

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН А.М. Кривцов

« _____ » _____ 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ РЕДУЦИРОВАННЫХ СРЕДАХ КОССЕРА СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

По направлению подготовки

01.04.03 Механика и математическое моделирование

профиль

01.04.03_02 Mechanics and Mathematical Modeling (международная)

Выполнил:

студент гр. 5040103/00201

А.Д.Рубцов

Руководитель:

к.ф.-м.н, доцент

Е.Ф. Грекова

Санкт-Петербург

2022

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

« _____ » _____ 2022 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалифицированной работы

студенту Рубцову Александру Дмитриевичу, группа 5040103/00201

1. Тема работы: Волны в анизотропных редуцированных средах Коссера специального типа.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 01.06.2022
3. Исходные данные по работе: Статьи о редуцированных средах Коссера и о когезивных порошках.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): материалы по когезивным порошкам и редуцированным средам Коссера, получение с помощью аналитического решения дисперсионных соотношений для волн в среде с трансверсально-изотропной перевязкой, сравнение со случаем, когда данная перевязка имеет более частный вид, сравнение теоретических результатов для передаточной функции и скорости продольной компоненты волны в порошках магнетита и стали с экспериментальными данными.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): Графики дисперсионных кривых для продольной и волны сдвига в случае, когда волна распространяется вдоль оси симметрии, когда волна распространяется ортогонально оси симметрии, графики передаточной функции и скорости в порошках магнетита и стали как функции центральной частоты импульса.

6. Консультанты по работе _____

7. Дата выдачи задания 13.05.2022

Руководитель ВКР _____ Е.Ф. Грекова

Задание принял к исполнению 13.05.2022

Студент _____ А.Д.Рубцов

РЕФЕРАТ

На 41 с., 16 рисунков, 0 таблиц

АНИЗОТРОПНАЯ ПЕРЕВЯЗКА, РЕДУЦИРОВАННАЯ СРЕДА КОССЕРА, ВОЛНЫ В МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ, ЗАПРЕЩЕННАЯ ЗОНА

В работе была рассмотрена модель анизотропной редуцированной среды Коссера с трансверсально-изотропной перевязкой общего вида между трансляционными и поворотными деформациями. Аналитически получены дисперсионные соотношения для случая волны, распространяющейся вдоль оси симметрии, а также ортогонально ей. Из-за наличия трансверсально-изотропной перевязки в энергии между деформациями и отсутствия реакции среды на градиент поворота продольная волна имеет запрещённую зону. Для смешанной волны, распространяющейся ортогонально оси симметрии, запрещенная зона присутствует лишь для одной ветви, а вторая существует для всех частот. Уравнения в перемещениях для этого направления распространения волны оказываются такими же, как для случая трансверсально-изотропной перевязки только между объемной и поворотной деформациями, исследованного в других работах. Также проведено сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными для когезивного порошка, образец которого сформирован просеиванием через сито в поле силы тяжести, полученными испанскими и французскими коллегами, для случая смешанной волны, распространяющейся ортогонально оси симметрии.

THE ABSTRACT

41 pages, 16 pictures, 0 tables

ANISOTROPIC COUPLING, REDUCED COSSERAT MEDIUM, WAVES IN
MICROPOLAR MEDIA, BANDGAP

We consider a model of an anisotropic reduced Cosserat medium with axisymmetric coupling between translational and rotational strains. Dispersion relations are analytically obtained for the case of a wave propagating along the axis of symmetry, as well as orthogonally to it. Due to the presence of the coupling between different types of strain and the absence of the reaction to the gradient of microrotation, the longitudinal wave has a band gap. For the mixed wave whose direction of propagation is orthogonal to the axis of symmetry, the coupling between the shear and rotational deformation does not make any contribution but only the coupling between the volumetric and rotational deformation matters. The theoretical results for the case of the mixed wave whose direction is orthogonal to the axis of symmetry are compared with experimental data for cohesive powders, when the sample is formed by sieving under the gravity field.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
ГЛАВА 1. Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями	7
1.1 Основные понятия	7
1.2 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями	9
1.3 Волна, распространяющаяся вдоль оси симметрии ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{n}$)	12
1.3.1 Сравнение со случаем $\xi = 0$	15
1.3.2 Сравнение с изотропным случаем	17
1.4 Волна, распространяющаяся ортогонально оси симметрии ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$)	19
ГЛАВА 2. Сравнение с экспериментальными данными	23
2.1 Некоторые особенности порошков, агрегатов	23
2.2 Природа агрегатов	23
2.3 Граница между некогезивными и когезивными частицами	24
2.4 Эксперимент (Ruíz Botello, Tournat, Castellanos, 2016, Ultrasonics)	25
2.5 Особенности свойств порошков магнетита и стали	26
2.6 Описание установки для эксперимента	27
2.7 Возможное применение среды Коссера с анизотропной перевязкой как модели для описания эксперимента	29
2.8 Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными	32
2.9 Сравнение результатов для функции частотной характеристики	36
Заключение	39
Список использованной литературы	40

Введение

На данном этапе развития такой науки, как прикладная механика, приходится обращаться к понятию сложной сплошной среды, в которой тела-точки континуума представляют из себя сложный бесконечно малый объект, имеющий несколько степеней свободы.

Братья Эжен и Франсуа Коссера предложили рассмотреть в качестве такой исходной частицы малое твердое тело (тело-точку), и включить в деформации, характеризующие состояние среды, поворот тела-точки, а не только ее перемещение. Это положило начало развитию такой ветви науки, как трехмерная теория континуума с поворотными степенями свободы [10]. Данная работа опережала свое время своей уникальностью, поэтому не смогла быть практически применима на тот момент. В связи с этим некоторое время не получала дальнейшего развития, пока снова на результаты работы не обратили внимание ряд учёных, начиная с известного американского ученого К. Трусделла. Так, П.А. Жилиным при помощи фундаментальных законов баланса механики были получены определяющие уравнения для двумерной среды Коссера, обобщаемые на трехмерный случай [1]. Такую теорию, как редуцированная среда Коссера, рассматриваемую в качестве модели твердой сыпучей среды, предложили исследователи Шварц, Джонсон и Фенг [16]. Данный особый тип упругой линейной изотропной среды Коссера предполагает независимые кинематически перемещения и повороты, но не зависящую от градиента поворота энергию деформации. Редуцированная среда Коссера представляет собой частный случай акустического метаматериала.

Особый интерес для механики в качестве изучения представляют материалы с запрещенными зонами, т.е. единожды отрицательные акустические метаматериалы, и материалы с зонами аномального преломления (падающими участками дисперсионных кривых), т.е. дважды отрицательные акустические метаматериалы. Вполне логично было бы применять механику редуцированных сред Коссера в таких направлениях как механика сыпучих сред или ротационная сейсмология, где сложная блоковая структура с анизотропией и неоднородностями, которые могут влиять на распространение волн. Здесь важную роль будут играть поворотные степени свободы [2],[3]. Нередко в качестве сред Коссера [14],[15] рассматриваются модели композитов и сыпучих сред с различными неоднородными включениями. Также для сейсмических экспериментов предлагаются модели различных континуумов с вращательными степенями свободы [11]. Редуцированные модели можно считать наиболее подходящими для описания в зернистых и сыпучих средах, поскольку там отсутствуют внутренние усилия, препятствующие взаимному повороту зерен

или частиц.

В данной работе целью было исследование дисперсионных кривых для продольной волны в среде с трансверсально-изотропной перевязкой. Также сравнение теории для случая смешанной волны с экспериментом Руиса Ботельо, Турна и Кастельяноса [7]. Выводы полученные из данной работы возможно помогут в дальнейших исследованиях развить теорию распространения волн в гранулированных средах.

ГЛАВА 1. Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями

1.1 Основные понятия

Материал данного раздела можно найти в работе [12].

Рассматривая различные материалы, вспомним некоторые основные определения для разных моделей.

Классическая среда — континуум, состоящий из материальных точек.

Среда Коссера — континуум, который состоит из бесконечно малых твердых тел. В каждой точке имеется два поля: это смещение \mathbf{u} и тензор поворота \mathbf{P} , такой, что $\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_k = \mathbf{D}_k$. Где \mathbf{d}_k - базисные векторы в отчетной конфигурации, а \mathbf{D}_k - базисные векторы в актуальной конфигурации. Средами Коссера являются, например, композиты, находящиеся под нагрузкой, которая вызывает вращение достаточно жестких зерен (сверхпластичные материалы, акустические метаматериалы), или гетерогенные материалы с зернистой структурой.

Редуцированная среда Коссера — среда, у которой тела-точки имеют вращательные степени свободы. Никакие усилия в среде не будут совершать работу на градиенте угловых скоростей. Тензор силовых напряжений $\boldsymbol{\tau}$ асимметричен, при этом нет моментных напряжений.

При нулевых внешних нагрузках законы динамики Эйлера имеют вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau}_\times = \rho I \ddot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Здесь \mathbf{u} — перемещение, $\boldsymbol{\theta} = o(1)$ — вектор малого поворота ($\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} = o^2(1)$), ρ — плотность, ρI — плотность момента инерции (считаем тело-точку шаровым). Угловая скорость малого поворота $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + o^2(1)$.

Для линейной теории плотность энергии деформации является квадратичной формой линейных тензоров деформации, которая в общем случае равна

$$\rho U = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \cdot \cdot \mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g}. \quad (1)$$

Из закона баланса энергии для редуцированной среды Коссера (Усилия не работают на

градиенте поворота по определению редуцированной среды)

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\tau}^\top \cdot \cdot (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\tau}^\top \cdot \cdot \dot{\mathbf{g}} \quad (2)$$

получаем определяющее соотношение

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}} = \mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} \quad (3)$$

Здесь введен линейный тензор деформации $\mathbf{g} = \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$, а также тензор упругих постоянных 4 ранга

$$\mathbf{X} = \mathbf{C} - \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{S}^k \mathbf{n}_k \times \mathbf{E} - \mathbf{n}_k \times \mathbf{E} \mathbf{S}^k. \quad (4)$$

Тензор \mathbf{C} обладает той же симметрией, что и тензор упругих постоянных в классической теории упругости — правая и левая диады в его полиадах перестановочны, и каждая из них является симметричной. Таким образом, в выражении для упругой энергии этот тензор участвует в свертке с $\mathbf{g}^S = \nabla \mathbf{u}^S$ с обеих сторон. Правая и левая диады в тензоре $\boldsymbol{\alpha}$ также перестановочны, однако каждая из них является антисимметричной, то есть данный тензор участвует в свертке с $\mathbf{g}^A = \nabla \mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$ с обеих сторон. Оставшиеся два тензора $\mathbf{S}^k \mathbf{n}_k \times \mathbf{E}$, $\mathbf{n}_k \times \mathbf{E} \mathbf{S}^k$ отвечают за перекрестные члены в энергии, связывающие антисимметричную \mathbf{g}^A и симметричную часть \mathbf{g}^S тензора деформации, $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^{k\top}$ — симметричные тензоры второго ранга, \mathbf{n}_k — векторы.

Баланс энергии также может быть записан в виде

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\tau}^S \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u})^S - \boldsymbol{\tau}^A \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\tau}^S \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u})^S + \boldsymbol{\tau}_\times \cdot (\nabla \times \frac{\mathbf{u}}{2} - \boldsymbol{\theta}) \quad (5)$$

Уравнения динамики среды при нулевых внешних массовых воздействиях имеют следующий вид

$$\nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (6)$$

— баланс сил,

$$(\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g})_\times = \rho I \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (7)$$

— баланс моментов.

Рассмотрим выражение для упругой энергии более подробно. Разложим \mathbf{g} на симмет-

ричную и антисимметричную части:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^S + \mathbf{g}^A, \quad \mathbf{g}^S = \nabla \mathbf{u}^S, \quad \mathbf{g}^A = (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \frac{\mathbf{u}}{2}) \times \mathbf{E}. \quad (8)$$

В упругом тензоре \mathbf{X} выделим соответствующие слагаемые, разложив левую и правую диаду на антисимметричную и симметричную части, представив его в виде (4). Тогда

$$\rho U = \frac{1}{2} \mathbf{g}^S \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{g}^S + \frac{1}{2} \mathbf{g}^A \cdot \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \cdot \mathbf{g}^A + \mathbf{g}^S \cdot \cdot \mathbf{S}^k (\mathbf{n}_k \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{g}^A \quad (9)$$

Определяющие уравнения (3) принимают вид

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}) + 2 \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{u}^S \cdot \cdot \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \times \mathbf{E} \quad (10)$$

Здесь, вообще говоря, для анизотропных материалов упругий аксиальный тензор 3 ранга $\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \neq 0$. Для изотропных материалов этот член исчезает. Данный тензор ответствен за перевязку трансляционной и поворотной-вихревой деформаций. Т.е. момент $\boldsymbol{\tau}_\times$, который действует на тело-точку, может вызвать трансляционную деформацию $\nabla \mathbf{u}^S$. А симметричная часть тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}^S$ может возникнуть как реакция на поворот тела-точки относительно окрестности $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$.

