САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физико-механический факультет
Кафедра «Теоретическая механика»

Дипломный проект допущен к защите
зав. кафедрой
_____А.М. Кривцов
«_____»_____ 2011 г.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени

МАГИСТРА

по направлению 010900 «Механика»

Моделирование нелинейного поведения сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков при сложном электромеханическом нагружении с использованием реологических моделей

Выполнил студент группы 60510/10_____Ле-Захаров С. А.

Научный руководитель к. ф.-м. н., доц._____ Семёнов А.С.

Консультант по вопросам охраны труда,
к. т. н., доц._____ Монашков В. В.

С А Н К Т - П Е Т Е Р Б У Р Г
2 0 1 1

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ **1**

I. ВВЕДЕНИЕ **3**

1. Мотивация исследований 3
2. Сегнетоэлектрики и сегнетоэластики 5
3. Применение сегнетоэлектриков/ сегнетоэластиков в технике 7
4. История сегнетоэлектричества 9
5. Некоторые экспериментальные данные 12
6. Современные подходы к описанию сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков 15

II. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ **18**

i. Уравнения механики и электростатики *18*

ii. Граничные условия *18*

iii. Использование скалярного электрического потенциала *19*

iv. Использование векторного электрического потенциала *19*

v. Определяющие параметры сегнетоэлектроупругого материала *20*

vi. Уравнения термодинамики *21*

vii. Принцип материальной объективности *23*

III. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКОВ **24**

1. Метод реологических моделей 24
2. Аксиомы соединения 25
3. Простые элементы 26

i. Линейный пьезоэлектрический элемент *26*

ii. Связанный «пластический» элемент *27*

iii. Связанный элемент «зазора» *29*

4. Сложная одноповерхностная реологическая модель 31

i. Нагружение электрическим полем и механическим напряжением («мягкое нагружение») *32*

ii. Нагружение электрическим смещением и механическими деформациями («жесткое нагружение») *39*

5. Сложная многоповерхностная реологическая модель 43
6. Тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей 45

i. Вид электроупругих тензоров *45*

ii. Формулы пересчета модулей *47*

iii. Вычисление производных от электроупругих тензоров *47*

IV. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКА **51**

1. Модификация метода возвратных отображений 52

i. Упругий предиктор *53*

ii. Проверка условия пластичности *53*

iii. Пластический корректор *54*

iv. Проверка условия насыщения *58*
v. Корректор насыщения *58*
2. Исследование реологической модели сегнетоэлектроэластика при различных видах нагружения 60
i. Параметры моделирования *60*
ii. Циклическое одноосное нагружение электрическим полем *62*
iii. Асинхронное двуосное нагружение электрическим полем *65*
iv. Реполяризация *67*
3. Сравнение результатов моделирования однородного электромеханического поля с экспериментальными данными 69
i. Моделирование материала PZT-51 *69*
ii. Моделирование материала PZT PIC-151 *71*
V. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МКЭ 73
1. Векторно-потенциальная конечно-элементная постановка краевой задачи 73
2. Однородная поляризация куба 75
3. Радиальная поляризация полого цилиндра 77
4. Поляризация пластины с цилиндрическим отверстием 80
5. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойного актуатора 85
VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 88
1. Результаты 88
2. Выводы 89
VII. БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ 91
1. Анализ и оценка условий труда в вычислительной лаборатории 91
i. Классы условий труда *92*
ii. Гигиенические критерии условий труда *93*
iii. Оценка критериев производственной среды *93*
VIII. БИБЛИОГРАФИЯ 97
Информационные ресурсы *100*

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Мотивация исследований

Сегнетоэлектроэластики (сегнетоэлектрики и сегнетоэластики) являются перспективными материалами новой техники и находят все более широкое применение на практике. Присущий этому классу материалов пьезоэлектрический эффект делает их незаменимыми для изготовления сенсоров и актуаторов, которые являются ключевыми элементами таких устройств, как топливные инжекторы, микро- и нанопозиционеры, микромоторы, виброгасители, пьезотрансформаторы, элементы памяти, датчики быстропеременных давлений. Во многих устройствах техники пьезокерамические материалы работают в условиях высоких электрических и механических нагрузок, что может приводить к разрушению хрупких пьезокерамических элементов. При этом возникает необходимость учета нелинейного связанного электромеханического поведения, присущего сегнетоэлектроэластикам, для чего необходимой является разработка феноменологических моделей материала и использование эффективных методов численного решения нелинейных краевых задач.

На данный момент не существует универсальной модели сегнетоэлектроэластиков, корректно описывающей сложное непропорциональное электромеханическое нагружение, которая при этом была бы достаточно простой для проведения инженерных расчетов. Микроэлектромеханические модели, хорошо описывающие монокристаллы, не могут использоваться для описания поликристаллической керамики в инженерной практике из-за большого объема вычислений, в то время как поликристаллические материалы наиболее широко распространены в технике. Поэтому вопрос изучения, расширения, модификации и универсализации существующих теорий, а также создание новых моделей является актуальным. Исследования, направленные на описание пьезоэффекта в нелинейной трехмерной постановке востребованы для создания устройств, работа которых основывается на использовании пьезоэффекта, работающих в сложных условиях, под воздействием больших термоэлектромеханических и других нагрузок, где нелинейные свойства проявляются в полную силу. Важную роль связанные нелинейные эффекты играют при разрушении пьезокерамики (Рис. 15).

В работе предлагается новая модель, основанная на использовании *метода реологических моделей*, заимствованного из механики деформируемого твердого тела. Метод реологических моделей ранее не применялся для моделирования материалов, характеризующихся связанными электромеханическими полями.

Реологическая модель является феноменологической. Удовлетворение экспериментальным данным, некоторые из которых приведены в п. 5, является основным критерием качества феномеологической модели.

Реологические модели, являясь кусочно-линейной аппроксимацией зависимостей параметров материала, позволяют наглядно представить характер поведения материала, и внесением новых структурных элементов учитывать все большее число эффектов. Законы термодинамики при этом выполняются автоматически для комбинации термодинамически состоятельных элементов.

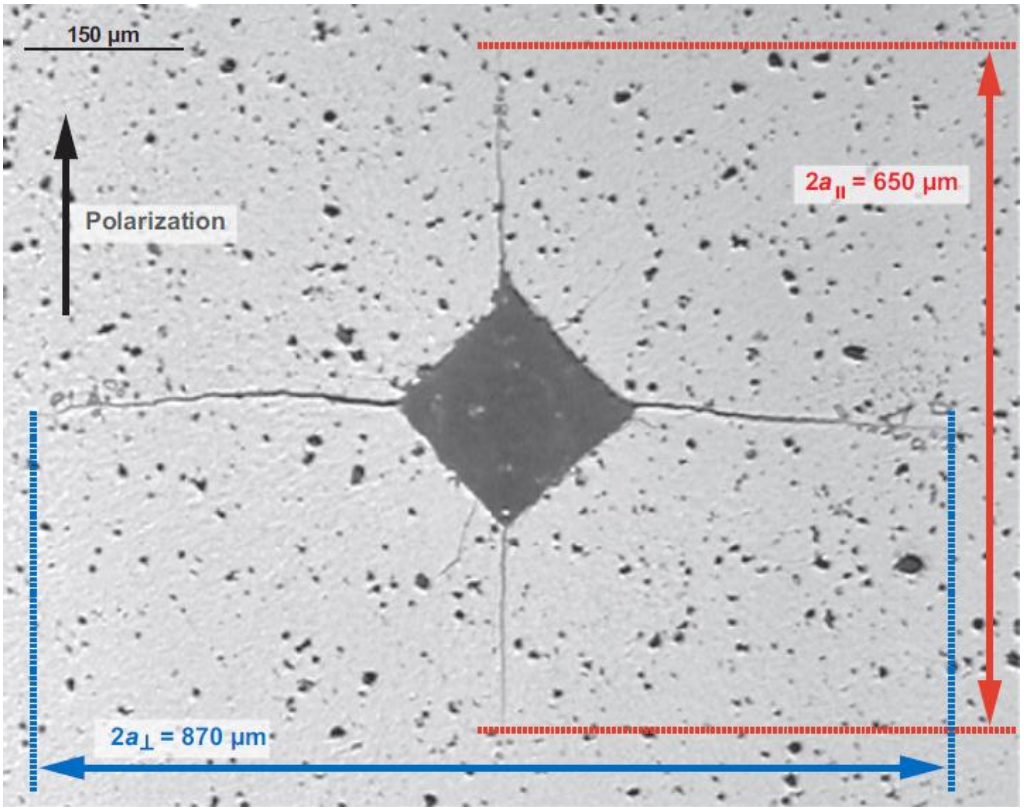

Рис. 1. Трещины в образце PZT PIC-151 [9]

Идентификация параметров реологической модели может быть произведена по решению задачи одноосного несвязанного нагружения электрическим полем или механическим напряжением. При этом результат моделирования одноосного нагружения окажется в точности совпадающим с данными эксперимента в числе точек, равных количеству звеньев в реологической модели. Модели с большим числом структурно одинаковых элементов могут применяться для описания поликристаллов, состоящих из большого числа кристаллов, доменов, зерен.

Предложенная в работе модель подробно исследована, изучена работа элементов модели при различных видах нагружения, изучены особенности численного интегрирования определяющих уравнений. Созданный алгоритм расчета на основе реологической модели реализован в пакете конечно-элементного анализа PANTOCRATOR [52], решены тестовые связанные электромеханические задачи методом конечных элементов.

Со временем вопросы прочности и разрушения пьезокерамических устройств все больше привлекают внимание специалистов по механике, выводя изучение сегнетоэлектро-эластиков на междисциплинарный уровень. Однако физическая природа эффектов, присущих сегнетоэлектрикам и сегнетоэластикам, наблюдаемых в экспериментах и используемых в технике, объясняется особенностями молекулярного строения этих материалов и требует хотя бы беглого рассмотрения с позиций физики.

2. Сегнетоэлектрики и сегнетоэластики

Сегнетоэлектрики (ферроэлектрики, ferroelectrics) – твердые диэлектрики, обладающие при температуре ниже температуры Кюри *спонтанной поляризацией* (собственным дипольным моментом, Рис. 1). Направление спонтанной поляризации в полярной фазе может быть изменено внешним электрическим полем.

