

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А.М.Кривцов

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

**Сравнительный анализ аппроксимаций кривых деформирования**

**методом конечных элементов**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.03.03\_03 Механика и математическое моделирование процессов

нефтегазодобычи

Выполнил  
студент гр.5030103/00301

М.С. Алексеева

Руководитель  
старший преподаватель  
ВШТМиМФ

А.И. Орлов

Консультант по работе  
Заместить руководителя НИЦ  
ЦНИИ РТК

А.Ю. Тамм

Санкт-Петербург

2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**  
**Физико-механический институт**  
**Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«\_\_»\_\_\_\_\_2024 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студентке Алексеевой Марии Сергеевне, гр. 5030103/00301

1. Тема работы: Сравнительный анализ аппроксимаций кривых деформирования методом конечных элементов
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации, связанные с темой исследования, справочная литература, результаты экспериментальных исследований.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
  - 4.1 Методы построения аппроксимаций кривых деформирования металлов. Анализ литературных источников. Постановка задачи. Актуальность и новизна задачи;
  - 4.2 Построение КЭ модели для исследования растяжения образца;
  - 4.3 Построение КЭ модели для исследования трехточечного изгиба балки;
  - 4.4 Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Выводы о применимости аппроксимирующих кривых для задач прочности.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: А.Ю. Тамм, заместитель руководителя НИЦ ЦНИИ РТК
7. Дата выдачи задания 28.02.2024

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ А.И.Орлов, старший преподаватель ВШТМиМФ

Задание принял к исполнению 28.02.2024

Студент \_\_\_\_\_ Алексеева М.С.

## **РЕФЕРАТ**

На 35 с., 24 рисунка, 11 таблиц

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, АППРОКСИМАЦИИ КРИВЫХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, РАСТЯЖЕНИЕ ОБРАЗЦА, ТРЁХТОЧЕЧНЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ, НЕЯВНАЯ СХЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

В данной работе представлено сравнение трёх аппроксимаций кривых деформирования с использованием метода конечных элементов. На замену экспериментальным диаграммам деформирования предлагаются их аппроксимации. Представлен процесс разработки конечно-элементных моделей растяжения элементарного образца и трёхточечного изгиба балки. В каждой из конечно-элементных моделей материал задан путём использования аппроксимаций диаграмм деформирования. Представлены результаты сравнительного оценивания аппроксимаций по нескольким критериям.

## **THE ABSTRACT**

35 pages, 24 pictures, 11 tables

**FINITE ELEMENT METHOD, APPROXIMATION OF DEFORMATION CURVES, TENSION OF SAMPLE, THREE POINT BENDING OF BEAM, IMPLICIT INTEGRATION SCHEME**

This paper presents a comparison of three approximations of strain curves using the finite element method. Their approximations are proposed to replace the experimental strain diagrams. The process of developing finite element models of elementary specimen tensile and three-point beam bending is presented. In each of the finite element models, the material is specified by using approximations of strain diagrams. The results of comparative evaluation of the approximations by several criteria are presented.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Глава 1. Аппроксимации кривых деформирования. ....	8
1.1 Первый вариант аппроксимации.....	8
1.2 Второй вариант аппроксимации.....	9
1.3 Третий вариант аппроксимации .....	10
1.4 Заключение к главе .....	10
Глава 2. Моделирование одноосного растяжения элементарного образца..	13
2.1 Построение аппроксимаций по табличным данным для проведения моделирования одноосного растяжения.....	13
2.2 Разработка конечно-элементной модели для виртуального испытания	15
2.2.1 Построение геометрии .....	15
2.2.2 Используемая модель материала.....	16
2.2.3 Построение конечно-элементной сетки .....	17
2.2.4 Приложенные нагрузки и настройки решателя.....	19
2.3 Анализ полученных результатов.....	20
2.3.1 Анализ зависимости полученных результатов от характерного размера конечного элемента .....	20
2.3.2 Сравнение полученных кривых деформирования с экспериментальными данными.....	23
Глава 3. Моделирование трёхточечного изгиба балки .....	27
3.1 Построение аппроксимаций по табличным данным для проведения моделирования изгиба балки .....	27
3.2 Настройка конечно-элементной модели.....	28
3.2.1 Построение геометрии .....	28

3.2.2 Используемая модель материала.....	30
3.2.3 Построение конечно-элементной сетки для трёхточечного изгиба балки .....	32
3.2.4 Приложенные нагрузки и настройки решателя.....	34
3.3 Анализ полученных результатов.....	38
Заключение .....	42
Список использованных источников .....	44

## ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод, широко используемый для решения задач механики при проектировании изделий в различных отраслях промышленности. В конечно-элементных программных комплексах существует большое количество моделей, описывающих поведение определённых классов материалов. Так, например, в исследованиях [6], [14] и [10] с целью моделирования поведения бетона, дерева и взрывающегося воздуха используются специальные модели, описывающие определяющие соотношения и реологию именно для этих материалов.

С целью моделирования поведения упругопластических материалов для решения задач с учётом больших деформаций, температурного влияния или влияния скорости деформаций можно воспользоваться моделью материала, принимающей на вход зависимость напряжений от деформаций (диаграмму деформирования), полученную в результате выполнения натурального эксперимента для одноосного растяжения образца и не требующую подбора каких-либо констант. В условиях отсутствия возможности проведения экспериментов для определения кривой деформирования актуальной становится задача использования аппроксимаций, которые строятся по стандартным справочным данным, таким как: модуль Юнга, предел текучести, предел прочности и др.

В данной работе оценивается возможность применения нескольких аппроксимаций зависимостей напряжений от деформаций для решения задач о растяжении элементарного образца и о трёхточечном изгибе балки. В первой главе приведены теоретические материалы, необходимые для построения аппроксимаций. Во второй главе описано моделирование одноосного растяжения элементарного образца и представлено сравнение полученных результатов с данными натуральных испытаний. В третьей главе описана разработка конечно-элементной модели трёхточечного изгиба балки, а также представлена

оценка результатов использования моделей материала, полученных с применением данных аппроксимаций.

## Глава 1. Аппроксимации кривых деформирования.

В данной главе представлены общие теоретические сведения, необходимые для построения аппроксимаций кривых деформирования.

Следует отметить, что в данной главе и во всей работе, деформация обозначенная  $\varepsilon$  является инженерной деформацией, а  $\varepsilon_{и}$  – истинной. Аналогично обозначаются инженерные напряжения  $\sigma$  и истинные  $\sigma_{и}$ .

Истинные и инженерные величины связаны между собой следующими соотношениями (в соответствии с учебным пособием «Сопротивление материалов» [5]):

$$\varepsilon_{и} = \ln(1 + \varepsilon), \quad (1.1)$$

$$\sigma_{и} = \sigma(1 + \varepsilon_{и}). \quad (1.2)$$

Также введём обозначение для пластических деформаций с помощью индекса  $\varepsilon_{пл}$  и  $\varepsilon_{и,пл}$ , которые рассчитываются по формулам:

$$\varepsilon_{пл} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}, \quad (1.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга, формула для пластической части истинных деформаций аналогична формуле (1.3).

### 1.1 Первый вариант аппроксимации

В данном разделе рассматривается аппроксимация из статьи О.С. Банкиной, А.С. Дзюбы, А.М. Хватан [1]:

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E}, & 0 < \sigma < \sigma_{пц} \\ \frac{\sigma}{E} + 0,002 \left( \frac{\sigma - \sigma_{пц}}{\sigma_{0,2} - \sigma_{пц}} \right)^N, & \sigma_{пц} < \sigma < \sigma_{в} \end{cases}, \quad (1.4)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\sigma_{0,2}$  – предел текучести,  $\sigma_{пц}$  – предел пропорциональности,  $\sigma_{в}$  – предел прочности,  $\delta$  – остаточное удлинение, а  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – искомые деформации и напряжения, а  $N$  определяется по формуле

$$N = \frac{\ln\left(\frac{\delta}{0,002}\right)}{\ln\left(\frac{\sigma_{в} - \sigma_{пц}}{\sigma_{0,2} - \sigma_{пц}}\right)}, \quad (1.5)$$

В формуле (1.4) деформации зависят от напряжений, таким образом, задав точки напряжений, как входные данные, сможем построить соответствующие им деформации. Как можно заметить, данная аппроксимация требует знания пяти табличных констант материала.

## 1.2 Второй вариант аппроксимации

Далее рассматривается аппроксимация зависимости напряжений от деформаций, которая представлена в стандартах ASME [8]. Начнём с введения необходимых параметров.

Параметры аппроксимации  $m_2$  и  $\varepsilon_p$  определяются из таблицы, представленной в стандарте [8, с. 149],  $\varepsilon_{0,2} = 0,002$  – деформация при напряжении равном пределу текучести,  $\sigma$  – текущее напряжение. Предел текучести, предел прочности и модуль Юнга определяются из справочных данных для конкретного материала.

Используя  $m_2$ , определим  $A_2$  и  $\varepsilon_2$ :

$$A_2 = \frac{\sigma_B \exp(m_2)}{m_2^{m_2}}, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\sigma}{A_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}, \quad (1.7)$$

далее определим параметр  $R$  по следующей формуле:

$$R = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_B}. \quad (1.8)$$

Используя формулу (1.8), определим параметры  $K$  и  $m_1$ :

$$K = 1,5R^{1,5} - 0,5R^{2,5} - R^{3,5} \quad (1.9)$$

$$m_1 = \frac{\ln(R) + (\varepsilon_p - \varepsilon_{0,2})}{\ln\left(\frac{\ln(1 + \varepsilon_p)}{\ln(1 + \varepsilon_{0,2})}\right)}, \quad (1.10)$$

из параметра  $K$  определим параметр  $H$ :

$$H = \frac{2(\sigma - (\sigma_{0,2} + K(\sigma_B - \sigma_{0,2})))}{K(\sigma_B - \sigma_{0,2})}, \quad (1.11)$$

а из  $m_1$  определим  $A_1$  и  $\varepsilon_1$ :

$$A_1 = \frac{\sigma_{0,2}(1 + \varepsilon_{0,2})}{(\ln(1 + \varepsilon_{0,2}))^{m_1}}, \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\sigma}{A_1}\right)^{\frac{1}{m_1}}, \quad (1.13)$$

из формул (1.11) и (1.13) получим:

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon_1}{2}(1 - \tanh(H)), \quad (1.14)$$

а из формул (1.11) и (1.7) получим

$$\gamma_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}(1 - \tanh(H)), \quad (1.15)$$

$\gamma_1$  и  $\gamma_2$  используются в конечной формуле аппроксимации:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \gamma_1 + \gamma_2, \quad (1.16)$$

где  $\varepsilon$  – искомая деформация, определяемая по напряжениям  $\sigma$ , задающимся на вход.

### 1.3 Третий вариант аппроксимации

В данном разделе рассматривается аппроксимация из справочника «Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении» [3]

$$\sigma_{\text{н}} = K_0 \varepsilon_{\text{н}}^{m_0}, \quad (1.17)$$

где  $K_0$  и  $m_0$  – константы материала, определяющиеся по следующим формулам:

$$m_0 = \begin{cases} \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{0,2}}\right) + 0,058}{3,44}, & \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{0,2}} \leq 1,32 \\ \frac{\ln\left(\frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{0,2}}\right) + 0,216}{4,78}, & \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{0,2}} > 1,32 \end{cases}, \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} \frac{K_0 m_0}{\exp(m_0)} = \sigma_{\text{в}} \\ K_0 (0,002)^{m_0} = \sigma_{0,2} \end{cases}, \quad (1.19)$$

Зная  $m_0$ , можно выразить  $K_0$ , используя второе уравнение из системы (1.19), таким образом

$$K_0 = \frac{\sigma_{0,2}}{(0,002)^{m_0}}, \quad (1.20)$$

подставив формулу (1.20) в (1.17) получим аппроксимацию в упрощённом виде

$$\sigma_{\text{н}} = \sigma_{0,2} \left(\frac{\varepsilon_{\text{нпл}}}{0,002}\right)^{m_0}. \quad (1.21)$$

### 1.4 Заключение к главе

Проводя сравнительный анализ аппроксимаций по информации, приведённой в данной главе, следует отметить, что применимости всех аппроксимаций ограничены пределом прочности, поэтому рассмотреть поведение материала можно только в упругой и пластической части, без учёта разрушения. Первая и вторая аппроксимация позволяют построить линейный участок кривой деформирования, при использовании модуля Юнга, третья же аппроксимация не описывает упругую часть кривой деформирования. Первая аппроксимация для построения пластической части кривой принимает на вход 4 параметра: предел пропорциональности, предел текучести, предел прочности и остаточное удлинение. Для построения второй и третьей аппроксимаций необходимо знание лишь предела текучести и предела прочности.

