

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа механики и процессов управления

Работа допущена к защите

Директор ВШМиПУ

А.К. Беляев

« ___ » _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

работа бакалавра

БАЛАНС ПОТОКА ЭНЕРГИИ В ДИСКРЕТНЫХ И КОНТИНУАЛЬНЫХ СРЕДАХ

по направлению подготовки (специальности) *15.03.03 – Прикладная механика*

Направленность (профиль)

15.03.03_04 – Микромеханика структурных изменений, прочности и пластичности.

Выполнил

студент гр. 5031503/90401

Дроздов С.О.

Руководитель

Директор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н., доцент

Кривцов А.М.

Консультанты

по нормоконтролю

Н.А. Смирнова

Санкт-Петербург – 2023

**САНКТ ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА
ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШМиПУ

А. К. Беляев

«24» ноября 2022 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту Дроздову Святославу Олеговичу, гр. 5031503/90401

1. Тема работы:

"Баланс потока энергии в дискретных и континуальных средах"

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 9 июня 2023 г.

3. Исходные данные по работе:

3.1. Рекомендованная литература по моделированию дискретных систем.

3.2. Литература и статьи по энергетической динамике.

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):

4.1. Литературный обзор материалов по исследованиям, проведённым ранее в данной области.

4.2. Аналитическая проверка и поиск различных соотношений, описывающих распространение энергии.

4.3. Создание одномерной компьютерной модели взаимодействующих частиц.

4.4. Сравнение результатов численного моделирования с аналитическими результатами.

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей):

5.1. Графики энергетического распределения.

6. Дата выдачи задания: 24 ноября 2022 г.

Руководитель ВКР

директор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н., доцент Кривцов А. М.

Задание принял к исполнению 24 ноября 2022 г.

Студент

Дроздов С. О.

РЕФЕРАТ

На 63 страницы, 14 рисунков, 4 приложения.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР, РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ, ДИНАМИКА МАССЫ И ЭНЕРГИИ, БАЛАНС ПОТОКА ЭНЕРГИИ, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тема выпускной квалификационной работы: “Баланс потока энергии в дискретных и континуальных средах”.

В данной работе исследуется влияние смещения точек среды на распространение энергии в ней. В рамках этого исследования были рассмотрены следующие одномерные модели сред:

- 1) Континуальная модель.
- 2) Дискретная модель с линейной силой взаимодействия частиц.
- 3) Дискретная модель с нелинейной силой взаимодействия частиц.

В результате были получены соотношения, описывающие движения энергетических центров возмущений в этих средах. Показано, что если перемещения частиц среды значительны, то необходимо учитывать перенос энергии, вызванный механическим смещением частиц среды.

Введены понятия импульсного момента и импульсного центра возмущения, с помощью которых на основании численного моделирования предложен способ приблизительного определения скорости энергетического центра возмущения в случае ударного нагружения. Показано, что такой способ может быть использован как для сред с линейной силой взаимодействия частиц, так и для сред с нелинейной силой взаимодействия частиц.

ABSTRACT

63 pages, 14 figures, 4 appendices.

ENERGY CENTER, ENERGY PROPAGATION, MASS AND ENERGY DYNAMICS, ENERGY FLOW BALANCE, NUMERICAL SIMULATION

The subject of the graduate qualification work: "Balance of energy flow in discrete and continuum media".

In this work we investigate the effect of displacement of points in the medium on the propagation of energy in it. As part of this study, the following one-dimensional models of media were considered:

- 1) Continuous elastic model.
- 2) Discrete model with linear force of interaction of particles.
- 3) Discrete model with nonlinear force of interaction of particles.

As a result, the relations describing movements of energy centers of disturbances in these media have been obtained. It is shown that if displacements of particles of the medium are significant, it is necessary to take into account the energy transfer caused by mechanical displacement of particles of the medium.

The concepts of impulse moment and impulse center of perturbation are introduced, with the help of which, based on numerical modeling, the method of approximate determination of the energy center of perturbation, in the case of shock loading is proposed. It is shown that this method can be used both for media with linear particle interaction force and for media with nonlinear particle interaction force.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	7
ГЛАВА 1. КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ.....	9
1.1 Понятия и обозначения	9
1.2 Результаты	11
1.3 Пример	18
ГЛАВА 2. ЦЕПОЧКА ГУКА	25
2.1 Понятия и обозначения	25
2.2 Энергетические соотношения для цепочки Гука	27
2.3 Импульсные моменты	29
2.4 Численное моделирование	31
2.4.1 Первый пример.....	32
2.4.2 Второй пример	33
2.4.3 Третий пример.....	33
ГЛАВА. 3 АНГАРМОНИЧЕСКАЯ ЦЕПОЧКА	35
3.1 Энергетические соотношения.....	35
3.2 Импульсные моменты	37
3.3 Численное моделирование	38
3.3.1 Первый пример.....	38
3.3.2 Второй пример	39
Заключение	40
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	41
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	49
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	54

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.....	58
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	62

Введение

Уравнения динамики являются основой классической механики. С их помощью мы можем описывать движение материальных тел и распространение волн в веществе. Волновые явления представляют собой результат коллективного движения частиц, но сами волны также могут проявлять свойства частиц, что особенно важно при описании тепловых процессов в твердых телах.

Имеется множество исследований, посвященных анализу распространения энергии в различных механических моделях. Актуальность таких исследований исходит из ограниченности области применимости феноменологических законов, так, в частности, в статье [1] говорится о необходимости анализа процессов распространения тепла на основании механических моделей, так как закон Фурье, работающий на макроуровне, не всегда позволяет описывать распространение тепловой энергии на микроуровне, о чем также говорится в [2,3]. В частности, экспериментальные исследования [4,5] показывают, что закон теплопроводности Фурье нарушается в низкоразмерных наноструктурах.

Для анализа процессов распространения энергии используются различные модели, как континуальные, так и дискретные. Континуальные модели характерны для описания тел на макроуровне, а дискретные – на микроуровне. Надо отметить, что дискретность атомарного строения вещества существенно влияет на волновые процессы в нем [6,7]. Протекание тепловых процессов в дискретных и континуальных средах также отличается [8,9,10]. Например, при резком тепловом воздействии на дискретную систему в ней возникают высокочастотные колебания кинетической и потенциальной энергий [11]. Этот процесс завершается выравниванием этих энергий в согласии с теоремой о вириале [12]. Говоря о проведенных исследованиях, надо отметить, что протекание такого процесса в гармоническом кристалле исследовалось в работе [13].

Анализ распространения энергии, как в дискретных, так и в континуальных средах, может проводиться по-разному. Один из способов, предложенный в статье “Dynamics of matter and energy” [14] заключается в построении аналогии между динамикой массы и энергии. Для этого, в этой статье по аналогии с понятием центра масс, вводится понятие центра энергии, для которого записывается уравнение динамики, имеющее форму второго закона Ньютона.

В работе “Dynamics of matter and energy”, чтобы отделить перенос энергии от переноса массы, анализируется система, в которой частицы не перемещаются далеко от своего исходного положения. Это позволяет сосредоточиться на переносе энергии от частицы к частице. Однако, такой подход не всегда применим, так как, если перемещения частиц среды значительны, то необходимо учитывать перенос энергии, вызванный механическим смещением носителей энергии. Для этого в данной работе при расчете энергетического момента используются вместо отсчетных актуальные положения частиц среды. Основная цель данной работы — рассмотреть возможность учета переноса энергии механическим перемещением носителей путем исследования энергетического момента в актуальной конфигурации.

ГЛАВА 1. КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

1.1 Понятия и обозначения

Чтобы наглядно показать влияние механического движения носителей в процессе переноса энергии, рассмотрим простейшую модель одномерной среды: бесконечный прямолинейный стержень постоянного сечения площадью S , ориентированного вдоль оси Ox . На Рис.1.1 представлено схематическое изображение стержня.

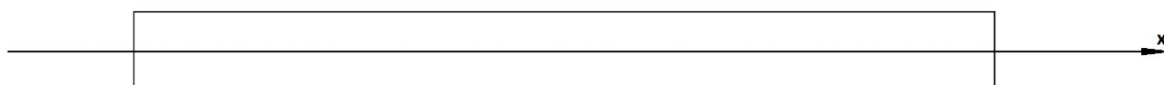


Рис.1.1 Стержень – континуальная модель одномерной среды.

Для описания процессов переноса энергии в рассматриваемом стержне будем использовать материальное описание.

Приведем величины и соотношения, используемые в дальнейшем.

Модуль Юнга

$$E = \text{const.}$$

Плотность

$$\rho = \text{const.}$$

Скорость звука

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Функция перемещений

$$u(x, t), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in [0, +\infty),$$

являющаяся решением уравнения

$$\ddot{u} = c^2 u'', \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in [0, +\infty). \quad (1.1)$$

Объемная плотность энергии

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

Полная энергия

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} w \, dx = \text{const.}$$

Полный энергетический момент

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u) w \, dx. \quad (1.2)$$

С помощью этой величины определяется положение энергетического центра

$$x^E(t) = \frac{M(t)}{W}.$$

Эта величина построена по аналогии с положением центра масс.

Основная часть полного энергетического момента

$$\bar{M}(t) \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} x w \, dx. \quad (1.3)$$

Эта часть полного энергетического момента характеризует передачу энергии между точками среды.

Деформационная часть полного энергетического момента

$$\hat{M}(t) \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} u w \, dx.$$

Эта часть полного энергетического момента, характеризует перемещение энергии, вызванное механическим смещением точек упругого стержня.

Величина (1.3) является энергетическим моментом, посчитанным относительно отсчетной конфигурации. Таким способом определенный энергетический момент не учитывает смещение точек среды и его изменение связано исключительно с передачей энергии между ними. Учет механического смещения точек среды реализуется в выражении полного энергетического момента (1.2), который изменяется как за счет передачи энергии между точками среды, так и за счет непосредственного смещения этих точек.

Отметим, что $M(t) = \bar{\bar{M}}(t) + \hat{M}(t)$, а значит

$$x^E(t) = \frac{\bar{\bar{M}}(t)}{W} + \frac{\hat{M}(t)}{W} = \bar{\bar{x}}^E(t) + \hat{x}^E(t),$$

где введены обозначения $\bar{\bar{x}}^E(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{\bar{M}}(t)}{W}$, $\hat{x}^E(t) = \frac{\hat{M}(t)}{W}$.

Строя аналогию с динамикой массы, запишем:

$$W\ddot{x}^E = \Phi,$$

где $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2M}{dt^2}$ – величина, которую мы назовем энергетической силой.

