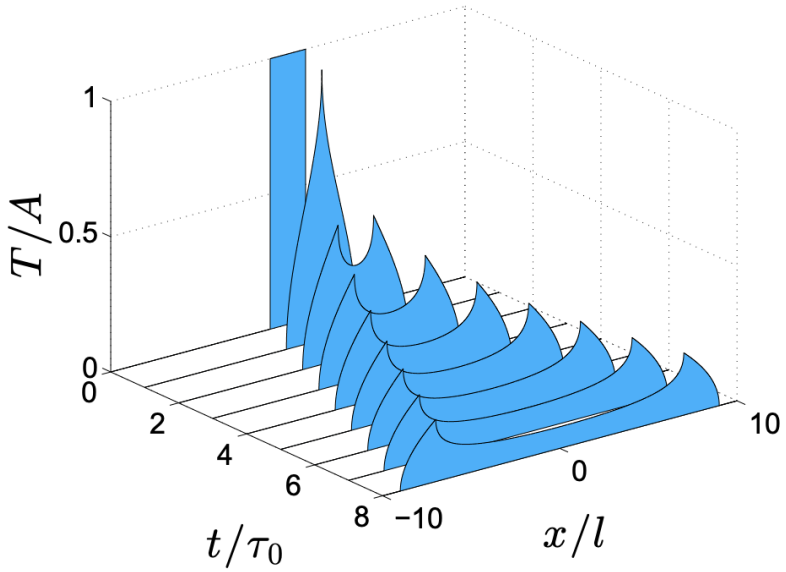
Перенос массы и энергии

- Диффузионный перенос массы и энергии (классическая диффузия и теплопередача)
- Динамический перенос массы и волновой перенос энергии (динамика вещества и баллистический теплоперенос)
- Корпускулярно-волновой дуализм в квантовой механике и физике твердого тела
- Кинетическое описание волновых процессов: диффузионных, аномальных и баллистических (передача энергии и тепла)
- Перенос импульса электромагнитным полем

1.Bonetto, F., Lebowitz, J.L., Rey-Bellet, L.: Fourier's law: a challenge to theorists. In: Fokas, A., et al. (eds.) Mathematical Physics, pp. 128–150. Imperial College Press, London (2000)
2.Babenkov, M.B., Ivanova, E.A.: Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type. Contin. Mech. Thermodyn. 26(4), 483–502 (2014)
3.Anufriev,R., Ramiere,A., Maire,J., Nomura,M.: Heat guiding and focusing using ballistic phonon transport in phononic nanostructures. Nat. Commun. 8, 15505 (2017)
4.Saito,R., Mizuno,M., Dresselhaus,M.S.: Ballistic and diffusive thermal conductivity of graphene. Phys. Rev. Appl. 9(2), 024017 (2018)
5.Ganiev,R.F.: Fundamental and applied problems of nonlinear wave mechanics and engineering: groundbreaking wave technologies and wave engineering. J. Mach. Manuf. Reliab. 48(6), 477–502 (2019)
6.Levin,V.A., Manuylovich,I.S., Markov,V.V.: Rotating detonation waves in annular gap with variable stagnation pressure. ShockWaves 31(7), 651–663 (2021)
7.Kuzkin,V.A., Krivtsov,A.M.: Unsteady ballistic heat transport: linking lattice dynamics and kinetic theory. ActaMechanica. 32(5), 1983– 1996 (2021)