Построение аппроксимаций произведено путём написания программного кода на языке python. Для оценки вычислительной сложности для каждого алгоритма проведена оценка расчётного времени, таким образом: первая аппроксимация – 2,253 мс, вторая аппроксимация – 2,966 мс, третья аппроксимация – 0,533 мс.

С целью детального сравнения кривых в таблице 1.1 приведена оценочная шкала критериев аппроксимаций, где 4 балла – наихудший результат, 1 балл – наилучший. Для критериев также назначены весовые коэффициенты  $k$ : вычислительная точность –  $k = 0,8$ , время расчёта –  $k = 1$ , количество вводимых параметров –  $k = 0,5$ .

Таблица 1.1 – Оценочная шкала критериев аппроксимаций

Оценка в баллах	Вычислительная точность	Вычислительная сложность	Вводимые параметры
4	15% – 20%	3 мс – 4 мс	4
3	10% – 15%	2 мс – 3 мс	3
2	5% – 10%	1 мс – 2 мс	2
1	0% – 5%	0 мс – 1 мс	1

На данном этапе работы возможна оценка аппроксимация по вычислительной сложности и количеству вводимых параметров. Таким образом, в таблице 1.2 приведена сравнительная оценка аппроксимаций с учётом весовых коэффициентов.

Таблица 1.2 – Сравнительная оценка аппроксимаций

Название аппроксимации	Вычислительная сложность	Вводимые параметры	Итоговая оценка в баллах
Банкина, Дзюба, Хватан	3	4	5
ASME	3	2	4
Гохфельд	2	2	3

Таким образом, при сравнении аппроксимаций по двум критериям третья аппроксимация оценена наименьшим количеством баллов, т.е. более рациональна. Однако немаловажным параметром оценки является точность расчётов, оценка по данному критерию произведена в следующих главах данной работы.

## **Глава 2. Моделирование одноосного растяжения элементарного образца**

В данной главе описаны результаты виртуального испытания на одноосное растяжение материала в соответствии с ГОСТ 1497-84 [2] с использованием рассматриваемых трёх вариантов аппроксимаций.

С целью исследования зависимости сходимости результатов моделирования от характерного размера конечного элемента построены модели с размером элемента 5 мм, 4 мм, 2 мм и 1 мм. Результатами данных расчётов являются кривые деформирования, полученные в ходе виртуального испытания. Проведено сравнение расчётных результатов с экспериментальными данными.

### **2.1 Построение аппроксимаций по табличным данным для проведения моделирования одноосного растяжения**

С целью моделирования одноосного растяжения образца выбран материал сталь 13X11H2B2MB. В соответствии с данными из учебника [7], представленными в таблице 2.1, построены аппроксимации кривых деформирования. Полученные кривые деформирования изображены на рисунке 2.1.

Таблица 2.1 – Механические характеристики стали 13X11H2B2MB

t, °C	E, Мпа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\sigma_b$ , МПа	$\sigma_{\text{ПЦ}}$ , МПа	$\delta$ , %
20	210000	1070	1250	800	4

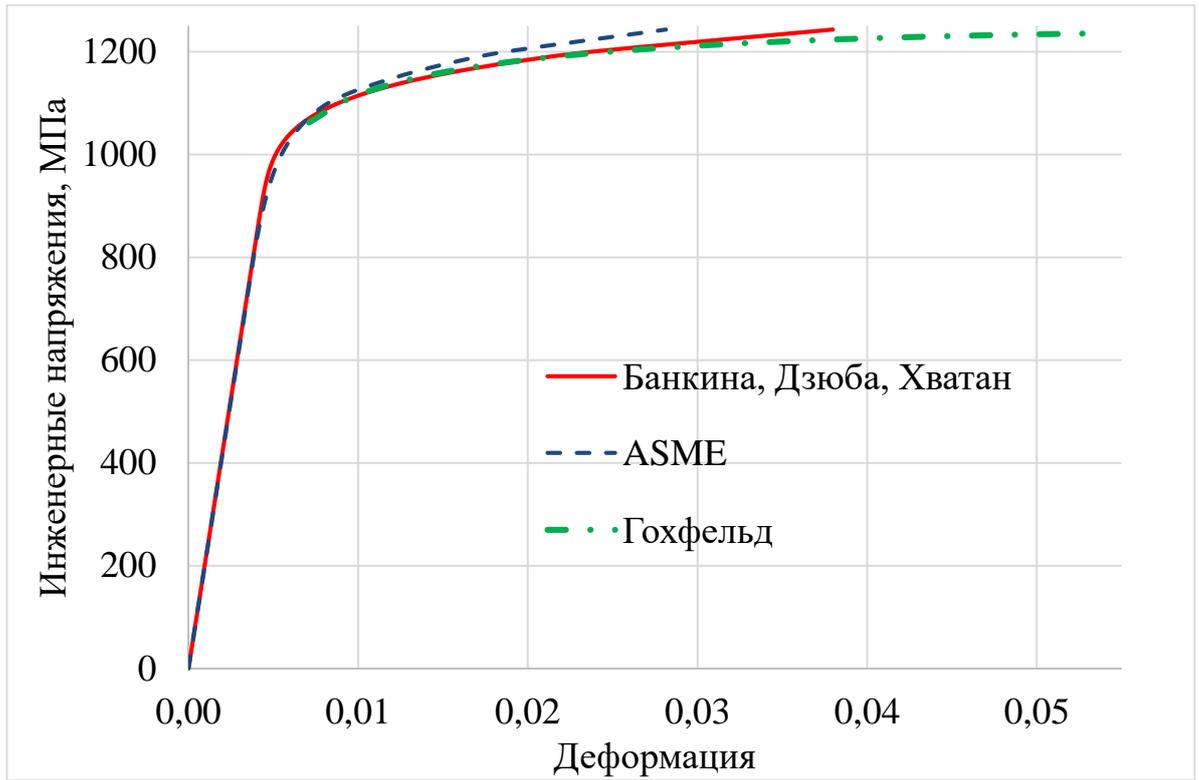


Рисунок 2.1 – Аппроксимации диаграммы деформирования

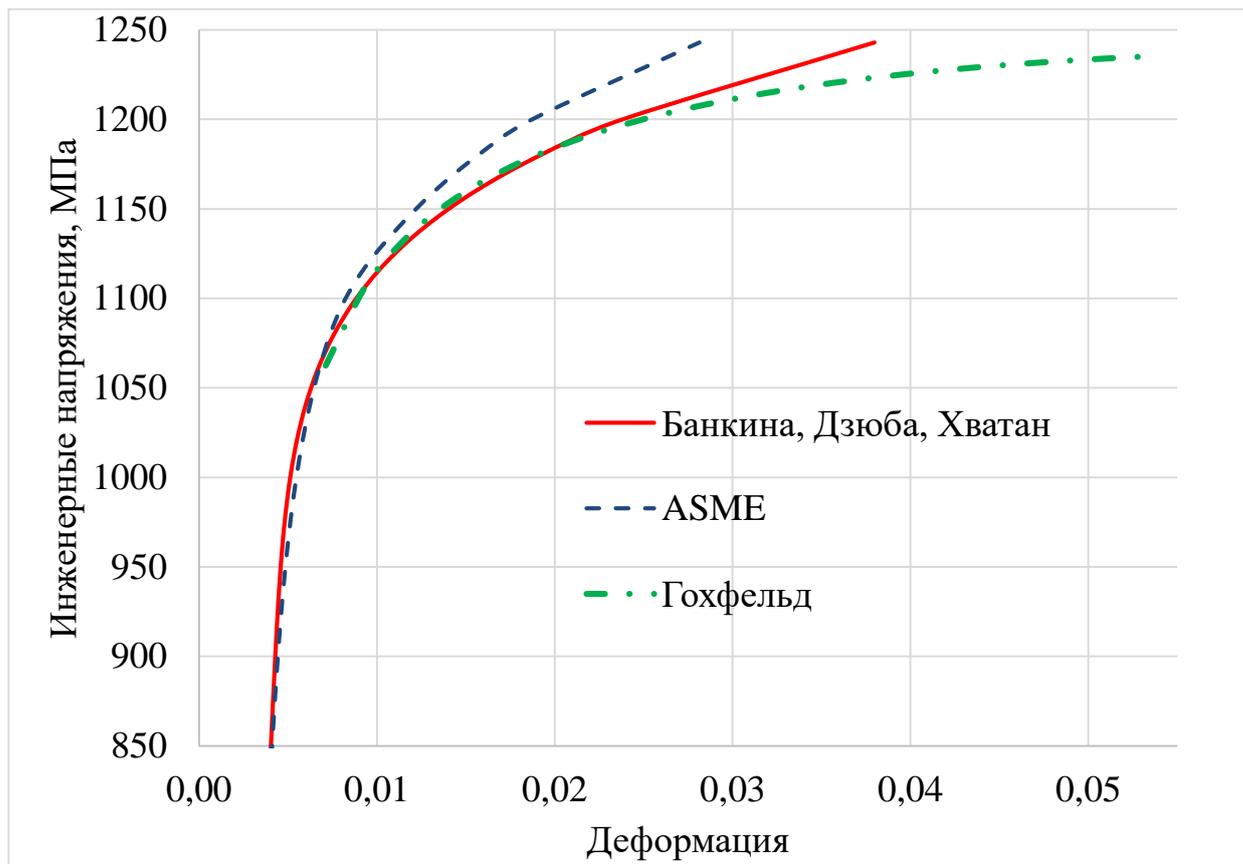


Рисунок 2.2 – Аппроксимации диаграммы деформирования

## 2.2 Разработка конечно-элементной модели для виртуального испытания

### 2.2.1 Построение геометрии

Форма элементарного образца, используемого для проведения виртуального эксперимента, соответствует представленной на рисунке 2.3.

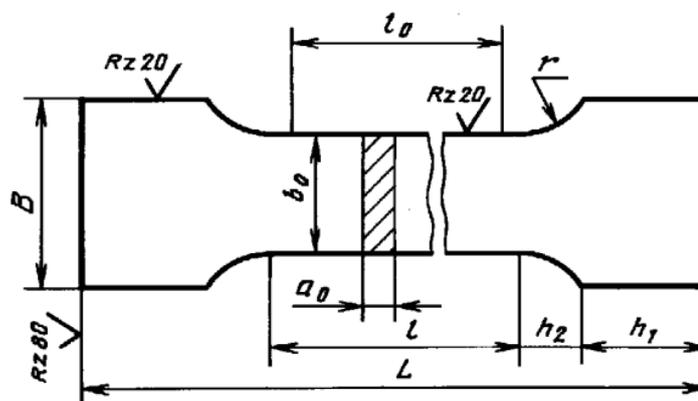


Рисунок 2.3 – Размеры плоского пропорционального образца [2]

При построении модели элементарного образца выбраны следующие размеры, соответствующие образцу №21 в ГОСТ 1497-84 [2] и приведённые в таблице 2.2. Образец №21 – один из образцов с наименьшей длиной, что рекомендуется в ГОСТе в разделе «Метод отбора элементарных образцов».