Её тоже можно разбить на основную и деформационную части

$$\bar{\bar{\Phi}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\bar{\bar{M}}}{dt^2}, \quad \hat{\Phi} = \frac{d^2\hat{M}}{dt^2},$$

сумма которых дает полную энергетическую силу

$$\Phi(t) = \bar{\bar{\Phi}}(t) + \hat{\Phi}(t). \quad (1.4)$$

1.2 Результаты

Полученные результаты представлены в виде 5 теорем, в которых раскрывается смысл введенных определений. Их доказательства приведены в

приложение 1. Эти результаты получены в предположении, что функции $f'(x)$, $g'(x)$ финитны.

Теорема 1

Энергетическая сила $\bar{\bar{\Phi}}(t)$, соответствующая основной части энергетического момента, обращается в ноль

$$\bar{\bar{\Phi}}(t) \equiv 0. \quad (1.5)$$

Для $\hat{\Phi}(t)$ имеет место следующее представление

$$\hat{\Phi}(t) = 2\rho S \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \dot{v} dx,$$

где $v(x, t) = \dot{u}(x, t)$ – функция скорости.

Откуда, с учетом (1.4) и (1.5), для полной энергетической силы, получаем такое же выражение

$$\Phi(t) = 2\rho S \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \dot{v} dx. \quad (1.6)$$

Из выражения (1.5) следует, что если точки среды не смещаются далеко от своих исходных положений, то энергетический центр движется с постоянной скоростью.

Вместе с тем, в случае, когда нельзя пренебречь смещениями точек среды, необходимо рассматривать энергетическую силу $\hat{\Phi}(t)$, соответствующую деформационной части энергетического момента. Заметим, что в выражение для $\hat{\Phi}(t)$, помимо постоянных величин, входит только скорость и ее производная.

Перед тем, как переходить к Теореме 2, заметим, что решение уравнения (1.1) может быть записано в виде

$$u(x, t) = g(x - ct) + f(x + ct).$$

Это решение описывает две бегущие в противоположные стороны волны $g(x - ct)$ и $f(x + ct)$.

Теорема 2

Полная энергетическая сила может быть выражены через функции $g(x - ct)$, $f(x + ct)$

$$\Phi(t) = -8ES \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x + ct)g'(x - ct) \dot{v}(x, t)dx. \quad (1.7)$$

Из этой теоремы следует, что когда функции $f'(x + ct)$ и $g'(x - ct)$ не перекрываются, то есть $f'(x + ct)g'(x - ct) = 0$, тогда и полная энергетическая сила равна нулю.

Для интерпретации этого результата запишем плотности энергии, соответствующие бегущим волнам $g(x - ct)$ и $f(x + ct)$.

$$w_1(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\rho(\dot{g}(x - ct))^2 + \frac{1}{2}E(g'(x - ct))^2,$$

$$w_2(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\rho(\dot{f}(x + ct))^2 + \frac{1}{2}E(f'(x + ct))^2.$$

Для этих величин можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3

Плотность энергии в точке $w(x, t)$ может быть записана в виде

$$w(x, t) = w_1(t) + w_2(t).$$

При этом

$$w_1(x, t) = E(g'(x - ct))^2, \quad (1.8)$$

$$w_2(x, t) = E(f'(x + ct))^2. \quad (1.9)$$

Эта теорема позволяет говорить о двух энергетических волнах, которые характеризуются функциями $g'(x - ct)$ и $f'(x + ct)$. Заметим, что до этого мы могли говорить только о волнах в терминах перемещений, которые задавались функциями $g(x - ct)$ и $f(x + ct)$. Дополнительно оговоримся, что мы рассматриваем такие возмущения среды, при которых функции $g'(x - ct)$ и $f'(x + ct)$ финитны. При этом функции $g(x - ct)$ и $f(x + ct)$ не обязательно финитны.

Этот результат позволяет интерпретировать формулу (1.7) для полной энергетической силы: когда волны распространяются в среде и не взаимодействуют, энергетический центр движется с постоянной скоростью, однако, во время взаимодействия, энергетический центр изменяет свою скорость под действием энергетической силы (1.7).

Возможность рассматривать энергетические волны позволяет определить их энергетические центры по отдельности, а также ввести ряд понятий, для описания их взаимодействия.

Для простоты изложения далее будем называть энергетическую волну, задаваемую функцией $g'(x - ct)$ первой волной, а энергетическую волну, задаваемую функцией $f'(x + ct)$ — второй волной.

Энергия первой и второй энергетических волн

$$W_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w_1 dx = \text{const}, \quad W_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2 dx = \text{const}.$$

Энергетический момент первой волны

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u) w_1 dx. \quad (1.10)$$

Энергетический центр первой волны

$$x_1^E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_1}{W_1}. \quad (1.11)$$

Энергетический момент второй волны

$$M_2 \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u) w_2 dx. \quad (1.12)$$

Энергетический центр второй волны

$$x_2^E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_2}{W_2}$$

Собственный энергетический момент первой волны

$$\bar{M}_1 \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u_1) w_1 dx. \quad (1.13)$$

Собственный энергетический момент второй волны

$$\bar{M}_2 \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u_2) w_2 dx. \quad (1.14)$$

Собственные энергетические моменты волн (1.13) и (1.14) учитывают только перемещения, вызванные только той волной, собственный энергетический момент которой считается. В отличие от энергетических моментов (1.10) и (1.12), которые учитывают перемещения обеих волн.

Для описания влияния волн друг на друга удобно ввести моменты взаимодействия.

Моментом взаимодействия первой волны со второй называется величина

$$\hat{M}_{12} \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} w_1 u_2 dx.$$

Моментом взаимодействия второй волны с первой называется величина

$$\widehat{M}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} S \int_{-\infty}^{+\infty} w_2 u_1 dx.$$

Сумма собственного момента и момента взаимодействия, дает энергетический момент волны

$$M_1 = \bar{M}_1 + \widehat{M}_{12}, \quad M_2 = \bar{M}_2 + \widehat{M}_{21}.$$

Эти равенства выполняются тождественно и следуют напрямую из определений.

Заметим, что полный энергетический момент (1.2) равен сумме

$$M = M_1 + M_2. \quad (1.15)$$

А также, полная энергия W равна сумме

$$W = W_1 + W_2.$$

Откуда следует, что

$$x^E = \frac{W_1 x_1^E + W_2 x_2^E}{W_1 + W_2}.$$

Что полностью аналогично записи центра масс системы двух материальных точек.

Вводя энергетические силы

$$\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 M_1}{dt^2}, \quad \Phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 M_2}{dt^2}.$$

Запишем уравнения для энергетических центров отдельных волн

$$W_1 \ddot{x}_1^E = \Phi_1, \quad W_2 \ddot{x}_2^E = \Phi_2.$$

Теорема 4

Собственные энергетические моменты являются линейными функциями времени

$$\bar{M}_1(t) = W_1 ct + \bar{M}_1(0), \quad (1.16)$$

$$\bar{M}_2(t) = -W_2 ct + \bar{M}_2(0). \quad (1.17)$$

Силы, действующие на первую и вторую волны представляются в виде

$$\Phi_1(t) = -8c^2 ES \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x+ct)g'(x-ct)g''(x-ct) dx, \quad (1.18)$$

$$\Phi_2(t) = -8c^2 ES \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x+ct)g'(x-ct)f''(x+ct) dx. \quad (1.19)$$

Из выражений (1.16), (1.17) следует, что, если точки среды не смещаются далеко от своих исходных положений, энергетические центры обеих волн движутся с постоянной скоростью.

Вместе с тем, в случае, когда нельзя пренебречь смещениями точек среды, необходимо рассматривать энергетические силы (1.18), (1.19), действующие на отдельные волны, во время их взаимодействия.

Заметим, что, из (1.15) следует, что полная энергетическая сила равна сумме сил, действующих на первую и вторую волны

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t).$$

Подставляя сюда выражения (1.16), (1.17), получим

$$\Phi_1(t) + \Phi_2(t) = -8ES \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x+ct)g'(x-ct)\dot{v}(x,t) dx.$$

Что совпадает, с представленным ранее выражением (1.7).

Теорема 5

Во время взаимодействия энергетических волн скорости их энергетических центров меняются, однако, волны взаимодействуют таким образом, что скорости движения энергетических центров волн до и после взаимодействия равны.

Из этой теоремы следует, что результатом взаимодействия волн, может быть, только смещение энергетических центров, без изменения скоростей их движения.

1.3 Пример

Приведем простой пример, иллюстрирующий влияние поля перемещений на распространение энергии. Для этого зададим две волны, распространяющихся на встречу друг другу и представим зависимости от времени различных энергетических характеристик.

Рассмотрим две волны, определяемые соотношениями:

$$g(x) = \frac{H_1}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi(x - x_1)}{l_1} \right) + 1 \right], \quad x \in \left[x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2} \right].$$

$$f(x) = \frac{H_2}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi(x - x_2)}{l_2} \right) + 1 \right], \quad x \in \left[x_2 - \frac{l_2}{2}, x_2 + \frac{l_2}{2} \right].$$

Выберем следующие значения параметров

$$H_1 = 0.1(\text{м}), \quad l_1 = 0.5(\text{м}), \quad x_1 = -5(\text{м}),$$

$$H_2 = 1(\text{м}), \quad l_2 = 10(\text{м}), \quad x_2 = 5(\text{м}),$$

и характеристик среды

$$c = 1 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right), \quad \rho S = 1 \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}} \right), \quad E = 1(\text{Па}).$$

Поле перемещений в любой момент времени задается как

$$u(x, t) = g(x - ct) + f(x + ct).$$

Технические детали построения графиков в этом пункте приведены в приложении 4.

На Рис.1.2 представлено поле перемещений $u(x, 0) = g(x) + f(x)$ в начальный момент времени.

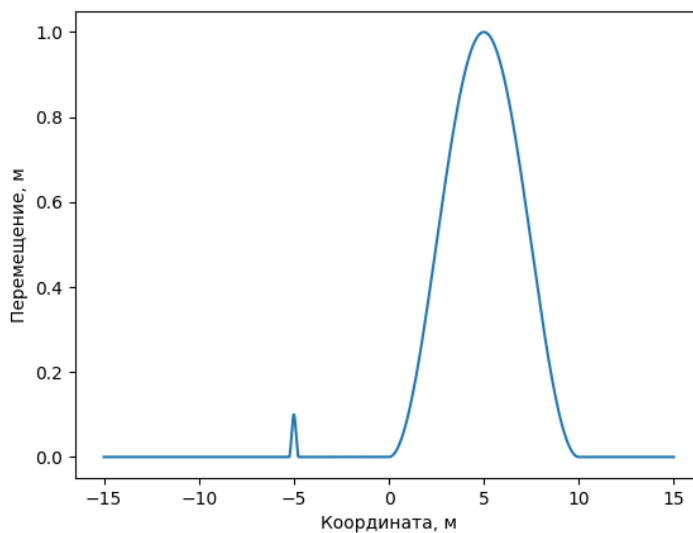


Рис.1.2 Поле перемещений в начальный момент времени.

Далее, на Рис.1.3 представлено поле перемещений в различные моменты времени.