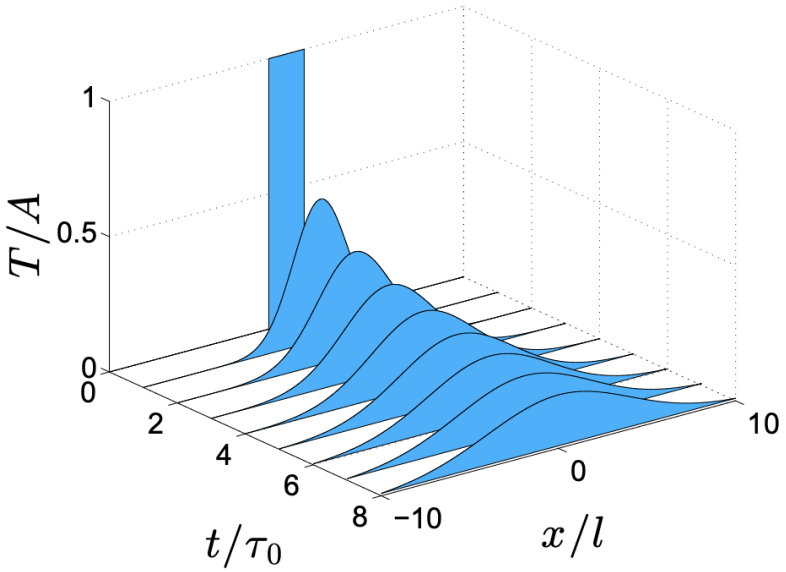
Перенос тепловой энергии

Эволюция локализованного теплового импульса



(a) Anomalous

Баллистический перенос тепла



(b) Fourier

Диффузионный перенос тепла

1. Krivtsov, A.M.: Heat transfer in infinite harmonic one dimensional crystals. Dokl. Phys. 60(9), 407–411 (2015)

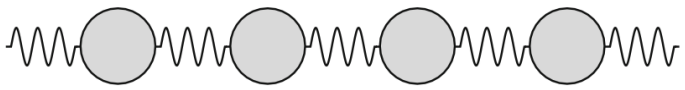
2. Sokolov, A.A., Krivtsov, A.M., Müller, W.H.: Localized heat perturbation in harmonic 1D crystals: solutions for an equation of anomalous heat conduction. Phys. Mesomech. 20(3), 305–310 (2017)

Энергетическая динамика

Перенос массы и перенос энергии (1D)

- Система взаимодействующих частиц
$$m_n \ddot{x}_n = F_n.$$
- Суммарная масса
$$m = \sum_{n=1}^{N} m_n = \text{const}.$$
- Статический момент
$$\mu = \sum_{n=1}^{N} m_n x_n.$$

- Неоднородная цепочка ($n \in \mathbb{Z}$)
$$m_n \ddot{u}_n = F_{n-\frac{1}{2}} - F_{n+\frac{1}{2}}.$$
- Суммарная энергия
$$E = \sum_n E_n = \text{const}.$$
- 1й момент энергии
$$M = \sum_n E_n \xi_n,$$
где ξ_n — отсчетное положение частицы.



Одномерный гармонический кристалл

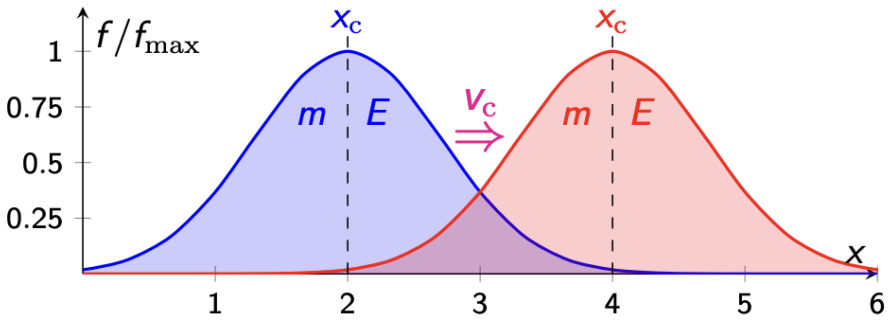
А.М. Кривцов. Динамика массы и энергии. *Лекция*. Сочи. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2022

A.M. Krivtsov. Dynamics of matter and energy. ZAMM. 2022. e202100496

Динамика решетки

Аналогия в переносе массы и энергии

масса	m	E	энергия
статический момент	μ	M	момент энергии
импульс	p	h	поток энергии
внешняя сила	f	Φ	энергетическое воздействие
центр масс	x_c		энергетический центр
скорость переноса массы	v_c		скорость переноса энергии



А.М. Кривцов. Динамика массы и энергии. *Лекция*. Сочи. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков YSM-2022

A.M. Krivtsov. Dynamics of matter and energy. ZAMM. 2022. e202100496

Аналитическое описание

Уравнения движения

Общий вид:

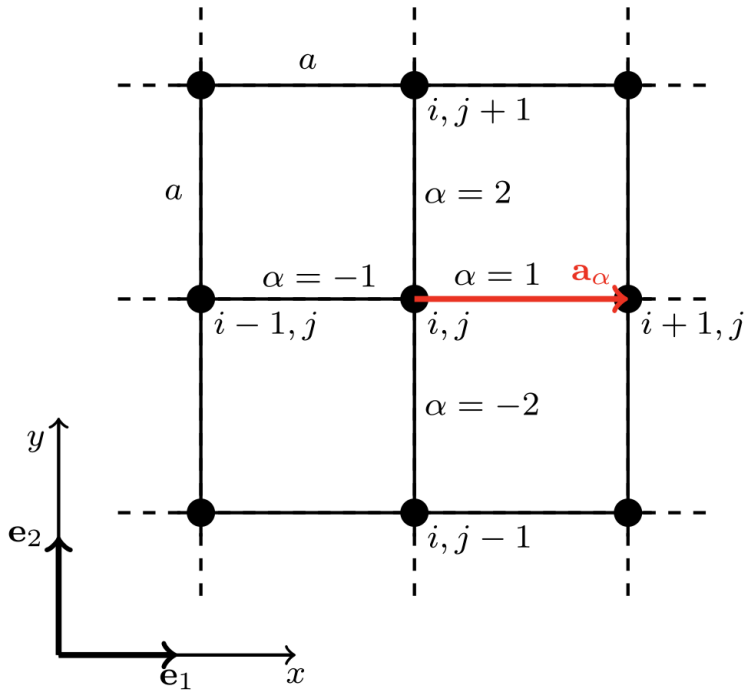
$$m\frac{d^2u}{dt^2} = \sum_{\alpha} C_\alpha[u(\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha) - u(\mathbf{r})]. \qquad (1)$$