Таблица 2.2 – Размеры элементарного образца

Геометрические размеры образца, мм							
$a_0$	$b_0$	$l_0 = 5,65\sqrt{F_0}$	$l$	$B$	$h_1$	$h_2$	$L$
5	20	60	75	40	50	10	195

### 2.2.2 Используемая модель материала

В качестве модели материала в LS-Dyna выбрана мультилинейная модель \*MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY (024), как одна из наиболее простых, позволяющих описывать нелинейное поведение материала. Этот тип модели представляет собой упругопластический материал с произвольным напряжением в зависимости от кривой деформации. На вход решателю подаётся пластическая часть кривой деформирования в терминах истинных напряжений и истинных пластических деформаций. Основные параметры модели материала 024 представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Основные параметры модели материала \*MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY

Параметр	Описание
MID	Идентификатор материала
$RO, \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$	Плотность материала
$E, \text{Мпа}$	Модуль Юнга материала
$PR$	Модуль Пуассона материала
$SIGY$	Предел текучести (игнорируется, если задана кривая деформирования)
$ETAN$	Касательный модуль (игнорируется, если задана кривая деформирования)

Параметр	Описание
<i>FAIL</i>	Опция, задающая разрушение материала: $\leq 0$ – для определения разрушения вызывается пользовательская подпрограмма $= 0$ – разрушение не учитывается $\geq 0$ – пластическая деформация, после достижения которой элемент исключается из расчёта
<i>TDEL</i>	Минимальный шаг по времени для автоматического удаления элемента
<i>C, P</i>	Параметры скорости деформации (используются в модели Купера-Саймондса)
<i>LCSS</i>	Кривая деформирования: зависимость истинных напряжений от пластических деформаций
<i>LCSR</i>	Идентификатор, определяющий масштабирование предела текучести в зависимости от скорости деформации
<i>VR</i>	Опция, определяющая эффекты скорости деформации: $-1$ – Купер-Саймондс: эффективная девиаторная часть скоростей деформации, а не полная $0$ – Масштабирование по пределу текучести (по умолчанию) $1$ – Вязкоупругое определение $3$ – Аналогично $0$ , но с отфильтрованными эффективными полными скоростями деформаций

Настройка модели материала для моделирования растяжения образца производится по механическим свойствам, приведённым в таблице 2.1 и аппроксимациям, представленным на рисунке 2.1.

### 2.2.3 Построение конечно-элементной сетки

Конечно-элементная сетка выполнена твердотельными восьми-узловыми гексаэдральными элементами первого порядка, формулировка элемента: ELFORM=1, что, в соответствии с руководством пользователя LS-Dyna [12], означает, что это элементы постоянного напряжения. Математические соотношения для таких твердотельных элементов приведены в теоретическом пособии LS-Dyna [13]. Характерный размер элемента в первом приближении – 5 мм, конечно-элементная сетка представлена на рисунке 2.4. На той же геометрии построена сетка с характерным размером элемента 4 мм, 2 мм и 1 мм, количественные данные по моделям представлены в таблице 2.4.

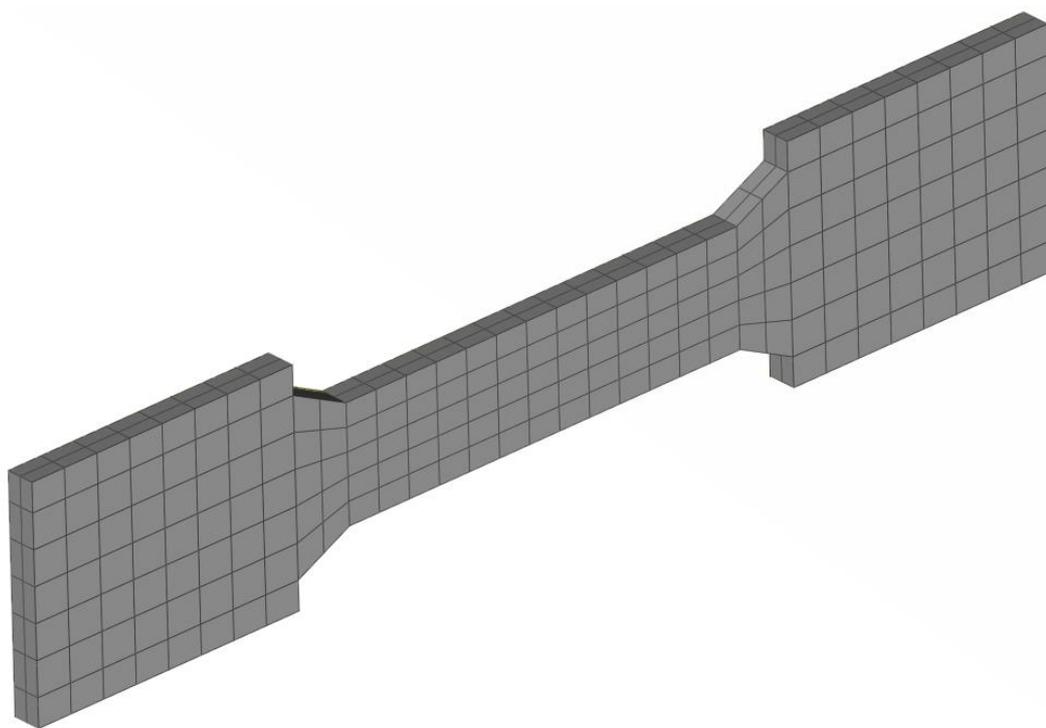


Рисунок 2.4 – Конечно-элементная сетка с характерным размером элемента 5мм

Таблица 2.4 – Параметры сетки элементарного образца

Характерный размер элемента, мм	5	4	2	1
Количество элементов	394	818	9000	34550
Количество узлов	720	1416	11562	42948

### 2.2.4 Приложенные нагрузки и настройки решателя

К модели приложены следующие граничные условия, изображенные на рисунке 2.5:

- левая головка жёстко зафиксирована по всем степеням свободы;
- правая головка закреплена по всем степеням свободы, кроме трансляционной по оси  $OX$ ;
- к правой головке приложено перемещение 3 мм, равномерно возрастающее с течением времени.

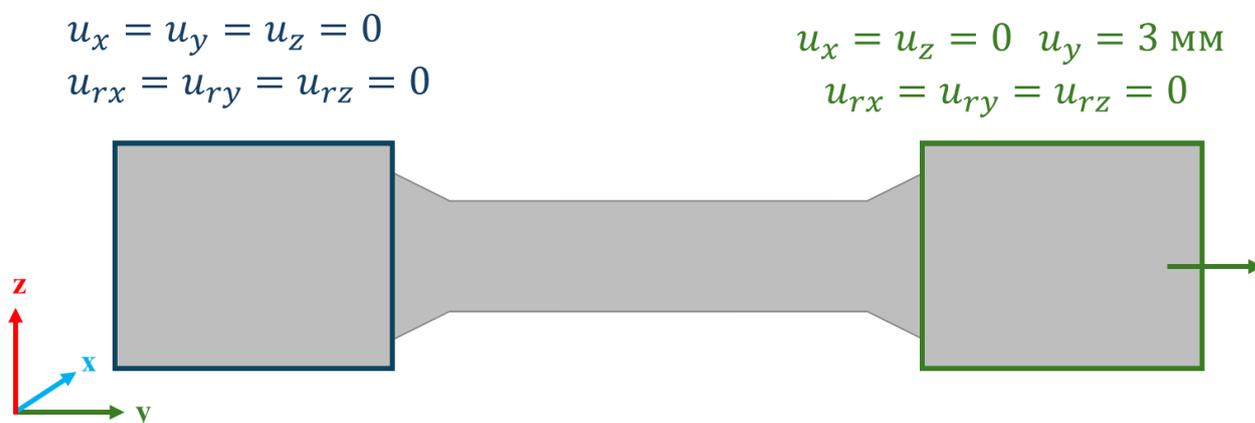


Рисунок 2.5 – Граничные условия

Задача решалась в неявной постановке с шагом по времени 0,02 с и полным временем расчёта 1 с. Схема решения задачи выбрана в связи с большой длительностью приложения нагрузки, в статье [9] для такого случая предлагается выбрать именно неявный метод решения.

С целью определения инженерных деформаций на каждом шаге по времени фиксируется удлинение образца и пересчитывается по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.1)$$

где  $\Delta l$  – удлинение образца, а  $l$  – длина образца.

Инженерные напряжения пересчитываются с помощью усилий, полученных в поперечном сечении элементарного образца в каждый момент времени по формуле

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (2.2)$$

где  $F$  – усилие в сечении,  $S$  – площадь поперечного сечения.

## 2.3 Анализ полученных результатов

2.3.1 Анализ зависимости полученных результатов от характерного размера конечного элемента

Расчёт проведён с использованием материала, настроенного по аппроксимации из статьи О.С. Банкиной, А.С. Дзюбы, А.М. Хватан [1]. Выполнение сеточной сходимости для одного материала гарантирует выполнение сеточной сходимости для других материалов с такой же постановкой задачи.

В результате расчётов с различным характерным размером элемента получены кривые деформирования, представленные на рисунке 2.6. В результате анализа данного графика видно, что кривые почти сливаются друг с другом, поэтому для большей наглядности на рисунке 2.7 представлены пластические части кривых. На рисунке 2.8 представлена погрешность относительно расчёта с размером элемента 1 мм. Видно, что погрешность не превышает 0,4%, т.е. результаты не меняются в зависимости от размера элемента.

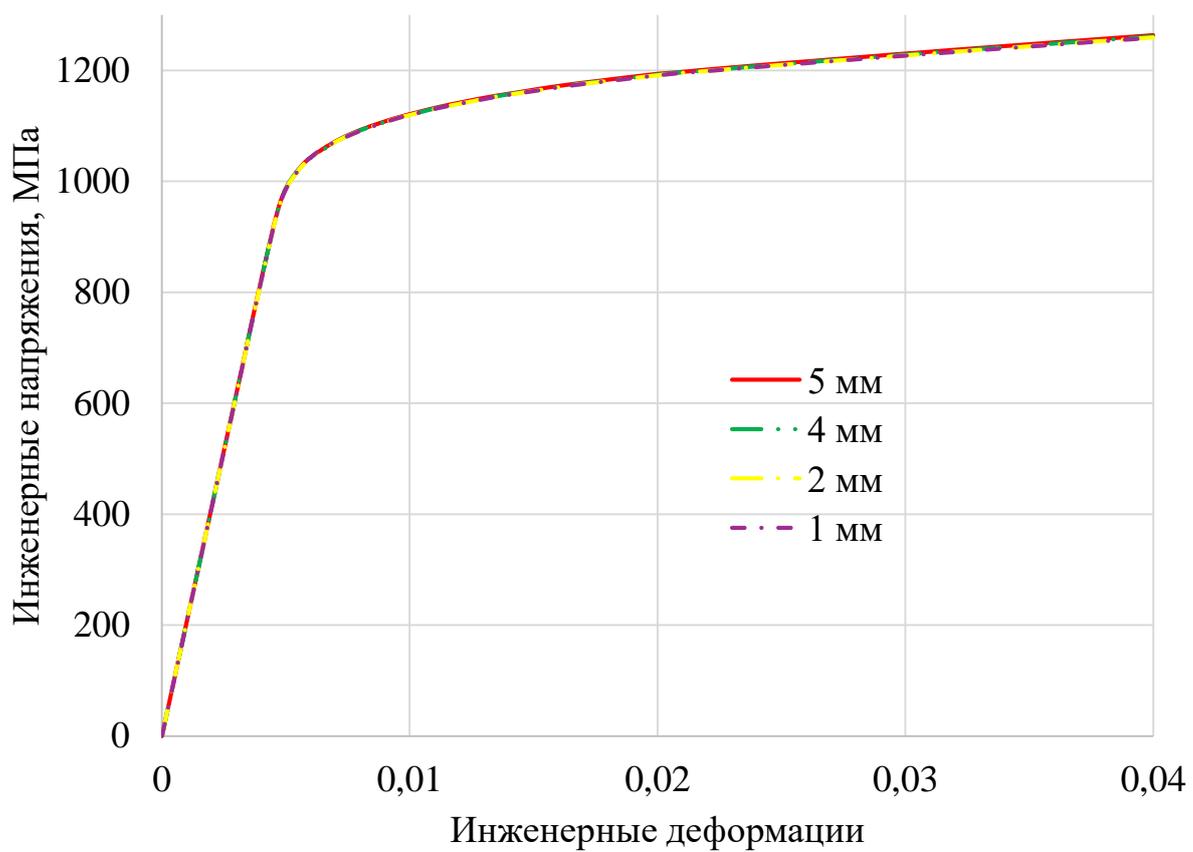


Рисунок 2.6 – Полученные кривые деформирования при различном характерном размере элемента