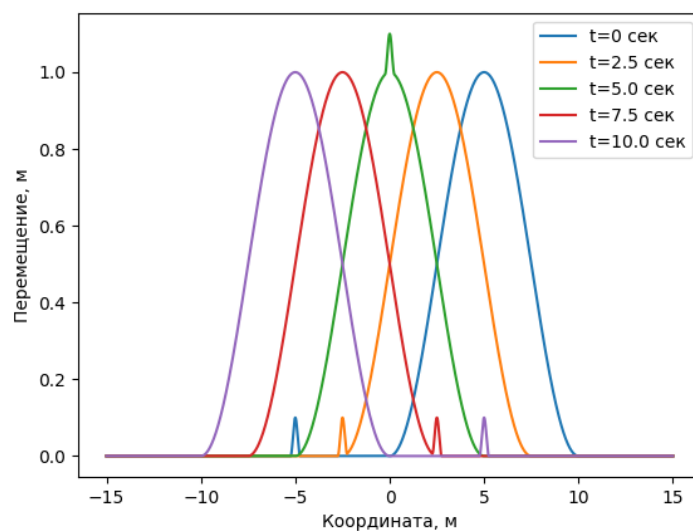


Рис.1.3 Поле перемещений в различные моменты времени.

Теперь, представим энергетические волны.

На Рис.1.4 представлено распределение энергии в начальный момент времени.

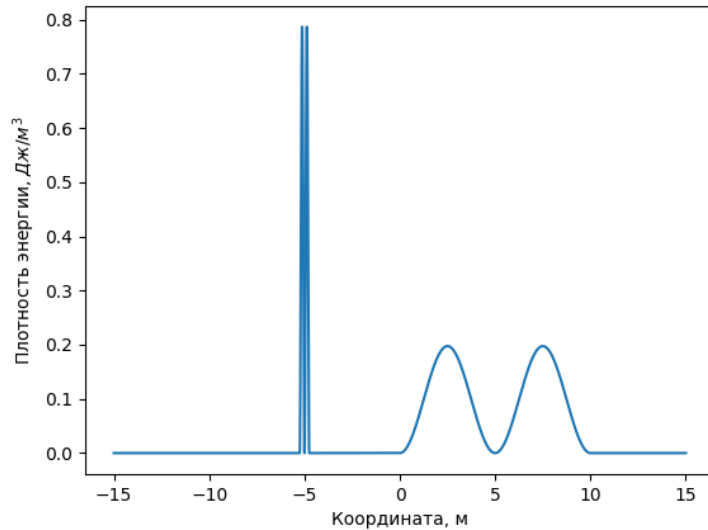


Рис.1.4 Распределение энергии в начальный момент времени.

Так как энергетические волны, с плотностями энергии (1.8), (1.9), определяются функциями $g'(x - ct)$, $f'(x + ct)$, то они локализованы там же, где и волны перемещений $g(x - ct)$, $f(x + ct)$.

Рассмотрим момент времени $t = 5$ (сек). На Рис.1.5 представлено распределение энергии при $t = 5$ (сек).

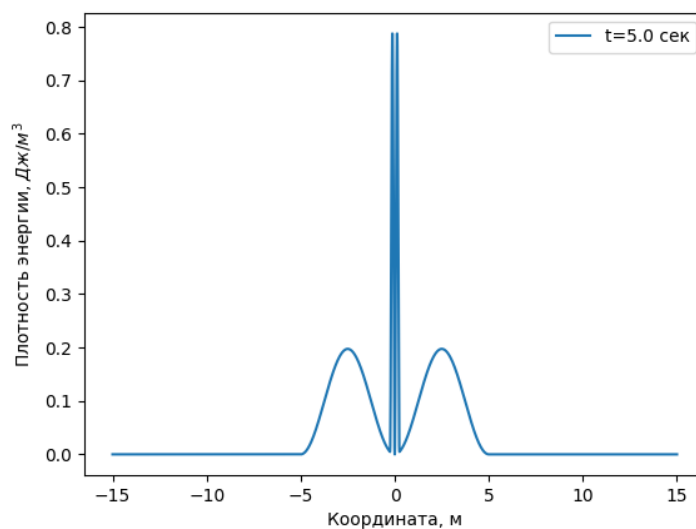


Рис.1.5 Распределение энергии при $t = 5$ (сек).

Сравнивая Рис.1.3 и Рис.1.5, видим, что первая энергетическая волна, определяемая функцией $g'(x - ct)$, в момент времени $t = 5$ (сек) находится в области среды, смещенной волной $f(x - ct)$. В соответствие с этим, ее энергетический центр тоже должен дополнительно сместиться.

Перед тем, как представить график зависимости координаты энергетического центра первой волны от времени, получим приближенную формулу координаты энергетического центра для малой волны.

Как было сказано до этого

$$M_1 = S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u)w_1 dx,$$

$$M_1 = S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u_1)w_1 dx + S \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 w_1 dx,$$

$$M_1 = \bar{M}_1 + S \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 w_1 dx.$$

Если первая волна мала, то есть можно считать, что перемещение u_2 второй волны мало изменяется в области, где находится первая волна, то

$$M_1 \approx \bar{M}_1 + W_1 u_2^*, \quad (1.20)$$

где u_2^* – перемещение второй волны в области нахождения первой волны.

В нашем случае, $u_2^* = f(2ct + x_1)$.

Отсюда получаем приближительную формулу для энергетического центра первой волны:

$$x_1^E(t) \approx \frac{\bar{M}_1}{W_1} + f(2ct + x_1).$$

Или, с учетом (1.16)

$$x_1^E(t) \approx \frac{W_1 ct + \bar{M}_1(0)}{W_1} + f(2ct + x_1).$$

$$x_1^E(t) \approx \frac{\bar{M}_1(0)}{W_1} + ct + f(2ct + x_1)$$

Так как $f(x_1) = 0$, можем говорить, что $x_1^E(0) = \frac{\bar{M}_1(0)}{W_1}$.

$$x_1^E(t) \approx x_1^E(0) + ct + f(2ct + x_1). \quad (1.21)$$

На Рис.1.6 представлена функция координаты энергетического центра первой волны, посчитанная по определению (1.11) и по приближительной формуле (1.21).

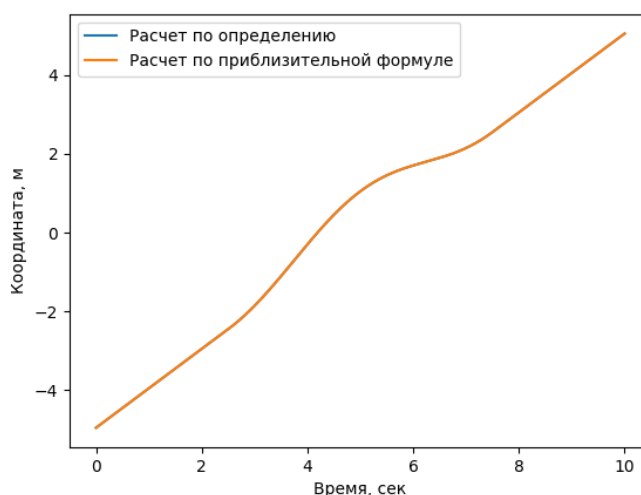


Рис.1.6 Зависимость координаты энергетического центра первой волны от времени.

Как видим, приближительная формула (1.20), в данной задаче позволяет получать результат, не отличный от точного.

Далее, приведем зависимость скорости энергетического центра первой волны от времени и покажем, что, действительно, в согласии с теоремой 5, скорость энергетического центра этой волны до и после взаимодействия одинакова.

На Рис.1.7 представлена зависимость скорости энергетического центра первой волны от времени.

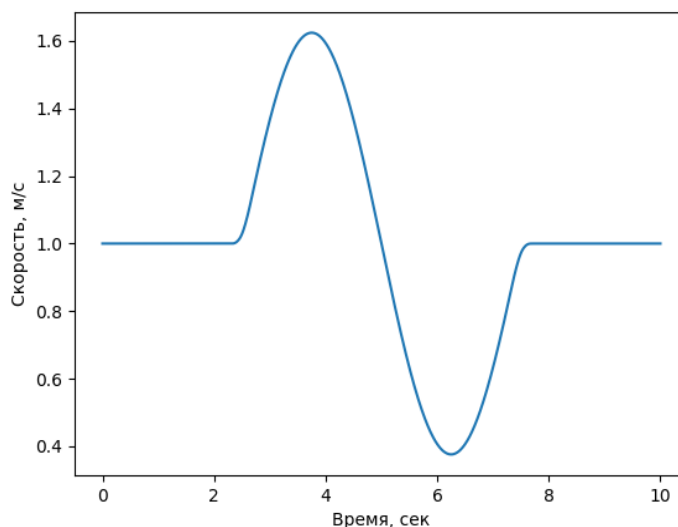


Рис.1.7 Зависимость скорости энергетического центра первой волны от времени.

Как и следовало ожидать, скорость движения энергетического центра, до и после взаимодействия со второй волной $\dot{x}_1^E = c = 1 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = \text{const}$, хотя во время взаимодействия она меняется, вследствие смещения точек среды, в которой находится первая волна.

Далее, на Рис.1.8 представлена зависимость энергетической силы, действующей на первую волну, от времени

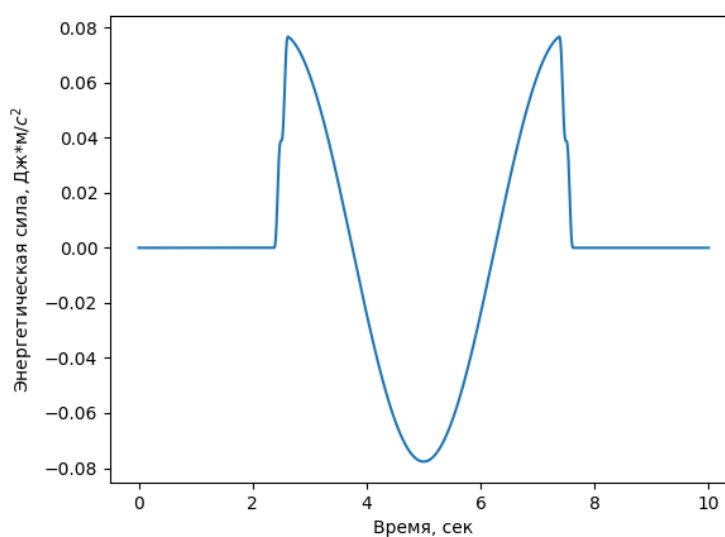


Рис.1.8 Зависимость энергетической силы, действующей на первую волну от времени.

В согласии с этим графиком энергетический центр приобретал ускорение, как в положительном, так и в отрицательном, направлениях, так, чтобы суммарное изменение скорости энергетического центра за все время было нулевым.