Радиус вектор в скалярной квадратной решетке:

$$\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} ai\mathbf{e}_1 + aj\mathbf{e}_2, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Перемещение:

$$u(\mathbf{r}) = u_{i,j}. \qquad (3)$$



Уравнение движения в скалярной форме:

$$\frac{d^2u_{i,j}}{dt^2} = \frac{C}{m}(u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}). \qquad (4)$$

Поток энергии. Понятие энергетического центра

Полная энергия системы: $E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{r}} \epsilon(\mathbf{r}),$ где $\epsilon(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{2} v^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} C_\alpha [u(\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha) - u(\mathbf{r})]^2.$ (5)

Первый момент энергии и положение энергетического центра:

[A.M. Krivtsov. Dynamics of matter and energy. ZAMM. 2022. e202100496]

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{r}} \mathbf{r}\,\epsilon(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}_\mathrm{c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{M}}{E}. \tag{6}$$

Полный поток и скорость движения энергетического центра:

$$\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad \mathbf{v}_\mathrm{c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\mathbf{h}}{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = E\mathbf{v}_\mathrm{c}. \tag{7}$$

Полный поток энергии в скалярной гармонической решетке: $\mathbf{h} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r},\,\alpha} \mathbf{a}_\alpha C_\alpha\, u(\mathbf{r})\, v(\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha).$ (8)

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_\mathrm{c} = \mathrm{const}.$$

Энергетический сгусток движется в двумерной скалярной решетке **прямолинейно** и **равномерно**

[Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M. Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices. Physical Review E. 2023. V. 107. 065002]

Движение волны

Решение уравнения движения в виде движущейся волны:

$$u(\mathbf{r}) = U\,\sin(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi), \qquad (9)$$

где *U* - амплитуда, к – волновой вектор, ω - частота, и φ – сдвиг фазы.
Начальные условия:

$$\overset{\circ}{u}(\mathbf{r}) = U\,\sin(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} + \phi), \quad \overset{\circ}{v}(\mathbf{r}) = -\omega U\,\cos(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} + \phi). \qquad (10)$$

Здесь

$$U(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma A \cos^{2k}\left(\frac{\pi r}{D}\right).$$

Начальная форма возмущения может быть описана коэффициентом k = {0; 1}, начальный диаметр D.

Направление движения энергетического центра определяется групповой скоростью

$$\mathbf{v}_{\mathrm{g}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{d\boldsymbol{\kappa}}. \qquad (11)$$

Волновой вектор и групповая скорость

Дисперсионное соотношение:

$$\omega = 2\omega_e \sqrt{\sin^2 \frac{q_x}{2} + \sin^2 \frac{q_y}{2}}\,, \qquad (12)$$

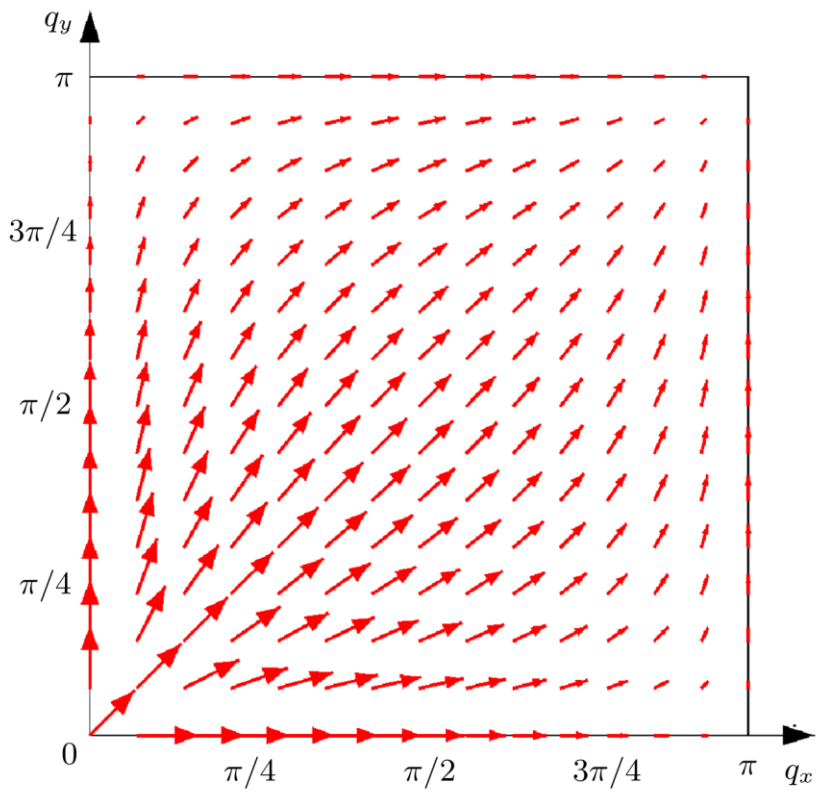
где $\omega_e \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{C/m}$ - частота, q_x и q_y – волновые числа