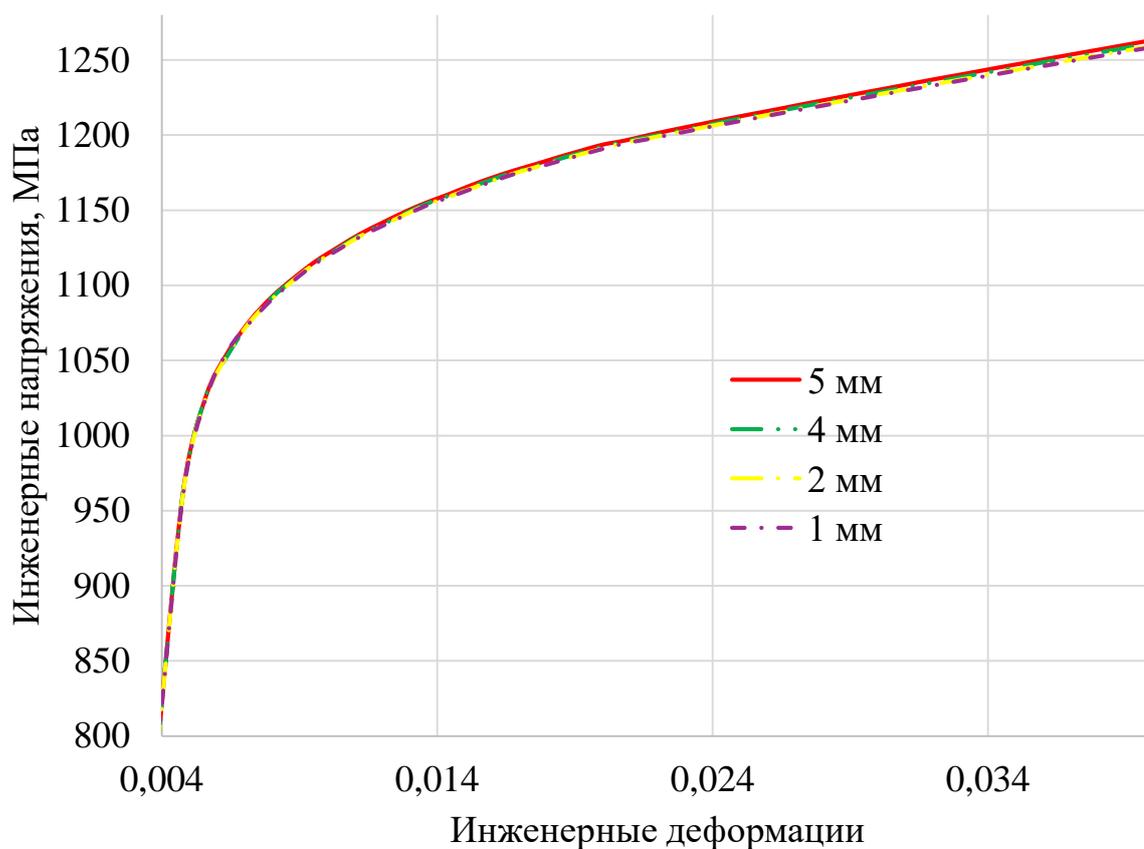


Рисунок 2.7 – Пластические части полученных кривых деформирования при различном характерном размере элемента

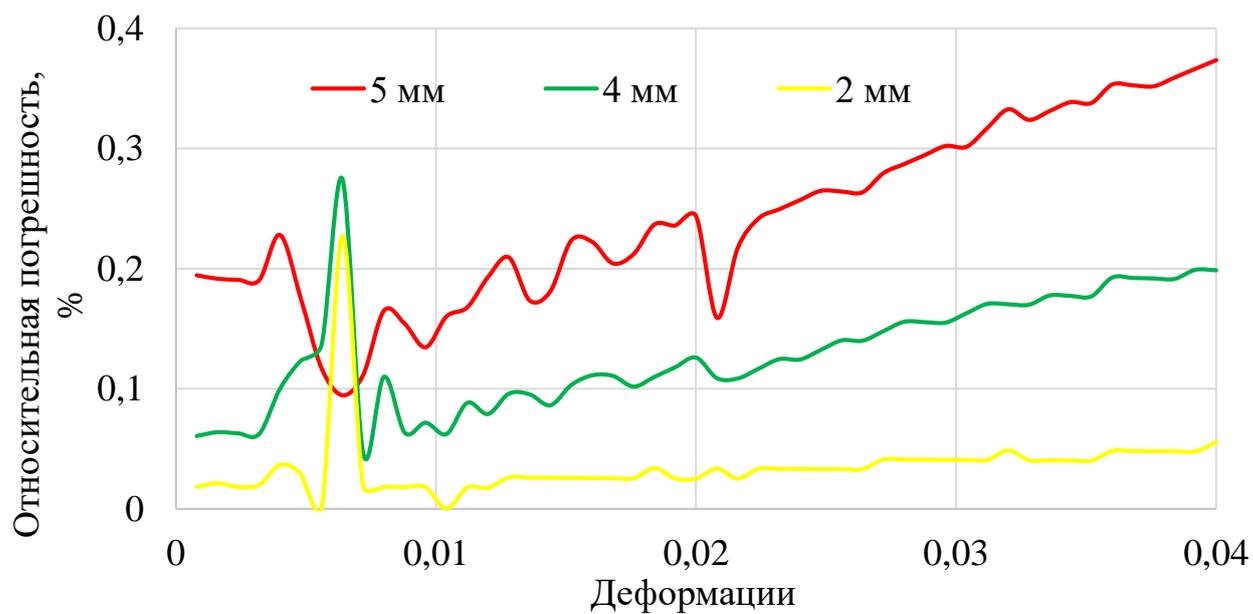


Рисунок 2.8 – Относительная погрешность

Согласно результатам исследования на сеточную сходимость, в дальнейших расчётах используется конечно-элементная модель с характерным размером элемента 5 мм. На рисунке 2.9 представлен график зависимости времени расчёта от размера элемента. Время расчета на самой крупной сетке в 58 раз меньше, чем на самой мелкой, что ещё раз подтверждает целесообразность выбора характерного размера элемента.

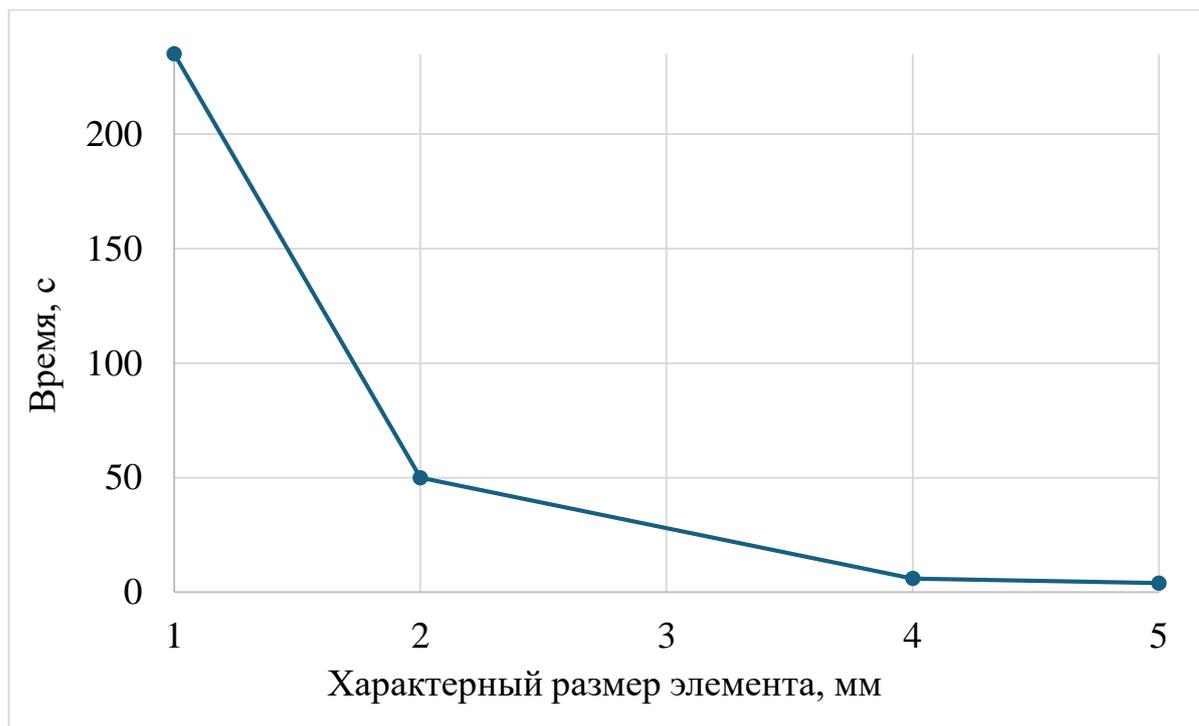


Рисунок 2.9 – Зависимость времени расчёта от размера характерного элемента

2.3.2 Сравнение полученных кривых деформирования с экспериментальными данными

На рисунке 2.10 представлены зависимости напряжений от деформаций, полученные расчетным способом с использованием аппроксимаций кривых деформирования. Проводя сравнительный анализ полученных результатов, следует отметить, что качественно все кривые деформирования, полученные в результате расчёта, похожи на экспериментальные данные.