Этот пример иллюстрирует влияние перемещений точек среды на положение энергетического центра, которое нельзя учесть, рассматривая только энергетический момент в отсчетной конфигурации (1.3).

ГЛАВА 2. ЦЕПОЧКА ГУКА

В предыдущей главе мы рассматривали распространение энергии в континуальной модели, теперь перейдем к анализу дискретных моделей, примером которой и является цепочка Гука.

2.1 Понятия и обозначения

Рассмотрим одномерную систему точечных масс m , пронумерованных целыми числами $n \in (-\infty, +\infty)$, $n \in \mathbb{Z}$. Будем считать, что любая точечная масса под номером n , взаимодействует только с $n - 1$ и $n + 1$ массами. Договоримся нумеровать связи между точечными массами полуцелыми индексами, так чтобы связь между точечными массами n и $n + 1$ имела номер $\frac{n+(n+1)}{2} = n + \frac{1}{2}$.

Множество полуцелых чисел обозначим $\mathbb{Z}' \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \dots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots \right\}$.

Перемещение точечной массы с номером n обозначим за u_n , а разность $u_{n+1} - u_n$ назовем деформацией связи $n + \frac{1}{2}$ и обозначим

$$\varepsilon_n \stackrel{\text{def}}{=} u_{n+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}'.$$

Силу взаимодействия точечных масс с номерами n и $n + 1$, соответствующей деформации связи $n + \frac{1}{2}$ обозначим $F_{n+\frac{1}{2}}$.

Если в такой системе, сила взаимодействия между точечными массами n и $n + 1$ линейно зависит от деформации $F_n = C\varepsilon_n$, то такая система называется цепочкой Гука. Её схематичное изображение приведено на Рис.2.1.



Рис.2.1 Схематическое изображение цепочки Гука.

Уравнение движения имеет следующий вид

$$m\ddot{u}_n = F_{n+\frac{1}{2}} - F_{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для удобства записи введем разностные операторы. Для этого рассмотрим произвольную последовательность A_n , где n может быть как целым, так и полуцелым.

$$\Delta A_n \stackrel{\text{def}}{=} A_{n+\frac{1}{2}} - A_{n-\frac{1}{2}}.$$

$$\Delta^2 A_n \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\Delta A_n) = A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}.$$

С учетом введённых обозначений запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \Delta u_n, & n \in \mathbb{Z}', \\ m\ddot{u}_n &= C\Delta^2 u_n, & n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Потенциальная энергия деформации связи $n \in \mathbb{Z}'$

$$\Pi_n = \frac{C\varepsilon_n^2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}'.$$

Кинетическая энергия точечной массы $n \in \mathbb{Z}$

$$K_n = \frac{mv_n^2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Введем энергию, ассоциированную с точечной массой $n \in \mathbb{Z}$

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Pi_{n-\frac{1}{2}} + K_n + \frac{1}{2}\Pi_{n+\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Договоримся считать, что в не деформированном состоянии координата точечной массы n задается соотношением $x_n = an, n \in \mathbb{Z}$, что значит, что точечные массы отстоят друг от друга на расстояние a .

Определим энергетический момент в отсчетной конфигурации

$$\bar{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(0) E_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n E_n. \quad (2.2)$$

Он отвечает за распространение энергии за счет ее переноса между точечными массами, однако он не учитывает перенос энергии, вызванный механическими смещениями точечных масс. Чтобы это учесть, введем энергетический момент, посчитанный в актуальной конфигурации

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t) E_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + u_n) E_n. \quad (2.3)$$

Как и в предыдущей главе, введем понятие энергетического центра

$$x^E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M}{E},$$

где $E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_n = \text{const}$ – полная энергия системы.

2.2 Энергетические соотношения для цепочки Гука

В этом пункте мы будем вести изложение опуская доказательства формул, так как это будет перегружать текст. Необходимые доказательства представлены в приложении 2.

Перед тем, как перейти к рассмотрению энергетических моментов, запишем уравнение локального баланса энергии

$$\dot{E}_n = \Delta H_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

где $H_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{2} \varepsilon_n \left(v_{n-\frac{1}{2}} + v_{n+\frac{1}{2}} \right)$ $n \in \mathbb{Z}'$ – поток энергии.

Отметим, что для самого потока энергии, тоже можно записать уравнение баланса

$$\dot{H}_n = \Delta G_n, \quad n \in \mathbb{Z}', \quad (2.5)$$

где $G_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{m} K_n + \frac{1}{2m} F_{n+\frac{1}{2}} F_{n-\frac{1}{2}}$ – суперпоток энергии.

Основываясь на уравнение баланса энергии (2.4), можно доказать, что производная от энергетического момента в отсчетной конфигурации (2.2)

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n. \quad (2.6)$$

А с помощью уравнения баланса для суперпотока (2.5) можно показать, что

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = \text{const}, \quad \frac{d^2\bar{M}}{dt^2} = 0. \quad (2.7)$$

Откуда следует, что если точечные массы не смещаются далеко от своих начальных положений, то есть, когда энергетический момент в отсчетной конфигурации (2.2) практически не отличается от энергетического момента в актуальной конфигурации (2.3), скорость энергетического центра

$$\frac{dx^E}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\bar{M}}{dt} = \text{const},$$

то есть, энергетический центр движется равномерно. Заметим, что точно такой же результат был получен и в континуальной модели.

Для производной от энергетического момента в актуальной конфигурации можем записать

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}}{dt} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (2.8)$$

Вводя обозначение потенциальной энергии, ассоциированной с точечной массой n , запишем

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad E_n = K_n + P_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С учетом этого обозначения перепишем выражение (2.8)

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}}{dt} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n (K_n - P_n).$$

Видим, что в этом выражении присутствует разность между кинетической и потенциальной энергиями, что позволяет предположить, что слагаемое $\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n (K_n - P_n)$ связано с процессами выравнивания кинетической и потенциальной энергий.

Вторая производная от энергетического момента в актуальной конфигурации, представляет собой, по определению, энергетическую силу

$$\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2 M}{dt^2}.$$

Было получено, что

$$\Phi(t) = \frac{4}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta F_n - \frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n \Delta F_n. \quad (2.9)$$

При континуализации, с учетом соотношения $m = \rho S a$, второе слагаемое пропадает, а полученное выражение

$$\Phi(t) = 2\rho S \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \dot{v} dx,$$

полностью повторяет представленную ранее формулу (1.6) для энергетической силы в континуальной среде, рассмотренной в предыдущей главе.

На основании этого можно сказать, что слагаемое $-\frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n \Delta F_n$ принципиально связано с дискретным строением рассматриваемой среды.

2.3 Импульсные моменты

Так как помимо закона сохранения массы и энергии, существует закон сохранения импульса, мы можем определить понятие импульсного момента и импульсного центра.

Импульсным моментом назовем величину

$$M_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (an + u_n)p_n,$$

где $p_n = mv_n$ – импульс точечной массы n .

Если суммарный импульс $P_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \neq 0$, можем определить координату импульсного центра

$$x^P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_p(t)}{P_0}.$$

Оказывается, для производной импульсного момента можно записать простое выражение

$$\frac{dM_p}{dt} = 2(K - \Pi), \quad (2.10)$$

где $K = K(t)$ – полная кинетическая энергия системы, а $\Pi = \Pi(t)$ – полная потенциальная энергия системы.

Выражение (2.10) получено в приложении П.2.

Пользуясь (2.10), запишем скорость движения импульсного центра

$$\dot{x}^P = \frac{2}{P_0}(K - \Pi).$$

Факт того, что скорость движения импульсного центра выражается разностью кинетической и потенциальной энергий дает основание полагать, что его движение связано с процессом выравнивания кинетической и потенциальной энергий.

Начальные условия вида

$$\begin{cases} v_n \in [0, +\infty), & n \in [n_1, n_2], & n_1 \in \mathbb{Z}, & n_2 \in \mathbb{Z}, \\ v_n = 0, & n \notin [n_1, n_2], & n_1 \in \mathbb{Z}, & n_2 \in \mathbb{Z}, \\ u_n = 0, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

будем называть ударным нагружением.

Тут задаются скорости $v_n \geq 0$, это не принципиально, и можно рассматривать скорости $v_n \leq 0$. Однако, для определенности, мы остановимся на условии $v_n \geq 0$.

При ударном нагружении, в начальный момент времени потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая максимальна. С течением времени, кинетическая энергия будет падать, а потенциальная возрастать, до тех пор, пока эти энергии не выровняются в согласии с теоремой о вириале. Таким образом, скорость импульсного центра в начальный момент будет максимальна и направлена в положительном направлении. Но с течением времени эта скорость будет падать до нуля.

На основании численных экспериментов, несколько из которых мы приведем в следующем пункте, можно сказать, что скорости энергетического и импульсного центров, в случае ударного нагружения, приблизительно равны.

$$\frac{dx^E}{dt} \approx \frac{dx^P}{dt}. \quad (2.11)$$

Таким образом, можно, в частном случае ударного нагружения, оценивать скорость энергетического центра, зная скорость импульсного центра, формула для которой значительно проще.

Аналитическое доказательство этого факта, полученного численно, требует дальнейшего исследования и в данной работе не приводится.

2.4 Численное моделирование

Детали численного моделирования приведены в приложении П.4. Там описан способ решения и представлены шаги интегрирования.

Рассмотрим цепочку, состоящую из 1000 точечных масс. Будем нумеровать точечные массы от 1 до 1000.

2.4.1 Первый пример

Продemonстрируем один из численных экспериментов, на основании которых было сформулировано утверждение (2.11).

Зададим следующие характеристики $C = 1 \left(\frac{\text{н}}{\text{м}}\right)$, $m = 1(\text{кг})$, $a = 1(\text{м})$. Эти параметры взяты исключительно для примера и их выбор не принципиален.

Будем использовать обозначение $v_n \in [v_1, v_2]$, которое говорит о том, что скорость точечной массы n выбирается случайно в диапазоне $[v_1, v_2]$.

Зададим возмущение по центру

$$\begin{cases} v_n \in [0,1], & n \in [475, 525], \\ v_n = 0, & n \notin [475, 525], \\ u_n = 0, & n \in [1, 1000]. \end{cases} \quad (2.12)$$

На Рис.2.2 приведена зависимость скорости энергетического и импульсного центров от времени.