Групповая скорость: $$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{\kappa}} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\omega}{\partial q_y}\mathbf{e}_2\right). \qquad (13)$$

$$v_{gx} = \frac{c\sin q_x}{2\sqrt{\sin^2\frac{q_x}{2} + \sin^2\frac{q_y}{2}}}, \quad v_{gy} = \frac{c\sin q_y}{2\sqrt{\sin^2\frac{q_x}{2} + \sin^2\frac{q_y}{2}}}. \qquad (14)$$

Направление вектора групповой скорости совпадает с направлением волнового вектора только в определенных направлениях:

- $q_x q_y = 0, \quad \mathbf{v}_g = c\cos\left(\frac{q}{2}\right)\mathbf{e};$
- $|q_x| = |q_y|, \quad \mathbf{v}_g = c\cos\left(\frac{q}{2\sqrt{2}}\right)\mathbf{e};$
- $q \ll 1, \quad \mathbf{v}_g \approx c\mathbf{e}.$



Поле распределения вектора групповой скорости $\mathbf{v}_g$. Направление и величина стрелки характеризует направление и величину вектора скорости.

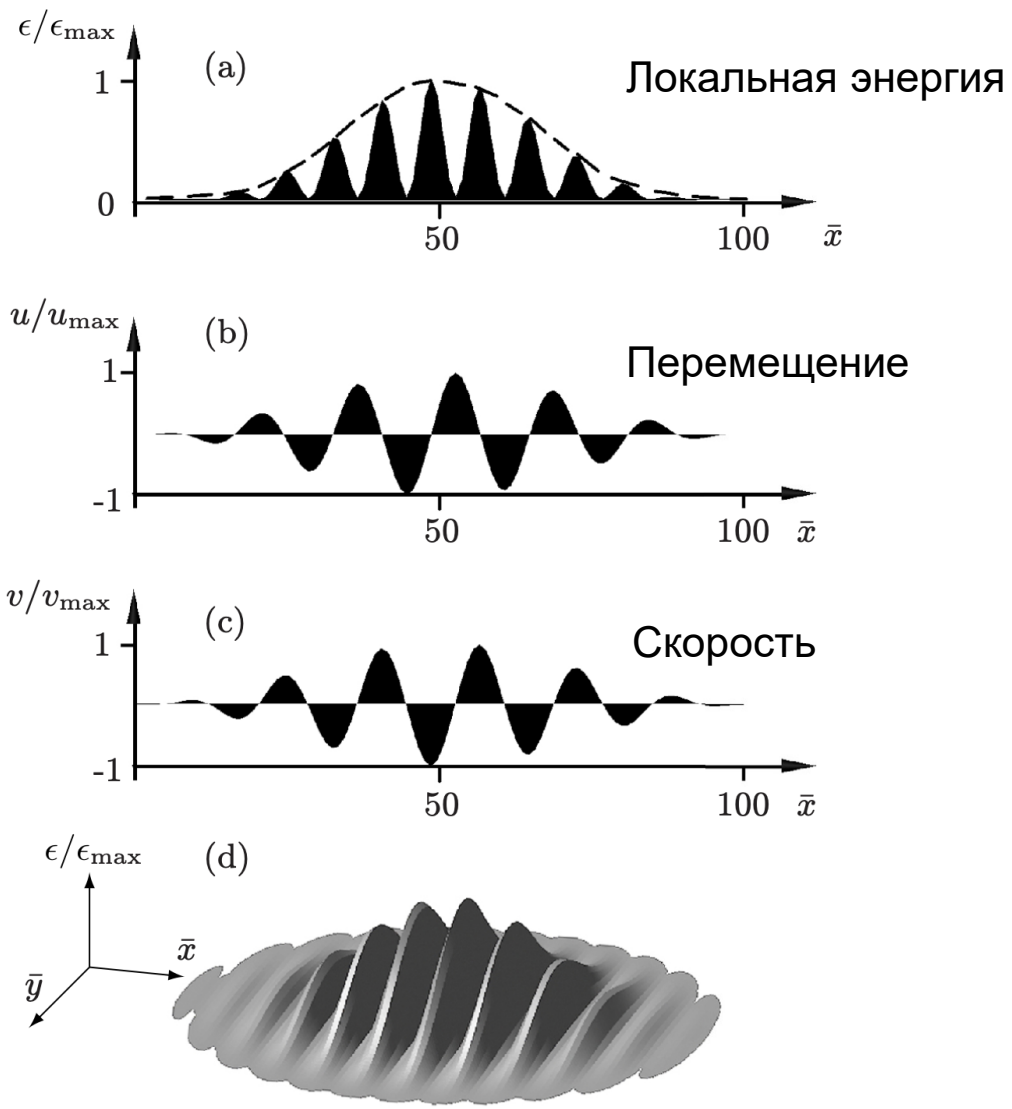
Численное моделирование

Структура возмущения

- Квадратная гармоническая решетка *N* x *N;*
- Периодические граничные условия;
- Начальный диаметр возмущения *D.*

Пример колоколообразного возмущения: волновые числа $q_x = \pi/8$, $q_y = 0$.

Скорость переноса – **групповая скорость** синусоидальной волны.

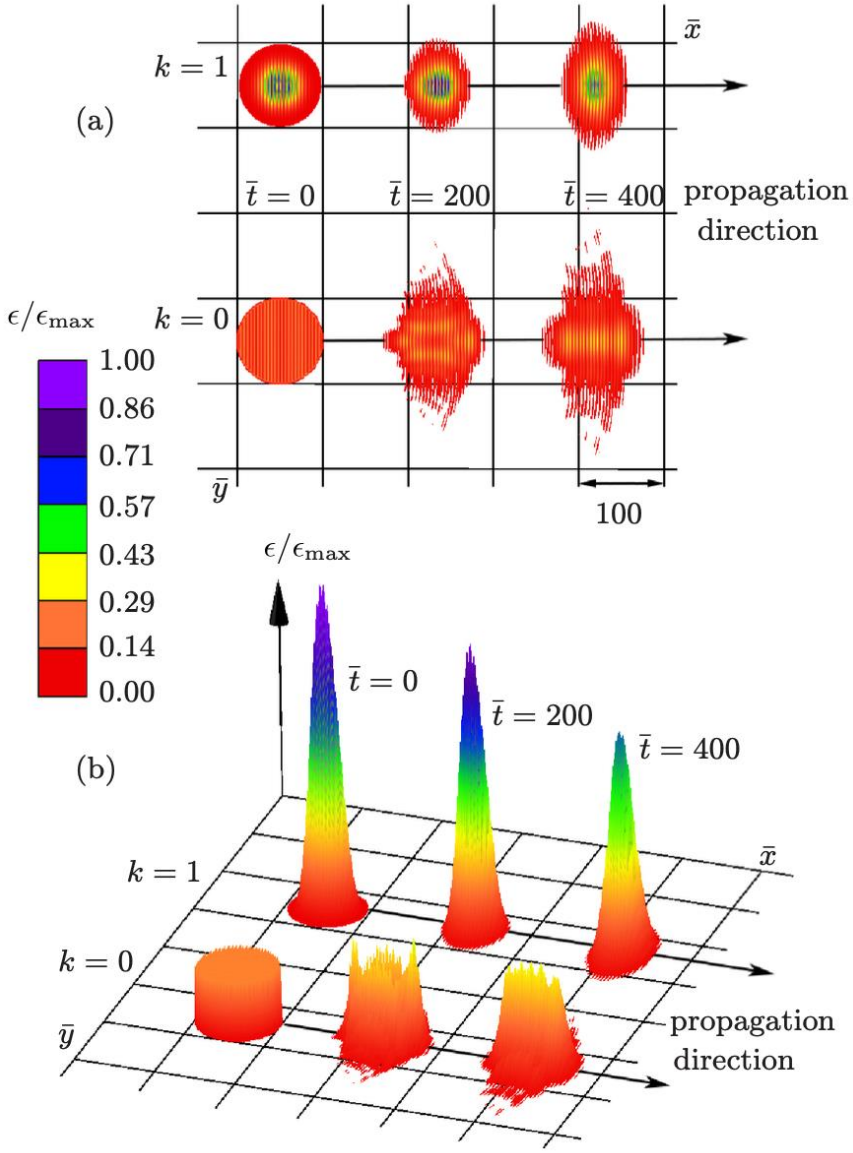


Эволюция возмущения

Начальная форма возмущения может быть описана коэффициентом k = 0 (цилиндрическая) и k = 1 (колоколобразная).