К характерным особенностям сегнетоэлектриков также относятся [40]:

- Нелинейная гистерезисная зависимость поляризации от электрического поля;
- Большая диэлектрическая проницаемость и большие пьезоэлектрические модули в полярной фазе вблизи температуры Кюри
- Наличие доменной структуры при температуре ниже температуры Кюри

Каждый из доменов характеризуется постоянной, возникающей самопроизвольно электрической поляризацией, называемой спонтанной. При обычных условиях направления поляризации в отдельных доменах различны, поэтому во всем образце дипольные моменты компенсируют друг друга, и суммарная поляризация равна нулю. Образец становится поляризованным лишь после того, как внешнее электрическое поле выстроит домены в определенном направлении. Границы доменов называют доменными стенками. Если поместить сегнетоэлектрик во внешнее электрическое поле, то в нем происходит перемещение доменных стенок, в результате чего увеличивается размер доменов, в которых направление спонтанной поляризации наиболее близко к направлению внешнего поля, в то время как домены с менее выгодно ориентированным дипольным моментом, уменьшаются.

Сегнетоэластики (ферроэластики, ferroelastics) – кристаллические твердые диэлектрики, обладающие при температуре ниже температуры Кюри *спонтанной деформацией* кристаллической решетки. Направление спонтанной деформации может быть изменено внешними механическими напряжениями.

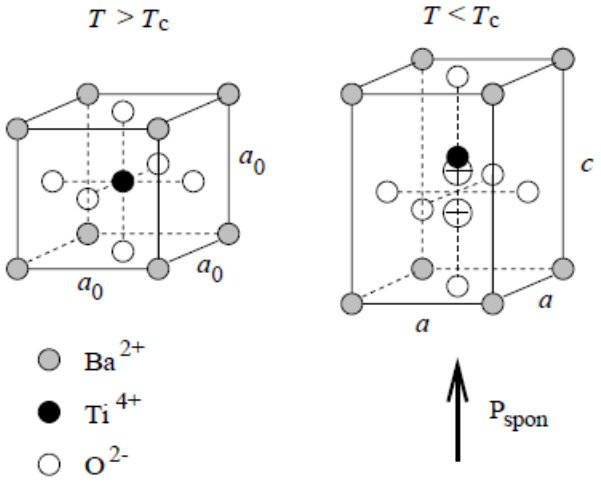

Рис. 2. Кристалл $BaTiO_3$. Слева – параэлектрическая фаза. Справа – сегнетоэлектрическая фаза. Вектор спонтанной поляризации ориентирован в направлении смещения иона титана [20]

Различают чистые сегнетоэластики – кристаллы, обладающие только сегнетоэластическими свойствами, но не являющиеся сегнетоэлектриками, чистые сегнетоэлектрики, а также вещества, являющиеся одновременно и сегнетоэластиками и сегнетоэлектриками – *сегнетоэлектроэластики*. Последние наиболее распространены в технических приложениях.

К числу чистых сегнетоэластиков относятся кристаллы ортофосфата свинца $Pb_3(PO_4)_2$, тригидроселенита калия $KH_3(SeO_3)_2$ и др. К числу смешанных сегнетоэластиков относятся кристаллы титаната бария $BaTiO_3$, молибдата гадолиния $Gd_2(MoO_4)_3$, дигидрофосфата калия KH_2PO_4 и др.

Сегнетоэлектрики, сегнетоэластики и ферромагнетики (в зарубежной литературе ферроэлектрики, ферроэластики и ферромагнетики) объединяет одинаковое поведение основных характерных свойств: электрических, механических, магнитных. Все эти материалы иногда называют *ферроиками*.

Если материал является одновременно сегнетоэластиком и сегнетоэлектриком, то границы между сегнетоэластическими доменами являются также границами, разделяющими сегнетоэлектрические домены. Если при этом кристалл – одноосный сегнетоэлектрик, то есть такой сегнетоэлектрик, в котором спонтанная поляризация возникает только вдоль одной из осей кристалла (например, сегнетова соль), то сегнетоэластические домены совпадают с сегнетоэлектрическими. В случае многоосных

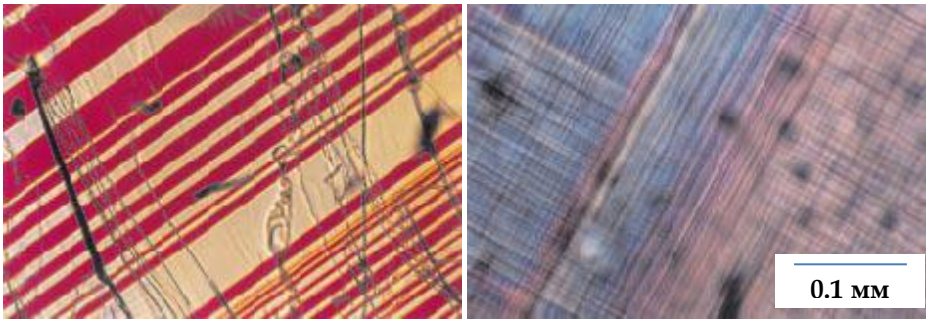

Рис. 3. Изображение доменной структуры монокристаллов титаната бария (слева) и сегнетовой соли в поляризованном свете [39].

сегнетоэлектриков, в которых спонтанная поляризация может возникнуть равновероятно вдоль одной из нескольких осей кристалла (например, титанат бария), внутри каждого сегнетоэластического домена может существовать несколько сегнетоэлектрических доменов [39]. Соседние сегнетоэластические домены оптически различимы в поляризованном свете (Рис. 2), тогда как сегнетоэлектрическая доменная структура не видна. Все многоосные сегнетоэлектрики являются также сегнетоэластиками [39], поэтому актуальным является совместное рассмотрение сегнетоэлектрических и сегнетоэластических свойств материала.

3. Применение сегнетоэлектриков/ сегнетоэластиков в технике

В настоящее время известно несколько сотен материалов, являющихся сегнетоэлектриками и сегнетоэластиками, а область их применения многообразна. Сегнетоэлектроэластики используются для изготовления высокоточных актуаторов и сенсоров, акселерометров, микромоторов, устройств памяти (Рис. 3), дизель- и бензиновых инжекторов (Рис. 4), струйных принтеров, устройств беспроводной связи; используются в устройствах памяти, в радио-, акусто-, оптоэлектронике, а также являются практически единственными материалами для гидроакустических устройств, являются особенно эффективными при работе в условиях, требующих высокой радиационной стойкости [57]. Некоторые примеры применения сегнетоэлектриков/ сегнетоэластиков приведены в Таблице 1. Наиболее широко применяется прямой и обратный пьезоэффекты. Большинство из пьезоэлектрических устройств являются прецизионными по уровню точности, поэтому описание пьезоэффекта в нелинейной постановке имеет большое практическое значение. В некоторых устройствах, таких как FERAM (запоминающее устройство, основанное на наличии остаточной поляризации при отсутствии внешнего поля у сегнетоэлектриков, Рис. 3), именно нелинейные свойства материала являются ключевыми.

Видеозаписи, наглядно иллюстрирующие работу технических устройств на основе сегнетоэлектроэластиков, собраны в [70].

Рис. 4. Модуль памяти FERAM (Murata).

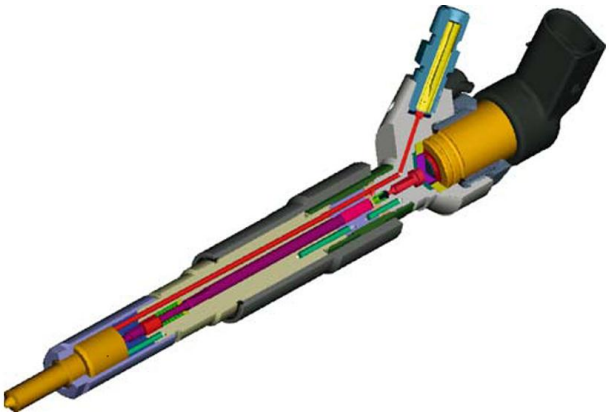

Рис. 5. Дизельный инжектор (Bosch)

Таблица 1. Некоторые области применения сегнетоэлектроэластиков

Прямой пьезоэффект	**Обратный пьезоэффект**
Механико-электрические устройства ▪ Акселерометры ▪ Датчики давления ▪ Воспламенители (игнайтеры) ▪ Пьезоэлектрические клавиатуры ▪ Автономные генераторы электроэнергии ▪ Пассивные виброгасители **Акусто-электрические устройства** ▪ Акустические и ультразвуковые ресиверы ▪ Шумоанализаторы ▪ Акустические спектроскопы	**Электро-механические устройства** Актуаторы, используемые в ▪ Нанопозиционировании ▪ Настройке лазеров ▪ Активных виброгасителях ▪ Микропомпах ▪ Инжекторах **Электро-акустические устройства** ▪ Генераторы сигналов ▪ Высоковольтные высокочастотные источники тока
Прямой и обратный пьезоэффект	
▪ Измерители уровня жидкости ▪ Измерители скорости течения ▪ Трансформаторы ▪ Детекторы объектов («парк-троники») ▪ Медицинские диагностические устройства ▪ Сонары ▪ Адаптивные структуры	
Пироэффект	
▪ Датчики температуры ▪ Датчики теплового излучения (приборы ночного видения)	
Электрооптический эффект	
▪ Фотозапоминающие устройства (Ferpic) ▪ Защитные очки ▪ Устройства 3D-визуализации (3D-телевидение) ▪ Приборы ночного видения	
Нелинейные диэлектрические свойства	
▪ Элементы памяти DRAM, FERAM ▪ Конденсаторы	

4. История сегнетоэлектричества

Изучение сегнетоэлектрических и сегнетоэластических явлений как отдельная наука достаточно молода: первые систематические исследования стали публиковаться в 1920-х годах. Однако необычные электрические свойства некоторых диэлектриков наблюдались давно.

Более двухсот лет назад Франц Эпинус заметил, что турмалин электризуется при нагревании: изменение температуры поляризует турмалин примерно так же, как внешнее электрическое поле поляризует диэлектрик. Сейчас электрический эффект, вызываемый тепловым воздействием, называется *пироэлектрическим*. В 1880 году Пьер и Жак Кюри установили, что кристаллы кварца и сегнетовой соли могут быть электрически поляризованы механическим давлением. Этот эффект получил название *пьезоэлектрического*. Однако долгое время эти эффекты рассматривались лишь как любопытные свойства отдельных материалов.

В 1921 году американский ученый чешского происхождения Дж. Валашек впервые обнаружил нелинейные электрические свойства, аналогичные магнитным свойствам ферромагнетиков, у сегнетовой соли ($NaKC_4H_4O_6{\cdot}4H_2O$), что и дало название термину «сегнетоэлектричество». Валашек впервые наблюдал зависимость электрического смещения от прикладываемого электрического поля в форме *гистерезиса* (см. п. 5 Введения), а также обнаружил сильную зависимость поляризации от температуры [35].