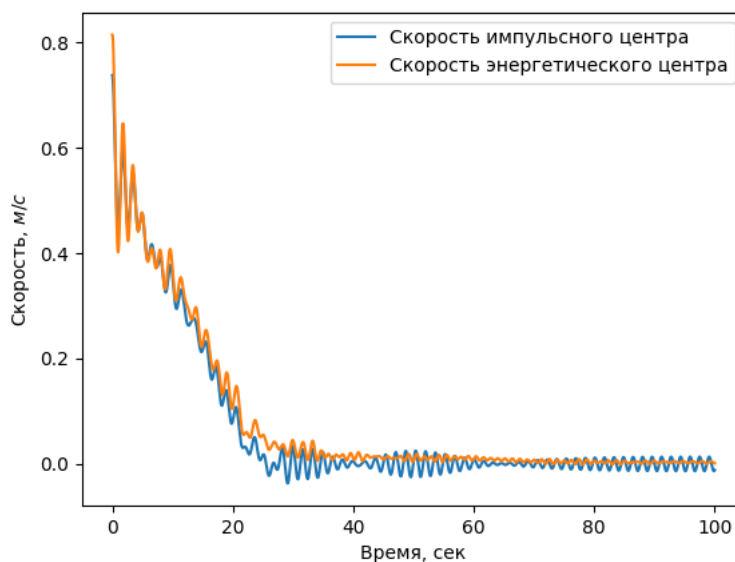


Рис.2.2 Зависимости скорости энергетического и импульсного центров от времени.

Как видим, приближительное равенство (2.11) выполняется, но весьма неточно.

2.4.2 Второй пример

Посмотрим, как изменится точность выполнения равенства (2.11), если вместо начальных условий (2.12) взять

$$\begin{cases} v_n \in [0.5, 1.5], & n \in [475, 525], \\ v_n = 0, & n \notin [475, 525], \\ u_n = 0, & n \in [1, 1000]. \end{cases} \quad (2.13)$$

На Рис. 2.3 приведена зависимость скорости энергетического и импульсного центров от времени.

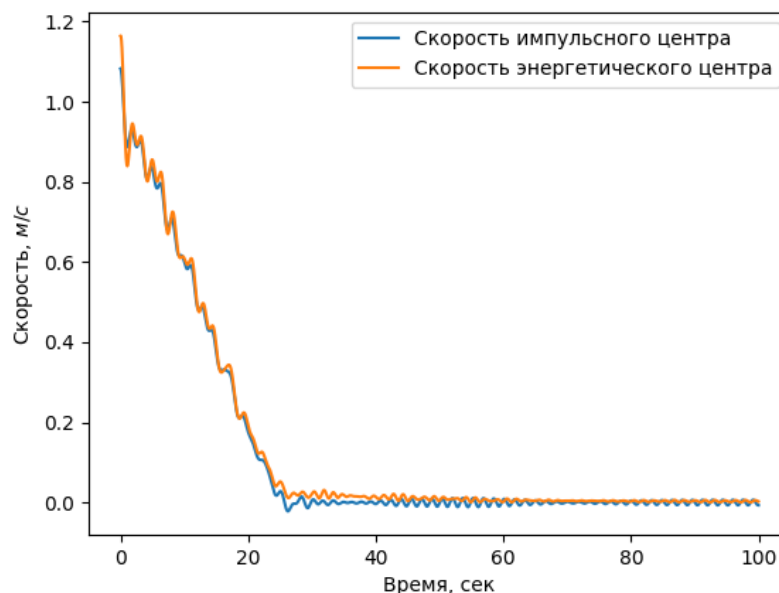


Рис.2.3 Зависимости скорости энергетического и импульсного центров от времени.

Как видим, выражение (2.11) выполняется с большой точностью. На основании чего можно сделать вывод, что чем больше нижняя граница v_1 , которая определяет выбор начальных скоростей $v_n \in [v_1, v_2]$, тем точнее выполняется приближенное равенство (2.11).

2.4.3 Третий пример

В предыдущем примере мы взяли $C = 1 \left(\frac{\text{Н}}{\text{М}}\right)$, $m = 1(\text{кг})$, $a = 1(\text{м})$.

Покажем, что даже при значительном изменении параметров, выражение (2.11)

имеет место быть. Положим $C = 1000 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$, $m = 1(\text{кг})$, $a = 1(\text{м})$ и зададим начальные условия (2.13).

На Рис.2.4 представлена зависимость скорости энергетического и импульсного центров от времени.

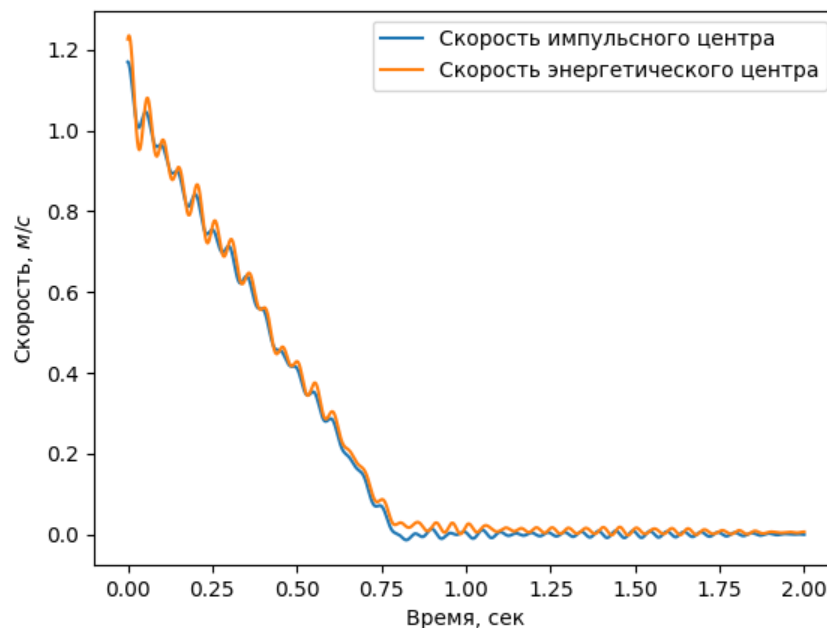


Рис.2.4 Зависимости скорости энергетического и импульсного центров от времени.

Как следует из сравнения Рис.2.3 и Рис.2.4, при увеличении жесткости связи в 1000 раз, визуально точность выполнения приблизительного соотношения (2.11) не изменяется. Единственное фактическое отличие между Рис.2.2 и Рис.2.3 заключается во времени выравнивания кинетической и потенциальной энергий. Видно, что при увеличении жесткости, увеличивается скорость выравнивания кинетической и потенциальной энергий, что влечет за собой более быстрое падение скорости импульсного центра, а вместе с ним и более быстрое падение скорости энергетического центра.

ГЛАВА. 3 АНГАРМОНИЧЕСКАЯ ЦЕПОЧКА

Рассмотрим одномерную цепочку точечных масс. Будем использовать обозначения, введенные в прошлой главе. Но при этом, рассмотрим силу взаимодействия между точечными массами, как произвольную функцию деформации связи.

3.1 Энергетические соотношения

Энергию, ассоциированную с точечной массой, определим также, как и для цепочки Гука, с той лишь разницей, что теперь потенциальная энергия связи является произвольной функцией ее деформации $\Pi_n = \Pi(\varepsilon_n)$.

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \Pi_{n-\frac{1}{2}} + K_n + \frac{1}{2} \Pi_{n+\frac{1}{2}} = K_n + P_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Также оставим не изменёнными определения моментов (2.2), (2.3). Приведем их здесь.

Энергетический момент в отсчетной конфигурации

$$\bar{M} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(0) E_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} an E_n.$$

Энергетический момент в актуальной конфигурации

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t) E_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (an + u_n) E_n.$$

Дадим определение деформационной части полного энергетического момента

$$\hat{M} \stackrel{\text{def}}{=} M - \bar{M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n.$$

Чтобы не перегружать изложение, доказательства рассматриваемых формул приводится в приложении 3.

Первая производная от отсчетного энергетического момента

$$\dot{\bar{M}} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{F_n}{2} \left(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.1)$$

Это выражение имеет в точности такой же вид, как и для Цепочки Гука, с тем отличием, что теперь $F_n \neq C \varepsilon_n$.

Вторая производная от отсчетного энергетического момента

$$\frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta \left(\frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \right). \quad (3.2)$$

Видно, что в случае $F_n = C \varepsilon_n$ из этого выражения сразу следует, что это выражение $\Delta \left(\frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \right) = \Delta \left(\frac{Cd\varepsilon_n}{d\varepsilon_n} \right) = C - C = 0$, то есть $\frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = 0$, что мы и получали для второй производной от отсчетного момента для цепочки Гука.

Первая производная от деформационной части полного энергетического момента

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(F_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} \varepsilon_{n-\frac{1}{2}} - \Pi_{n+\frac{1}{2}} - \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (3.3)$$

Это выражение переходит в $\dot{\hat{M}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n (K_n - P_n)$ в случае, если $F_n = C \varepsilon_n$. С учетом того, что в этом случае \bar{M} переходит в $\dot{\bar{M}} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}'} H_n$, $H_n = \frac{C \varepsilon_n}{2} \left(v_{n-\frac{1}{2}} + v_{n+\frac{1}{2}} \right)$, получаем, что для цепочки Гука $\dot{M} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}'} H_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n (K_n - P_n)$, что мы и получали ранее.

Вторая производная от деформационной части полного энергетического момента

$$\frac{d^2 \hat{M}}{dt^2} = \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(3K_n + P_n - \frac{1}{2} \left(F_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} \varepsilon_{n-\frac{1}{2}} \right) \right) \Delta F_n + \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta \left(\frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \varepsilon_n \right). \quad (3.4)$$

В случае $F_n = C\varepsilon_n$, получаем $\ddot{M} = \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (3K_n - P_n) \Delta F_n + \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta(C\varepsilon_n)$, то есть $\ddot{M} = \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (4K_n - P_n) \Delta F_n$, что совпадает с выражением энергетической силы в цепочке Гука.

3.2 Импульсные моменты

Как и в прошлой главе, можем ввести понятия импульсного момента и импульсного центра.

Импульсный момент

$$M_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (an + u_n) p_n,$$

где $p_n = mv_n$ —импульс точечной массы n .

Если суммарный импульс $P_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n \neq 0$, можем определить координату импульсного центра

$$x^P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_p(t)}{P_0}.$$

Для производной импульсного момента верно выражение

$$\frac{dM_p}{dt} = 2K - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a + \varepsilon_n) F_n. \quad (3.5)$$

Его доказательство приведено в приложении П.3.

Примечательно, что для цепочки с нелинейным взаимодействием тоже может иметь место равенство (2.11)

$$\frac{dx^E}{dt} \approx \frac{dx^P}{dt}.$$

Численно было проверено, что для цепочек с квадратичной и кубической зависимостями сил от деформаций, равенство (2.11) выполняется.

3.3 Численное моделирование

Как и в прошлой главе, отметим, что детали численного моделирования приведены в приложении П.4. Там описан способ решения и представлены шаги интегрирования. Рассмотрим цепочку, состоящую из 1000 точечных масс. Будем нумеровать точечные массы от 1 до 1000 и выберем значение параметров цепочки $m = 1$ (кг), $a = 1$ (м). Отметим, что, как и в прошлой главе, мы проверяем равенство (2.11) только для ударных воздействий, то есть при задании нулевых перемещений и не отрицательных скоростей.