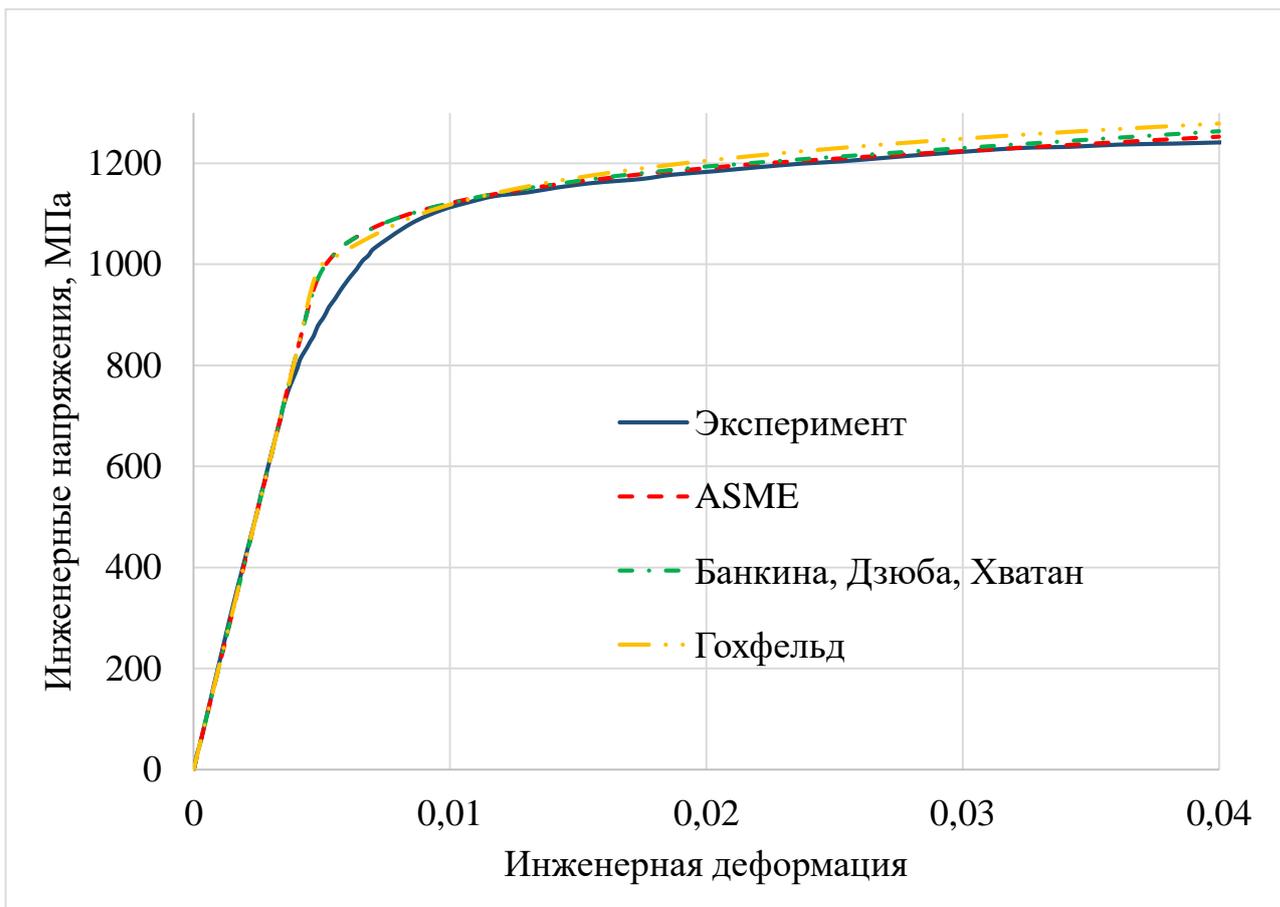


Рисунок 2.10 –Сравнение расчетных и экспериментальной кривых деформирования

С целью более детального изучения кривых деформирования, представлен рисунок 2.11, иллюстрирующий пластические части кривых деформирования, а также рисунок 2.12, на котором изображен график относительной погрешности в зависимости от деформации. Из рисунка 2.12 видно, что расчётные кривые деформирования с большей погрешностью описывают поведение материала после достижения предела пропорциональности и до предела текучести, однако значение погрешности на данном участке остаётся приемлемым и для трёх кривых находится в промежутке от 10,5% до 13%.

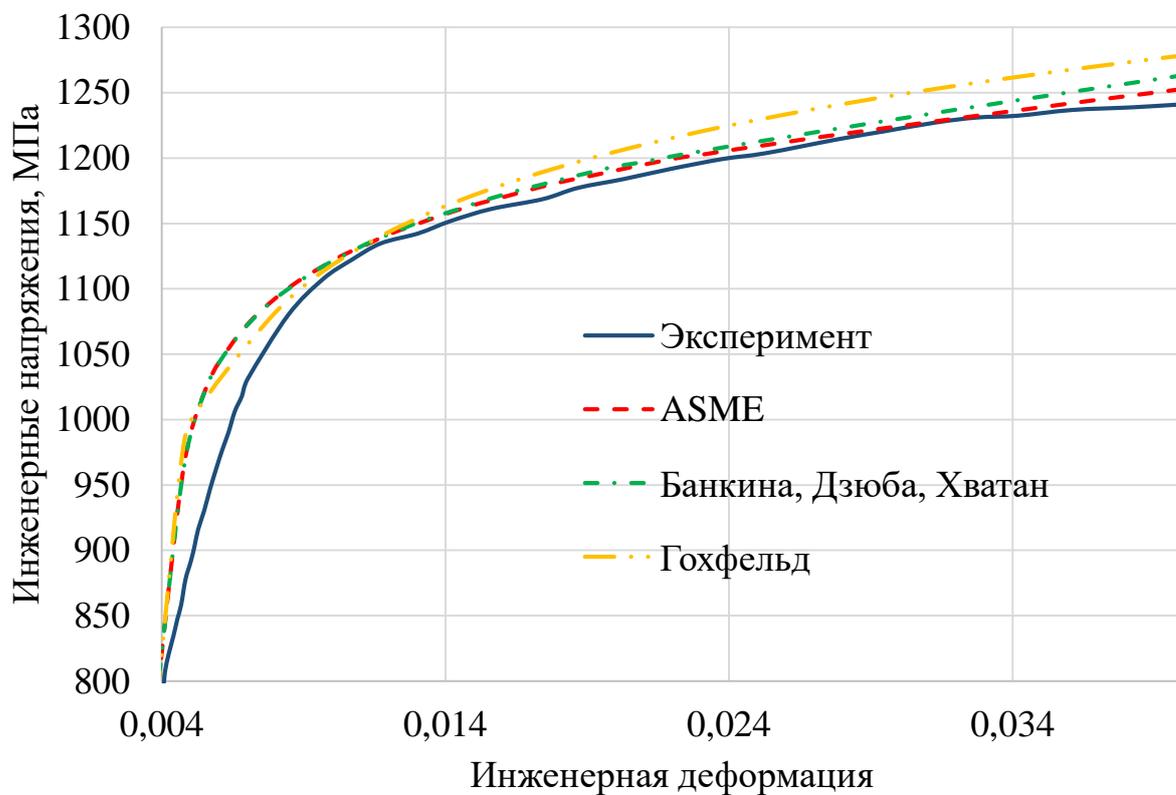


Рисунок 2.11 – Сравнение расчетных и экспериментальной пластических частей кривых деформирования

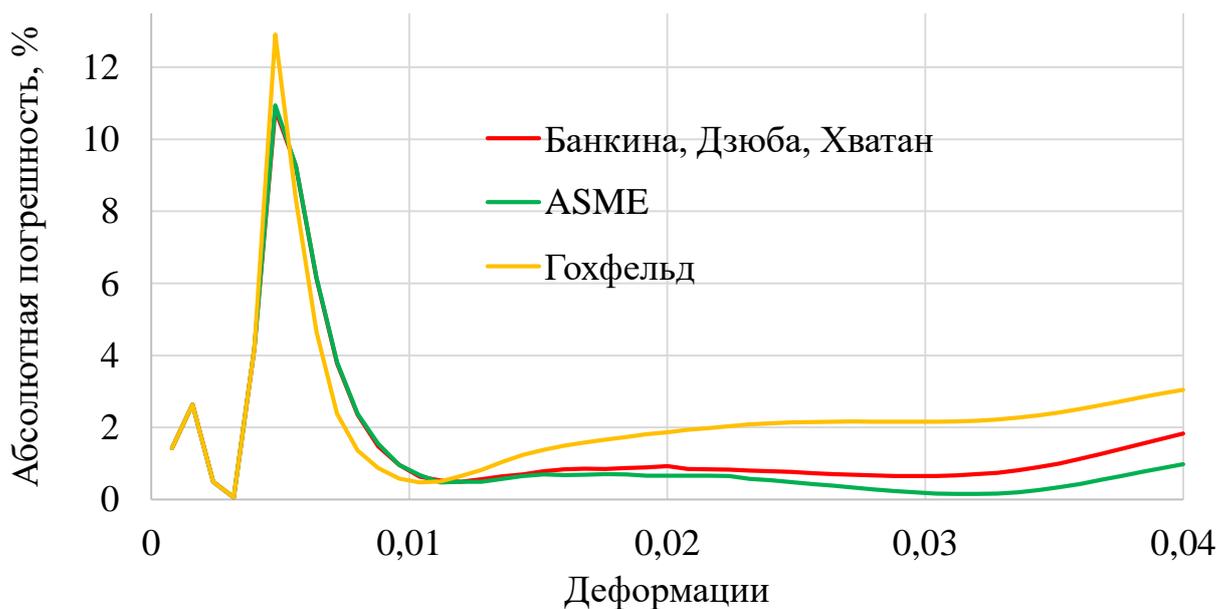


Рисунок 2.12 – Относительная погрешность расчётных результатов в сравнении с экспериментом

Следует отметить, что самую большую погрешность даёт расчёт с использованием аппроксимации из учебника Гохфельда [3], среднее значение погрешности в данном случае составляет 2,7%. Наименьшую погрешность даёт аппроксимация из ASME [8], в расчёте с которой наибольшее количество точек ошибки стремится к нулю, а сам график проходит ниже остальных кривых, среднее значение погрешности 1,2%. Результаты расчёта с использованием аппроксимации из статьи [1] дают среднюю погрешность 1,5%. Таким образом, можно отметить, что использование описанных выше аппроксимаций обеспечивают высокую точность.

### Глава 3. Моделирование трёхточечного изгиба балки

В данной главе описано конечно-элементное моделирование трёхточечного изгиба балки с использованием трёх аппроксимаций кривых деформирования. Виртуальный эксперимент проводится в соответствии со статьёй «Experimental and Numerical simulation of a Three Point Bending» [11]. В данной статье описано проведение эксперимента на трёхточечный изгиб балки двутаврового сечения и получена зависимость усилий от вертикальных перемещений. Для данной модели проведено исследование на сеточную сходимость. По экспериментальной кривой проведена валидация численного расчёта в трёх вариантах материала.

#### 3.1 Построение аппроксимаций по табличным данным для проведения моделирования изгиба балки

Аппроксимации построены по механическим характеристикам материала AISI 304, используемого при проведении эксперимента в статье [11]. Константы материала приведены в таблице 3.1, а аппроксимации построенные по ним представлены на рисунке 3.1.

Таблица 3.1 – Механические характеристики стали AISI 304

t, °C	E, МПа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\sigma_b$ , МПа	$\sigma_{\text{цц}}$ , МПа	$\delta$ , %
20	210000	342	675	255	55

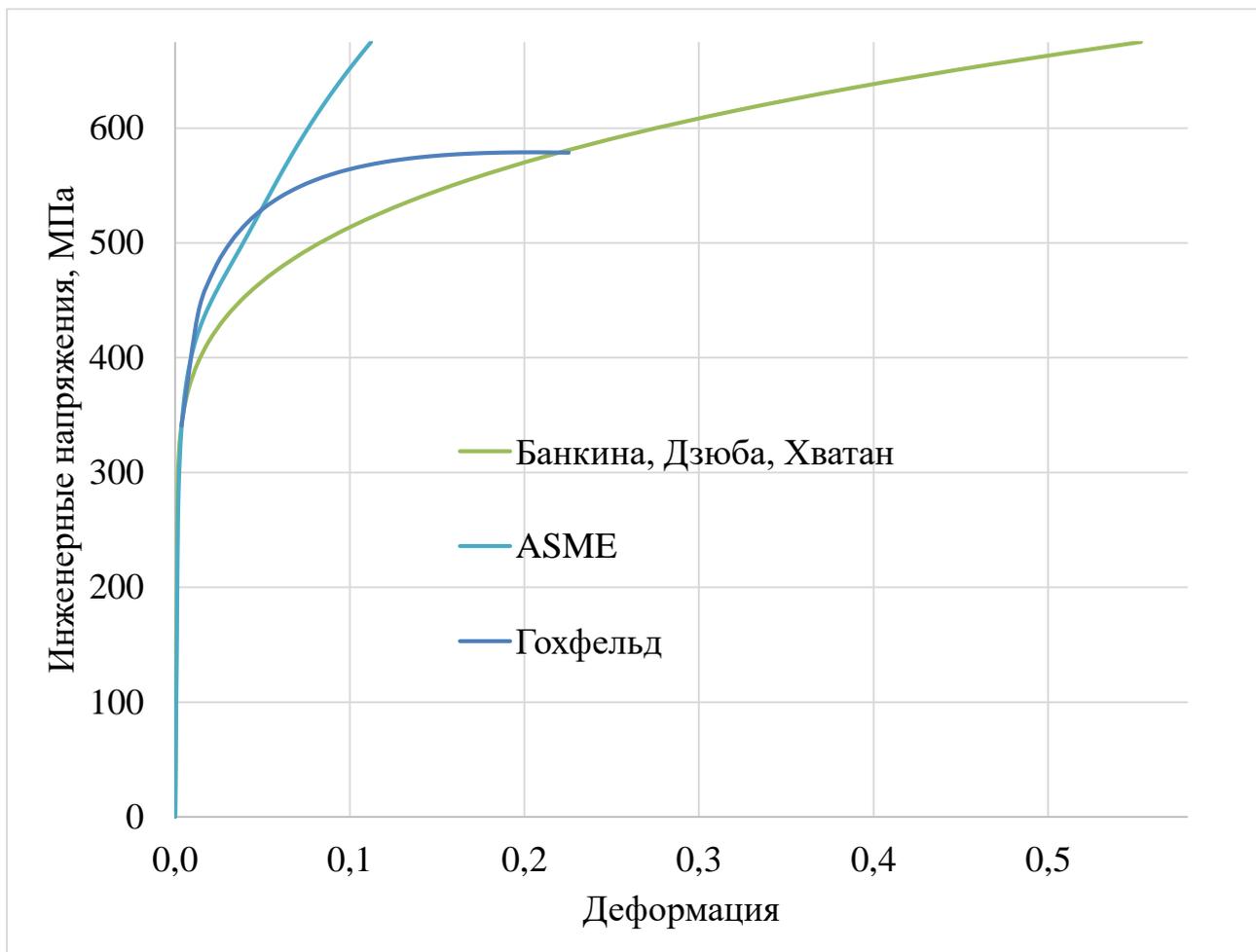


Рисунок 3.1 – Аппроксимации кривых деформирования для материала AISI 304

## 3.2 Настройка конечно-элементной модели

### 3.2.1 Построение геометрии

С целью наиболее точного повторения эксперимента, установка для которого представлена на рисунке 3.2, моделирование изгиба балки произведено с использованием двух цилиндрических поверхностей.