Параметры:
$q_x = \pi/4$, $q_y = 0$;
$N_x = N_y = 2000$.

Энергетический центр (сгусток энергии) движется **прямолинейно и равномерно** не зависимо от начальной формы возмущения.



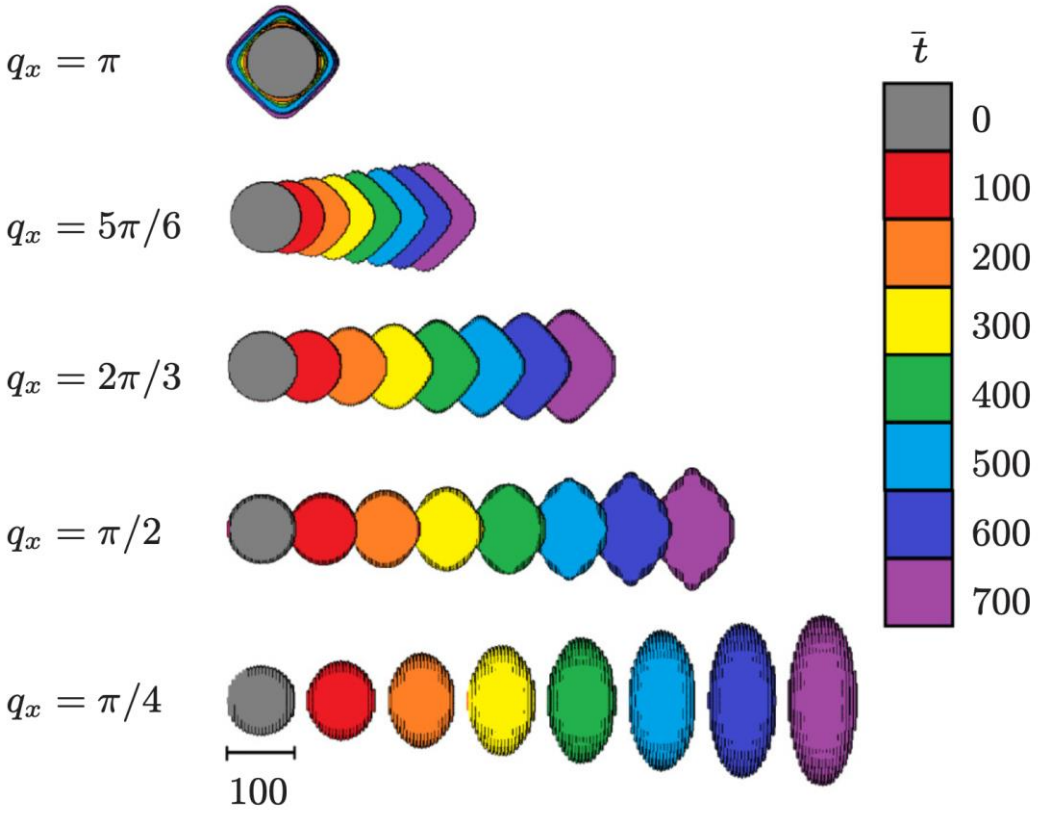
Расплывание возмущения

Параметры:
$q_x = var.$, $q_y = 0$;
$N_x = N_y = 1200$.

Сгусток энергии перемещается с постоянной скоростью, постепенно расширяясь.

От начальных условий зависит, что превалирует – движение или расширение.

При $q_x=\pi$ образуется стоячая волна.
Форма возмущения зависит от волнового вектора.



Распространение возмущения

Групповая скорость (**черная линия**)

$$v_{gx} = \frac{c \sin q_x}{2\sqrt{\sin^2 \frac{q_x}{2} + \sin^2 \frac{q_y}{2}}}, \quad v_{gy} = \frac{c \sin q_y}{2\sqrt{\sin^2 \frac{q_x}{2} + \sin^2 \frac{q_y}{2}}}. \qquad (15)$$