3.3.1 Первый пример

Рассмотрим квадратичную зависимость силы от деформации $F_n = C_1 \varepsilon_n + C_2 \varepsilon_n^2$, где $C_1 = 1 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$, $C_2 = 0.25 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right)$.

Зададим начальные условия

$$\begin{cases} v_n \in [0.5, 1.5], & n \in [475, 525], \\ v_n = 0, & n \notin [475, 525], \\ u_n = 0, & n \in [1, 1000]. \end{cases} \quad (3.6)$$

На Рис.3.1 представлена зависимость скорости энергетического и импульсного центров от времени

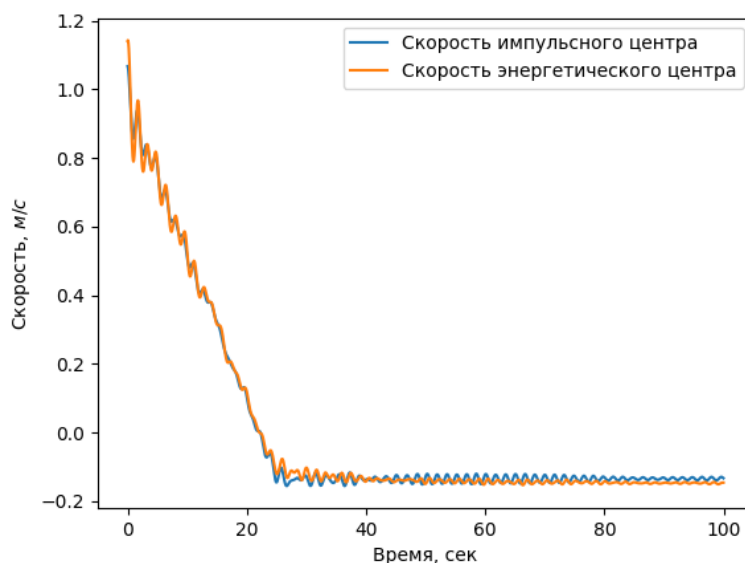


Рис.3.1 Зависимости скорости энергетического и импульсного центров от времени.

Как видим, приближительная формула (2.11) выполняется для рассматриваемой цепочки с нелинейной зависимостью силы от деформации $F_n = C_1 \varepsilon_n + C_2 \varepsilon_n^2$.

3.3.2 Второй пример

Рассмотрим кубическую зависимость силы от деформации $F_n = C_1 \varepsilon_n + C_2 \varepsilon_n^2 + C_3 \varepsilon_n^3$, где $C_1 = 1 \left(\frac{\text{Н}}{\text{М}}\right)$, $C_2 = 0.25 \left(\frac{\text{Н}}{\text{М}^2}\right)$, $C_3 = 0.2 \left(\frac{\text{Н}}{\text{М}^3}\right)$. И зададим начальные условия (3.6).

На Рис.3.2 представлена зависимость скорости энергетического и импульсного центров от времени

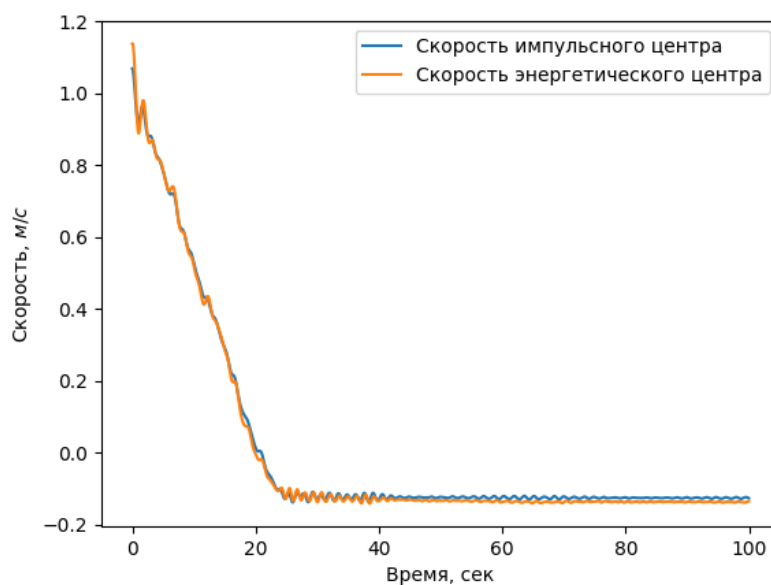


Рис.3.2 Зависимости скорости энергетического и импульсного центров от времени.

Как видим, приближительная формула (2.11) выполняется для рассматриваемой цепочки с нелинейной зависимостью силы от деформации $F_n = C_1 \varepsilon_n + C_2 \varepsilon_n^2 + C_3 \varepsilon_n^3$. Отметим, что если задавать скорости в диапазоне начинающимся с нуля, то точность выполнения формулы (2.11) снизится. Этот факт был продемонстрирован в предыдущей главе для случая линейной зависимости силы от деформации.

Заключение

В данном исследовании рассматривалось, как смещение носителей энергии влияет на движение энергетического центра возмущения. Для этого анализировались различные одномерные модели, простейшей из которых была континуальная модель, в рамках которой удалось разделить возмущение на две энергетические волны, которые были описаны по отдельности. Так же были рассмотрены дискретные модели сред, для которых было введено понятие импульсного момента возмущения, которое позволяет определить положение его импульсного центра. С помощью численного моделирования, в случае ударного нагружения, было показано, что скорости импульсного и энергетического центров возмущения приблизительно равны, а так как выражение для скорости движения импульсного центра возмущения значительно проще, чем для скорости движения его энергетического центра, то указанный выше факт может быть использован для расчета движения энергетического центра возмущения, с помощью использования упрощенных формул, полученных для движения импульсного центра.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Все теоремы, приведенные ниже, доказываются для финитных $f'(x)$ и $g'(x)$.

В доказательствах используется правило интегрирования по частям, в котором учитывается, что $f'(\infty) = g'(\infty) = 0$. Так, например, имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'' g dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f' g' dx.$$

Доказательство Теоремы 1

Докажем, что

$$\bar{\Phi} = \frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = 0,$$

где

$$\bar{M} = S \int_{-\infty}^{+\infty} wx dx.$$

Подставим в это выражение $w = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} E \varepsilon^2$.

$$\bar{M} = S \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \right) x dx.$$

Возьмем первую производную и воспользуемся уравнением движения (1.1), чтобы выразить \dot{v} через u'' , а также правилом интегрирования по частям.

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -SE \int_{-\infty}^{+\infty} u' v dx.$$

Взяв от полученного выражения производную по времени, с учетом уравнения движения (1.1) и правила интегрирования по частям получим

$$\frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = 0.$$

Доказательство равенства

$$\hat{\Phi} = \frac{d^2 \hat{M}}{dt^2} = 2\rho S \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \dot{v} dx$$

происходит аналогично: последовательно берем производные от \hat{M} , упрощая выражения при помощи уравнения движения (1.1) и правила интегрирования по частям.

$$\hat{M} = S \int_{-\infty}^{+\infty} w u dx.$$

Подставим сюда выражение для плотности энергии $w = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}E\varepsilon^2$.

$$\hat{M} = S \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \right) u dx.$$

Первая производная может быть записана в виде

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = SE \int_{-\infty}^{+\infty} u'' uv + v' u' u + \frac{1}{2} u'^2 v dx + S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \rho v^3 dx$$

Взяв вторую производную от \hat{M} и упростив, получим

$$\frac{d^2 \hat{M}}{dt^2} = 2ES \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 u'' dx.$$

Это равенство может быть переписано с учетом уравнения движения (1.1)

$$\frac{d^2 \hat{M}}{dt^2} = 2\rho S \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \dot{v} dx.$$

Доказательство Теоремы 2

На основании Теоремы 1, докажем, что

$$\Phi(t) = -8ES \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x+ct)g'(x-ct)\dot{v}(x,t)dx.$$

Воспользуемся решением уравнения (1.1) в виде

$$u(x, t) = g(x - ct) + f(x + ct).$$

Возьмем производные и запишем

$$v(x, t) = -c g'(x - ct) + c f'(x + ct),$$

$$\dot{v}(x, t) = c^2 g''(x - ct) + c^2 f''(x + ct).$$

Подставим их в выражение для энергетической силы, полученное в Теореме 1

$$\Phi(t) = 2\rho S c^4 \int_{-\infty}^{+\infty} (-g'(x - ct) + f'(x + ct))^2 (g''(x - ct) + f''(x + ct)) dx.$$

Раскрывая скобки и применяя правило интегрирования по частям, получим выражение, упростив которое придем к равенству

$$\Phi(t) = -8\rho S c^4 \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x + ct) g'(x - ct) (g''(x - ct) + f''(x + ct)) dx.$$

С учетом выражения для ускорения и равенства $c^2 = \frac{E}{\rho}$, запишем

$$\Phi(t) = -8ES \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x + ct) g'(x - ct) \dot{v}(x, t) dx.$$

Доказательство Теоремы 3

Докажем, что

$$w(x, t) = w_1(t) + w_2(t).$$

Причем

$$w_1(x, t) = E(g'(x - ct))^2,$$

$$w_2(x, t) = E(f'(x + ct))^2.$$

Запишем выражение для плотности энергии

$$w = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}E\varepsilon^2.$$

Воспользуемся решением уравнения (1.1) в виде

$$u(x, t) = g(x - ct) + f(x + ct),$$

тогда скорость и деформация

$$v(x, t) = -c g'(x - ct) + c f'(x + ct),$$

$$\varepsilon(x, t) = g'(x - ct) + f'(x + ct).$$

Подставляя это в выражение для плотности энергии получим

$$w = \frac{1}{2}\rho c^2 (f'(x + ct) - g'(x - ct))^2 + \frac{1}{2}E (f'(x + ct) + g'(x - ct))^2.$$

Пользуясь тем, что $c^2 = \frac{E}{\rho}$, раскроем скобки и упростим

$$w = E g'^2(x - ct) + E f'^2(x + ct).$$

С другой стороны

$$w_1(x, t) = \frac{1}{2}\rho (\dot{g}(x - ct))^2 + \frac{1}{2}E (g'(x - ct))^2 = E g'^2(x - ct),$$

$$w_2(x, t) = \frac{1}{2}\rho (\dot{f}(x + ct))^2 + \frac{1}{2}E (f'(x + ct))^2 = E f'^2(x + ct).$$

Видим, что

$$w = w_1 + w_2.$$

Доказательство Теоремы 4

Докажем, что верно (1.16)

$$\bar{M}_1(t) = W_1 ct + \bar{M}_1(0),$$

что равносильно равенству

$$\frac{d\bar{M}_1}{dt} = W_1 c.$$

По определению

$$\bar{M}_1 = S \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u_1) w_1 dx.$$

Пользуясь выражениями

$$w_1(x, t) = E g'^2(x - ct),$$

$$u_1(x, t) = g(x - ct),$$

запишем

$$\bar{M}_1 = SE \int_{-\infty}^{+\infty} (x + g(x - ct)) g'^2(x - ct) dx.$$

Пусть функция $g'(x)$ обращается в ноль вне интервала $x \in [a_1, b_1]$. Такой интервал существует, так как мы рассматриваем финитные $g'(x)$ и $f'(x)$. Тогда можем записать

$$\bar{M}_1 = SE \int_{a_1+ct}^{b_1+ct} (x + g(x - ct)) g'^2(x - ct) dx.$$

Заменим переменную интегрирования

$$\bar{M}_1 = SE \int_{a_1}^{b_1} (x + ct + g(x)) g'^2(x) dx.$$

Продифференцируем по t

$$\frac{d\bar{M}_1}{dt} = SE \int_{a_1}^{b_1} c g'^2(x) dx = Sc \int_{a_1}^{b_1} w dx.$$

То есть

$$\frac{d\bar{M}_1}{dt} = cW_1.$$

Аналогично доказывается выражение (1.17).