В СССР изучение сегнетоэлектричества связано, в первую очередь, с исследованиями физической природы явления, в то время как зарубежные публикации, в большей степени, посвящены моделированию сегнетоэлектриков и их практическому применению. В зарубежной литературе вместо корня «сегнето» в терминах «сегнетоэлектрик», «сегнетоэластик» используется «ферро»: «ferroelectric», «ferroelastic», по аналогии с ферромагнетиками.

В конце 20-х годов в ФТИ им. А. Ф. Иоффе группа под руководством И. В. Курчатова начала исследования сегнетовой соли. В процессе исследования было выяснено, что электрические особенности кристаллов сегнетовой соли не связаны, как тогда предполагалось, с явлениями высоковольтной поляризации и представляют собой особый класс явлений. В этих исследованиях были изучены свойства сегнетовой соли и твердых растворов на ее основе, установлена сильная зависимость физических свойств от внешних воздействий, обнаружен эффект униполярности и релаксационные явления, развита молекулярная теория сегнетоэлектричества. Эти результаты были обобщены И.В. Курчатовым в его монографии о сегнетоэлектричестве [42].

В 30-е годы в СССР исследования были направлены на практические применения сегнетовой соли. В. Вологдин предложил использовать сегнетову соль для умножения частоты, положив начало применения нелинейных диэлектрических свойств сегнетоэлектриков. Изучение Г. М. Михайловым пьезоэлектрических и упругих свойств сегнетовой соли привело в 40-е годы к использованию сегнетовой соли, а затем и кристаллов дигидрофосфата калия — KDP в электро- и гидроакустике. Этому способствовала разработка методов выращивания крупных кристаллов сегнетовой соли и KDP (KH_2PO_4) (Н. Н. Шефталь и др.), открытых в 1935 году Г. Буш и П. Шерером [5]. KH_2PO_4 явился родоначальником большой группы родственных кристаллов с такой же структурой.

Б. М. Вул и И. М. Гольдман обнаружили в 1943—1944 гг. сегнетоэлектрические свойства у титаната бария $BaTiO_3$, дав тем самым мощный толчок развитию основных представлений о природе сегнетоэлектричества. Титанат бария отличается высокой диэлектрической проницаемостью, большим пьезомодулем, удобной для технических применений температурой Кюри (120°C), большой механической прочностью, термической устойчивостью, тогда как сегнетова соль имеет низкую температуру Кюри (24 °C) и механически не прочна. Кроме того, используя обычную керамическую технологию, из поликристаллического титаната бария можно изготовить изделия практически любой формы и размеров из достаточно дешевых окислов или солей соответствующих металлов. Все эти свойства титаната бария сыграли большую роль в развитии работ по физике сегнетоэлектриков и их техническим применениям. Уже в 1945 году Б. Грэй разработал [15] первый сегнетоэлектрический преобразователь с использованием $BaTiO_3$.

В 1940-е годы изучение физико-химических свойств и синтез большого числа ранее неизвестных сегнетоэлектриков связаны с именами Г. А. Смоленского, В. А. Исупова, В. А. Бокова, Н. Н. Крайник (ФТИ им. А. Ф. Иоффе), Н. С. Новосильцева, А. Л. Ходакова, Е. Г. Фесенко (Ростовский государственный университет), Г. С. Жданова, Ю. Н. Веневцева (Московский физико-химический институт).

Домены в сегнетовой соли были оптически обнаружены в 1948 году М. В. Классен-Неклюдовой, М. А. Чернышевой в Институте кристаллографии АН СССР. В 1950-е годы была решена задача об изменении симметрии при всех возможных сегнетоэлектрических фазовых переходах (И. С. Желудев, Л. А. Шувалов). Обнаружено специфическое влияние проникающих излучений на свойства сегнетоэлектриков (В. А. Юрин).

Первая феноменологическая теория сегнетоэлектричества [38] была создана В. Л. Гинзбургом в 1946-1948 годах, успешно применившим теорию фазовых переходов Л. Д. Ландау к переходам в титанате бария. Работа Гинзбурга была расширена и верифицирована Девонширом [12], широко использовавшим накопленные экспериментальные данные, обобщенные Х. Мюллером в 1940 г. [28].

В 1950-ых годах В. Мерц опубликовал исследовал переключения состояний в титанате бария, рассматривая движение доменных стенок под действием электрического поля [26].

В 1950-60 гг. западными (Т. Маттиас, В. Кук, Г. Дж. Голдсмит, Р. Пепински, А. Н. Холден и др.) и советскими (Г. А. Смоленский, А. И. Агроновская, Ю. А. Исупов, Л. А. Шувалов и др.) учеными были открыты многие семейства сегнетоэлектриков [10]. Были также обнаружены вещества с зависимостью поляризации от магнитного поля, намагниченности – от электрического поля, названные сегнетомагнетиками [57]. С развитием лазерной техники стали проводиться исследования электрооптических свойств различных кристаллов, в том числе сегнетоэлектрических (А. С. Сонин, Л. А. Шувалов, К. С. Александров).

Вместе с развитием представлений о природе сегнетоэлектричества, совершенствовались и устройства, основанные на использовании пьезоэффекта и других свойств сегнетоэлектриков. В 1950-ых годах большой вклад в развитие технологий создания и применения PZT-материалов ($PbTi0_3$:$PbZr0_3$) внесли японские ученые Ширанэ, Такеда, Савагучи [34, 30].

В 60-е и 70-е годы также продолжали развиваться микроскопические и статистические теории сегнетоэлектричества. Стала бурно развиваться феноменологическая теория

(В.Л.Инденбом, А. П. Леванюк, Д. Г. Санников, Ю. М. Гуфан). Разработана методика визуализации динамики доменов с помощью жидких кристаллов, установлен ряд закономерностей динамики доменной структуры и способов управления ею (Л. А. Шувалов, Н. А. Тихомирова). В 1980-е годы в СССР развивались направления, связанные с практическим применением сегнетоэлектриков в технике (А. М. Прохоров, В. В. Леманов, А. Н. Агеев) [57].

Принципы механики сплошной среды в создании феноменологической теории сегнетоэлектричества были применены Ченом (Chen P.J.) и соавторами в восьмидесятые годы прошлого столетия [6, 7, 8]. Целью создания модели был анализ реакций сегнетоэлектроэластика на механические воздействия. Модель давалась в одномерной формулировке и не всегда точно описывала реакцию на электрические воздействия [20].

Изучение и феноменологическое моделирование сегнетоэластиков продолжили Бэсьёни, Можен (Bassiouny, Maugin). Ими было предложено [2] использовать термодинамику необратимых процессов при описании сегнетоэлектроупругих материалов.

Наиболее универсальная на данный момент феноменологическая теория в трехмерном варианте предложена в 2002 г. Ч. Ландисом [24].

Аспекты численного интегрирования определяющих уравнений на основе различных микроэлектромеханических и феноменологических моделей, эффективного решения нелинейных краевых задач сегнетоэлектроупругости, сравнение, улучшение и расширение сферы применения моделей проводятся А.С.Семеновым и соавторами [31, 32 , 33, 55, 56, 54].

Некоторые современные концепции, используемые для описания сегнетоэлектриков, изложены в п. 6 Введения.

5. Некоторые экспериментальные данные

При изучении свойств сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков на макроуровне отправной точкой исследований служат экспериментальные данные. Объектом исследований экспериментаторов обычно служит пьезокерамика с маркировкой PLZT (Plumbum Lead Zirconate Titanate) [25, 19], PZT (Plumbum Zirconate Titanate) [16, 18, 11, 37]. На Рис. 5 – Рис. 9 приведены экспериментальные данные циклов электрического, электромеханического и механического нагружения PZT-51 [11]. На Рис. 10 приведена диаграмма снятия остаточной поляризации приложением сжимающего механического напряжения для материала 8/65/35 PLZT [25]. На Рис. 11 изображены данные эксперимента над образцом PZT-5H по поляризации предварительно поляризованного в другом направлении материала [18]. На Рис. 12, Рис. 13 приведены результаты экспериментов над материалом PZT PIC-151 Д. Чжоу [37], иллюстрирующие эффекты, связанные с зависимостью от времени и от скорости приложения электрической нагрузки. В работе [37] приведено более подробное экспериментальное исследование материала PZT PIC-151, который является наиболее широко распространенным в технической практике.

Приведенные зависимости в той или иной степени свойственны всем сегнетоэлектроэластикам и позволяют судить о характере поведения этого класса материалов на макроуровне, создавая феноменологические модели материала без глубокого изучения его поведения на уровне кристаллов, доменов.

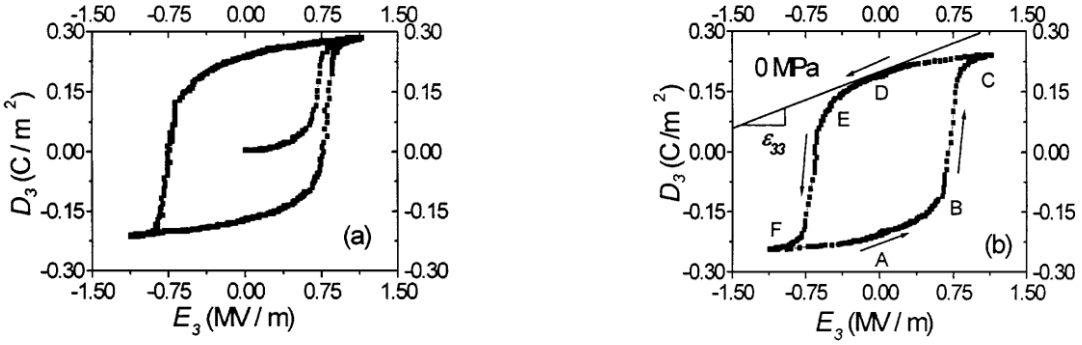

Рис. 6. Зависимость электрического смещения от электрического поля: a – первый цикл нагружения, b – установившийся гистерезис. Материал PZT-51 [11]