Рисунок 3.2 – Установка для проведения эксперимента на трёхточечный изгиб балки [11]

В статье [11] представлена балка сечения IPE 80 (двутавр), размеры которой, в соответствии с информацией размещённой на сайте [15], приведены в таблице 3.2, также на рисунке 3.3 приведён чертёж сечения балки.

Таблица 3.2 – Геометрические размеры балки IPE 80

Высота	$h$	80 мм
Ширина	$b$	46 мм
Толщина стенки	$t_w$	3.8 мм
Толщина полки	$t_f$	5.2 мм
Длина	$l$	240 мм

Размеры цилиндров определены пропорционально размерам балки. Радиусы цилиндров равны  $R = 20$  мм, высота цилиндров равна ширине балки и составляет 46 мм.

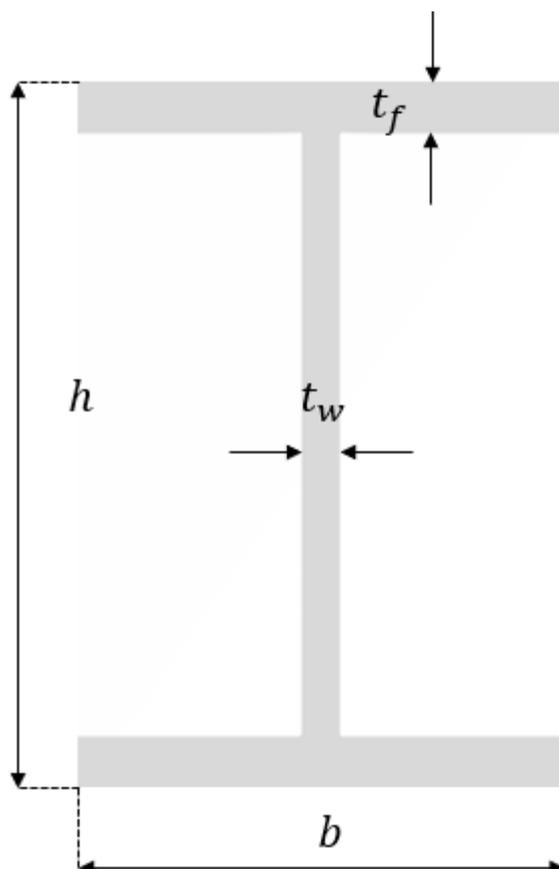


Рисунок 3.3 – Геометрия поперечного сечения балки

### 3.2.2 Используемая модель материала

Цилиндрам присвоен материал \*MAT\_RIGID (020) – модель материала абсолютно твёрдого тела, определение которого по учебному пособию Жилина: «Макротело называется абсолютно твердым, если расстояния между точками этого тела остаются неизменными при всех возможных движениях макротела» [4]. Цилиндры, используемые в данном эксперименте, можно определить, как абсолютно жёсткие тела, так как их деформации должны быть много меньше, чем их геометрические размеры. Модель материала \*MAT\_RIGID имеет подходящие для данной задачи механические свойства, а также позволяет уменьшить вычислительные затраты, т.к. при обработке элементов жёсткого тела для хранения истории переменных не выделяется память, а также нет необходимости создавать полноразмерную модель цилиндра. В таблице 3.3

представлены основные параметры настройки материала абсолютно жёсткого тела.

Таблица 3.3 – Основные параметры настройки материала \*MAT\_RIGID (020)

Параметр	Описание
MID	Идентификатор материала
$RO, \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$	Плотность материала
$E, \text{Мпа}$	Модуль Юнга материала
$PR$	Модуль Пуассона материала
$CMO$	Опция ограничения центра масс: 1 – ограничения в глобальной системе координат 0 – нет ограничений –1 – ограничения в локальной системе координат
$CON1$	Глобальные ограничения на трансляционные перемещения: 0 – нет ограничений 1 – ограничения по оси $x$ 2 – ограничения по оси $y$ 3 – ограничения по оси $z$ 4 – ограничения по оси $x$ и $y$ 5 – ограничения по оси $y$ и $z$ 6 – ограничения по оси $z$ и $x$ 7 – ограничения по оси $x$ , $y$ и $z$
$CON2$	Глобальные ограничения на ротационные перемещения: 0 – нет ограничений 1 – ограничения по оси $x$ 2 – ограничения по оси $y$ 3 – ограничения по оси $z$ 4 – ограничения по оси $x$ и $y$

Параметр	Описание
	5 – ограничения по оси $y$ и $z$ 6 – ограничения по оси $z$ и $x$ 7 – ограничения по оси $x, y$ и $z$

В данном случае плотность материала ( $\rho$ ), модуль Юнга и коэффициент Пуассона ( $\nu$ ) оставлены стандартными константами для стали:  $\rho = 7,85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ,  $\nu = 0,3$  и  $E = 210000$  МПа. Ограничений по степеням свободы не задано, чтобы в дальнейшем задать граничные условия для каждого цилиндра отдельно.

Модель материала балки выбрана такая же, как и в эксперименте на растяжение: \*MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY. Материал настроен по механическим характеристикам, представленным в таблице 3.1 и по аппроксимациям, представленным на рисунке 3.1.

### 3.2.3 Построение конечно-элементной сетки для трёхточечного изгиба балки

Цилиндры и двутавровая балка выполнены твердотельными элементами, аналогично тем, что использовались во второй главе для элементарного образца – восьми-узловые элементы первого порядка, ELFORM = 1. Характерный размера элемента цилиндра 3 мм, толщина равна 1 мм. Конечно-элементная сетка для цилиндров представлена на рисунке 3.4.

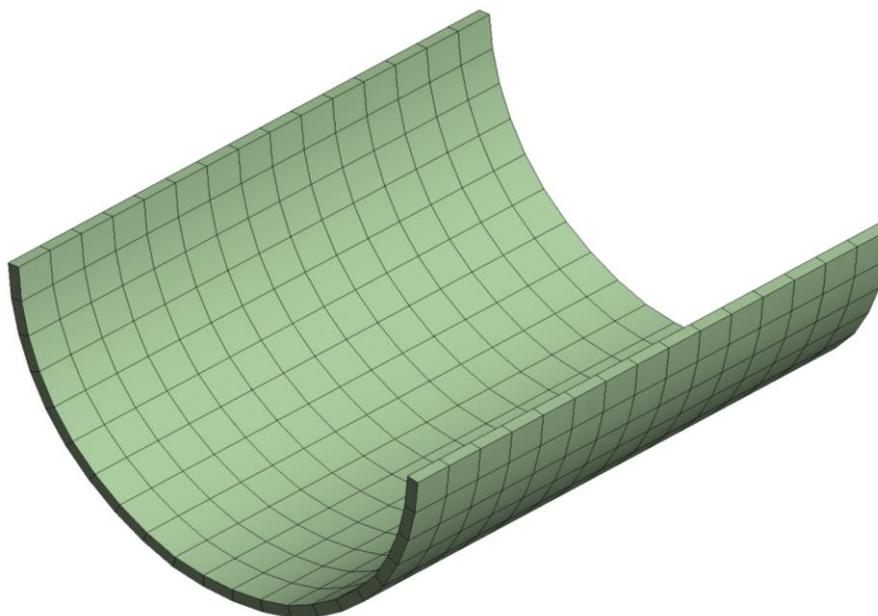


Рисунок 3.4 – Конечно-элементная сетка абсолютно жёсткого цилиндра

Размер элемента для балки выбран исходя из толщины стенки балки, которая равна 3,8 мм. Характерный размер элемента составляет 1,27 мм, то есть 3 элемента по толщине балки, сетка поперечного сечения балки представлена на рисунке 3.5, а общая модель с цилиндрами представлена на рисунке 3.6. Размерность полной модели составляет 82089 элементов и 107400 узлов.

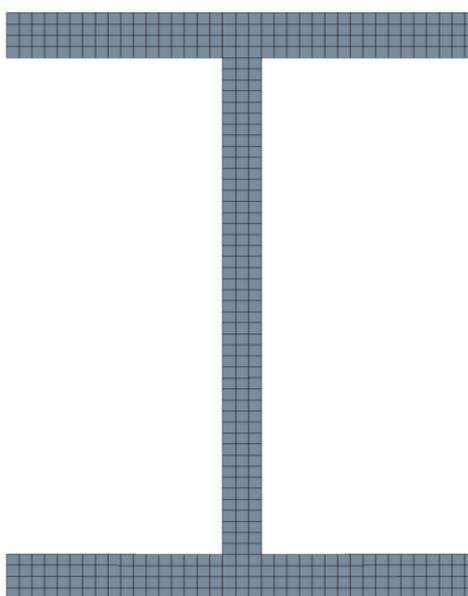


Рисунок 3.5 – Конечно-элементная сетка поперечного сечения балки

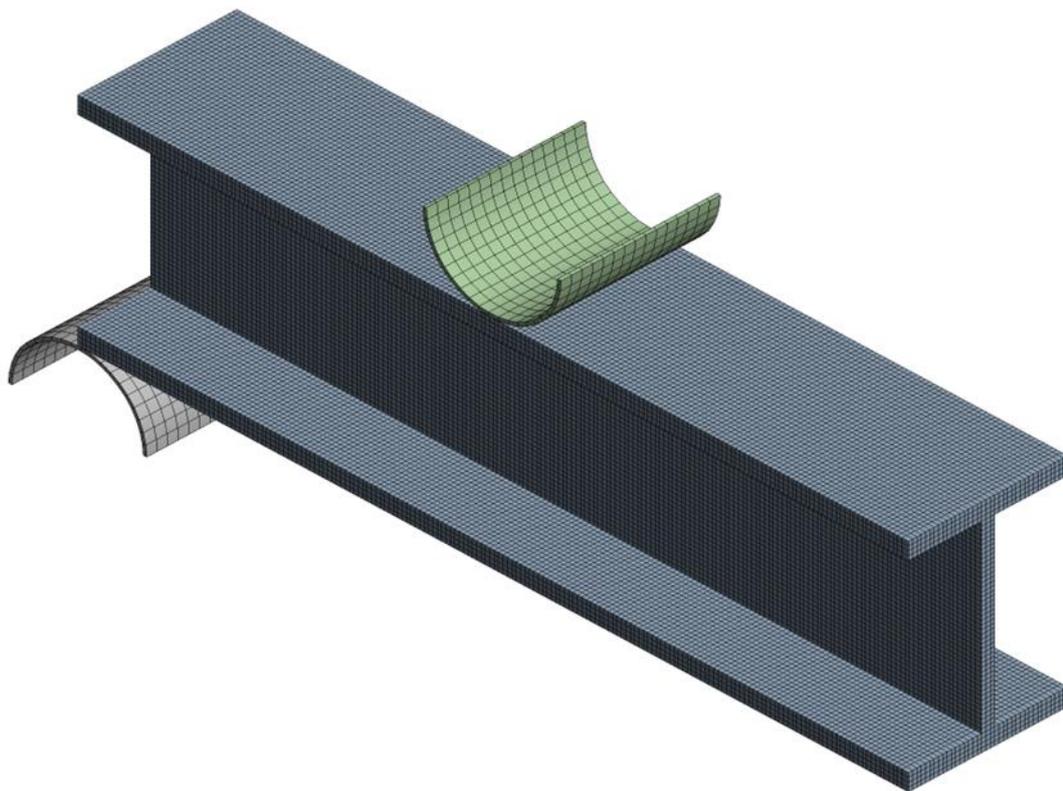


Рисунок 3.6 – Конечно-элементная сетка всей постановки задачи трёхточечного изгиба балки

#### 3.2.4 Приложенные нагрузки и настройки решателя

В модели заданы следующие граничные условия, изображенные на рисунке 3.7:

- нижний цилиндр жёстко зафиксирован по всем степеням свободы;
- справа на нижней полке реализовано жёсткое закрепление, моделирующее защемление балки в реальной установке;
- к верхнему цилиндру приложено перемещение 3,5 мм, линейно возрастающее с течением времени.