Теперь докажем формулу (1.18), для энергетической силы, действующей на первую волну.

$$\Phi_1(t) = \frac{d^2 M_1}{dt^2} = \frac{d^2 \bar{M}_1}{dt^2} + \frac{d^2 \hat{M}_{12}}{dt^2} = \frac{d^2 \hat{M}_{12}}{dt^2}.$$

Рассмотрим

$$\hat{M}_{12} = S \int_{-\infty}^{+\infty} w_1 u_2 dx.$$

Представим это выражение через функции $g(x)$ и $f(x)$

$$\hat{M}_{12} = SE \int_{-\infty}^{+\infty} (g'(x - ct))^2 f(x + ct) dx.$$

В силу того, что $g'(x) = 0$, $x \notin [a_1, b_1]$ запишем

$$\hat{M}_{12} = SE \int_{a_1+ct}^{b_1+ct} (g'(x - ct))^2 f(x + ct) dx.$$

Заменим переменную интегрирования

$$\hat{M}_{12} = SE \int_{a_1}^{b_1} (g'(x))^2 f(x + 2ct) dx.$$

Возьмем вторую производную от этого выражения

$$\frac{d^2 \hat{M}_{12}}{dt^2} = 4c^2 SE \int_{a_1}^{b_1} (g'(x))^2 f''(x + 2ct) dx.$$

Вернемся к старой переменной интегрирования

$$\frac{d^2 \widehat{M}_{12}}{dt^2} = 4c^2 SE \int_{a_1+ct}^{b_1+ct} (g'(x-ct))^2 f''(x+ct) dx,$$

$$\frac{d^2 \widehat{M}_{12}}{dt^2} = 4c^2 SE \int_{-\infty}^{+\infty} (g'(x-ct))^2 f''(x+ct) dx.$$

Проинтегрировав по частям, получаем

$$\frac{d^2 \widehat{M}_{12}}{dt^2} = -8c^2 SE \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x-ct) f'(x+ct) g''(x-ct) dx.$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{d^2 \widehat{M}_{21}}{dt^2} = -8c^2 SE \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x-ct) f'(x+ct) f''(x+ct) dx.$$

Доказательство Теоремы 5

Докажем, что скорость энергетического центра первой волны имеет одно и то же значение до и после взаимодействия со второй волной.

$$\frac{dx_1^E}{dt} = \frac{\dot{M}_1}{W_1} = \frac{1}{W_1} \left(\frac{d\bar{M}_1}{dt} + \frac{d\widehat{M}_{12}}{dt} \right).$$

В общем случае функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются финитными, но $f'(x)$ и $g'(x)$ являются, так как мы рассматриваем только такие возмущения. Отсюда следует, что вне некоторой конечной области функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают постоянные значения.

Рассмотрим

$$\widehat{M}_{12} = S \int_{-\infty}^{+\infty} w_1 u_2 dx,$$

где $u_2 = f(x+ct)$.

Когда энергетические волны не пересекаются, это, по определению, значит, что $f'(x + ct) = 0$ в области изменения переменной x , в которой $g'(x - ct) \neq 0$. То есть в области, в которой $w_1 \neq 0$, $f(x + ct) = u_2 = \text{const}$.

Следовательно, когда энергетические волны не пересекаются

$$\widehat{M}_{12} = u_2 S \int_{-\infty}^{+\infty} w_1 dx = u_2 W_1 = \text{const}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{d\widehat{M}_{12}}{dt} = 0,$$

Для моментов времени, когда волны не взаимодействуют.

Таким образом,

$$\frac{dx_1^E}{dt} = \frac{1}{W_1} \left(\frac{d\bar{M}_1}{dt} + \frac{d\widehat{M}_{12}}{dt} \right) = \frac{1}{W_1} \frac{d\bar{M}_1}{dt}.$$

По Теореме 4

$$\frac{d\bar{M}_1}{dt} = cW_1 = \text{const}.$$

Следовательно

$$\frac{dx_1^E}{dt} = cW_1 = \text{const}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство выражений (2.4), (2.5).

Докажем, что

$$\dot{E}_n = \Delta H_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

где $H_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{2} \varepsilon_n \left(v_{n-\frac{1}{2}} + v_{n+\frac{1}{2}} \right)$ $n \in \mathbb{Z}'$ – поток энергии.

Запишем выражение для энергии

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{C \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}^2}{2} + \frac{m v_n^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{C \varepsilon_{n+\frac{1}{2}}^2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Возьмем от него производную, и упростим, учитывая уравнение движения (2.1)

$$m \ddot{u}_n = C \Delta^2 u_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда получим

$$\dot{E}_n = \frac{C}{2} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} (v_n + v_{n+1}) - \frac{C}{2} \varepsilon_{n-\frac{1}{2}} (v_{n-1} + v_n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Что может быть записано в виде (2.4).

Аналогично доказывается равенство (2.5) для суперпотока.

Доказательство формул (2.6), (2.7).

Докажем, что верно (2.6), (2.7) то есть

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n, \quad \frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = 0.$$

Запишем

$$\bar{M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a n E_n.$$

Возьмем производную по времени

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} an \dot{E}_n.$$

Теперь учтем уравнение локального баланса энергии

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \Delta H_n.$$

Раскрывая $\Delta H_n = H_{n+\frac{1}{2}} - H_{n-\frac{1}{2}}$ и меняя переменную суммирования в одном из слагаемых, получим

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left(H_{n+\frac{1}{2}} - H_{n-\frac{1}{2}} \right) = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n H_{n+\frac{1}{2}} - a \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n+1) H_{n+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n.$$

Аналогично, взяв производную и воспользовавшись локальным уравнением баланса для суперпотока (2.5), получим

$$\frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = 0.$$

Доказательство выражений (2.8), (2.9).

Докажем, что

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}}{dt} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Запишем выражение для энергетического момента

$$M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (an + u_n) E_n = \bar{M} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n.$$

Возьмем производную

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n \right).$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n E_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \dot{E}_n.$$

Подставив сюда $\dot{E}_n = \frac{c}{2} \Delta \left(\varepsilon_n \left(v_{n-\frac{1}{2}} + v_{n+\frac{1}{2}} \right) \right)$ и упростив, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n E_n - \frac{c}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(\varepsilon_{n+\frac{1}{2}}^2 + \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}^2 \right).$$

Запишем это выражение с использованием потенциальной и кинетической энергий

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n K_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right).$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Возвращаясь к $\frac{dM}{dt}$, можем записать

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d\bar{M}}{dt} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Перейдем ко второй производной от M .

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right) \right).$$

Здесь учтено, что $\frac{d^2 \bar{M}}{dt^2} = 0$.

Взяв производную и упростив полученное выражение с учетом уравнения движения (2.1), получим

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{4}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta F_n - \frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \Delta F_n,$$

Что эквивалентно (2.9).

Покажем, что при континуализации слагаемое $\frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \Delta F_n$ обнуляется. Пусть деформация связи медленно меняется с номером n , то есть

$$\varepsilon_{n+\frac{1}{2}} \approx \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}.$$

Введем функцию $\varepsilon(x)$, такую, что $\varepsilon(an) = \varepsilon_n$. Тогда $F_n = C\varepsilon(an)$.

Учтем, что

$$\Delta F_n \approx \varepsilon'(an) a.$$

С помощью этого запишем

$$\frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \Delta F_n \approx \frac{C^2}{2m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon(an) \varepsilon'(an) a.$$

Выражение $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon(an) \varepsilon'(an) a$ является интегральной суммой для функции $\varepsilon(x)$.

Таким образом

$$\frac{1}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \left(\Pi_{n+\frac{1}{2}} + \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \Delta F_n \approx \frac{C^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \varepsilon' dx = 0.$$

Доказательство выражения (2.10).

Докажем, что

$$\frac{dM_p}{dt} = 2(K - \Pi).$$

Запишем определение импульсного момента

$$M_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (an + u_n)p_n.$$

Возьмем производную

$$\frac{dM_p}{dt} = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n\dot{p}_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} mv_n^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n\dot{p}_n.$$

Пользуясь уравнение движения (2.1) заменим $\dot{p}_n = C\Delta^2 u_n$ и упростив, запишем

$$a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n\dot{p}_n = 0,$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} mv_n^2 = 2K,$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n\dot{p}_n = -2\Pi.$$

Объединяя эти слагаемые, получим

$$\frac{dM_p}{dt} = 2(K - \Pi).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Основные соотношения, используемые при доказательствах.

Энергия, ассоциированная с точечной массой $n \in \mathbb{Z}$

$$E_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \Pi_{n-\frac{1}{2}} + K_n + \frac{1}{2} \Pi_{n+\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Сила натяжения связи $n \in \mathbb{Z}'$

$$F_n = \frac{d\Pi_n}{d\varepsilon_n}, \quad n \in \mathbb{Z}'.$$

Производная от потенциальной энергии связи $n \in \mathbb{Z}'$

$$\frac{d\Pi_n}{dt} = \frac{d\Pi_n}{d\varepsilon_n} \frac{d\varepsilon_n}{dt} = F_n \left(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad n \in \mathbb{Z}'.$$

Производная от кинетической энергии точечной массы $n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{dK_n}{dt} = m\dot{v}_n v_n = \left(F_{n+\frac{1}{2}} - F_{n-\frac{1}{2}} \right) v_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение движения

$$m\dot{v}_n = F_{n+\frac{1}{2}} - F_{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство выражений (3.1), (3.2).