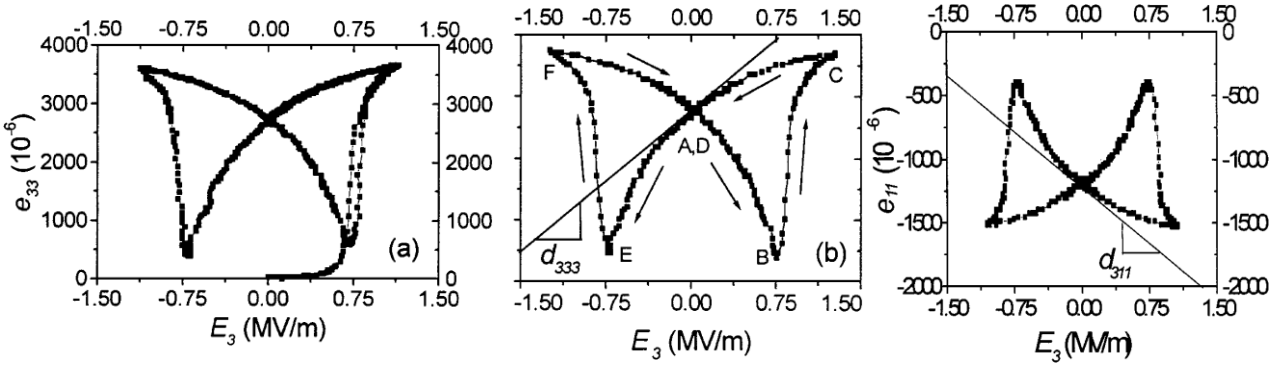

Рис. 7. Зависимость деформации от электрического поля: a – соосная полю деформация, первый цикл нагружения, b – соосная полю деформация, установившийся гистерезис в форме «бабочки», c – поперечная полю деформация, установившийся гистерезис в форме «бабочки». Материал PZT-51 [11]

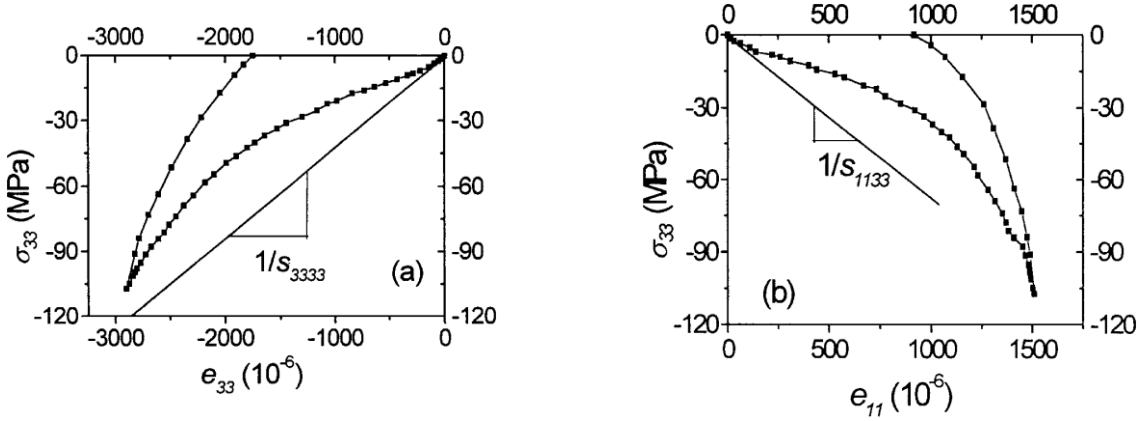

Рис. 8. Зависимость механических деформации от напряжения: а – соосная деформация, б – поперечная деформация. Материал PZT-51 [11]

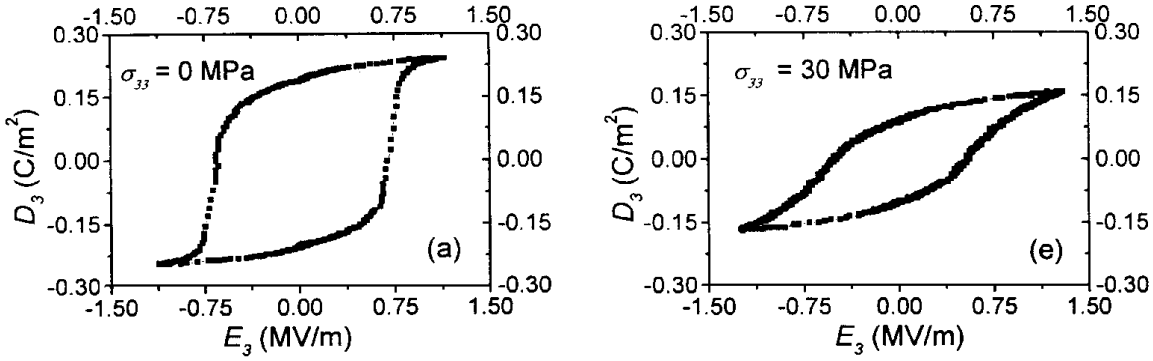

Рис. 9. Зависимость электрического смещения от электрического поля под действием механических нагрузок: а – без механического воздействия, б – под действием напряжения 30МПа [11]

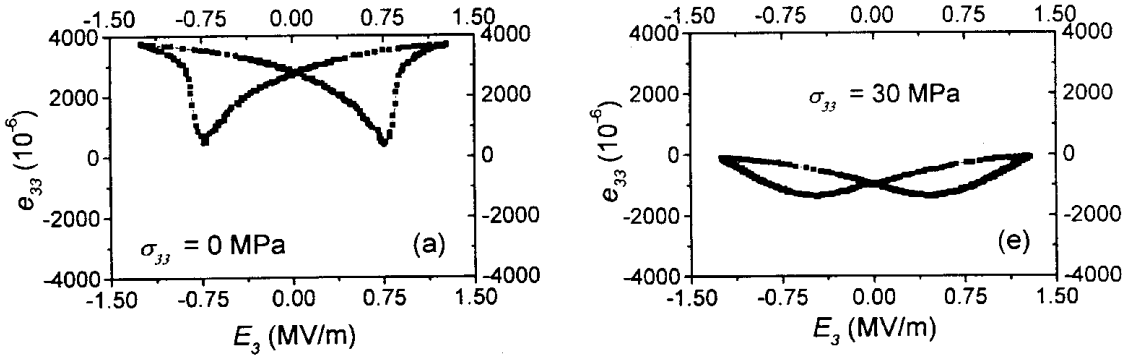

Рис. 10. Зависимость деформации от электрического поля под действием механических нагрузок: а – без механического воздействия, б – под действием напряжения 30МПа. Материал PZT-51 [11]

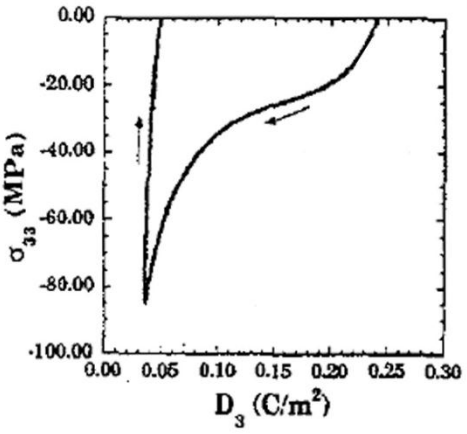

Рис. 11. Реполяризация 8/65/35 PLZT под действием сжимающей механической нагрузки [25]

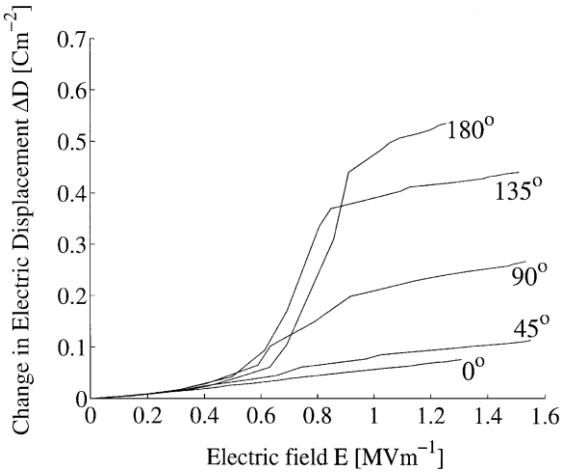

Рис. 12. Изменение электрического смещения при приложении электрического поля в зависимости от ориентации начальной поляризации. Материал PZT-5H [18]

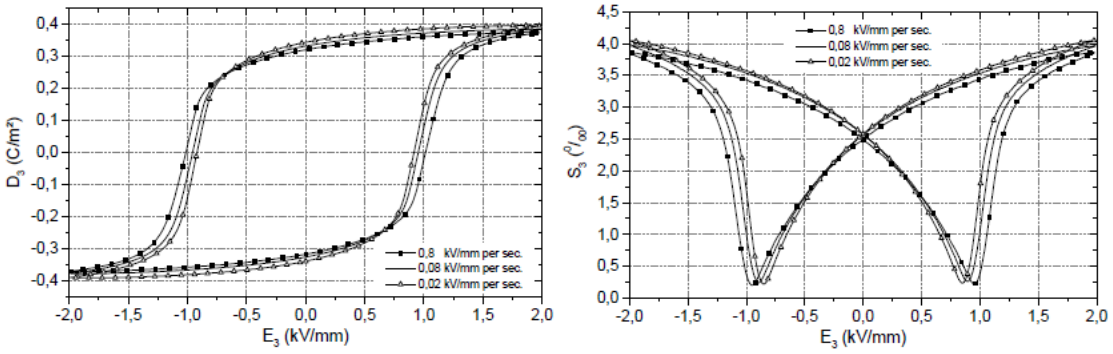

Рис. 13. Изменение диэлектрического гистерезиса (слева) и электромеханической «бабочки» (справа) при увеличении скорости изменения электрического поля. Материал PZT PIC-151 [37]

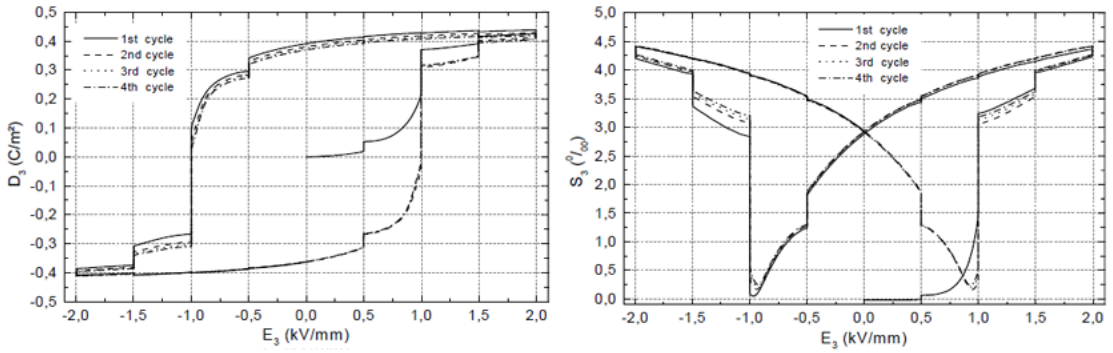

Рис. 14. Диэлектрический гистерезис (слева) и электромеханическая «бабочка» (справа). В процессе нагружения и разгрузки, величина электрического поля удерживалась на уровнях +/- 0.5, +/-1.0, +/-1.5, +/- 2.00 КВ/мм в течение 300 секунд. Материал PZT PIC-151 [37]

6. Современные подходы к описанию сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков

С развитием вычислительной техники и методов вычислений, а также в связи с необходимостью решения задач механики и оценки прочности пьезокерамики стало также развиваться направление, посвященное вычислительному моделированию пьезокерамики под действием электромеханических нагрузок. В зарубежной литературе предложены модели, определяющие нелинейное поведение сегнетоэлектроупругих материалов. Некоторые модели [3, 29, 17] основаны на рассмотрении микроструктуры, определяющей поведение материала, тогда как второй широко распространенный подход [24, 20] основывается на описании изменения макроскопических параметров и ориентирован в первую очередь на проведение эффективных инженерных расчетов.