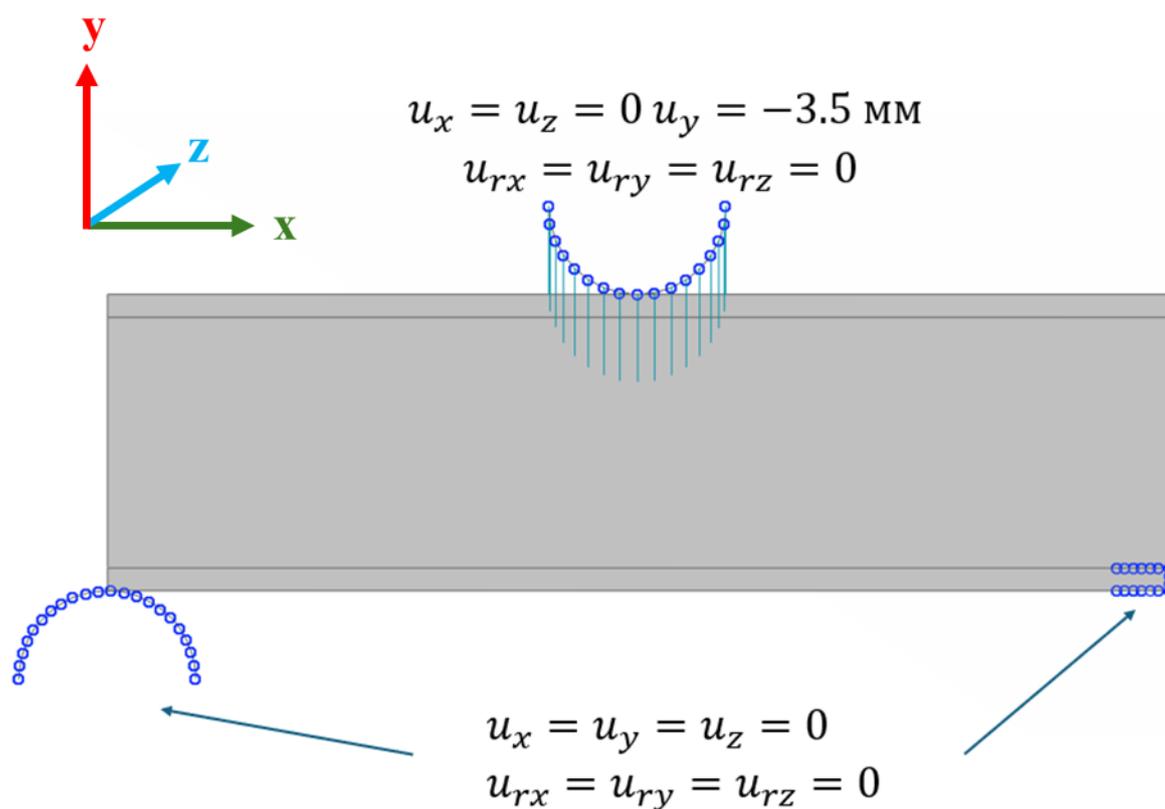


Рисунок 3.7 – Граничные условия

Между цилиндрами и балкой задан контакт типа \*CONTACT\_AUTOMATIC\_SURFACE\_TO\_SURFACE, основные параметры которого указаны в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Основные параметры контакта \*CONTACT\_AUTOMATIC\_SURFACE\_TO\_SURFACE

Параметр	Описание
<i>SSID</i>	Подчиненная контактная поверхность
<i>MSID</i>	Главная контактная поверхность
<i>SSTYP</i>	Типы контактных поверхностей: 0 – набор сегментов 1 – набор оболочек 2 – набор деталей 3 – идентификатор деталей

Параметр	Описание
	<p>4 – набор узлов</p> <p>5 – включается все предыдущие, но игнорируется <i>SSID</i></p> <p>6 – включает все детали, не выбранные ранее</p>
<i>MSTYP</i>	<p>0 – набор сегментов</p> <p>1 – набор оболочек</p> <p>2 – набор деталей</p> <p>3 – идентификатор деталей</p> <p>5 – включены все предыдущие, но игнорируется <i>MSID</i></p> <p>6 – включает все детали, не выбранные ранее</p> <p>7 – идентификатор структуры (возможно создание древовидной структуры деталей и обращение к ним)</p>
<i>SPR, MPR</i>	<p>Опция для вывода результатов в узлах подчиненной и главной поверхности соответственно:</p> <p>0 – не включена</p> <p>1 – подчиненной и главной поверхности записывается в файл вывода</p> <p>2 – то же, что и 1, но позволяет записать значения в файл, который в дальнейшем можно использовать в качестве начальных условий для других расчётов</p>
<i>FS</i>	Статический коэффициент трения
<i>FD</i>	Динамический коэффициент трения
<i>VDC</i>	Коэффициентов вязкого демпфирования
<i>PENCHK</i>	<p>Небольшое проникновение в область поиска контактов:</p> <p>0 – проверка выключена</p> <p>1 – проверка включена</p>

Параметр	Описание
	2 – проверка включена, но используется кратчайшая диагональ
Опциональные настройки	
<i>SOFT</i>	<p style="text-align: center;">Формулировка контакта:</p> <p style="text-align: center;">0 – стандартная формулировка штрафа</p> <p style="text-align: center;">1 – мягкие ограничение на формулировку штрафа</p> <p style="text-align: center;">2 – формулировка штрафа на основе сегментов</p> <p style="text-align: center;">4 – ограничения для контактов типа FORMING</p> <p style="text-align: center;">6 – алгоритм для контакта *CONTACT_- FORMING_NODES_TO_SURFACE</p>
<i>SOFSCCL</i>	Масштабный коэффициент для ограничивающих сил
<i>MAXPAR</i>	Максимальная параметрическая координата при поиске сегмента (значения между 1.025 и 1.20)
<i>SBOPT</i>	Дополнительные настройки связи при <i>SOFT</i> = 2
<i>DEPTH</i>	Глубина поиска в автоматическом контакте для проверки узлового проникновения через ближайшие сегменты контакта
<i>BSORT</i>	Количество циклов между сортировками сегментов
<i>FRCFRQ</i>	Количество циклов между обновлениями контактной силы для штрафа

Настройка контакта произведена таким образом, что главной поверхностью выбрано абсолютно жёсткое тело, т.е. цилиндры, а подчинённой поверхностью является сегмент балки. Статический и динамический коэффициенты трения, а также коэффициент вязкого демпфирования равны 0,2, *SOFT* = 0, масштабный коэффициент для ограничивающих сил равен 0,1, данные параметры приведены в таблице 3.4, их значения применяются по умолчанию.

Задача решалась в неявной постановке с шагом по времени 0,02 с и полным временем расчёта 1 с. Во время расчёта на каждом шаге снимались усилия, возникающие в местах жёсткой заделки, т.е. в нижнем цилиндре и в заземлении.

### 3.3 Анализ полученных результатов

В результате расчётов с различными материалами получены три кривых зависимости усилий от перемещений, представленные на рисунке 3.9. На рисунке 3.8 представлен график зависимости погрешности от перемещений.