Этот тип тензора упругости можно использовать для описания локальной анизотропии, которая является типичным свойством сыпучей среды. Действительно, если рассматривать сыпучую среду на небольших масштабах, то гидростатическое давление может вызвать локальный сдвиг и поворот, а для больших длин волн этот эффект почти незаметен. В случае изотропности тензоров $\boldsymbol{\alpha}$ и \mathbf{C} подобная перевязка оказывает заметное влияние на поведение среды лишь на определенных длинах волн. Такую модель мы и выберем.

1.2 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями

Размышляя о возможных моделях для блоковых и сыпучих сред с различными неоднородностями, следует обратить внимание на теорию, где имеются изотропные тензоры \mathbf{C} и $\boldsymbol{\alpha}$. Тензор упругих постоянных $\mathbf{S}^k \mathbf{n}^k \times \mathbf{E}$ будет учитывать анизотропную перевязку между трансляционными и поворотной-вихревыми деформациями. Для консолидированных сыпучих сред характерен сдвиг под действием гидростатического давления или же всестороннего растягивающего напряжения, а также объемная деформация под действи-

ем касательных напряжений. Данный перекрестный член в упругой энергии дает возможность это моделировать. Особый вклад подобный член будет оказывать на определенных частотах. Но на достаточно высоких и очень низких он не будет играть сколь угодно существенной роли. Поэтому для трансляционных волн достаточно большой длины им можно пренебречь. Но для коротких волн его влияние уже будет существенно. Благодаря этому с его помощью можно описать локальную анизотропию в сыпучих средах.

Будем рассматривать изотропный тензор четвертого ранга

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{E} + 2\mu (\mathbf{i}_m \mathbf{i}_n)^S (\mathbf{i}^m \mathbf{i}^n)^S \quad (11)$$

где μ , λ - постоянные Ламе.

Полярный изотропный тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\alpha \mathbf{E} \quad (12)$$

где α - константа, которая характеризует сопротивление повороту тела-точки относительно окрестности (упругий модуль Коссера).

Будем рассматривать трансверсально-изотропную перевязку общего вида ($\mathbf{n} = n\hat{\mathbf{n}}$, $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$):

$$\mathbf{S}_k \mathbf{n}_k = n(\mathbf{E} + \xi \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}, \quad (13)$$

n, ξ — некоторые анизотропные упругие модули.

Т.е для сыпучих сред можно ввести такое понятие, как локальная анизотропия. Подобная перевязка начинает оказывать влияние только на каких-то определенных длинах волн. Учитывая тот факт, что \mathbf{C} изотропен на низких частотах у материала будет наблюдаться поведение подобно изотропному.

Подобная модель может быть оправдана при наличии в материале какого-нибудь выделенного направления, которое задается вектором \mathbf{n} . Например, в экспериментах в образцах, формируемых при помощи просеивания или медленного осаждения частиц, сила тяжести будет влиять на структуру образующегося материала. С этим и связана данная анизотропия. Геофизики также предлагают рассматривать геосреду как трансверсально-изотропный материал, ось симметрии которого соответствует направлению силы тяжести [6].

Перевязка такого вида в редуцированной среде Коссера рассматривается впервые. Ранее в [12] был рассмотрен случай $\xi = 0$.

Подставляя в баланс сил и моментов данные выражения, получим следующие уравнения в перемещениях для случая шарового тензора инерции тел-точек при нулевых внешних нагрузках

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta} \\
& \quad - \mathbf{n} \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u} + \xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}) + 2\nabla(\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \frac{\mathbf{u}}{2})) \\
& \quad \quad \quad + 2\xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \frac{\mathbf{u}}{2}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha\nabla \times \mathbf{u} - 2\mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{u} - 2\xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u} = I_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (15)$$

Исследуем распространение свободных гармонических волн в данной трехмерной неограниченной сплошной среде. Будем рассматривать два случая распространения волны: вдоль оси симметрии и перпендикулярно ей.

Мы ищем решение динамических уравнений как

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)}, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)} \quad (16)$$

Произведем замену оператора ∇ на вектор $i\mathbf{k} = ik\hat{\mathbf{k}}$. Также заменим оператор дифференцирования по времени на умножение на $i\omega$.

В итоге имеем

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + 2\mu)k^2 \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)k^2 \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}) + 2ik\alpha \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\theta} \\
& \quad + k^2 n \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} + \xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{k}}\mathbf{u}) + 2ikn \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\theta} - ik\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\mathbf{u}}{2})) \\
& \quad \quad \quad + 2ikn \xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\theta} - ik\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\mathbf{u}}{2}) = -\omega^2 \rho \mathbf{u}, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2ik\alpha \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} - 2ikn \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} - 2ikn \xi \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{k}}\mathbf{u} = -\omega^2 \rho I_0 \boldsymbol{\theta}. \quad (18)$$

Далее будем рассматривать частные случаи распространения волны.

1.3 Волна, распространяющаяся вдоль оси симметрии ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{n}$)

Исследуются плоские волны, для которых ищем решение уравнений. Мы рассматриваем случай, когда энергия будет положительная и материал соответственно устойчив $(\lambda + 2\mu)\alpha > n^2$. Рассмотрим случай распространения волны вдоль оси симметрии: $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}$.

Тогда получим из уравнений в перемещениях (17),(18):

$$- (\lambda + 2\mu)k^2 \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)k\hat{\mathbf{n}} \times (k\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}) + 2i\alpha k\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\theta} + 2ikn\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\theta} + 2ikn\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\boldsymbol{\theta} = -\omega^2\rho\mathbf{u}, \quad (19)$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2i\alpha k\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} - 2ikn\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} - 2ikn\xi\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\mathbf{u} = -\omega^2\rho I\boldsymbol{\theta} \quad (20)$$

После некоторых преобразований имеем

$$(\lambda + 2\mu)k^2 \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u} + 2i\alpha k\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\theta} + 2ikn(1 + \xi)\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\theta} = \omega^2\rho\mathbf{u}, \quad (21)$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2i\alpha k\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} - 2ikn(1 + \xi)\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = -\omega^2\rho I\boldsymbol{\theta} \quad (22)$$

Теперь выразим вектор $\boldsymbol{\theta}$ через перемещение \mathbf{u} из уравнения (22)

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{2ik(n\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} + \xi n\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} - \alpha\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u})}{\omega^2\rho I - 4\alpha} = \frac{2ik\left(\frac{n(1+\xi)}{\rho I}\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} - \frac{\omega_0^2}{4}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}\right)}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \mathbf{u} \quad (23)$$

Здесь введено обозначение для квадрата характерной частоты $\omega_0^2 = \frac{4\alpha}{\rho I}$.

Подставим $\boldsymbol{\theta}$, выраженное через \mathbf{u} , в баланс сил (21):

$$(\omega^2 - (c_p^2 + \frac{4n^2(1+\xi)^2}{\rho I(\omega^2 - \omega_0^2)})k^2)\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} + (\omega^2 - (c_{s\alpha}^2 + \frac{\alpha\omega_0^2}{\rho(\omega^2 - \omega_0^2)})k^2)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (24)$$

Решая данную редуцированную спектральную задачу для вектора трансляционных перемещений \mathbf{u} , получим следующие дисперсионные соотношения.

1) Для $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ (волна сдвига-вращения)

$$c_{s\alpha}^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad (25)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\mu}{\mu + \alpha}, \quad c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}. \quad (26)$$

Исходя из данных результатов, были построены численно дисперсионные кривые при следующих параметрах:

$$\omega_0 = 1.97 \text{ кГц}, \omega_1 = 1.53 \text{ кГц}, \rho = 0.94 \text{ кг/м}^3, \mu = 1 \text{ МПа}, \alpha = 1.5\mu, n = 0.5\mu, \lambda = 11\mu.$$

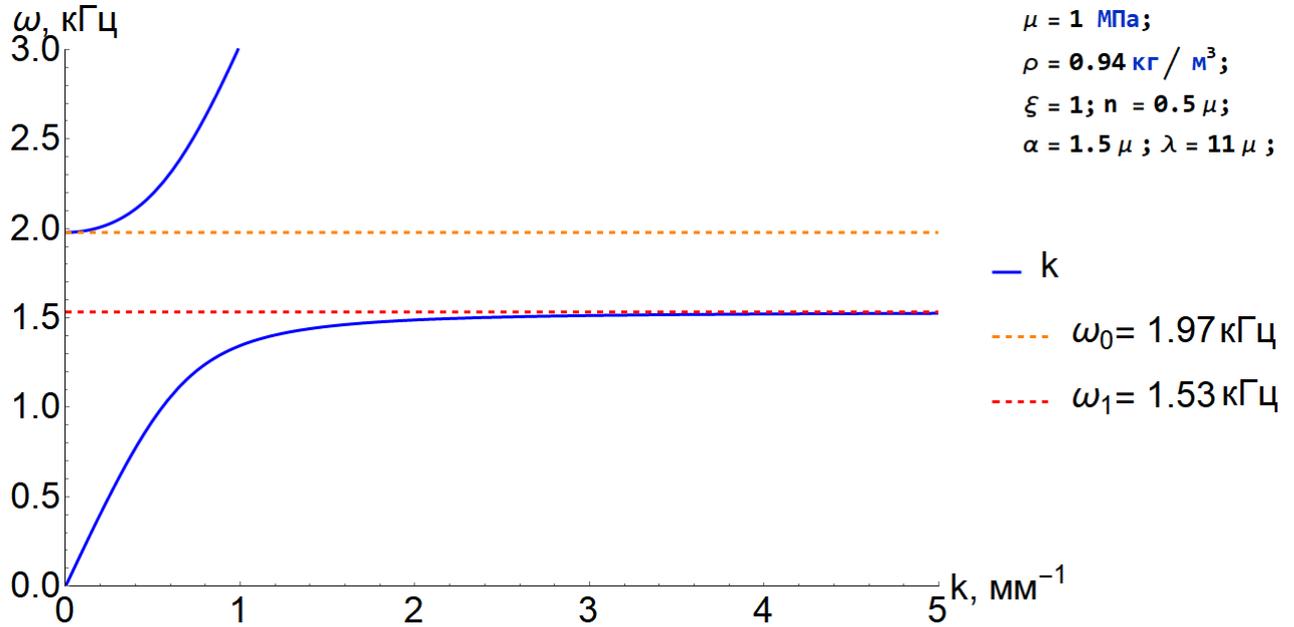


Рис. 1: Дисперсионная кривая для волны сдвига–вращения $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$.

2) Для $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{k}}$ (продольная волна)

$$c_p^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_{1p}^2} \quad (27)$$

где

$$\omega_{1p}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{n^2(1+\xi)^2}{4\alpha(\lambda+2\mu)}\right), \quad c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}. \quad (28)$$

На высоких частотах фазовая и групповая скорость стремятся к c_p , а на низких частотах к $c_p \sqrt{1 - \frac{n^2(1+\xi)^2}{4\alpha(\lambda+2\mu)}}$. Заметим, что на низких частотах скорость продольной волны может быть меньше скорости волны сдвига при достаточно большой анизотропии. Это поведение необычно для большинства сред.

Здесь также построены дисперсионные кривые при следующих параметрах:

$$\omega_0 = 1.97 \text{ кГц}, \omega_1 = 1.63 \text{ кГц}, \rho = 0.94 \text{ кг/м}^3, \mu = 1 \text{ МПа}, \alpha = 1.5\mu, n = 0.5\mu, \lambda = 11\mu.$$

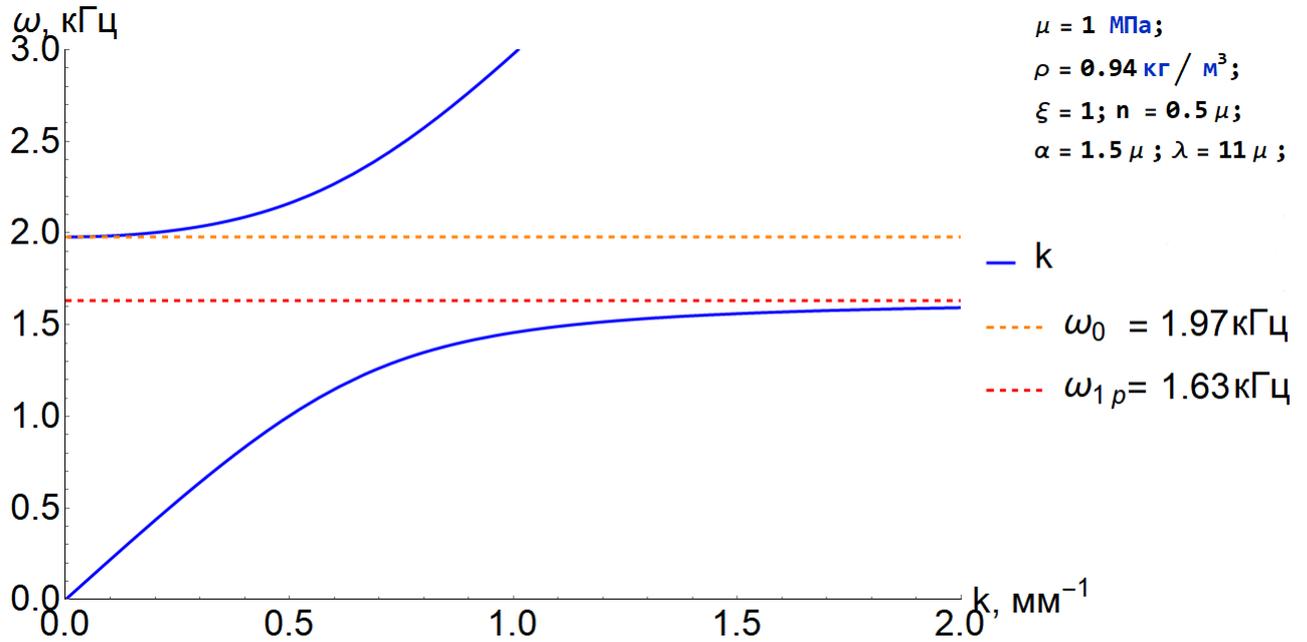


Рис. 2: Дисперсионная кривая для продольной волны $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{k}}$

Видим, что в анизотропном случае в среде имеется продольная и сдвиговая волны. Среда имеет запрещенные полосы частот для плоских волн. Т. е. существует запрещенная полоса частот, ограниченная ω_1 и $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{\rho l}}$ для волны сдвига, и запрещенная зона от ω_{1p} до ω_0 для продольной волны. Здесь $\omega_1 < \omega_0$ и $\omega_{1p} < \omega_0$.

