**Пример решения контрольной задачи**

**на линейные колебания системы с одной степенью свободы.**

Система трех тел движется под действием переменного момента и испытывает действие двух пружин, вязкое сопротивление вращению катка движущегося без проскальзывания, и линейного демпфера. Стержни имеют разную длину и массу.

s

B

m1g

m2g

с1

𝛽

m3g

c’

φ

 MoSinpt

β' ρ

φ1

А

**Найти:**

1. Соотношение статических деформаций пружин

2. Условие устойчивости изображенного положения равновесия.

3. Дифференциальное уравнение малых движений системы

**Решение:**

А.Костарев

Обозначим массы, жесткости и коэффициенты сопротивления. Система имеет одну степень свободы, поскольку нить нерастяжима и натянута пружиной, а каток катится без проскальзывания.

1. Составим квадратичную форму кинетической энергии. Как известно, Т приобретает вид формы в момент прохождения системой положения равновесия, изображенного на рисунке.

$$T=\frac{1}{2}(J\_{1}+J\_{2})\dot{φ}^{2}+\frac{1}{2}m\_{3}\dot{s}^{2}+\frac{1}{2}J\_{3}\dot{φ}\_{1}^{2}$$

$$J\_{1}=\frac{1}{3}m\_{1}l\_{1}^{2}, J\_{2}=\frac{1}{3}m\_{2}l\_{2}^{2} J\_{3}=m\_{3}ρ^{2}$$

Кинематические связи:

$$\dot{φ}\_{1}=\frac{l\_{1}}{R-r}\dot{φ}, \dot{s}=\dot{φ}\_{1}r=\frac{l\_{1}r}{R-r}\dot{φ} $$

Получаем квадратичную форму

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(m\_{1}l\_{1}^{2}+m\_{2}l\_{2}^{2}\right)+m\_{3}l\_{1}^{2}\frac{r^{2}+ρ^{2}}{(R-r)^{2}}\right]\dot{φ}^{2}=\frac{1}{2}a\dot{φ}^{2}$$

Здесь а- коэффициент инертности системы

1. Составим квадратичную форму функции Рэлея Ф. Как известно, Ф приобретает вид формы в момент прохождения системой положения равновесия, изображенного на рисунке.

$$Ф=\frac{1}{2}βv\_{A}^{2}+\frac{1}{2}β'\dot{φ}\_{1}^{2}$$

Кинематическая связь

$$v\_{A}=\frac{2l\_{1}r}{R-r}\dot{φ}$$

Квадратичная форма Ф

$$Ф=\frac{1}{2}\left[β\frac{4l\_{1}^{2}r^{2}}{(R-r)^{2}}+β'\frac{l\_{1}^{2}}{(R-r)^{2}}\right]\dot{φ}^{2}=\frac{1}{2}b\dot{φ}^{2}$$

Здесь b – приведенный коэффициент сопротивления системы

А.Костарев

1. Найдем квадратичную форму потенциальной энергии. Как известно, потенциальная энергия равна работе потенциальных сил при возвращении системы в положение равновесия. Сила тяжести m3g не совершает работы, поскольку она перпендикулярна перемещению центра катка. Деформация линейной пружины в отклоненном положении складывается из статической деформации и суммы перемещений концов пружины при повороте $φ$ (концы пружины при этом движутся в противоположные стороны).

$$П=m\_{1}g\frac{l\_{1}}{2}\left(1-Cosφ\right)-m\_{2}g\frac{l\_{2}}{2}Sinφ+$$

$$+\frac{c\_{1}}{2}\left[\left(∆\_{ст}+\frac{R+r}{R-r}l\_{1}φ+(l\_{1}-2R)φ\right)^{2}-∆\_{ст}^{2}\right]+\frac{c'}{2}\left[\left(∆'\_{ст}+φ\right)^{2}-∆'\_{ст}^{2}\right]$$

Система нелинейная, поскольку тригонометрические функции являются рядами по $φ$

$$Cosφ=1-\frac{φ^{2}}{2}+… Sinφ=φ-…$$

Приходится рассматривать малые колебания: $φ, \dot{φ}\ll 1$ и отбросить в разложениях слагаемые более высоких порядков, обозначенные многоточием.

Покажем, что потенциальная энергия является квадратичной формой обобщенной координаты

$$П=\frac{1}{2}сφ^{2}$$

Слагаемые $∆\_{ст} $с нулевой степенью $φ$ сокращаются. Так и должно быть, поскольку в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю.

Слагаемые с первой степенью $φ$ тоже должны отсутствовать по условию равновесия.

$$П'\_{0}=0$$

Приравняем нулю коэффициент при первой степени $φ$. Его можно вычислить как значение первой производной $П'\_{0}$ в положении равновесия. Но проще собрать коэффициенты при первой степени $φ$

$$-m\_{2}g\frac{l\_{2}}{2}+c\_{1}\left(\frac{R+r}{R-r}l\_{1}+l\_{1}-2R\right)∆\_{ст}+c^{'}∆^{'}\_{ст}=0$$

Это выражение можно назвать «соотношением статических деформаций». Оно показывает, что в положении равновесия можно задать только одну статическую деформацию. Вторая должна быть определена из соотношения.

 Таким образом, потенциальная энергия действительно является квадратичной формой $φ.$ Найдем коэффициент жесткости системы с. Он равен

$$с=П''\_{0}$$

Но проще найти его, как коэффициент при $\frac{φ^{2}}{2}$ в выражении потенциальной энергии

$$с=m\_{1}g\frac{l\_{1}}{2}+c\_{1}\left(\frac{R+r}{R-r}l\_{1}+l\_{1}-2R\right)^{2}+c^{'}$$

Условием устойчивости положения равновесия является

$$с>0$$

Видим, что условие выполняется при любых значениях параметров.

1. Найдем обобщенную вынуждающую силу, возникающую от переменного момента, приложенного к катку

$$M=M\_{0}Sinpt$$

вычислив мощность момента при положительной возможной обобщенной скорости $\dot{φ}>0$. Направления момента и угловой скорости противоположны, поэтому

$$N=-\dot{φ}\_{1}M\_{0}Sinpt=\left(-\frac{M\_{0}l\_{1}}{R-r}Sinpt\right)\dot{φ}=Q\_{в}\dot{φ}$$

$$Q\_{в}=-\frac{M\_{0}l\_{1}}{R-r}Sinpt=НSinpt$$

Составим дифференциальное уравнение малых колебаний системы. Подставив квадратичные формы Т, П и Ф в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=-\frac{∂П}{∂φ}-\frac{∂Ф}{∂\dot{φ}}+Q\_{в}$$

получим

$$a\ddot{φ}=-cφ-b\dot{φ}+НSinpt$$

Поделив на а

$$\ddot{φ}+2n\dot{φ}+k^{2}φ=hSinpt$$

Здесь

$$2n=\frac{b}{a}; k^{2}=\frac{b}{a}; h=\frac{H}{a}$$

А.Костарев