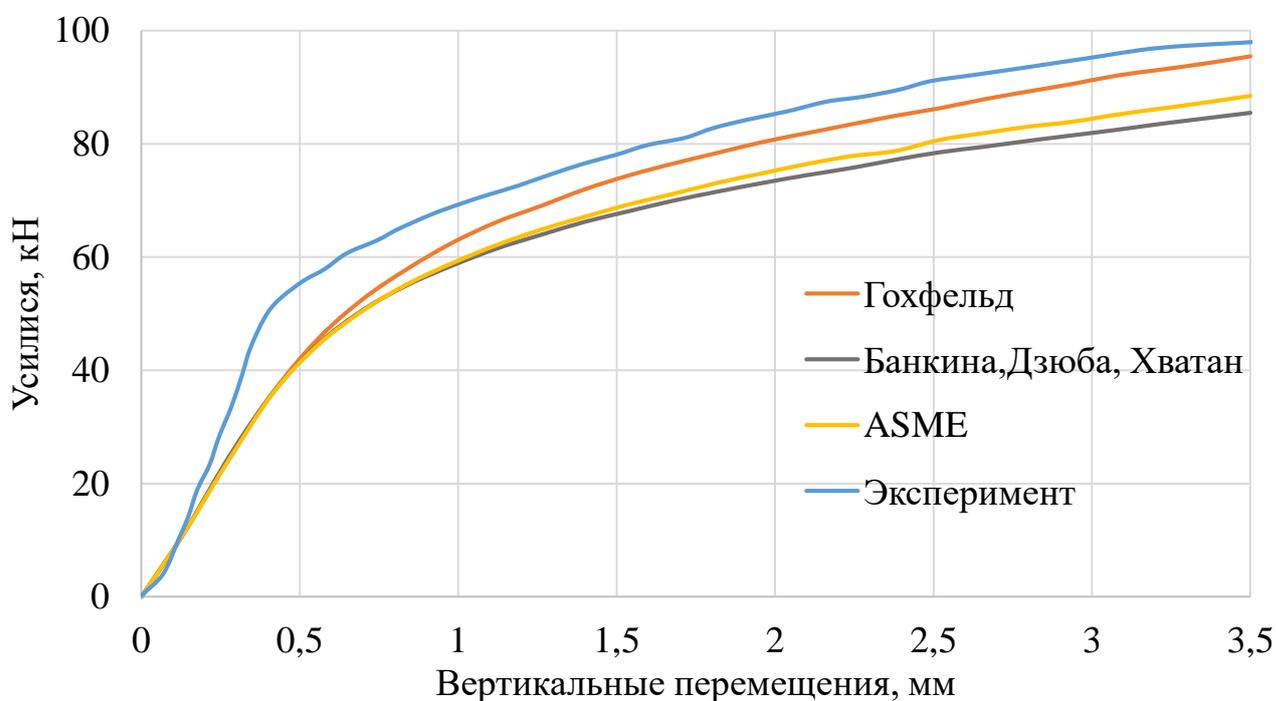


Рисунок 3.8 – Зависимость усилий от вертикальных перемещений для трёх материалов

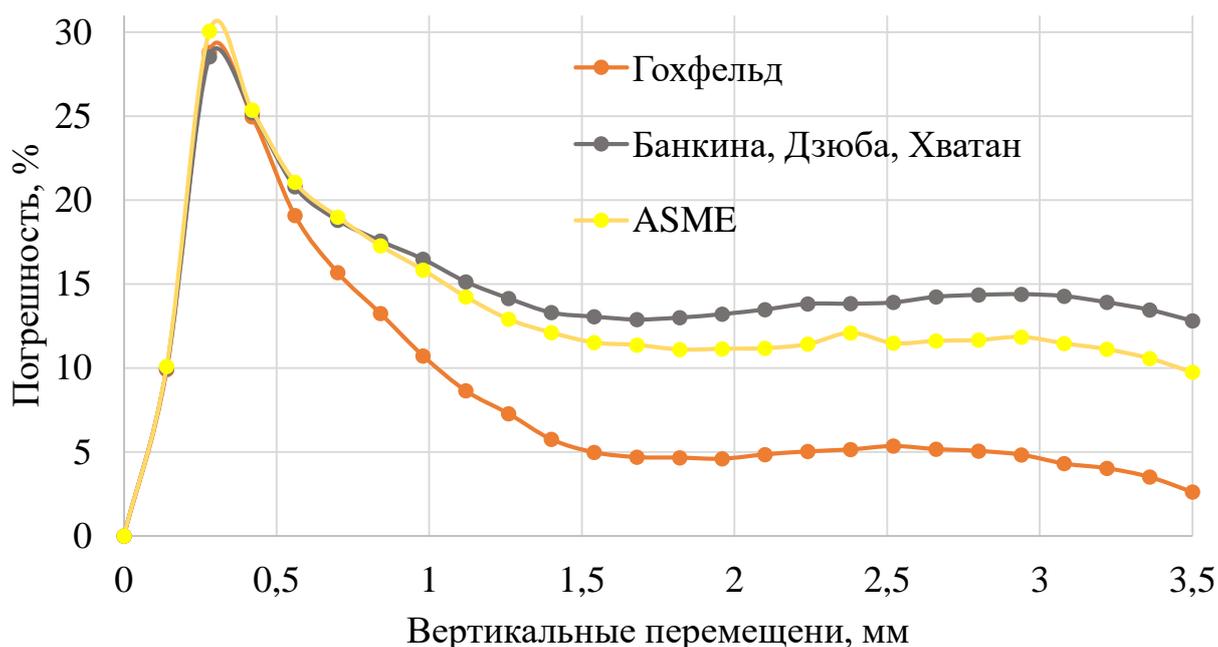


Рисунок 3.9 – Погрешность в сравнении с экспериментом для трёх материалов

По результатам виртуального испытания для материала AISI 304 можно сделать вывод, что все расчёты дают большую погрешность на участке, где вертикальные перемещения изменяются от 0 мм до 1 мм, но качественно и количественно графики зависимости усилий от перемещений подобны экспериментальным данным. В данном случае наименьшую погрешность даёт аппроксимация из учебника Гохфельда [3], среднее значение которой составляет 8,2%, а из рисунка 3.9 видно, что кривая зависимости погрешности от вертикальных перемещений проходит ниже остальных. Расчёты с использованием двух оставшихся аппроксимаций дают примерно одинаковый результат, таким образом значение средней погрешности для кривой из статьи [1] составляет 14,8%, а для аппроксимации из стандарта [8] – 13,4%.

На рисунках 3.10 3.11 и 3.12 представлены поля пластических деформаций в масштабе 10:1 при различных степенях нагрузки.

### Пластические деформации

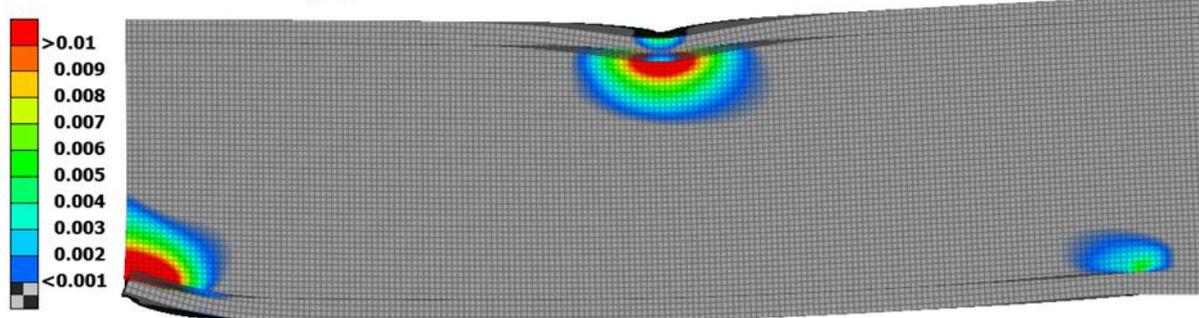


Рисунок 3.10 – Поле пластических деформаций в масштабе 10:1 при степени нагрузки 30%

### Пластические деформации

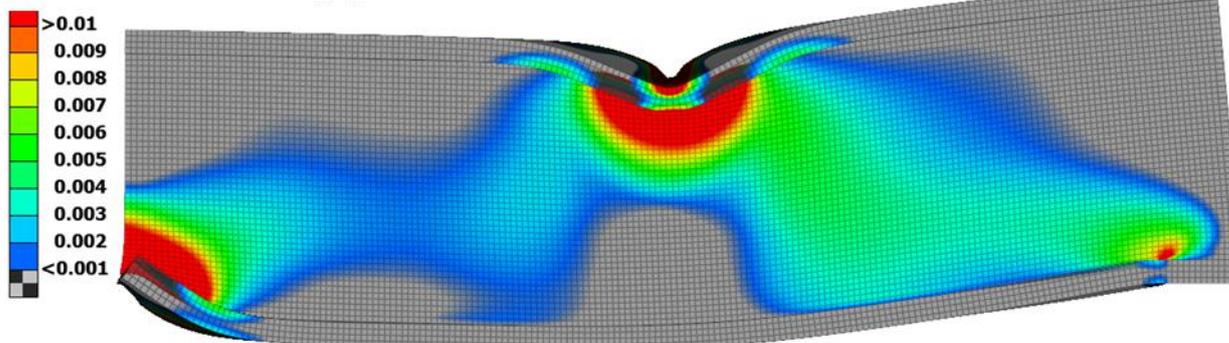


Рисунок 3.11 – Поле пластических деформаций в масштабе 10:1 при степени нагрузки 60%

### Пластические деформации

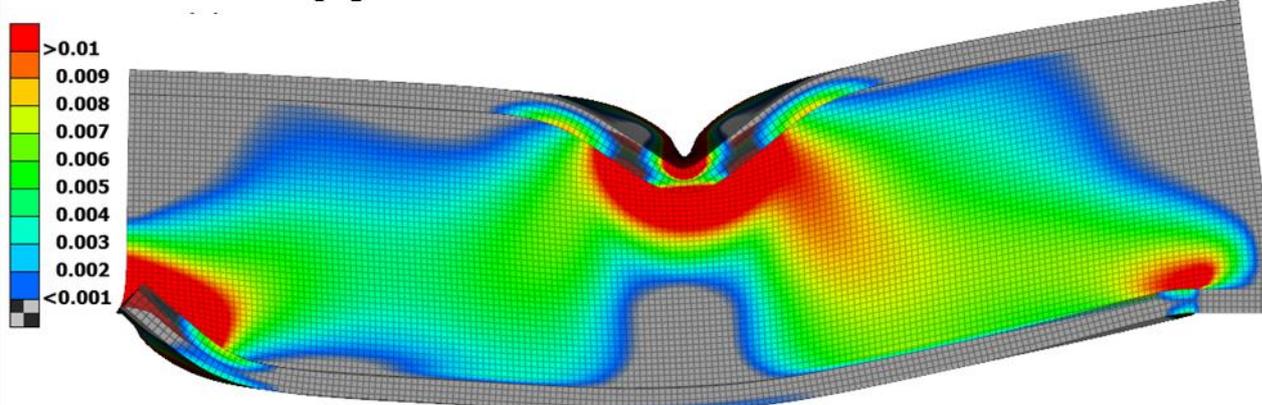


Рисунок 3.12 – Поле пластических деформаций в масштабе 10:1 при степени нагрузки 100%

Суммарная оценка всех кривых по трём критериям (на основе оценочной шкалы указанной в таблице 1.1) представлена в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Итоговое сравнение кривых аппроксимаций

Название аппроксимации	Итоговая оценка в баллах с учётом весовых коэффициентов
Дзюба, Банкина, Хватан	7,4
Гохфельд	3,6
ASME	6,4

Таким образом, наилучший результат по всем заявленным критериям получен при использовании аппроксимации из пособия Гохфельда. Однако, весовые коэффициенты можно поменять в зависимости от цели расчётов, в которых используются данные аппроксимации, что даёт возможность определить значимость критериев и использовать оптимальный вариант аппроксимации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе проведен сравнительный анализ трёх аппроксимаций кривых деформирования с использованием метода конечных элементов. Произведена разработка и настройка двух конечно-элементных моделей. В обеих моделях использовались различные аппроксимации свойств материалов, представленные в главе 1. На первом этапе произведена оценка аппроксимаций по двум критериям, что подробно описано в разделе 1.4.

С целью отработки алгоритма построения кривых и оценки расчётных результатов путём валидации с экспериментальными данными выполнено испытание на одноосное растяжение образца. Все аппроксимации, используемые в модели на растяжение, показали высокую точность, что позволило проводить дальнейшее исследование. Полученные результаты описаны в разделе 2.3.2.

Далее решена задача о трёхточечном изгибе балки. Данная схема напряжённо-деформированного состояния широко используется во многих видах промышленности. Результаты, полученные в ходе расчётов с использованием аппроксимаций диаграмм деформирования, говорят о возможности дальнейшего их применения.

Результаты данной работы показывают, что при применении аппроксимаций диаграмм деформирования получается небольшая погрешность относительно экспериментальных данных. При этом построение аппроксимаций требует небольшого количества времени и требует знания только справочных данных.

Наилучший результат по всем критериям даёт использование аппроксимации из пособия Гохфельда. Преимуществом данной аппроксимации является минимально необходимое количество справочных данных и наименьшее время работы алгоритма.

В качестве дальнейшего развития данного исследования предлагается изучение неметаллических материалов с более сложными структурой и кривой

деформирования, такие как фторопласт, пластик ABS или бетон. Также рассматривается развитие полученных результатов для построения наиболее полного описания поведения материала с учётом зависимостей от температуры, скоростей деформирования, типа напряжённо-деформированного состояния.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Банкина, А.С. Дзюба О.С., Хватан А.М. Метод построения диаграммы деформирования по справочным механическим характеристикам материала. // Труды ЦАГИ. – 2000. – №2639 – С. 36-38.
2. «ГОСТ 1497-84 Металлы. Методы испытаний на растяжение». Москва: Стадинформ, 2008. – 26с.
3. Гохфельд Д. А., Гецов Л. Б., Кононов К. М., Кульчихин Е. Т., Ребяков Ю. Н., Садаков О. С., Тимашев С А., Чепурский В. Н. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. – 406 с.
4. Жилин П.А. Динамика твёрдого тела. Спб: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 560с.
5. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстнев В. А. Сопротивление материалов: Учебное пособие/ Б.Е.Мельников. СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 560с.
6. Сафаров А. Р., Дорожинский В. Б., Андреев В. И. Реализация численной модели бетона CSCM применительно к отечественным классам бетонов// Вестник МГСУ – 2023, Т.18, Вып. 4 – с. 545-555
7. Справочник по авиационным материалам Т.3, Москва, 1965. – 633с
8. «Boiler and Pressure Vessel Code». New York, ASME, 2019. 872p.
9. Harrysson A. Drop test simulation of cellular phone. – Lund, Sweden, 2003. – p.70
10. Hashemi K. Numerical simulation of free-air explosion using LS-DYNA// Applied Mechanics and Materials. – 2014. – p.780-785
11. Jindra D., Kala Z., Kala J., Seitzl St. Experimental and Numerical simulation of a Three Point Bending //Transportation Research Procedia. – 2021. – p. 1114 - 1121
12. LS-Dyna Keyword User's Manual Volume 1 - Livermore : LSTC, 2022. – 3826 p.
13. LS-Dyna Theory Manual. – Livermore : LSTC, 2022. – 890p.
14. Susainathan J., Eyma F., Luycker E., Cantarel A., Castanié B. Numerical modeling of impact on wood-based sandwich structures // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2018.

15. Характеристики сечения. Двуглавр :сайт. – URL:  
<https://www.dlupal.com/ru/harakteristiki-secheniya/ipe-80-en-10365-2017-arcelormittal-2018> (дата обращения 08.05.2024)