1.3.1 Сравнение со случаем $\xi = 0$

Сравним также с уже исследованным в работе [12] случаем $\xi = 0$ уравнения в перемещениях. При $\xi = 0$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta} - \mathbf{n} \times \nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + 2\nabla(\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)) = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (29)$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha\nabla \times \mathbf{u} - 2\mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{u} = I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (30)$$

Т.е.

$$(\lambda + 2\mu)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} - 2i\alpha\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} - \mathbf{n} \times \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - 2i\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - i\mathbf{k} \times \mathbf{u}/2) = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{i\omega_0^2(-\mathbf{k} \times \mathbf{u} + \alpha^{-1}\mathbf{n}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (32)$$

Редуцированная спектральная задача имеет следующий вид

$$\begin{aligned} (\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu + \frac{n^2\omega^2}{\alpha(\omega^2 - \omega_0^2)} - \frac{n^2}{\alpha}))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} \\ + (\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}))(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} \\ - k^2n\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим, как и в предыдущем разделе, волну, распространяющуюся вдоль оси симметрии: $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}$. Дисперсионные соотношения для этого случая волны сдвига такие же, как и в случае для $\xi \neq 0$, рассмотренном в предыдущем разделе:

$$k_s^2 = \frac{\omega^2(1 - \omega^2/\omega_0^2)}{c_s^2(1 - \omega^2/\omega_1^2)} = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (34)$$

Здесь $c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

Дисперсионные соотношения для случая продольной волны

$$k_p^2 = \frac{\omega^2(1 - \omega^2/\omega_0^2)}{c_p^2(1 - \omega^2/\omega_p^2)} \quad (35)$$

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{n^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}\right) \quad (36)$$

Здесь на высоких частотах при $\omega \rightarrow \infty$ групповая скорость $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ будет стремиться к корню из $c_{p\alpha}^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$, а на низких соответственно при $\omega \rightarrow 0$ квадрат скорости будет стремиться к

$$c_p^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\alpha - n^2}{\alpha\rho} = c_{p\alpha}^2 \left(1 - \frac{n^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}\right). \quad (37)$$

Мы видим, что характер дисперсионной кривой тот же, что и в случае $\xi \neq 0$, однако модуль $n(1 + \xi)$ заменяется на n . Граничная частота для случая перевязки общего вида $\xi \neq 0$ ниже, чем в рассматриваемом частном случае, и запрещенная зона больше.

В анизотропном случае, как с трансверсально-изотропной перевязкой общего вида, так и в случае $\xi = 0$, при достаточно большой анизотропии продольные волны на низких частотах могут быть медленнее сдвиговых, если волна распространяется вдоль оси симметрии. Это невозможно в изотропном случае.

Для данных параметров построены дисперсионные кривые.

$$\omega_0 = 1.97 \text{ кГц}, \omega_1 = 1.89 \text{ кГц}, \rho = 0.94 \text{ кг/м}^3, \mu = 1 \text{ МПа}, \alpha = 1.5\mu, n = 0.5\mu, \lambda = 11\mu.$$

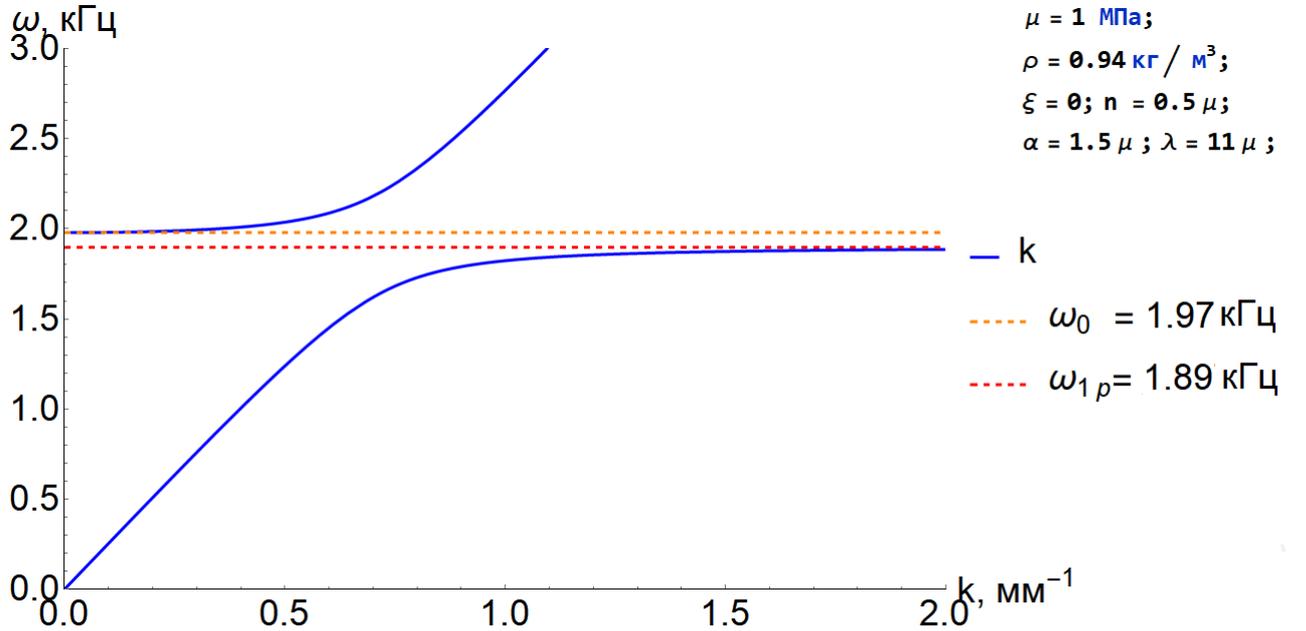


Рис. 3: Дисперсионная кривая для продольной волны $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{k}}$

Для обоих случаев ($\xi = 1, \xi = 0$) наблюдается наличие запрещенной зоны $[\omega_1, \omega_0]$ для волны сдвига. Нижняя ветка кривой приближается к горизонтальной асимптоте $\omega = \omega_1$.

Как здесь, так и в случае $\xi \neq 0$ на низких частотах продольная волна может оказаться медленнее поперечной, если анизотропия достаточно велика.

1.3.2 Сравнение с изотропным случаем

Рассмотрим уже исследованный в работе [13] случай. Приведем в этом разделе полученные в упомянутой статье результаты.

Здесь $\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k = 0$, и в упругой энергии не будет перевязочного члена между $\nabla \mathbf{u}^S$ и $\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2$.

В изотропной среде для низких частот продольная волна всегда быстрее, чем поперечная.

Для наглядности приведены уравнения динамики среды в перемещениях для изотропного материала:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (38)$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha\nabla \times \mathbf{u} = I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (39)$$

Здесь также отсутствуют внешние воздействия. Будем искать гармонические решения — свободные волны в неограниченной трехмерной среде.

$$-(\lambda + 2\mu)\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) + 2i\alpha\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (40)$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2i\alpha\mathbf{k} \times \mathbf{u} = I_0\ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (41)$$

Для продольной волны спектральная задача имеет вид

$$(\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu))\mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (42)$$

Для продольной волны дисперсионные соотношения выглядят следующим образом:

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}k. \quad (43)$$

Для трансляционных перемещений редуцированная спектральная задача имеет вид

$$-c_p^2 \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + \left(c_{s\alpha}^2 - \frac{\alpha}{\rho \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} \right) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) = -\omega^2 \mathbf{u} \quad (44)$$

Для волны сдвига-вращения, упростив, получим

$$\left(\omega^2 - c_{s\alpha}^2 k^2 \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (45)$$

Дисперсионные соотношения для волны сдвига-вращения

$$c_{s\alpha}^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (46)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\mu}{\mu + \alpha} \quad (47)$$

где $c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}$.

Для данного случая построены дисперсионные кривые при следующих параметрах:

$\omega_0 = 1.97$ кГц, $\omega_1 = 1.53$ кГц, $\rho = 0.94$ кг/м³, $\mu = 1$ МПа, $\alpha = 1.5\mu$, $n = 0.5\mu$, $\lambda = 11\mu$.

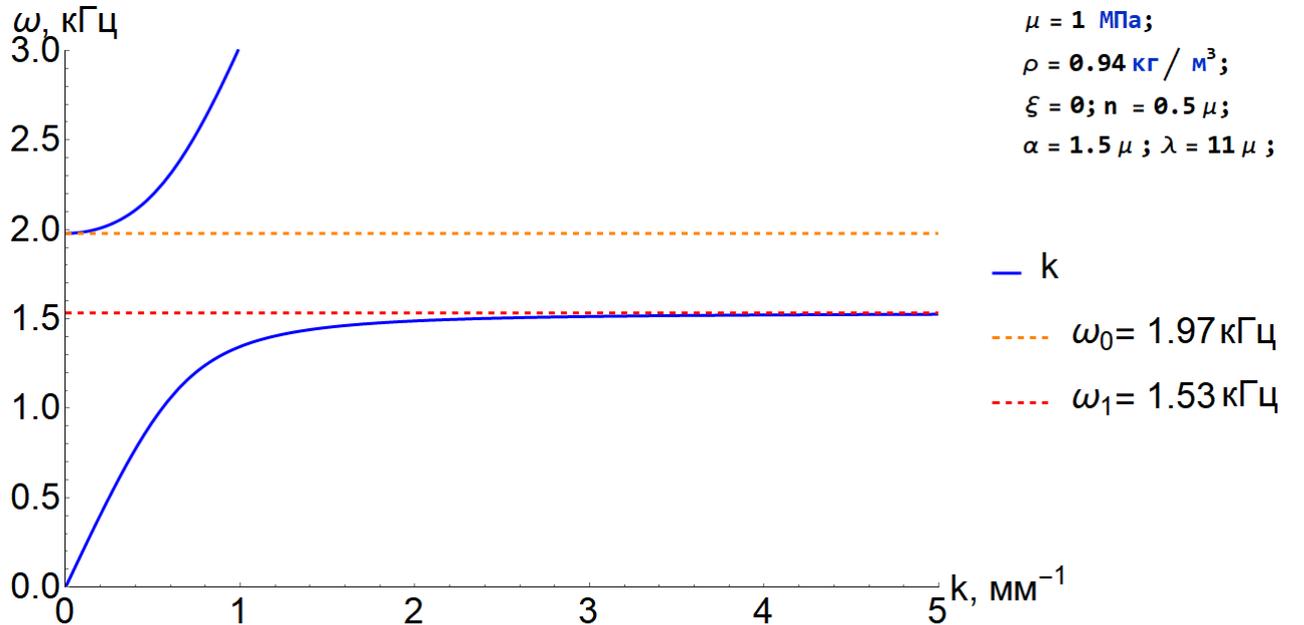


Рис. 4: Дисперсионная кривая для волны сдвига-вращения в изотропном материале $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$.

Видим, что для волны сдвига трансверсально-изотропная перевязка не оказала влияния на дисперсионные соотношения, если мы рассматриваем в анизотропном случае волну, распространяющуюся вдоль оси симметрии.

Как изотропная редуцированная среда Коссера, так и редуцированная среда Коссера с трансверсально-изотропной перевязкой являются единожды отрицательными акустическими метаматериалами по отношению к некоторым волнам (присутствует запрещенная зона). В изотропном случае это волна сдвига, а в случае с трансверсально-изотропной перевязкой также продольная волна, распространяющаяся вдоль оси симметрии среды.