Для доказательства (3.1) получим локальное уравнение баланса энергии.

$$\dot{E}_n = \frac{1}{2} \frac{d\Pi_{n-\frac{1}{2}}}{dt} + \frac{dK_n}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\Pi_{n+\frac{1}{2}}}{dt}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пользуясь выражениями, приведенными в начале этого приложения, после упрощения, получим

$$\dot{E}_n = \Delta H_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$H_n = \frac{F_n}{2} \left(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad n \in \mathbb{Z}'.$$

Рассмотрим

$$\bar{M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a n E_n.$$

Возьмем производную по времени

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a n \Delta H_n.$$

Преобразуя это равенство также, как это было сделано в приложении 2, при доказательстве выражения (2.6), запишем

$$\frac{d\bar{M}}{dt} = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}'} \frac{F_n}{2} \left(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \right).$$

Теперь докажем (3.2), для этого возьмем производную от $\frac{d\bar{M}}{dt}$.

$$\frac{d^2\bar{M}}{dt^2} = -\frac{a}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n \in \mathbb{Z}'} F_n \left(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \right).$$

Учтем, что

$$\frac{dF_n}{dt} = \frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \frac{d\varepsilon_n}{dt} = \frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \left(v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

А также, воспользуемся уравнение движения

$$m \dot{v}_n = F_{n+\frac{1}{2}} - F_{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда, после упрощения, получим

$$\frac{d^2\bar{M}}{dt^2} = \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta \left(\frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \right).$$

Доказательство выражений (3.3), (3.4).

Докажем, что

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(F_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} \varepsilon_{n-\frac{1}{2}} - \Pi_{n+\frac{1}{2}} - \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Запишем выражение для деформационной части энергетического момента

$$\hat{M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n E_n.$$

Возьмем производную

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \dot{E}_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \dot{E}_n.$$

Воспользуемся локальным уравнением баланса энергии, приведенным при доказательстве выражений (3.1), (3.2), а также определением энергии.

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(\frac{1}{2} \Pi_{n-\frac{1}{2}} + K_n + \frac{1}{2} \Pi_{n+\frac{1}{2}} \right) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \Delta \left(\frac{F_n}{2} (v_{n+\frac{1}{2}} + v_{n-\frac{1}{2}}) \right).$$

Упрощая это выражение, получим

$$\frac{d\hat{M}}{dt} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \left(K_n - \frac{1}{2} \left(F_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} \varepsilon_{n-\frac{1}{2}} - \Pi_{n+\frac{1}{2}} - \Pi_{n-\frac{1}{2}} \right) \right).$$

Возьмем производную по времени. Тогда, воспользовавшись уравнением движения $m\dot{v}_n = F_{n+\frac{1}{2}} - F_{n-\frac{1}{2}}$, после упрощения, получим

$$\frac{d^2\hat{M}}{dt^2} = \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(3K_n + P_n - \frac{1}{2} \left(F_{n+\frac{1}{2}} \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} \varepsilon_{n-\frac{1}{2}} \right) \right) \Delta F_n + \frac{a}{m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \Delta \left(\frac{dF_n}{d\varepsilon_n} \varepsilon_n \right).$$

Доказательство выражения (3.5).

Докажем, что

$$\frac{dM_p}{dt} = 2K - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a + \varepsilon_n) F_n.$$

Запишем определение импульсного момента

$$M_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (an + u_n) p_n.$$

Возьмем производную

$$\frac{dM_p}{dt} = a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \dot{p}_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n p_n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \dot{p}_n.$$

С учетом уравнения движения

$$\dot{p}_n = \Delta F_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

запишем

$$a \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \dot{p}_n = -a \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n,$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n p_n = 2K,$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \dot{p}_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon_n F_n.$$

Объединяя эти слагаемые, получим

$$\frac{dM_p}{dt} = 2K - \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a + \varepsilon_n) F_n.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

1. Континуальная модель

В пункте 1.3 приводится пример, в нем присутствуют Рис.1.2 – Рис.1.5, которые были построены на основании аналитических соотношений, и Рис.1.6 – Рис.1.8, для построения которых, помимо аналитических соотношений, использовалось численное интегрирование методом прямоугольников с шагом $\Delta x = 0.005$ (м) и численное дифференцирование по формуле $\frac{df}{dt} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t}$, где $\Delta t = 0.005$ (с).

Численное интегрирование и дифференцирование было использовано для расчета положения, скорости и ускорения энергетического центра.

2. Интегрирование дискретных одномерных систем

2.1 Описание алгоритма решения

Опишем способ численного решения системы N дифференциальных уравнений вида

$$m\ddot{u}_n = F_n(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}), \quad n \in [1, N].$$

С начальными условиями

$$u_n(t = 0) = u_n^{(0)}, \quad n \in [1, N],$$

$$v_n(0) = v_n^{(0)}, \quad n \in [1, N].$$

И граничными условиями

$$u_0(t) = u_N(t), \quad u_{N+1}(t) = u_1(t).$$

Представленные граничные условия связывают начало и конец цепочки.

Будем численно решать эту систему уравнений для интервала времени $[0, T]$. Разобьем этот интервал на K отрезков и будем обозначать величины, в момент времени $t_k = \frac{T}{K}k$, $k \in [0, K]$ верхним индексом (k) . Введем обозначение $\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T}{K}$.

Опишем шаги решения.

Шаг 1:

По известным положения в начальный момент времени определяем силу, действующую на каждую точечную массу $F_n^{(0)}(u_{n-1}^{(0)}, u_n^{(0)}, u_{n+1}^{(0)})$ и ускорение

$$w_n^{(0)} = \frac{F_n^{(0)}(u_{n-1}^{(0)}, u_n^{(0)}, u_{n+1}^{(0)})}{m}.$$

Шаг 2:

Определяем перемещения к моменту $t_1 = \tau$ по формуле

$$u_n^{(1)} = u_n^{(0)} + v_n^{(0)}\tau + w_n^{(0)}\tau^2, \quad n \in [1, N].$$

И ускорение к моменту $t_1 = \tau$ по формуле

$$w_n^{(1)} = \frac{F_n^{(1)}(u_{n-1}^{(1)}, u_n^{(1)}, u_{n+1}^{(1)})}{m}, \quad n \in [1, N].$$

Шаг 3:

Далее используем алгоритм Верле [15], с помощью которого можно определять положение частицы по ее двум предыдущим положениям:

$$u_n^{(k)} = 2u_n^{(k-1)} - u_n^{(k-2)} + w_n^{(k-1)}\tau^2, \quad n \in [1, N], \quad k \in [2, K].$$

$$w_n^{(k)} = \frac{F_n^{(k)}(u_{n-1}^{(k)}, u_n^{(k)}, u_{n+1}^{(k)})}{m}, \quad n \in [1, N], \quad k \in [2, K].$$

Шаг 4:

Зная положения всех точечных масс в моменты времени $k \in [0, K]$, может найти скорости. Отметим, что начальные скорости всех частиц известны и их искать не требуется.

$$v_n^{(k)} = \frac{u_n^{(k+1)} - u_n^{(k-1)}}{2\tau}, \quad n \in [1, N], \quad k \in [1, K - 1].$$

$$v_n^{(K)} = \frac{u_n^{(K)} - u_n^{(K-1)}}{\tau}, \quad n \in [1, N].$$

Заметим, что точность расчета скорости в последний момент времени K ниже, чем для других моментов времени. Поэтому при анализе решения рассматривались моменты времени $[0, K - 1]$.

2.2 Используемые величины

Для решения уравнений и построения всех графиков приведенных в главах 2 и 3 был использован шаг по времени $\tau = 0.001$ (с).

Для цепочки Гука используется формула

$$F_n^{(k)}(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) = f_{n+1}^{(k)} - f_n^{(k)}, \quad n \in [1, N],$$

где

$$f_n^{(k)} = C(u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}), \quad n \in [1, N].$$

Для цепочки с квадратичной силой взаимодействия используется формула

$$F_n^{(k)}(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) = f_{n+1}^{(k)} - f_n^{(k)}, \quad n \in [1, N],$$

где

$$f_n^{(k)} = \sum_{i=1}^2 C_i (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)})^i, \quad n \in [1, N].$$

Для цепочки с кубической силой взаимодействия используется формула

$$F_n^{(k)}(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}) = f_{n+1}^{(k)} - f_n^{(k)}, \quad n \in [1, N],$$

где

$$f_n^{(k)} = \sum_{i=1}^3 C_i (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)})^i, \quad n \in [1, N].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривцов А. М. Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле // ДАН. – 2015. – Т.464. – №2. – С.162—166
2. Tzou D.Y. Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior. – John Willay and Sons, 2105 -- 566 p.
3. Гузев М.А., Дмитриев А.А. Осциляционно-затухающее поведение температуры в кристалле // Дальневосточный математический журнал. – 2017. – Т.17. – №2. – С.170--179.
4. Chang C.W., Okawa D., Garcia H., Majumdar A., Zettl A. Breakdown of Fourier's law in nanotube thermal conductors // Phys.Rev.Lett. – 2008. – V.101. – P.075903
5. Xu X., Pereira L.F., Wang Y., Wu J., Zhang K., Zhao X., Bae S., Tinh Bui C., Xie R., Thong J.T., Hong B.H., Loh. K.P., Donadio D., Li B., Ozyilmaz B. Length-dependent thermal conductivity in suspended single-layer graphen // Nature Commun. – 2014. – V.5. – P3689.
6. Hoover W.G., Hoover C.G. Simulation and control of chaotic non-equilibrium systems // Advanced Series in Nonlinear Dynamics. – World Sci: 2015. – V.27. – 324 p.
7. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов // ффТ. – 2002. – Т.44. – №12. – С.2158—2163
8. Babenkov M.B., Ivanova E.A. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type // Contin. Mech. Thermodyn. – 2014. – V.26. – No.4. – P.483–502. – doi 10.1007/s00161-013-0315-8
9. Ivanova E.A., Vilchevskaya E.N. Description of Thermal and Micro-Structural Processes in Generalized Continua: Zhilin's Method and its Modifications // Generalized Continua as Models for Materials with Multi-Scale Effects or under Multi-Field Actions / Ed.by H.Altенbach, S.Forest, A.M. Krivtsov – Berlin: Springer, 2013. – P.179-197.

10. Ivanova E.A. Description of mechanism of thermal conduction and internal damping by means of two component Cosserat continuum // *Acta Mach.* –2014. –V.225. –No.3. –P.757–795.
11. Allen M.P., Tildesley A.K. *Computer Simulation of Liquid.* – Oxford: Clarendon Press, 1987. –385 p.
12. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. *Механика. Том.1 Теоретическая физика.* – М.: Физматлит, 2004. –224 с.
13. Кривцов А. М. Колебания энергий в одномерном кристалле // *ДАН.* – 2014. –Т.458. –№3. –С.279-281.
14. Krivtsov A.M. Dynamics of matter and energy. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2022.
15. Verlet L. Computer “experiments” on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules // *Phys. Rev.* 1967. V. 159, №98.