При использовании обоих подходов свободная энергия сегнетоэлектрика/сегнетоэластика представляется в виде суммы обратимой и необратимой составляющих:

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r\right)\cdot\cdot{}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P}^r\right)\cdot\boldsymbol{\beta}\cdot\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P}^r\right) - \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P}^r\right)\cdot{}^3\mathbf{h}\cdot\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r\right) + \psi^r\left(\boldsymbol{\varepsilon}^r, \boldsymbol{P}^r\right)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\boldsymbol{D}$ – вектор электрического смещения, а обозначения с индексом r (remnant) соответствуют величинам, характеризующим остаточные деформации и поляризацию. Различие кроется в способе задания ψ^r, отвечающей необратимым процессам.

В работах [3, 29], где излагается микроэлектромеханический подход к описанию сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков используется система определяющих уравнений в виде

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = {}^4\mathbf{S}^E \cdot\cdot\, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{E}\cdot{}^3\mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}^r \\ \boldsymbol{D} = {}^3\mathbf{d}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k}^\sigma\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}^r \end{cases} \tag{1}$$

где ${}^4\mathbf{S}^E$, ${}^3\mathbf{d}, \mathbf{k}^\sigma$ – тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей материала. Остаточная деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ и поляризация $\boldsymbol{P}^r$ вычисляются на основе соотношений:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \sum_\alpha \dot{f}^\alpha \boldsymbol{\mu}^\alpha \gamma^\alpha,$$
$$\dot{\boldsymbol{P}}^r = \sum_\alpha \dot{f}^\alpha \boldsymbol{s}^\alpha P^\alpha,$$

где $\boldsymbol{\mu}^\alpha, \boldsymbol{s}^\alpha$ – тензор и вектор Шмида системы переключений номер α, $\dot{f}^\alpha$ – скорость движения стенок доменов. В тетрагональном монокристалле существует 6 возможных ориентаций спонтанной поляризации (Рис. 14), соответствующих 30 вариантам переключений. В тригональном монокристалле – 4 варианта направления спонтанной поляризации и 12 вариантов переключений. Скорость движения стенок доменов, позволяющая отыскать концентрацию доменов с тем или иным направлением спонтанной поляризации, определяется через движущую силу, величина которой

пропорциональна внешнему полю и внешнему механическому воздействию. $\dot{f}^{\alpha}$ зависит также от коэффициентов вязкости и упрочнения, уравнения для которых различны в разных моделях.

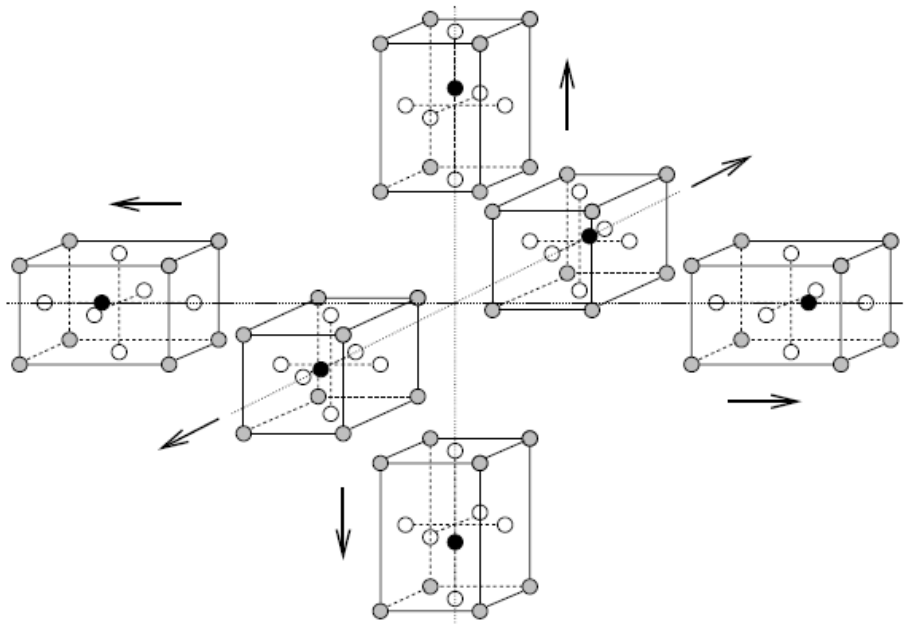

Рис. 15. При переходе из параэлектрической в сегнетоэлектрическую фазу ион титана может сместиться в одно из шести направлений, что обуславливает существование шести возможных направлений спонтанной поляризации.

Для построения модели поликристалла рассматривается систему монокристаллов с ориентациями максимально близкими к равномерному распределению по пространству.

В феноменологической модели Ч. Ландиса [24] для нахождения остаточных поляризации и деформации в формуле используется ассоциированный закон, введенный по аналогии с ассоциированным законом пластического течения:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^{r} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\hat{\mathbf{s}}}, \\ \dot{\boldsymbol{P}}^{r} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\hat{\boldsymbol{E}}}, \end{cases}$$

где $\dot{\lambda}$ – неотрицательный сегнетоэлектроупругий множитель, а потенциал переключений Φ используется также для проверки условия переключения

$$\Phi = 0;$$

$\hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{E}}$ – внутренние переменные, определяемые соотношениями

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{r}}, \qquad \hat{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{P}^{r}}.$$

Ч. Ландисом предлагается выражение для Φ в виде

$$\Phi\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\boldsymbol{E}}, \boldsymbol{P}^r\right) = \frac{3}{2}\frac{\hat{\mathbf{s}}\cdot\cdot\hat{\mathbf{s}}}{\sigma_0^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\boldsymbol{E}}}{E_0^2} + \frac{\hat{\boldsymbol{E}}\cdot\hat{\mathbf{s}}\cdot\boldsymbol{P}^r}{E_0\sigma_0 P_0} - 1$$

Выражение остаточной части ψ^r свободной энергии может быть задано эмпирически в виде [16, 24]

$$\psi^r\left(\left|\boldsymbol{P}^r\right|\right) = \frac{H_0 P_0^2}{m-1}\left[\frac{1}{m-2}\left(1-\frac{\left|\boldsymbol{P}^r\right|}{P_0}\right)^{2-m} - \frac{\left|\boldsymbol{P}^r\right|}{P_0}\right] \tag{2}$$

где H_0, P_0, m – параметры материала.

В [41] ψ^r определяется из концепций статистической физики как

$$\psi^r\left(\left|\boldsymbol{P}^r\right|\right) = H_0 P_0^2\left[\frac{\left|\boldsymbol{P}^r\right|}{P_0}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\left|\boldsymbol{P}^r\right|}{P_0}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\left|\boldsymbol{P}^r\right|^2}{P_0^2}\right)\right] \tag{3}$$

В [45, 46] автором предложено обобщение (3) в виде гипергеометрического ряда

$$\psi^r = H_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P^{r\,kn+2}}{P_0^{kn}\,(kn+1)(kn+2)}$$

где n – параметр материала.

II. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

i. Уравнения механики и электростатики

Рассматривается объем V материала, ограниченный поверхностью O, состояние которого определяется тензорными полями механической природы $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ и векторными полями $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$, задающими электростатическое состояние материала.

Уравнения динамики в интегральной форме приведены в [51]:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{v}\rho dV = \int_V \boldsymbol{f}_V \rho dV + \int_O \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} dO,\\ \frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}\rho dV = \int_V \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{f}_V \rho dV - \int_O \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{R} dO,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор точки пространства, $\boldsymbol{v}$ – скорость, $\boldsymbol{f}_V$ – внешняя сила, приходящаяся на единицу объема, $\boldsymbol{n}$ – нормаль к поверхности. После преобразований, в силу произвольности объема интегрирования уравнения (4) записываются в локальной форме:

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \rho\boldsymbol{f}_V,\\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T,\end{gathered} \tag{5}$$

Уравнения Гаусса и Фарадея в отсутствии магнитного поля в интегральной форме [43]:

$$\begin{gathered}\int_O \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D} dO = Q,\\ \int_O \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{E} dL = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где Q – величина электрического заряда внутри поверхности O, $\boldsymbol{t}$ – касательная к контуру L, ограничивающему поверхность O. После преобразований уравнения (6) при отсутствии свободных зарядов приводятся к локальной форме:

$$\begin{gathered}\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}.\end{gathered} \tag{7}$$

ii. Граничные условия

Пусть $O = O_\sigma \bigcup O_u$, $O = O_E \bigcup O_D$ причем ,$O_\sigma \bigcap O_u = 0$, $O_E \bigcap O_D = \varnothing$. Граничные условия задаются в виде

$$
\begin{aligned}
O_\sigma: &\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_s \\
O_u: &\quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s \\
O_E: &\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_s \\
O_D: &\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D} = D_s
\end{aligned}
$$

Условия на O_σ называются естественными и при записи вариационной формулировки задачи учитываются автоматически, не требуя специальной модификации вариационного принципа.