1.4 Волна, распространяющаяся ортогонально оси симметрии ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$)

Рассмотрим случай волны, которая распространяется ортогонально оси симметрии, то есть $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$. Уравнения в перемещениях (17),(18) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + 2\mu)k^2 \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)k^2(\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{u} + 2ik\alpha \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} \\
& \quad - k^2 \mathbf{n} \times \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) + 2ik\mathbf{k}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} - 2k^2 \mathbf{k}(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{u}}{2})) = -\omega^2 \rho \mathbf{u} \quad (48)
\end{aligned}$$

$$-4\alpha \boldsymbol{\theta} + 2i\alpha \mathbf{k} \times \mathbf{u} - 2i\mathbf{n}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = -\omega^2 I \boldsymbol{\theta} \quad (49)$$

Выразим $\boldsymbol{\theta}$ из последнего уравнения и получим

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{2i(\mathbf{n}\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{u})}{(\omega^2 \rho L - 4\alpha)} = \frac{2i(\frac{\mathbf{n}}{\rho I} \mathbf{k} - \frac{\omega_0^2}{4} \mathbf{k} \times \mathbf{E})}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \mathbf{u} \quad (50)$$

После подстановки

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + 2\mu)k^2 \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u} + \frac{\alpha\omega_0^2 k^2(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}})}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \mathbf{u} \\
& \quad + k^2 \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} + \frac{\omega_0^2 k^2 \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \mathbf{u} + 2ik^2 \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \frac{\mathbf{u}}{2}) = -\omega^2 \rho \mathbf{u} \quad (51)
\end{aligned}$$

Упростив спектральную задачу, имеем

$$\begin{aligned}
& (\rho\omega^2 - ((\lambda + 2\mu) - \frac{4n^2}{\rho I(\omega^2 - \omega_0^2)})k^2)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} \\
& \quad + (\rho\omega^2 - (\mu + \alpha - \frac{\alpha\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2})k^2)(\mathbf{E} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} \\
& \quad + \frac{k^2 n \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{u} - \frac{k^2 n \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (52)
\end{aligned}$$

Видим, что параметр ξ для данного направления распространения волны не входит в уравнения. Поэтому можно использовать результаты, полученные для $\xi = 0$ в работе [12]. А именно, в данном случае могут распространяться два типа волн.

Одна из них — волна сдвига, у которой перемещение \mathbf{u} направлено по оси симметрии $\hat{\mathbf{n}}$. Последняя строка уравнения в данном случае тождественно равна нулю, и такая волна сдвига носит точно тот же характер, что и в изотропном случае.

Вторая волна, которая может распространяться ортогонально оси симметрии — это смешанная волна. В данном случае вектор перемещения \mathbf{u} будет иметь как продольную компоненту, направленную по $\hat{\mathbf{k}}$, так и поперечную, ортогональную $\hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{n}}$.

Дисперсионное соотношение для смешанной волны

$$\mathbf{k}_{\pm}^2 = \frac{\omega^2/2}{c_l^2 c_s^2 + \left(\frac{c_l^2 \alpha}{\rho} + \frac{c_s^2 n^2}{\alpha \rho}\right) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \left(c_s^2 + c_l^2 + \frac{\alpha^2 + n^2}{\alpha \rho} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \pm \sqrt{\left(c_l^2 - c_s^2 + \frac{n^2 - \alpha^2}{\alpha \rho} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2}{\rho^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (53)$$

где $\frac{c_l^2}{c_p^2} = 1 - \frac{n^2}{\alpha(\lambda+2\mu)}$

Дисперсионное соотношение не зависит от ξ . Случай $\xi = 0$ рассмотрен в Grekova, 2016, Mathematics and Mechanics of Solids [12].

Исходя из результатов, были построены дисперсионные кривые при следующих параметрах:

Построена дисперсионная кривая при следующих параметрах:

$$\omega_0 = 1.97 \text{ кГц}, \rho = 0.94 \text{ кг/м}^3, \mu = 1 \text{ МПа}, \alpha = 1.5\mu, n = 0.5\mu, \lambda = 11\mu.$$

Дисперсионная кривая для этого случая

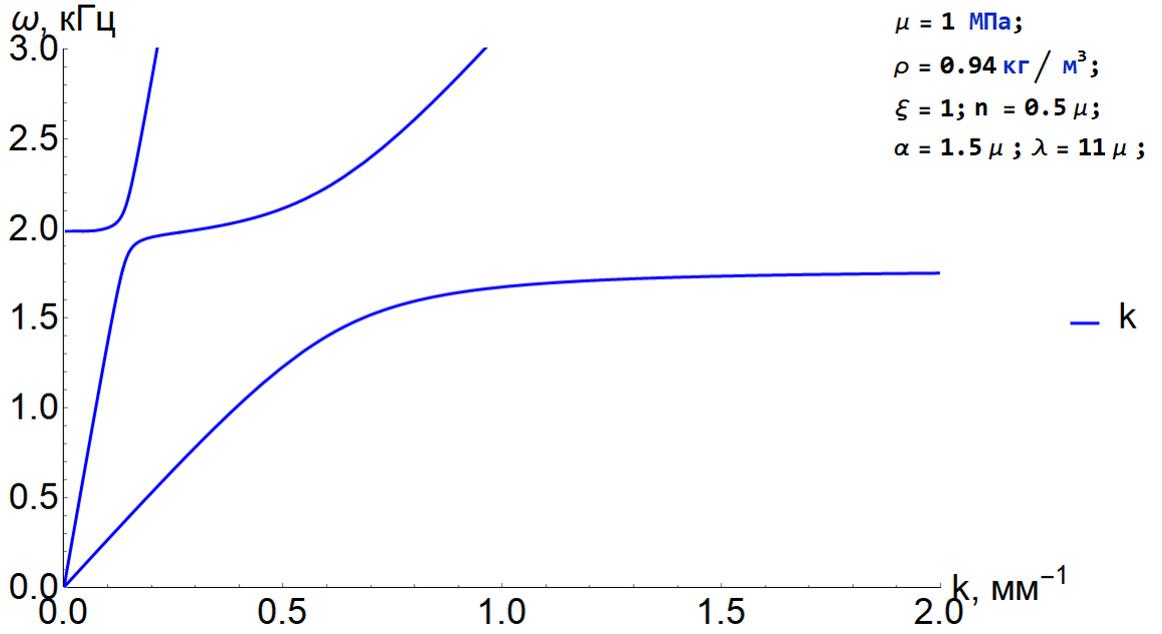


Рис. 5: Дисперсионная кривая для смешанной волны, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$

В дисперсионных кривых имеется запрещенная зона для частот. Т.е для волн сдвига континуум будет единожды отрицательным акустическим метаматериалом. Для данной смешанной волны запрещенной зоны нет.

Из результатов видно, что вид дисперсионных кривых совпадает. Что подтверждает тот факт, что характер дисперсионной кривой не зависит от ξ .

Отметим некоторые свойства дисперсионных кривых.

- Наличие горизонтальной асимптоты $\omega = \omega_0$
- Поведение кривой вблизи ω_0

Рассматривая дисперсионную кривую для смешанной волны, имеем:

- Для первой ветви

При $\omega \rightarrow \omega_0$ получим $k \rightarrow 0$

- Для второй ветви

$$k \rightarrow \omega_0 \sqrt{\frac{n^2 + \alpha^2}{(\lambda + 2\mu)\alpha^2 + n^2(\mu - \alpha)}} \quad (54)$$

Отсутствует запрещенная зона для одной из ветвей.

- Поведение кривой при $\omega \approx 0$.

Здесь наблюдается наличие двух ветвей: первая - $\omega \approx c_p k$, вторая - $\omega \approx c_s k$

- Поведение кривой при $\omega \rightarrow \infty$

Также присутствуют две ветви $\omega \approx c_{\pm} k$

где

$$c_{\pm}^2 = \frac{2((\lambda + 2\mu)(\mu + \alpha) - n^2)}{\rho(\lambda + 3\mu + \alpha \pm \sqrt{(\lambda + \mu - \alpha)^2 + 4n^2})} > 0 \quad (55)$$

Результаты были перенесены без изменений из источника [12].

ГЛАВА 2. Сравнение с экспериментальными данными

2.1 Некоторые особенности порошков, агрегатов

Для гранулированных материалов важными являются: геометрия контактов и положения частиц, силы между частицами, а также взаимодействие между газом и частицей, если частицы — очень малого размера. Это определяет физику поведения гранулированных материалов. Также граничные условия, внешние силы и процедура приготовления образца оказывают сильное влияние, особенно для когезивных сред с низкой объемной долей частиц (твердой фракцией).

В сухих мелкодисперсных порошках, где частицы имеют характерные размеры порядка десятков микрон, сила тяжести, действующая на частицы, меньше или сравнима с силами притяжения (обусловленными силами ван-дер-Ваальса) между ними. Эти частицы имеют тенденцию к агрегации при осаждении, которое происходит достаточно медленно, поскольку аэродинамическая сила также сравнима с силой тяжести. В результате осаждения при просеивании или после ожижения подобные порошки формируют более или менее однородные структуры из квазичастиц — агрегатов. Соответственно, их свойства определяются не только свойствами отдельной частицы, но и размером и распределением массы в характерном агрегате [8].

В обзоре [8] подробно рассмотрены процессы упаковки, межчастичные силы, свойства на уровне микроструктуры и характерное поведение на уровне материала в случае незагрязненных сухих мелкодисперсных порошков.

2.2 Природа агрегатов

Для таких порошков формирующиеся в процессе осаждения или псевдоожижения агрегаты представляют собой структуры типа снежинок, с более плотным ядром в центре и более открытой структурой по мере удаления от него. Такие агрегаты называют фрактальными. Агрегаты в действительности не являются фрактальными в строгом смысле этого слова. Их фрактальное масштабирование наблюдается только на масштабах конечной длины.

Модель агрегации с ограниченной диффузией (DLA) Виттена и Сандера [17] — это идеализация процесса, посредством которого вещество необратимо объединяется с образованием пыли и других случайных объектов в случае, когда ограничивающим скорость

фактором является диффузия вещества в агрегате.

Это наводит на мысль о физической картине роста агрегата, контролируемого диффузионным процессом и характеризующегося прилипанием частиц к внешней зоне агрегата (из-за сильных сил притяжения между частицами весьма маловероятно, что частицы способны прилипать к внутренним зонам агрегата). В результате агрегаты выглядят как ветвящиеся структуры. Такие агрегаты очень эффективно экранируют внешние поля.

2.3 Граница между некогезивными и когезивными частицами

Сила (равная силе Ван дер Ваальса), которую необходимо приложить для разделения двух соприкасающихся частиц, записывается в виде

$$F_a = \frac{AR}{2^{10/3}z_0^2} \simeq \frac{AD}{20z_0^2} \quad (56)$$

где $D = 2R$, R — приведенный локальный радиус кривизны. $z_0 < \frac{d_{asp}}{2} < R$, $z_0 = 4A$

Для частиц неправильной формы с неровностями типичного размера d_{asp} , $D = d_{asp}/2$, и, следовательно, сила притяжения может быть значительно меньше. Число когезионных межчастичных связей равно

$$Bo_g = \frac{3Ad_{asp}}{20\pi g\rho d_p^3 z_0^2} \quad (57)$$

При условии, что частицы представляют собой идеальные сферы диаметром d_p , будем иметь $D = d_p/2$. Число когезионных межчастичных связей равно

$$Bo_g = \frac{3A}{20\pi g\rho d_p^2 z_0^2} \quad (58)$$

Переход между некогезивными и когезивными частицами задается $Bo_g = 1$. Полимеры имеют плотность 1.1×10^3 кг /м³, а константа Гамакера имеет порядок 0.5×10^{-19} , поэтому граница для гладких сфер составляет около 2 мм. Для негладких сфер с приведенным диаметром порядка 0,1 мкм граница для частиц с эквивалентным по объему диаметром 75 мкм.

Стоит отметить, что эта граница определена недостаточно точно.

Гладкие мелкие частицы обладают большей когезией, чем неправильные мелкие частицы. При том же размере число когезионных межчастичных связей для гладких частиц $d_{asp} = d_p$ мм больше, чем для шероховатых частиц.

Вследствие этого, течение порошков, созданных из идеальных сферических микрочастиц, более затруднено, чем течение порошков из частиц неправильной формы.

Не так обстоит дело в случае крупных частиц, для которых сферы катятся лучше, чем неправильные частицы. Этот факт кажется очевидным и интуитивным просто потому, что он является результатом повседневного опыта. Другим важным следствием является также то, что отклонение от сферической формы не имеет решающего значения для оценки межчастичных сил между двумя зёрнами.

Так в промышленности для уменьшения когезии частой практикой является покрытие частиц мелкими твердыми наночастицами.

В работе [8] даются оценки для полимеров, но плотность наших частиц выше примерно в 3 раза, значит, граница когезивных-некогезивных порошков для гладких сфер составляет порядка 1 мм.