Скорость энергетического центра (красная линия) – численный расчет

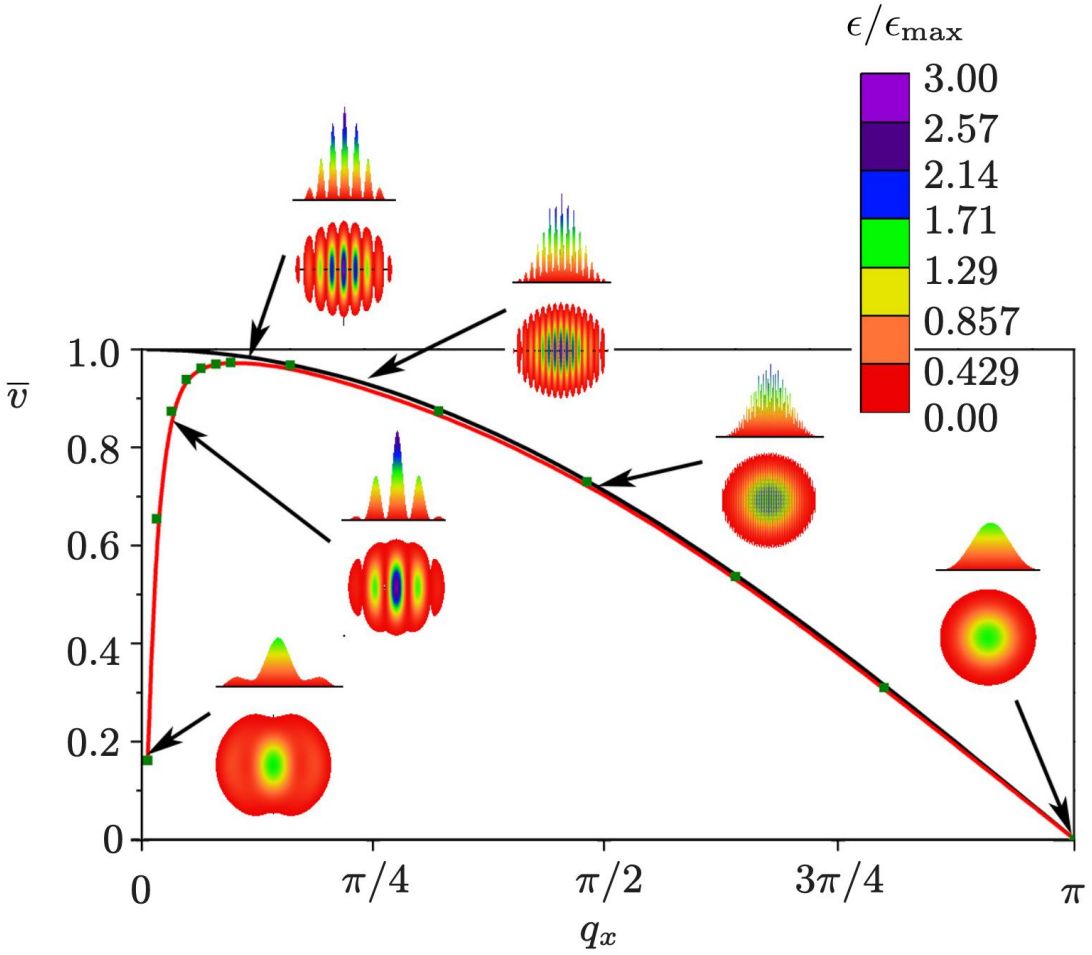
$$v_{cx} = \frac{Ca}{2E} \sum_{i,j} v_{i,j}(u_{i-1,j} - u_{i+1,j}),$$

$$v_{cy} = \frac{Ca}{2E} \sum_{i,j} v_{i,j}(u_{i,j-1} - u_{i,j+1}). \qquad (16)$$

Скорость движения центра энергетического сгустка (зеленые точки) из координат энергетического центра

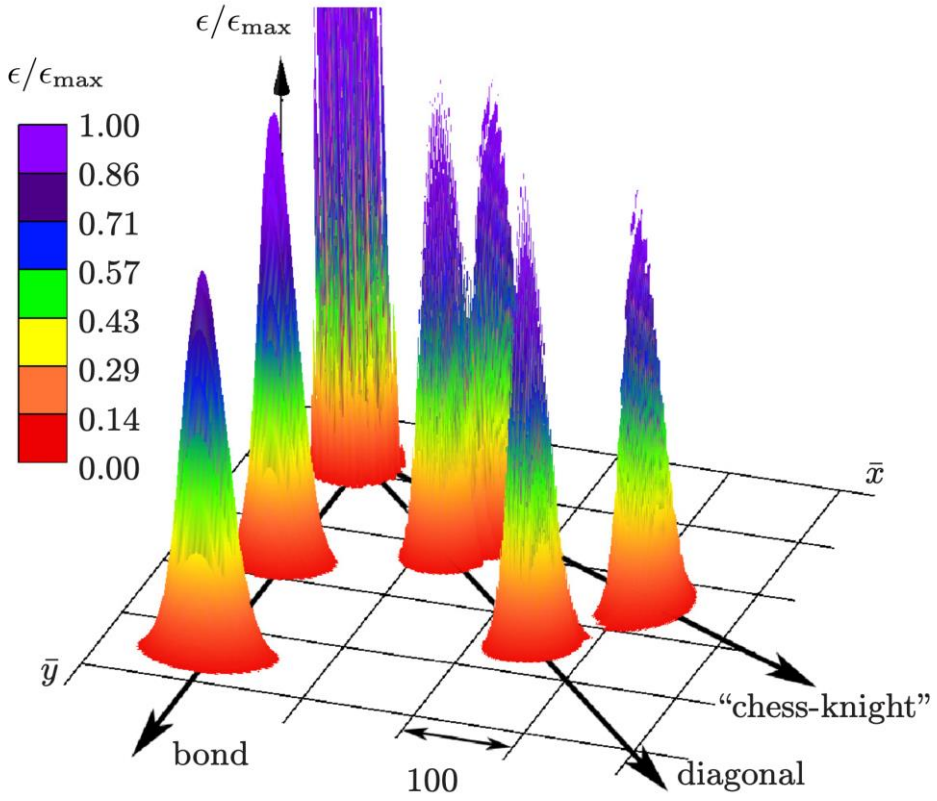
$$x_c = \frac{ma}{2E} \sum_{i,j} i v_{i,j}^2 + \frac{Ca}{2E} \sum_{i,j} \left(i + \frac{1}{2}\right)(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + \frac{Ca}{2E} \sum_{i,j} i(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2,$$