Существует два способа сформулировать связанную электромеханическую задачу, различающиеся выбором независимой электрической переменной. Естественность граничных условий на S_E или S_D определяется выбором независимой электрической переменной.

iii. Использование скалярного электрического потенциала

Классическим является выбор в качестве независимой электрической переменной скалярного потенциала ϕ. Пусть напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ пропорциональна градиенту скалярного потенциала:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi. \tag{8}$$

При этом равенство $(7)_1$ выполняется автоматически. Вариационная формулировка связанной электромеханической задачи с естественными граничными условиями в этом случае имеет вид [1]

$$\int_V \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{D}\cdot\delta\boldsymbol{E}\right)dV = \int_V \boldsymbol{f}_V\cdot\delta\boldsymbol{u}dV + \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\delta\phi dS \tag{9}$$

При этом $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\nabla\delta\boldsymbol{u}\right)^S$, $\delta\boldsymbol{E} = -\nabla\delta\phi$, и следовательно независимыми переменными являются перемещения $\boldsymbol{u}$ и потенциал ϕ. Для замыкания задачи в скалярно-потенциальной формулировке необходимы определяющие уравнения материала в виде

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}\right\}, \\
\boldsymbol{D} &= \boldsymbol{D}\left\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}\right\}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

iv. Использование векторного электрического потенциала

Альтернативой скалярному потенциалу ϕ служит векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$, ротором которого является электрическое смещение $\boldsymbol{D}$ [23]:

$$\boldsymbol{D} = -\nabla\times\boldsymbol{\psi}. \tag{11}$$

При использовании вектороного потенциала и формулы (11) автоматически выполняется равенство $(7)_2$. Для вариационной формулировки задачи с естественными граничными условиями используется принцип виртуальной работы:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,\delta\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\right)dV = \int_V \boldsymbol{f}_V\cdot\delta\boldsymbol{u}dV + \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{\psi}dS. \tag{12}$$

Здесь $\delta \boldsymbol{D} = -\nabla \times \delta \boldsymbol{\psi}$, и в качестве независимых переменных выступают $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\psi}$. Векторно-потенциальная формулировка требует представления определяющих уравнений в форме

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}\}, \\ \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для выполнения условия единственности решения краевой задачи в трехмерной постановке при использовании векторного потенциала необходимо наложение дополнительных условий, называемых *калибровкой векторного потенциала*. *Кулоновская калибровка* подразумевает выбор векторного потенциала в виде

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{14}$$

Использование скалярного или векторного потенциала имеет свои преимущества и недостатки при численном решении задач методом конечных элементов. При представлении электрического поля через скалярный потенциал (8) вариационная формулировка связанной электромеханической задачи (9) основывается на использовании смешанного термодинамического потенциала: энергии для механической составляющей и энтальпии для электрической. Следствием этого является отсутствие положительной определенности матрицы жесткости, а решением граничной задачи является седловая точка потенциала. При выборе векторного потенциала (11) термодинамический потенциал является суммой механической и электрической энергий, вариационная формулировка (12) основывается на балансе вариации энергии и вариации внешней виртуальной работы, а независимые переменные $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\psi}$ являются обобщенными термодинамическими перемещениями. При этом матрица жесткости оказывается положительно определенной, а решение соответствует минимуму электромеханической энергии. Недостатком векторно-потенциальной формулировки является большее число степеней свободы (в каждом узле 6 вместо 4 при скалярно-потенциальной формулировке), что, однако, компенсируется более быстрой сходимостью итерационных процедур. Векторно-потенциальная формулировка краевой задачи в трехмерной постановке впервые предложена и реализована в [32].

v. Определяющие параметры сегнетоэлектроупругого материала

В общем виде определяющими параметрами сегнетоэлектроупругого тела можно выбрать величины $T, \nabla T, \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \nabla \boldsymbol{D}$ (T – температура, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформации, $\boldsymbol{D}$ – вектор электрического смещения). Определяющие уравнения такой среды

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}\{T, \nabla T, \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \nabla \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{h} &= \boldsymbol{h}\{T, \nabla T, \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \nabla \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}\{T, \nabla T, \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \nabla \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ F &= F\{T, \nabla T, \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \nabla \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ S &= S\{T, \nabla T, \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \nabla \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 < t < t_0 \\ i = \overline{1, N} \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{h}$ – вектор теплового потока, $\boldsymbol{E}$ – вектор напряженности электрического поля, F – плотность свободной энергии Гельмгольца, S – плотность энтропии, $\mathbf{x}$ – гипервектор внутренних переменных.

Далее рассматривается материал, где $T, \nabla T, \nabla\boldsymbol{\varepsilon}, \nabla\boldsymbol{D}$ не влияют на протекание электрических, электромеханических и механических процессов в среде. Основанием к этому является рассмотрение случаев малых деформаций и изотермических, относительно медленно протекающих процессов, актуальных для решения задач практики. Таким образом,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ F &= F\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ S &= S\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \end{aligned} \quad 0 < t < t_0 \tag{15}$$

Вместо $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}$ в качестве независимых определяющих параметров можно также выбрать, например $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}$ или любую из четырех комбинаций электрической и механической переменных. Для замыкания уравнений краевой задачи в вариационной формулировке (9) или (12) необходимо определить материал в форме (10) или (13), где зависимость от внутренних переменных подразумевается, но явно не указана. Возможны также две других формы определяющих уравнений. Общепринята следующая нумерация форм определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}, \mathbf{x}\}. \end{cases} \\ &\text{II} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}, \mathbf{x}\}. \end{cases} \\ &\text{III} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}. \end{cases} \\ &\text{IV} \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}, \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

В следующей главе даны определяющие уравнения, при выводе которых метод реологических моделей впервые применен к сегнетоэлектроэластикам и впервые использован для моделирования связанных полей.

vi. Уравнения термодинамики

При одновременном рассмотрении термомеханических и электрических явлений первый закон термодинамики записывается в виде

$$\dot{\mathrm{K}} + \dot{\mathrm{u}} = p + r + w, \tag{17}$$

где K – кинетическая энергия материального объема, u – внутренняя энергия, p – мощность механических сил, приложенных к материальному объему, r – скорость подвода тепла, w – мощность электрического поля.

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}dV, \qquad u = \int_V U\rho dV,$$
$$p = \int_V \boldsymbol{f}_V \cdot \boldsymbol{v}\rho dV + \int_O \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}dO, \qquad r = \int_V bdV - \int_O \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}dO, \qquad w = \int_V \dot{q}\phi dV + \int_O \boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}\phi dO, \tag{18}$$

где U – объемная плотность внутренней энергии, b – скорость подвода тепла в объем, ϕ – скалярный электрический потенциал. Подстановка (18) в (17) с использованием (5), (7), а также предположение о существования поля деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\boldsymbol{u})^S$, где $\boldsymbol{u}$ – вектор перемещений, после преобразований дает первый закон термодинамики в локальной форме

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + b - \nabla\cdot\boldsymbol{h} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} \tag{19}$$

В интегральной форме второй закон термодинамики может быть записан в виде неравенства Клаузиуса-Дюгема [51]

$$s \geq \int_V \frac{b}{T}dV - \int_V \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}}{T}dO, \tag{20}$$

где s – энтропия. Плотности энтропии S и свободной энергии F вводятся стандартным образом:

$$s = \int_V S\rho dV$$
$$F = U - TS \tag{21}$$

По предположению, сделанному в п.v, рассматривается изотермический процесс. С учетом этого предположения подстановка (21) в (19) и (20) дает первый и второй законы термодинамики в виде

$$\rho T\dot{S} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\dot{F} + b - \nabla\cdot\boldsymbol{h} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{F} \geq 0. \tag{23}$$

Условие положительности диссипации

Неравенство (23) является записью второго закона термодинамики в форме диссипативного неравенства. В соответствии с (15) внутренняя энергия является функцией переменных $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \mathbf{x}$. Следовательно

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{D}}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} + \frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}}\otimes\dot{\mathbf{x}},$$

где $\otimes$ – произведение ранга, равного рангу тензора (вектора, скаляра) $\mathbf{x}$, и неравенство (23) принимает вид

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\boldsymbol{E} - \rho\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{D}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{D}} - \rho\frac{\partial F}{\partial\mathbf{x}}\otimes\dot{\mathbf{x}} \geq 0.$$

Для выполнения последнего неравенства в силу произвольности скоростей деформаций, электрических смещений и температуры, необходимо принять

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{E} = \rho \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{D}}, \tag{24}$$

а также обеспечить выполнение неравенства

$$\delta^p = -\rho \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{x}} \geq 0, \tag{25}$$

называемого условием положительности внутренней (механической) диссипации δ^p. По аналогии с (24) вводятся обобщенные термодинамические силы, энергитически сопряженные внутренним переменным $\mathbf{x}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\rho \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}},$$

что позволяет записать условие положительности внутренней диссипации в форме неравенства Кельвина

$$\delta^p = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \dot{\mathbf{x}} \geq 0. \tag{26}$$

vii. Принцип материальной объективности

С учетом введенных выше предположений о независимости процессов в материале от $T, \nabla T, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{D}$, принцип материальной объективности, которому должны удовлетворять определяющие уравнения сегнетоэлектроэластика, сводится к следующему.

Пусть $\mathbf{Q}$ – произвольный тензор поворота. Тогда при

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q},$$
$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{D},$$
$$\rho_{\mathbf{Q}} = \rho$$

должны выполняться также соотношения

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q},$$
$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{E},$$
$$F_{\mathbf{Q}} = F,$$
$$S_{\mathbf{Q}} = S.$$

III. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКОВ

1. Метод реологических моделей

В механике сплошных сред достаточно широко известен [50, 51] метод представления определяющих уравнений материала в виде наглядного образа объекта, обладающего эквивалентными свойствами. Например, линейно- или нелинейно-упругому материалу ставится в соответствие упругая пружина (элемент Гука), идеально вязкому материалу – емкость с поршнем, заполненная маслом (элемент Ньютона), идеально пластическому материалу – демпфер сухого трения в виде двух прижатых силой плоских пластинок (элемент Сен-Венана).

Каждый из реологических элементов описывает материал с одним из фундаментальных реологических свойств: упругости, вязкости, пластичности. Для задания материала, обладающего совокупностью этих и других свойств, используется комбинация реологических элементов, соединенных тем или иным способом.

В. А. Пальмовым показано [51], что при использовании реологического подхода и выборе реологических элементов, по отдельности удовлетворяющих законам термодинамики, реологическая модель, составленная из любой комбинации таких элементов будет также удовлетворять законам термодинамики, при ограничении законами последовательного и параллельного соединения элементов. Это делает метод реологических моделей удобным средством для описания свойств разных материалов.

В работе область применения реологического (структурного) подхода расширена, и этот подход использован для описания сегнетоэлектроэластиков, характеризующихся связанными нелинейными электромеханическими полями. Предлагаемый подход может быть также использован для моделирования нелинейного поведения других ферроиков (см. п. I.2).

Реологические модели позволяют наглядно (визуально) представить определяющие уравнения сегнетоэлектроупругого материала и осмысленно ввести в рассмотрение сравнительно небольшое количество внутренних переменных, число которых в микроэлектромеханических моделях много больше. Независимость звеньев реологической модели и произвол в выборе их числа позволяют проводить аналогию между реологической моделью и моделью поликристалла, оставаясь при этом в рамках феноменологического подхода.

Метод реологических моделей к описанию сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков применяется впервые.