2.4 Эксперимент (Ruíz Botello, Tournat, Castellanos, 2016, Ultrasonics)

В данном эксперименте изучалось распространение звуковых волн в разных порошках. Рассматриваем среды, которые состоят из мелкодисперсных частиц двух видов материала, просеянных и осажденных под действием собственного веса. В эксперименте рассматривались порошки из стальных частиц и частиц магнетита различного размера. Чтобы оценить скорость продольной волны v_p применялось два ультразвуковых неинвазивных метода. В первом методе скорость может быть определена временем прохождения короткого синусоидального импульса через среду. Мы будем использовать его результаты. При помощи данного метода измеряют величину, близкую к фазовой скорости в среде. Во втором методе первого метода скорость v_p может быть получена через резонансные пики порошка образца, по всей видимости, эта величина более близка к групповой скорости в среде, однако такое приближение можно сделать для сред с малой дисперсией.

Первый метод измерения времени прохождения волны называется метод TOF (time of flight). Генерируется одиночный синусоидальный импульс, который посылается излучающим преобразователем. Для уменьшения шумов измерения и выполнения некоторого усреднения по времени, синусоидальный импульс центрируется на частотах от 2 кГц до 20 кГц и каждые 5 мс повторяется. Затем этот сигнал принимается после распространения через слой гранулированного образца с помощью микрофона давления. Мы измеряем время прохождения волны как время, разделяющее первый максимальный пик излучаемого и принятого сигналов. Наконец, мы можем получить фазовую скорость, зная расстояние

между датчиком и микрофоном.

Второй способ измерения v_p основан на обнаружении нескольких резонансных частот, когда в образце порошка формируется стационарная волна. Этот метод, также классический, основан на записи функции акустической частотной характеристики образца среды, именуемы как метод FRF. Среда возбуждается синусоидальным сигналом $s(t)$, который изменяется с медленно и линейно изменяющейся частотой. Пробеги по частотному диапазону обычно составляют несколько десятков секунд.

2.5 Особенности свойств порошков магнетита и стали

Рассмотрены гранулированные среды, состоящие из частиц диаметром порядка десятков или сотни микрометров. Для них были выполнены акустические измерения.

Параметры для стальных шариков:

Плотность частиц $\rho_p = 7.92$ гр/см³, размеры $d_p = 110, 50, 35$ мкм.

Параметры для шариков магнетита:

Плотность частиц $\rho_p = 5.06$ гр/см³, размеры $d_p = 60, 50, 35$ мкм.

Свойства материала порошка можно найти в работе [7]. Используя приведенные в предыдущем разделе соображения, можем заключить, что данные порошки являются когезивными. В то же время неясно, какого размера будут характерные агрегаты. Для более мелких частиц из полимерных материалов диаметр агрегата нередко составляет около 5 характерных диаметров частицы, однако неясно, каков он будет в случае рассматриваемых здесь порошков.

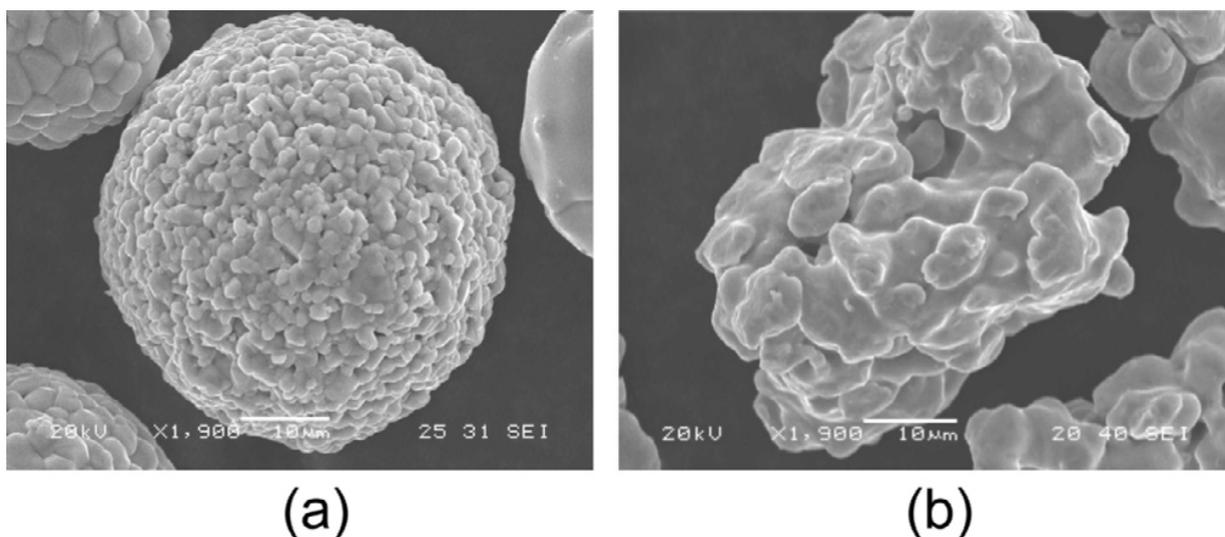


Рис. 6: Снимки, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа (SEM): частицы магнетита (а) и стали (б) размером порядка 35 мкм.

На рис. 6 видно, что стальные порошки размера 35 мкм имеют сильно неправильную форму. А порошки магнетита размера 35 мкм являются почти идеальными сферическими частицами. Порошки магнетита менее полидисперсны, чем стальные порошки. Подобное может наблюдаться для более крупных частиц (полидисперсность и нерегулярность структуры).

Значение плотности образцов ϕ порядка от 0,4 до 0,5, исходя из объема ячейки для образцов. Подобные гранулированные среды были описаны ранее в работе [9].

Когезия связана со способностью материала выдерживать напряжения. В целом, когезия увеличивается с уменьшением размера частиц.

Авторы эксперимента пытаются оценить скорость продольной волны в порошках исходя из микроструктурных и полуэмпирических соображений. Однако данные оценки противоречат их экспериментальным результатам для порошка магнетита — порошки из более крупных частиц обладают более низкой скоростью распространения волны, вопреки сделанным оценкам. Авторы эксперимента объясняют это укреплением межчастичных контактов для более мелкодисперсных порошков. В то же время приведенные ниже графики скорости распространения волн показывают, что данные среды являются сильно диспергирующими. Вязкоупругие среды (типа Кельвина–Фойгта) не предсказывают подобный характер дисперсии.

Для образцов стали:

Стальные частицы обладают существенно неправильной формой и более высокой полидисперсностью, чем частицы магнетита. Для порошков из более мелких частиц поведение будет аналогично частицам магнетита. Однако для частиц размером 110 мкм тенденция обратная, если можно выделить тенденцию только с тремя различными образцами.

2.6 Описание установки для эксперимента

Эксперимент проводился на установке, в которой внутри открытой прямоугольной коробки боковыми размерами 80×20 мм и высотой 156 мм находился один из видов порошков.

Первоначальная конфигурация упаковки получается путем высыпания гранул в контейнер. В качестве предварительного шага на дно этой коробки помещается сетка (с ячейками 5×5 мм, сделанная из металлической проволоки диаметром 0,5 мм). После этого сетка медленно перемещается через среду к верхней части контейнера (шаг 3 на рис. 7). Эта процедура дает начальное значение плотности для исходного образца порошка [5]. Для

меньшего уплотнения гранулированной колонны под контейнером расположен вибратор, подающий дискретные вертикальные импульсы [4].

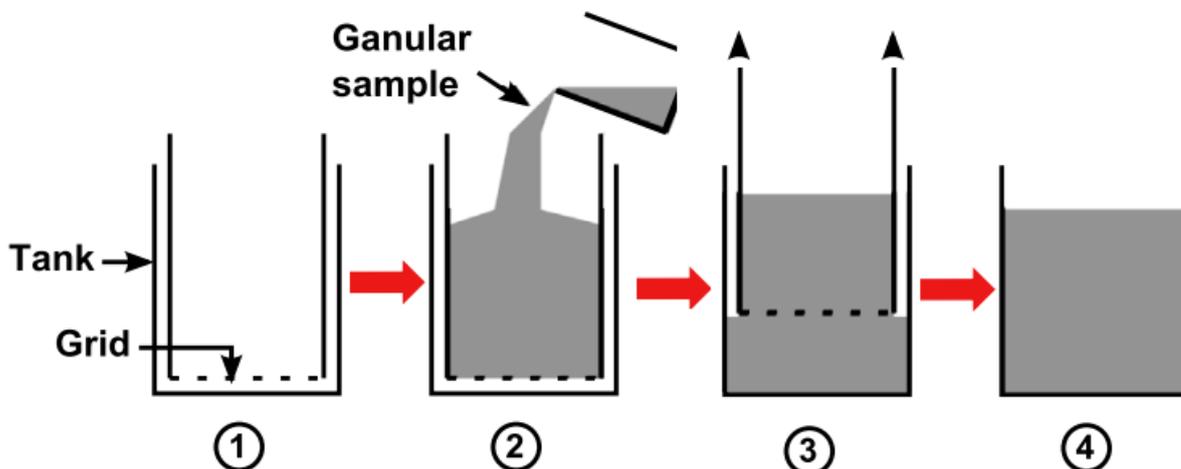


Рис. 7: Процедура подготовки для обеспечения начального значения плотности упаковки, воспроизводимого для каждого образца порошка.

Чтобы давление составляло $P \simeq \rho_p g \phi h$ примерно 1 кПа, детектор и источник были расположены на высоте 6,7 см от дна. Наличие давления связано только с силой тяжести, так как по сравнению с гравитационным давлением сцепление образца незначительно. Широкополосный пьезоэлектрический преобразователь диаметром 4 см с центром на частоте 100 кГц являлся источником. С помощью прижатого к образцу микрофона диаметром 1,57 см с плоской частотной характеристикой принимался передаваемый звук.

Статическое давление, которое возникает из-за гравитационного воздействия на образец порошка в месте расположения акустического зонда, контролируется датчиком давления (т.е. резисторным датчиком, чувствительным к силе). Пьезоэлектрические преобразователи, встроенные в вертикальные стенки контейнера, служат резонатором для низкочастотных акустических волн, излучаемых в гранулированной среде. Затем порошковый образец может быть подвергнут акустическому зондированию с помощью пьезоизлучателя и пьезоприемника в горизонтальном направлении.

Для формирования выходного сигнала используется предварительный усилитель. У которого коэффициент усиления по напряжению составляет 60 дБ.

Для метода TOF в диапазонах от 2 кГц до 20 кГц изменяется частота синусоидального импульса с шагом 1 кГц. Для исходных образцов это обеспечивает скорость продольной волны в зависимости от частоты. Входной и выходной сигнал отображается на осциллографе и сопровождается измерением частотно-зависимого TOF.

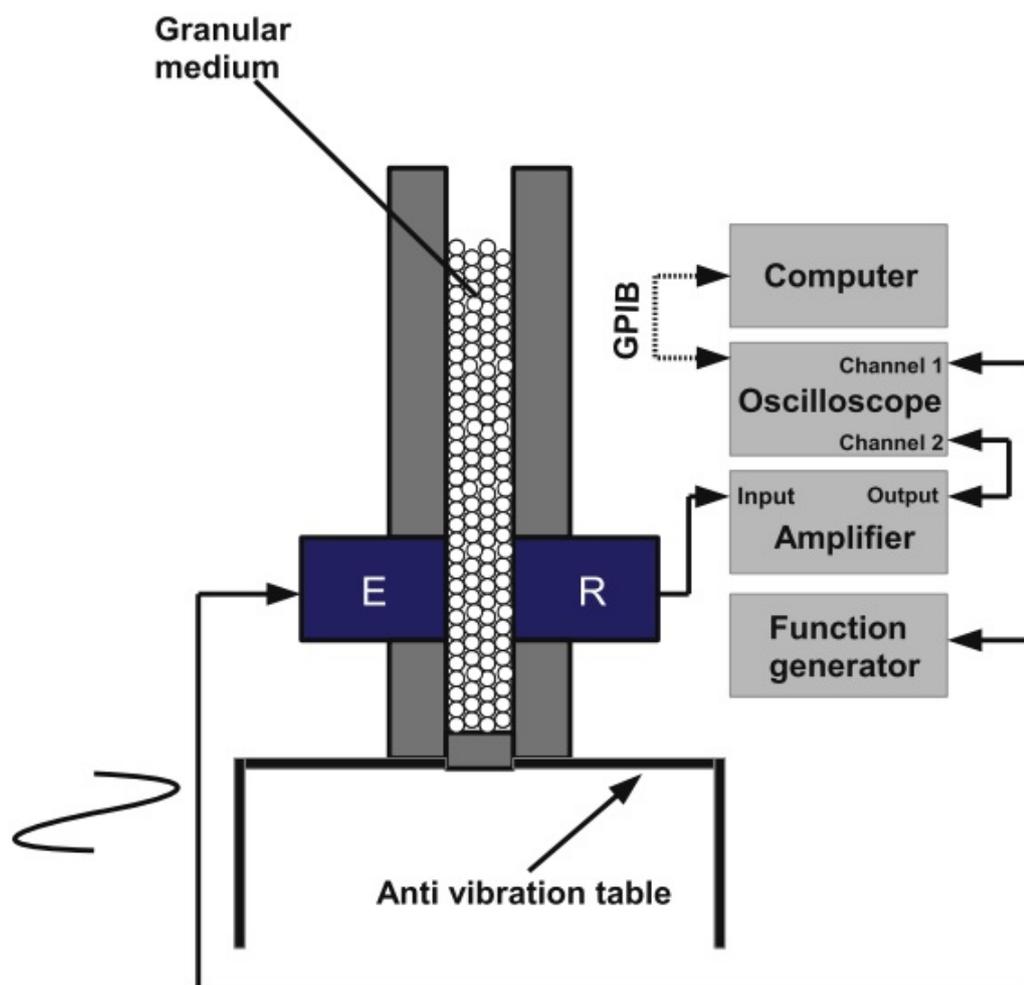


Рис. 8: Экспериментальная установка для измерения времени прохождения волны (TOF). E - излучающий преобразователь, а R - принимающий микрофон.