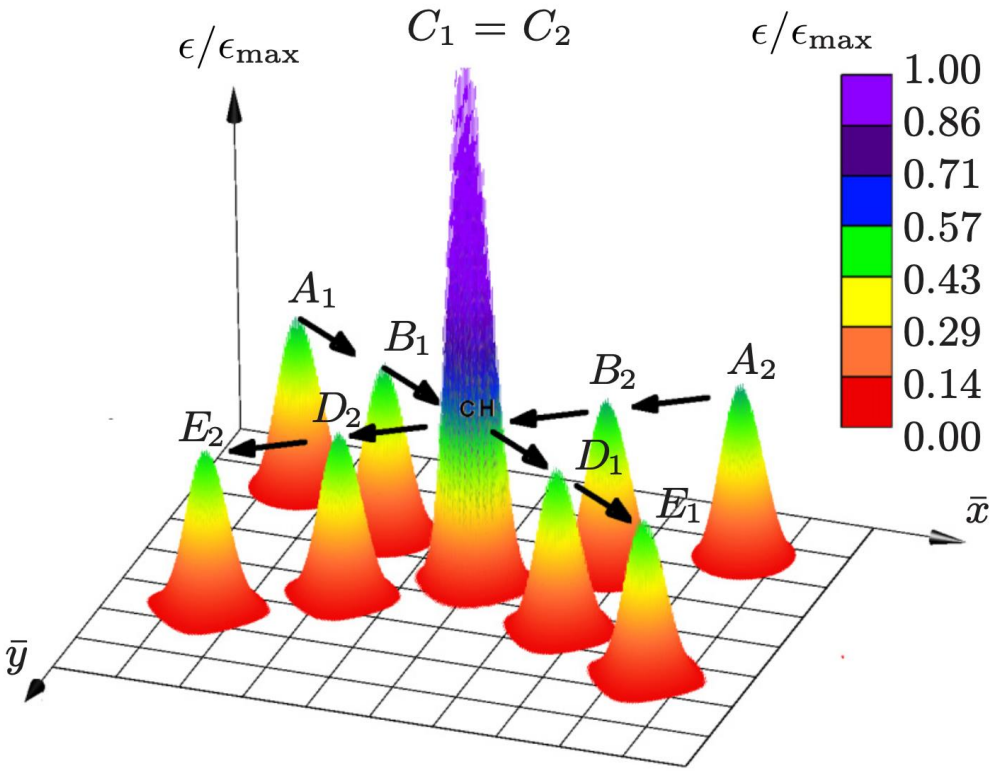
$$y_c = \frac{ma}{2E} \sum_{i,j} j v_{i,j}^2 + \frac{Ca}{2E} \sum_{i,j} j(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + \frac{Ca}{2E} \sum_{i,j} \left(j + \frac{1}{2}\right)(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2. \qquad (17)$$



Распространение возмущения может быть описано в рамках кинетической модели для $q_x > \pi/4$

Распространение нескольких возмущений





Заключение

- Показано, что поток энергии в двумерной гармонической решетке сохраняется
- Получены точные аналитические соотношения для описания движения энергетического возмущения в скалярной гармонической решетке
- Впервые продемонстрировано, что энергетический сгусток в скалярной гармонической решетке движется прямолинейно равномерно с постоянной скоростью
- Групповая скорость синусоидальной волны и скорость распространения энергетического центра совпадают, что подтверждается как аналитическим, так и численным расчетом
- Энергетическая динамика позволяет описывать движение одного или нескольких возмущений в многомерных дискретных системах

Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M. Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices. Physical Review E. 2023. V. 107. 065002

Контакты

Баимова Юлия Айдаровна

Институт проблем
сверхпластичности металлов РАН

julia.a.baimova@gmail.com

+7 917 445 46 10