2. Аксиомы соединения

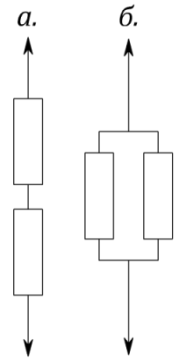

Рис. 16. Соединение реологических элементов: последовательное (а), параллельное (б)

По аналогии с механикой [51], вводятся следующие *аксиомы соединения*:

при последовательном соединении (Рис. 16- а):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \boldsymbol{D} = \sum_i \boldsymbol{D}_i, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_i, \tag{27}$$

при параллельном соединении (Рис. 16-б):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_i, \quad \boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i. \tag{28}$$

Пользуясь доказательством, впервые проделанным В. А. Пальмовым в [51], нетрудно убедиться, что в случае рассмотрения электромеханических реологических элементов, метод реологических моделей также позволяет удовлетворить условию положительности диссипации, если способы соединения ограничены параллельным и последовательным, а каждый элемент не противоречит законам термодинамики.

В самом деле, пусть соединены два термодинамически состоятельных элемента. При этом

$$\delta_1^p = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1 \quad \delta_2^p = \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{D}_2$$

В случае последовательного соединения элементов:

$$\begin{aligned} \delta^p &= \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + \boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2) = \\ &= \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{D}_2 = \delta_1^p + \delta_2^p \geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

В случае параллельного соединения:

$$\begin{aligned} \delta^p &= \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} = (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2) \cdot \boldsymbol{D} = \\ &= \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{D}_2 = \delta_1^p + \delta_2^p \geq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, если сложная реологическая модель может быть представлена как совокупность параллельно и последовательно соединенных звеньев, то она удовлетворяет термодинамическим ограничениям.

3. Простые элементы

i. Линейный пьезоэлектрический элемент

Свободная энергия Гельмгольца *линейного пьезоэлектрического материала* (аналога элемента Гука, Рис. 17) записывается в виде квадратичной формы

$$\rho F = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot{}^{4}\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\cdot{}^{3}\mathbf{h}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{31}$$

где ${}^{4}\mathbf{C}, {}^{3}\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta}$ – тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей. Из представления внутренней энергии в виде (31) следует

$$F = F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) \Rightarrow \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{D}}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}$$

Тогда из второго закона термодинамики (23):

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\boldsymbol{E} - \rho\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{D}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{D}} \geq 0, \tag{32}$$

значит тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ определяются дифференцированием свободной энергии

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\partial \rho F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \boldsymbol{E} = \dfrac{\partial \rho F}{\partial \boldsymbol{D}}. \end{cases}$$

Положительная определенность матрицы $\begin{pmatrix} {}^{4}\mathbf{C} & -{}^{3}\mathbf{h}^{T} \\ -{}^{3}\mathbf{h} & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$, составленной из тензоров, входящих в выражение (31), являющееся квадратичной функцией, гарантирует автоматическое выполнение второго закона термодинамики.

При не зависящих от $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{D}$ модулях ${}^{4}\mathbf{C}, {}^{3}\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta}$ уравнения линейного электромеханически связанного (пьезоэлектрического) материала принимают вид

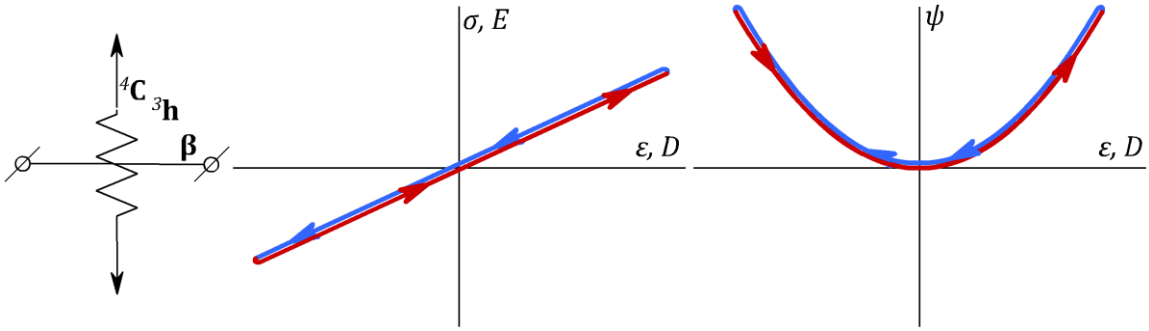

Рис. 17.Линейный пьезоэлектрический элемент. Изображение на схеме (слева), характер зависимости $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{E}$ от $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{D}$ (в центре), вид свободной энергии (справа).

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{D} \cdot {}^3\mathbf{h}, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{D}. \end{cases}} \tag{33}$$

Слагаемые $-\boldsymbol{D} \cdot {}^3\mathbf{h}$ и $-{}^3\boldsymbol{h} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ называются перекрестными членами и характеризуют взаимосвязь электрических и механических полей. При нулевом тензоре ${}^3\mathbf{h}$ связи нет.

Введенное определение для линейного элемента соответствует III форме определяющих уравнений в соответствии с (16).

ii. Связанный «пластический» элемент

Механическая составляющая элемента определяется в пространстве девиаторов напряжений и деформаций. Принимается предположение о равенстве нулю шаровой части тензора деформаций пластического элемента:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot \mathbf{1} = 0.$$

Следовательно

$$\mathbf{e} = dev\, \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{34}$$

Для связанного «пластического» элемента предполагается, в общем случае, существование двух поверхностей нагружения, в пространствах механических и электрических обобщенных термодинамических сил:

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma &= 0 \\ \Phi_E &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Условие положительности диссипации (26) может быть усилено принципом максимума диссипации Мизеса, согласно которому истинное состояние определяется максимумом выражения (26) при ограничениях (35). Функция Лагранжа записывается в виде

$$L = -\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{D}} + \dot{\lambda}_\sigma \Phi_\sigma + \dot{\lambda}_E \Phi_E \tag{36}$$

В соответствии с методом множителей Лагранжа, равенство нулю частных производных функции L по $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}, \dot{\lambda}_\sigma, \dot{\lambda}_E$ приводит к *ассоциированному закону переключения (associated switching rule),* обобщающему ассоциированный закон пластического течения (*associated flow rule*), который с учетом (34) записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda}_\sigma \dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\lambda}_E \dfrac{\partial \Phi_E}{\partial \boldsymbol{E}}, \end{cases}$$

Если какая-либо из поверхностей (35) не достигнута, то соответствующий множитель $\dot{\lambda}$ в будет равен нулю, что приводит к условиям Куна-Таккера

$$\Phi_i \le 0, \quad \dot{\lambda}_i \ge 0, \quad \dot{\lambda}_i \Phi_i = 0, \qquad i = \sigma, E$$

Для сегнетоэлектроэластика принимается гипотеза единого для механических и электрических полей потенциала переключений

$$\Phi_\sigma = \Phi_E = \Phi$$

Тогда условие экстремума функции (36) дает *связанный ассоциированный закон переключения*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}}, \\ \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}}, \end{cases} \tag{37}$$

где

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_\sigma + \dot{\lambda}_E,$$

Множитель $\dot{\lambda}$ удовлетворяет условиям Куна-Таккера:

$$\Phi \le 0, \quad \dot{\lambda} \ge 0, \quad \dot{\lambda}\Phi = 0.$$

Выбор в качестве потенциала Φ гладкой выпуклой (см., например, [53]) положительно определенной функции приводит к удовлетворению законам термодинамики.
Пусть $\boldsymbol{\Sigma}$ – вектор сил в пространстве $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{S}$ – элемент того же пространства. Дифференцирование условия выпуклости функции $\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$

$$\Phi(t\boldsymbol{S} + (1-t)\boldsymbol{\Sigma}) \le t\Phi(\boldsymbol{S}) + (1-t)\Phi(\boldsymbol{\Sigma})$$

приводит при $t = 0$ к неравенству

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Sigma}) \le \Phi(\boldsymbol{S}) - \Phi(\boldsymbol{\Sigma}),$$

которое при $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ равносильно следующим двум:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} \ge \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) - \Phi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{E} \ge \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) - \Phi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$$

В силу положительной определенности $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) \ge \Phi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ с учетом (37):

$$\delta^p = \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{E} \ge 0$$

Обобщая критерий Мизеса, предлагается выбрать Φ в виде

$$\Phi = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{s} \cdot\cdot \mathbf{s}}{\sigma_0^2} + \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}}{E_0^2} - 1.$$

В силу (37) функция диссипации при таком выборе критерия будет

$$\delta^p = \sqrt{\frac{1}{6}\sigma_0^2 \dot{\mathbf{e}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{4}E_0^2 \dot{\boldsymbol{D}} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}}\left(\frac{3}{\sigma_0^2}\mathbf{s} \cdot\cdot \mathbf{s} + \frac{2}{E_0^2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}\right) \ge 0$$

С учетом сделанных предположений связанный «пластический» элемент (аналог элемента Сен-Венана) определяется соотношениями

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}}, \\ \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}}, \end{cases} \quad \Phi \le 0, \quad \dot{\lambda} \ge 0, \quad \dot{\lambda}\Phi = 0, \quad \Phi = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}\cdot\cdot\mathbf{s}}{\sigma_0^2} + \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}}{E_0^2} - 1.} \tag{38}$$

Электромеханический аналог пластического элемента, а также характер электромеханических взаимосвязей схематически представлен на Рис. 18.

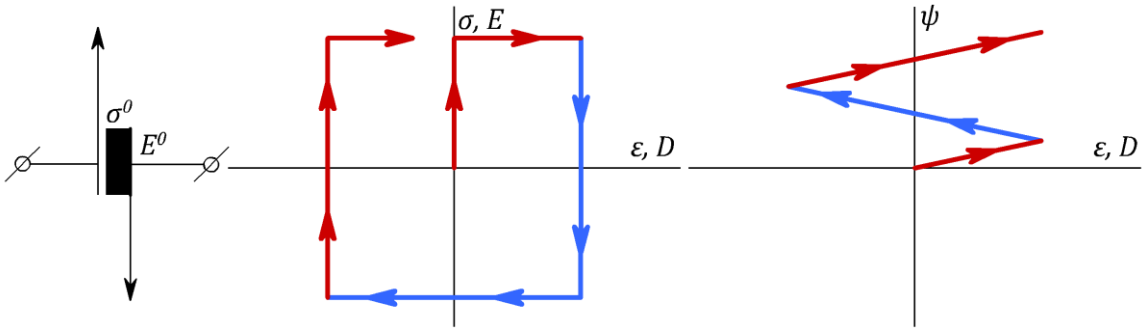

Рис. 18. Связанный «пластический» элемент. Изображение на схеме (слева), характер зависимости σ, *E* от ε, *D* (в центре), вид свободной энергии (справа).

iii. Связанный элемент «зазора»

Для описания эффекта *насыщения* (*saturation*) в сегнетоэлектриках/сегнетоэластиках недостаточно использования аналогов классических реологических моделей упругости, пластичности, вязкости [49]. Необходимо определить элемент, одномерным механическим аналогом которого является пластина, находящаяся между двумя абсолютно жесткими стенками (Рис. 19). Две стенки образуют *зазор* (Gap), внутри которого пластина может перемещаться абсолютно свободно. Однако при достижении одного из берегов пластина упирается и не сдвигается с места вне зависимости от величины силы, на нее действующей, если только эта сила не содержит ненулевую компоненту, направленную по касательной к берегу зазора, или в сторону, противоположную ему.