2.7 Возможное применение среды Коссера с анизотропной перевязкой как модели для описания эксперимента

Поскольку экспериментальные результаты, приведенные далее, по-видимому, не могут быть объяснены в рамках классической теории, мы предположили, что для столь высоких частот микроструктура порошка могла играть важную роль в распространении волн, в том числе поворотные степени свободы агрегатов. Импульс сохраняет свою форму, поскольку подаваемые в эксперименте возмущения малы и не разрушают межчастичные связи в порошке, так что можем приближенно считать происходящие процессы линейными.

Попробуем описать эксперимент в рамках теории линейной упругой редуцированной среды Коссера с трансверсально-изотропной перевязкой между поворотными и трансляционными деформациями, вызванной наличием силы тяжести. Таким образом, предполагаем, что ось симметрии нашей среды вертикальна. Направление распространения волны

горизонтально, то есть ортогонально оси симметрии. Авторы эксперимента считают, что измеряют продольную волну, и приемник, действительно, воспринимает лишь продольную компоненту перемещения. Мы предполагаем, что на самом деле в порошке возбуждается смешанная волна, и датчик измеряет лишь ее продольную компоненту. Отчасти с этим связано падение измеряемой амплитуды. Безусловно, в реальности в порошке присутствует и вязкость. Поэтому совпадение результатов не может быть стопроцентным, даже если подобная теория и подходит в качестве модели рассматриваемых порошков в первом приближении.

К сожалению, экспериментаторы привели передаточную характеристику системы “аппарат + образец”, не выделив влияние самого аппарата, передаточная функция которого не является плоской. Поэтому количественного совпадения результатов для передаточной функции требовать нельзя, и, строго говоря, по эксперименту можно с уверенностью судить лишь о том, в каком порошке на каких частотах волна проходит лучше по сравнению с другим. Частные сообщения от экспериментаторов о характеристиках аппарата также позволяют с неполной уверенностью говорить о том, что истинная передаточная функция порошков не является монотонной в зависимости от частоты.

Попробуем рассмотреть с этой точки зрения теоретические результаты для $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, полученные в [12] и обобщенные в данной работе на случай трансверсально-изотропной перевязки общего вида. Приведем здесь анализ, проведенный в [12]. Рассматривая сформулированную в предыдущей главе спектральную задачу для волны (52), распространяющейся ортогонально оси симметрии

$$\begin{aligned} & [(\rho\omega^2 - k^2\rho(c_p^2 + (c_{p\alpha}^2 - c_p^2)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}))\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \\ & + (\rho\omega^2 - k^2\rho(c_s^2 + (c_{s\alpha}^2 - c_s^2)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}))\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}} \\ & - k^2\frac{n\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}(\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{I}})] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (59)$$

получаем, что перемещение смешанной волны \mathbf{u} обладает двумя горизонтальными компонентами — параллельной единичному вектору $\hat{\mathbf{I}}$, который сонаправлен с $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$, и направленной по $\hat{\mathbf{k}}$. Вторая и измеряется в качестве продольной.

Если мы преобразуем задачу (59) к диагональному виду в некотором ортонормальном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, получив уравнение вида

$$[(\rho\omega^2 - A_1(\omega, k))\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + (\rho\omega^2 - A_2(\omega, k))\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (60)$$

то A_1, A_2 будут собственными числами акустического тензора данной спектральной задачи. Соответствующие смешанной волне собственные векторы, лежащие в горизонтальной плоскости, образуют некоторый угол φ с $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{I}}$.

Для угла φ

$$\mathbf{e}_1 = \sin \varphi \hat{\mathbf{I}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{k}}, \quad (61)$$

$$\mathbf{e}_2 = \cos \varphi \hat{\mathbf{I}} - \sin \varphi \hat{\mathbf{k}}. \quad (62)$$

Тогда можно записать

$$\rho\omega^2 - k^2\rho(c_s^2 + (c_{s\alpha}^2 - c_s^2)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}) = A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \cos^2 \varphi, \quad (63)$$

$$\rho\omega^2 - k^2\rho(c_p^2 + (c_{p\alpha}^2 - c_p^2)\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}) = A_1 \cos^2 \varphi + A_2 \sin^2 \varphi, \quad (64)$$

$$-k^2n\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = (A_1 - A_2) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (65)$$

Деля последнее уравнение на разность двух предыдущих, получаем для угла φ

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\omega^2 n}{(\lambda + \mu - \alpha)\omega^2 - (\lambda + \mu - n^2/\alpha)\omega_0^2} \quad (66)$$

При $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ для продольной компоненты измеряемая передаточная функция сигнала, приходящего первым на малых временах, вычисляется по следующей формуле

$$20 \lg \left| \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{2\omega^2 n}{(\lambda + \mu - \alpha)\omega^2 - (\lambda + \mu - n^2/\alpha)\omega_0^2}\right) \right| \quad (67)$$

Рассматривая при $\omega \rightarrow \omega_0$ имеем

$$20 \lg \left| \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{2n\alpha}{n^2 + \alpha^2}\right) \right| \quad (68)$$

Мы рассматриваем случай $0 < \omega_*^2 < \omega_0^2$, где $\omega_* = \frac{\lambda + \mu - \frac{n^2}{\alpha}}{\lambda + \mu - \alpha} \omega_0^2$, $n < \alpha$.

Для сравнения теоретических результатов с экспериментальными данными проведем оценку для размеров частиц. Предполагая, что для разных порошков магнетита частота отсечки ω_0 находится ниже измеряемых частот (ниже 2 кГц), и измеряется фазовая скорость верхней (оптической) ветки волны.

В то же время

$$\omega_0^2 = 4\frac{\alpha}{\rho I} = 4\frac{\alpha\mu}{\rho I\mu} = 4\frac{\alpha c_s^2}{I\mu} \quad (69)$$

Отсюда

$$I = 4 \frac{\alpha c_s^2}{\omega_0^2 \mu} \quad (70)$$

Если ω_0 находится в интервале ниже 2 кГц

Получим оценку для момента инерции

$$I > 4 \frac{\alpha}{\mu} \frac{c_s^2}{(2f_0\pi)^2} \quad (71)$$

Для магнетита $f_0 = 1.31$ кГц, $f_0 = 0.96$ кГц, $f_0 = 1.72$ кГц, $\sqrt{I} = 0.47$ мм, $\sqrt{I} = 0.63$ мм, $\sqrt{I} = 0.36$ мм соответственно.

Для стали $f_0 = 1.44$ кГц, $f_0 = 1.29$ кГц, $f_0 = 1.91$ кГц, $\sqrt{I} = 0.38$ мм, $\sqrt{I} = 0.44$ мм, $\sqrt{I} = 0.31$ мм соответственно.

Удается получить хорошо описывающие эксперимент результаты с параметрами, которые дают оценку характерного радиуса агрегатов $\sqrt{I} \sim 1$ мм. Вероятно, реальные агрегаты меньше полученной оценки. Возможно, в упаковке имеются неоднородности большего размера, вращательные степени свободы которых играют роль, или необходимо учитывать вязкость, либо подобрать иные константы, которые хорошо описывают эксперимент и в то же время дают меньший размер агрегата. Однако возможно и то, что агрегаты являются достаточно крупными.

2.8 Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными

На следующих графиках скорость продольной компоненты волны при росте частоты уменьшается. В данном случае на частотах выше 10 кГц распространение становится недисперсным в конечном диапазоне частот, при этом дисперсия наблюдается на низких частотах. В данном эксперименте во избежание заметного влияния нелинейных эффектов амплитуда возбуждения была выбрана достаточно низкой.

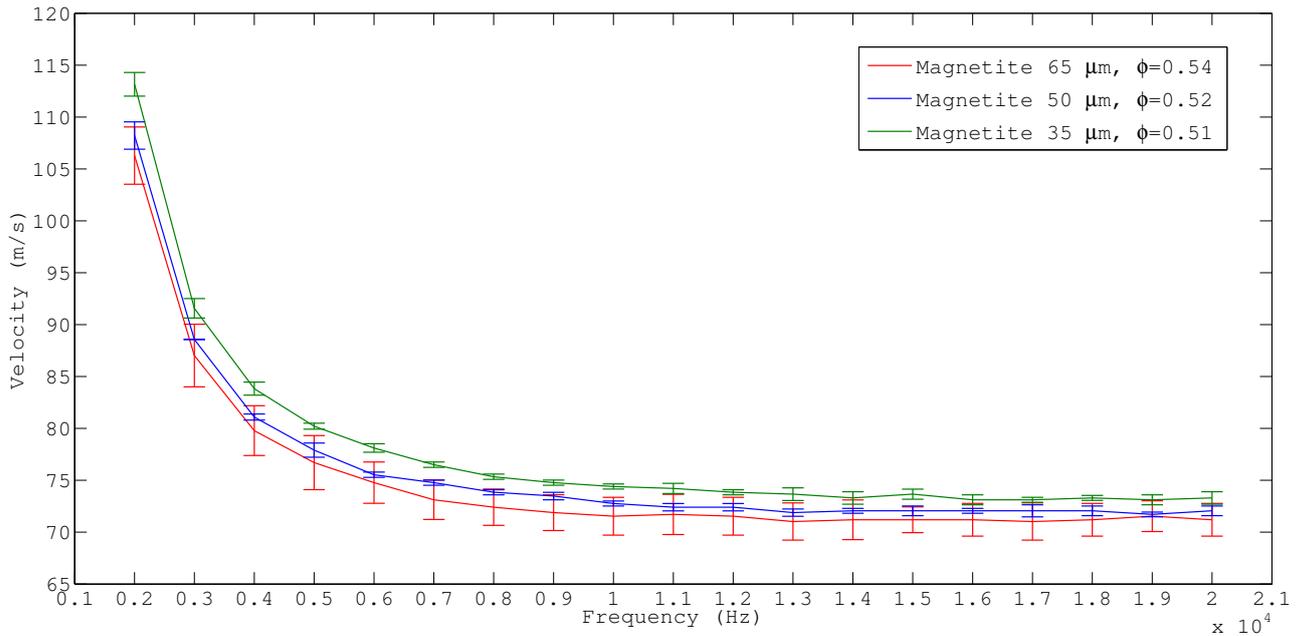


Рис. 9: Скорость продольной компоненты волны в порошках магнетита как функция центральной частоты импульса (метод TOF).

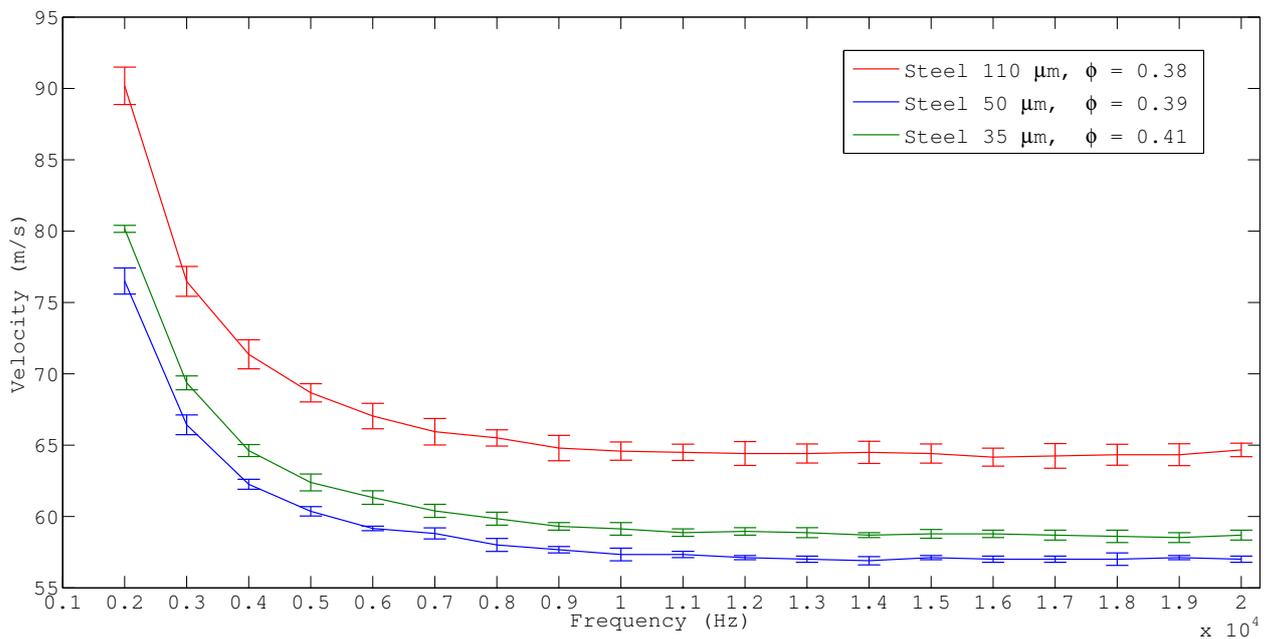


Рис. 10: Скорость продольной компоненты волны в порошках стали как функция центральной частоты импульса (метод TOF).

Скорость представлена для порошков магнетита и стали при изменении центральной частоты импульса. При возрастании частоты скорость продольной волны будет уменьшаться. Также подобное наблюдается, когда групповые и фазовые скорости будут уменьшаться с частотой, вплоть до частоты отсечки в линейном приближении в одномерной

гранулированной цепочке. Но в данной цепочке распространение будет дисперсным только для частот в середине полосы распространения или же соизмеримой с частотой отсечки системы. А для низкочастотной части будет уже недисперсным.

В диапазоне частот 1-60 кГц амплитуда смещения волны возбуждения почти всегда постоянная. Из-за этого исключаются эффекты, вызванные сильными различиями в амплитудах рабочих волн. У наблюдаемой дисперсии нелинейность будет присутствовать. Т.е. уменьшение скорости волны при увеличении амплитуды волновой деформации потенциально может быть причиной такого наблюдения. Поскольку амплитуда акустической деформации, возбуждающей среду, увеличивается с частотой (поскольку амплитуда смещения излучателя почти постоянна с частотой). Но во избежание какого-либо заметного нелинейного эффекта смягчения при измерении ТОФ амплитуда возбуждения была выбрана достаточно низкой. Характерная дифракционная длина пучка составляет минимум 2 см для наименьшей частоты, т.е. расстояния распространения. В связи с этим влияние дифракции акустического пучка на наблюдаемое изменение скорости волны с частотой является слабым.

Дисперсия может быть вызвана либо нелинейным предварительно напряженным состоянием, либо существованием других степеней свободы, например, вращательных, как в (полной или редуцированной). Это не объясняет классическая изотропная или анизотропная линейная упругость.

В качестве сравнения теоретических результатов с экспериментальными данными ниже представлены графики скорости продольной волны в порошках магнетита и стали соответственно. Экспериментальные данные взяты из результатов, которые были получены в статье [7] Эти результаты представлены выше в виде графиков.

Параметры для порошка магнетита $\mu = 1$ МПа, $\alpha = 0.9\mu$, $\lambda = 11\mu$, $R = 1$ мм, $I = R^2$, $\rho = 2.63$ г/см³, $\rho = 2.73$ г/см³, $\rho = 2.58$ г/см³, $n = 0.00016\mu$, $n = 0.00015\mu$, $n = 0.00012\mu$ соответственно.

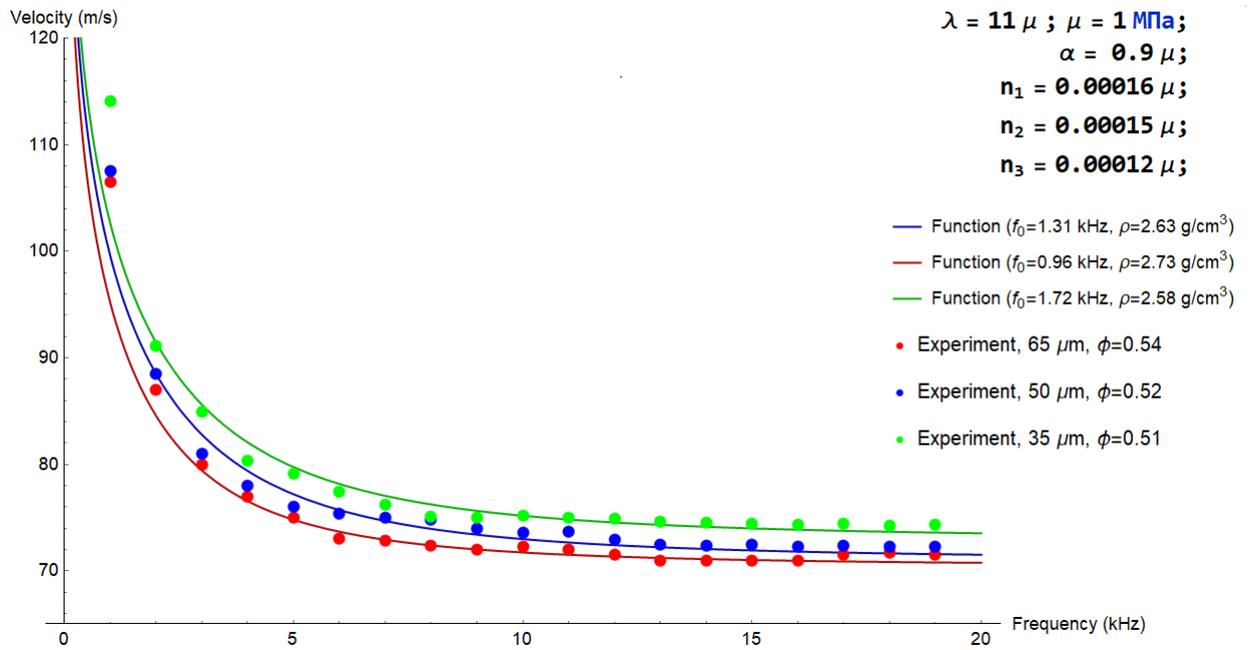


Рис. 11: Скорость продольной компоненты волны в порошках магнетита.

Параметры для порошка стали $\mu = 1 \text{ МПа}$, $\alpha = 0.9\mu$, $\lambda = 8\mu$, $R = 1\text{мм}$, $I = R^2$, $\rho = 3.01 \text{ г/см}^3$, $\rho = 3.09 \text{ г/см}^3$, $\rho = 3.25 \text{ г/см}^3$, $n = 0.0061\mu$, $n = 0.0045\mu$, $n = 0.0027\mu$ соответственно.

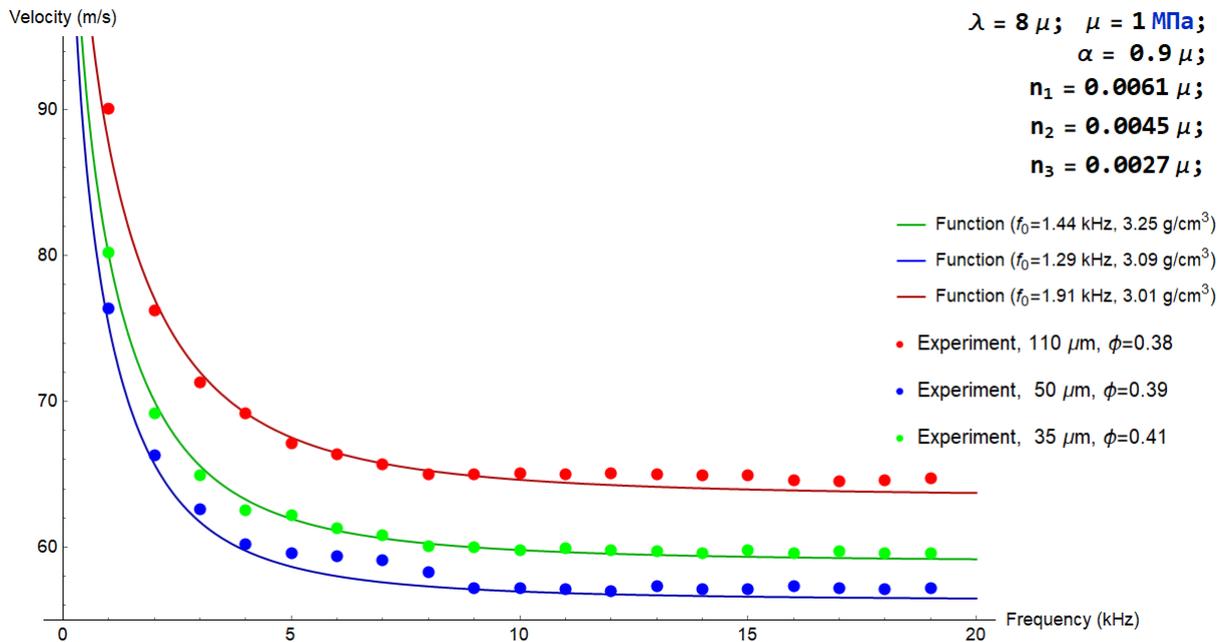


Рис. 12: Скорость продольной компоненты волны в порошках стали.

Как видно из графиков теоретические зависимости хорошо описывают экспериментальные результаты.

2.9 Сравнение результатов для функции частотной характеристики

Здесь мы сосредоточимся на способе измерения продольной скорости звука, специально адаптированном для порошковых образцов.

Для гранулированных сред данные образцы имеют достаточно высокую пористость (твердая фракция $\phi \sim 0.4 - 0.5$), а для частот от 25 до 50 кГц важное значение имеет роль связующего с воздухом.

Среда демонстрирует дисперсионное поведение при частоте 10 кГц, как наблюдалось в предыдущем разделе с результатами TOF.

Анализируется зависимость для понимания причины изменения скорости в порошках магнетита и стали в зависимости от среднего диаметра частиц. Например для когезионных порошков область контроля твердости будет распространяться на более высокие частоты (30-50 кГц). Здесь представлены результаты для функции частотной характеристики стальных порошков и порошков магнетита, которые были получены из эксперимента (Ruíz Botello, Tournat, Castellanos, 2016, Ultrasonics).

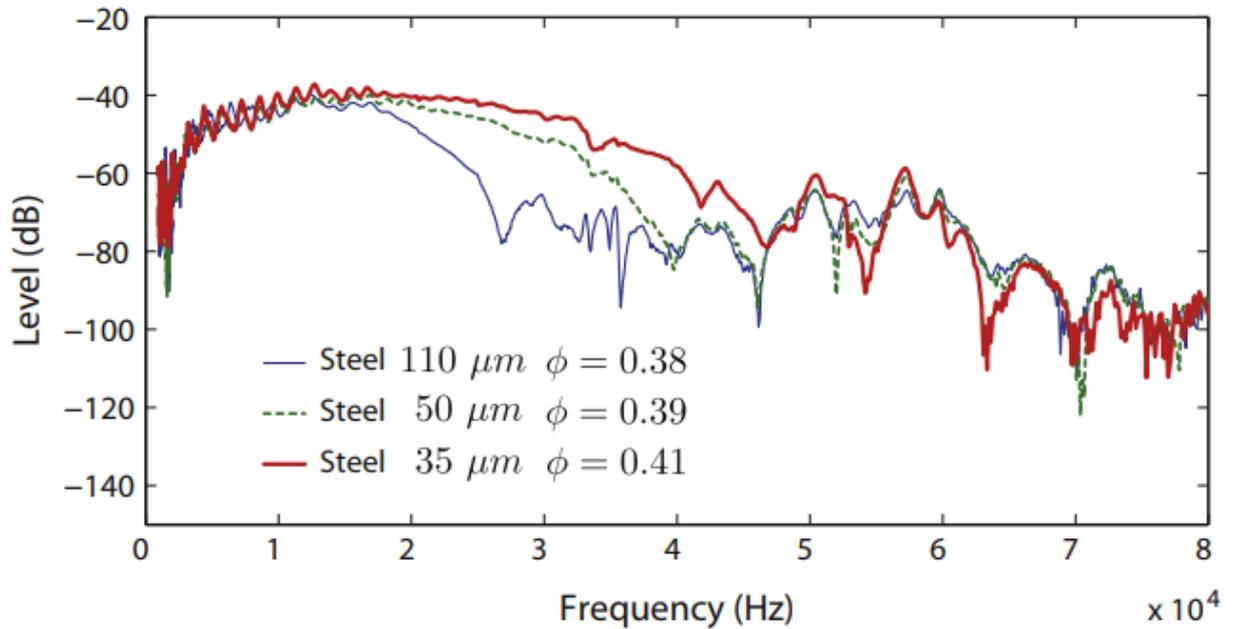


Рис. 13: Функция частотной характеристики стальных порошковых образцов толщиной 2 см.

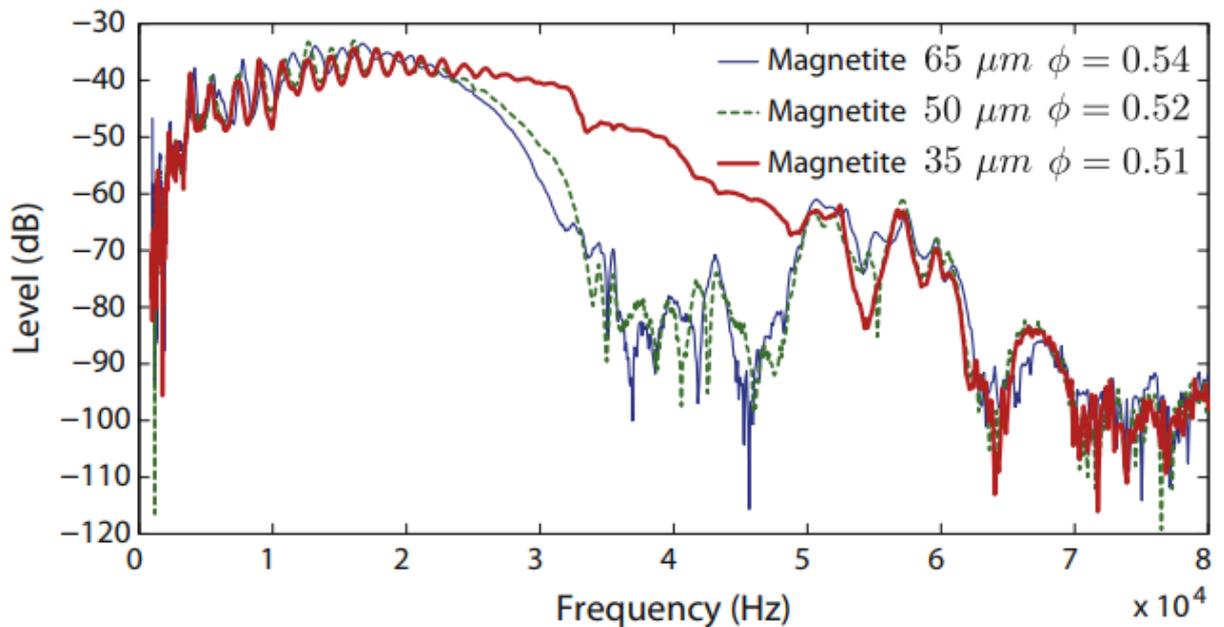


Рис. 14: Функция частотной характеристики порошков магнетита образцов толщиной 2 см.

Ниже представлены графики для передаточной функции. Здесь более когезивные порошки показаны правее.

Параметры для порошка магнетита $\mu = 1$ МПа, $\alpha = 0.9\mu$, $\lambda = 11\mu$, $R = 1\text{мм}$, $I = R^2$, $\rho = 2.63$ г/см³, $\rho = 2.73$ г/см³, $\rho = 2.58$ г/см³, $n = 0.00016\mu$, $n = 0.00015\mu$, $n = 0.00012\mu$ соответственно.

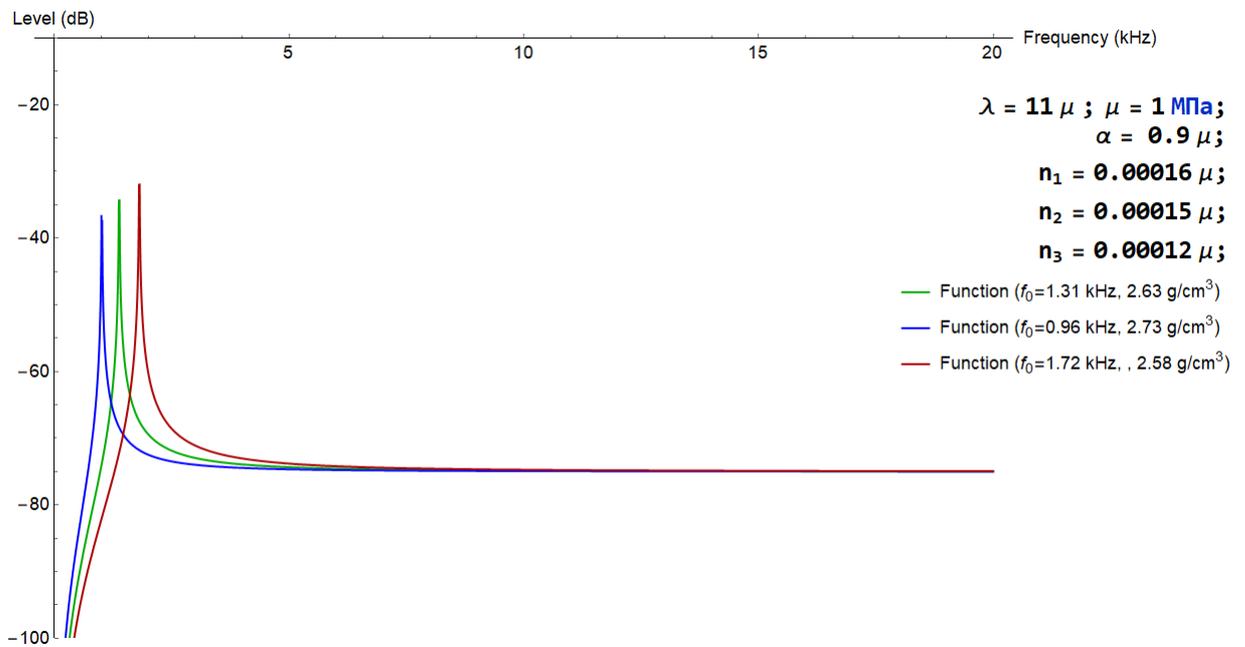


Рис. 15: Передаточная функция продольной компоненты для порошков магнетита.

Параметры для порошка стали $\mu = 1 \text{ МПа}$, $\alpha = 0.9\mu$, $\lambda = 8\mu$, $R = 1\text{мм}$, $I = R^2$, $\rho = 3.01 \text{ г/см}^3$, $\rho = 3.05 \text{ г/см}^3$, $\rho = 3.25 \text{ г/см}^3$, $n = 0.0061\mu$, $n = 0.0045\mu$, $n = 0.0027\mu$ соответственно.

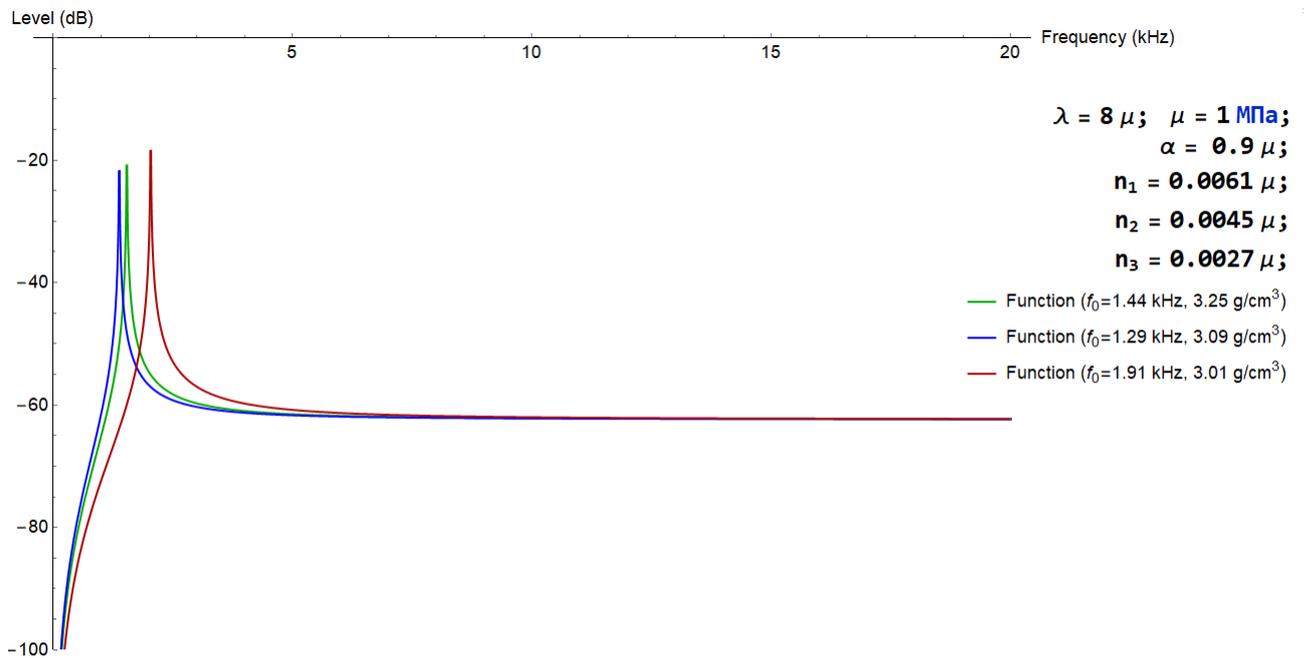


Рис. 16: Передаточная функция продольной компоненты для порошков стали.

Заключение

В ходе выполнения работы: Получены аналитически дисперсионные соотношения для продольной волны в среде с трансверсально-изотропной перевязкой в случае, когда волна распространяется вдоль оси симметрии. Эта волна обладает дисперсией и имеет запрещенную зону, подобно волне сдвига в изотропной редуцированной среде Коссера и продольной волне в среде с трансверсально-изотропной перевязкой более частного вида.

Получены аналитически дисперсионные соотношения для смешанной волны в случае, когда волна распространяется ортогонально оси симметрии. В данном случае соотношение совпадает со случаем $\xi = 0$, то есть перевязка сдвиговой деформации и ротационной не играет роли.

Для эксперимента особый интерес представляет случай смешанной волны при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, так как симметрия связана с наличием силы тяжести. Считая, что в эксперименте Руиса Ботельо, Турна и Кастельяноса измеряется лишь продольная компонента перемещения смешанной волны в порошках, которые можно моделировать редуцированной упругой линейной среде Коссера с трансверсально-изотропной перевязкой, удастся подобрать параметры, которые хорошо описывают зависимость фазовой скорости от частоты и качественно — характер передаточной функции.

Разработанные модели могут быть использованы для исследования распространения волн в гранулированных средах. Одним из приложений является совершенствование технологий, связанных с переработкой тонкодисперсных материалов, в частности, аддитивных технологий.

Список использованной литературы

- [1] АЛЬТЕНБАХ Х., ЖИЛИН П.А. Общая теория упругих простых оболочек. // Успехи механики. 1988. Т. 11, No 4. С. 107–148.
- [2] САДОВСКИЙ В.М., САДОВСКАЯ О.В., ВАРЫГИНА М.П. Анализ резонансного возбуждения блочной среды на основе уравнений моментного континуума Коссера. // Радио- электроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т. 5, No 1.
- [3] САДОВСКИЙ В.М., САДОВСКАЯ О.В., ПОХАБОВА М.А. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера. // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, No 1. С. 52–60.
- [4] BARGUET LAURIANNE, PEZERAT CHARLES, BENTAHAR MOURAD, EL GUERJOUA RACHID, AND TOURNAT V. Ultrasonic evaluation of the morphological characteristics of metallic powders in the context of mechanical alloying // Ultrasonics. - 2015. - Vol. 60. - P. 11–18.
- [5] BARRAT ALAIN, LORETO V. Memory in aged granular media // EPL (Europhysics Letters). - 2001. - Vol. 53, no. 3. - P. 297
- [6] BERRYMAN JAMES G. Long-wave elastic anisotropy in transversely isotropic media // Geophysics. - 1979. - Vol. 44, no. 5. - P. 896–917.
- [7] BOTELLO FRANCISCO RUIZ, CASTELLANOS ANTONIO, TOURNAT VINCENT. Ultrasonic probing of cohesive granular media at very low consolidation // Ultrasonics. - 2016. - Vol. 69. - P. 193–200
- [8] CASTELLANOS ANTONIO. The relationship between attractive interparticle forces and bulk behaviour in dry and uncharged fine powders // Advances in physics. - 2005. - Vol. 54, no. 4. - P. 263–376.
- [9] CASTELLANOS A, QUINTANILLA MAS, VALVERDE JM, AND SORIA-HOYO C Novel instrument to characterize dry granular materials at low consolidations // Review of Scientific Instruments. — 2007. - Vol. 78, no. 7. - P. 073901.
- [10] COSSERAT E., COSSERAT F.. Theorie des corps deformables. - A. Hermann et fils, 1909.

- [11] LEE W.H.K , CELEBI M., TODOROVSKA M.I.. Introduction to the special issue on rotational seismology and engineering applications. // Bulletin of the Seismological Society of America. 2009. T. 99, No 2B. C. 945–957.
- [12] GREKOVA ELENA F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains. // Mathematics and Mechanics of Solids. - 2016. - Vol. 21, no. 1. - P. 73–93.
- [13] GREKOVA EF, KULESH MA, HERMAN GC. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bulletin of the Seismological Society of America. - 2009. - Vol. 99, no. 2B. - P. 1423–1428.
- [14] MERKEL A., TOURNAT V., GUSEV V. Dispersion of elastic waves in three- dimensional noncohesive granular phononic crystals: properties of rotational modes. // Physical Review E. 2010. T. 82, No 3. c. 031305.
- [15] MERKEL A., TOURNAT V., GUSEV V. Experimental evidence of rotational elastic waves in granular phononic crystals. // Physical Review Letters. 2011. T. 107, No 22. c. 225502.
- [16] SCHWARTZ L.M., JOHNSON D.L., FENG SH. Vibrational modes in granular materials. // Physical review letters. 1984. T. 52, No 10. c. 831.
- [17] WITTEN THOMAS A, SANDER LEONARD M. Diffusion-limited aggregation // Physical review B. - 1983. - Vol. 27, no. 9. - P. 5686.