Форма поверхности, характеризующей зазор, определяется соотношением

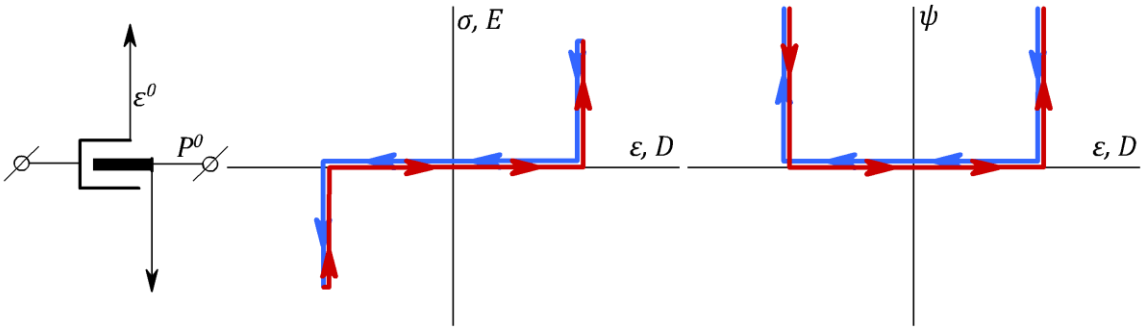

Рис. 19. Связанный элемент «зазора». Изображение на схеме (слева), характер зависимости σ, *E* от ε, *D* (в центре), вид свободной энергии (справа).

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathbf{e}\cdot\cdot\mathbf{e}}{\varepsilon_0^2} + \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}}{P_0^2} - 1.$$

Суть элемента сводится к ограничению суммарной интенсивности деформаций и электрического смещения:

$$\mathrm{Y} \le 0 \tag{39}$$

Усилия $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{E}$, возникающие при этом в элементе, определяются из внешних условий и являются таковыми, чтобы выполнялось соотношение (39) и чтобы при этом возникающие усилия не вносили вклада в движение $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{D}$ вдоль берегов зазора.

В анизотропном материале, вообще говоря, эти усилия не обязательно направлены по нормали к поверхности зазора. То есть

$$\begin{cases} \mathbf{s} = \boldsymbol{\gamma}\cdot\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathbf{e}}, \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\gamma}\cdot\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \boldsymbol{D}}, \end{cases} \quad \mathrm{Y} \le 0, \quad \boldsymbol{\gamma} \ge 0, \quad \boldsymbol{\gamma}\mathrm{Y} = \mathbf{0}. \tag{40}$$

В п. III.4.i.3) показано, что усилия в «зазоре» не всегда могут быть найдены из внешних условий, однако показано также, что нахождение этих усилий не является необходимым.

В случае отсутствия «контакта» усилий нет, следовательно $\delta^p = 0$. В режиме «контакта» $\delta^p = \mathbf{s}\cdot\cdot\dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}$. В силу определения, в «зазоре» $\dot{\mathbf{e}}$, $\dot{\boldsymbol{D}}$ либо равны нулю, либо направлены по касательной к берегу зазора, тогда как обобщенные силы $\mathbf{s}, \boldsymbol{E}$ направлены так, что не вносят вклада в изменение $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{D}$. Следовательно, и в этом случае

$$\delta^p = 0.$$

Следует отметить, что введенное определение хотя и удовлетворяет условию неотрицательности диссипации, но не следует напрямую из условия максимума диссипации (что не противоречит законам природы). Если использовать метод Лагранжа для поиска максимума δ^p с ограничением (39), то можно получить выражения

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\gamma}\left(\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathbf{e}}\cdot\cdot\dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \boldsymbol{D}}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right), \\ \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\gamma}\left(\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathbf{e}}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{E}} + \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \boldsymbol{D}}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{E}}\right), \end{cases} \tag{41}$$

также требующие доопределения величин $\dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{E}}, \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{E}}$. В дальнейшем, однако, используется определение (40). Таким образом, связанный элемент, называемый «зазором», задается соотношениями

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{s} = \boldsymbol{\gamma}\cdot\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathbf{e}}, \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\gamma}\cdot\cdot\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \boldsymbol{D}}, \end{cases} \quad \mathrm{Y} \le 0, \quad \boldsymbol{\gamma} \ge 0, \quad \boldsymbol{\gamma}\mathrm{Y} = \mathbf{0}, \quad \mathrm{Y} = \frac{\mathbf{e}\cdot\cdot\mathbf{e}}{\varepsilon_0^2} + \frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}}{P_0^2} - 1.} \tag{42}$$

4. Сложная одноповерхностная реологическая модель

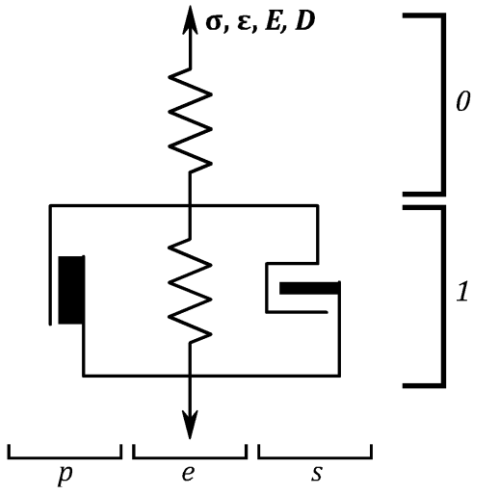

Рис. 20. Схема сложной одноповерхностной реологической модели

Рассматривается реологическая модель сегнетоэлектроэластика, изображенная на Рис. 20.

Модель состоит из двух звеньев: «0» и «1», соединенных последовательно. Звено «0» – линейный элемент. Звено «1» состоит из трех параллельно соединенных элементов – пластического (*p - plastic*), линейного (*e - elastic*) и зазора (*s – saturation*). Наличие одного нелинейного звена определяет наличие одной поверхности переключения и одной поверхности насыщения, что и дает название модели.

В силу введенных аксиом соединения (27), (28) справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_1$$
$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1 \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_1 \tag{43$_1$}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1^e = \boldsymbol{\varepsilon}_1^p = \boldsymbol{\varepsilon}_1^s \qquad \boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_1^e + \boldsymbol{\sigma}_1^p + \boldsymbol{\sigma}_1^s$$
$$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_1^e = \boldsymbol{D}_1^p = \boldsymbol{D}_1^s \qquad \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_1^e + \boldsymbol{E}_1^p + \boldsymbol{E}_1^s \tag{41$_2$}$$

Звено «0» отвечает за упругие свойства материала при малых деформациях и поляризации. Звено «1» в целом может рассматриваться как часть модели, содержащая остаточные деформации и поляризацию, т. е. отвечающая за нелинейные свойства материала. Поэтому удобно ввести обозначения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_1 \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^e \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_0$$
$$\boldsymbol{D}^p \equiv \boldsymbol{D}_1 \qquad \boldsymbol{D}^e \equiv \boldsymbol{D}_0$$

Механические напряжения и напряженность электрического поля различны в элементах *p*, *e* и *s* звена «1», тогда как $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}$. Поэтому удобно переобозначить

$$\boldsymbol{\sigma}^e \equiv \boldsymbol{\sigma}_1^e,\ \boldsymbol{\sigma}^p \equiv \boldsymbol{\sigma}_1^p,\ \boldsymbol{\sigma}^s \equiv \boldsymbol{\sigma}_1^s$$
$$\boldsymbol{E}^e \equiv \boldsymbol{E}_1^e,\ \boldsymbol{E}^p \equiv \boldsymbol{E}_1^p,\ \boldsymbol{E}^s \equiv \boldsymbol{E}_1^s$$

Для каждого из элементов модели справедливы определения соответствующего элемента, введенные выше. Тензоры модулей линейных элементов «0» и «1-*e*», вообще говоря, не совпадают и обозначаются ${}^4\mathbf{C}^0$,${}^3\mathbf{h}^0$, $\boldsymbol{\beta}^0$ и ${}^4\mathbf{C}^p$,${}^3\mathbf{h}^p$, $\boldsymbol{\beta}^p$.

i. Нагружение электрическим полем и механическим напряжением («мягкое нагружение»)

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ материал является ненагруженным, а остаточные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ и поляризация $\boldsymbol{D}^p$ равны нулю.

Пусть начиная с t_0 на материал действует внешнее электрическое поле $\boldsymbol{E}$ и внешняя нагрузка $\boldsymbol{\sigma}$. Пусть $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\sigma}$ не убывают при $t \in (t_0, t_{\max})$.

Таким образом, реализуется процесс монотонного нагружения, соответсвующий I форме определяющих уравнений (см. (16)) Материал при этом последовательно пребывает в одной из трех фаз:

1) Линейная фаза. Звено «0» деформируется под действием внешних сил, звено «1» не изменяет своего состояния;
2) Фаза накопления поляризации и пластических деформаций. Оба звена подвижны;
3) Фаза насыщения: звено «1» достигло предела деформаций, звено «0» продолжает деформироваться.

Такой порядок следования фаз следует из определения простых элементов и способа их соединения. Ниже каждый из этапов рассмотрен подробнее.

Линейная фаза

Так как

$$\boldsymbol{E}^p = \boldsymbol{E},$$
$$\mathbf{s}^p = \mathbf{s},$$

то в соответствии с (38) в течение некоторого промежутка времени после начала нагружения будет

$$\Phi = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{s}^p \cdot\cdot \mathbf{s}^p}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{E}^p \cdot \boldsymbol{E}^p}{E_1^2} - 1 = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{s} \cdot\cdot \mathbf{s}}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}}{E_1^2} - 1 < 0,$$

а следовательно

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{0},\ \boldsymbol{D}^p = \boldsymbol{0},\ t \in (t_0, t_1). \tag{44}$$

Эта линейная, или «упругая» стадия нагружения. При этом активным является линейное звено, характеризуемое величинами с индексом «0» и «*e*». Из (33):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{D}^e \cdot {}^3\mathbf{h}^0, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h}^0 \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \boldsymbol{D}^e. \end{cases}$$

Решением линейной системы уравнений является

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e = {}^4\mathbf{S}^0 \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{E} \cdot {}^3\mathbf{d}^0 \\ \boldsymbol{D}^e = {}^3\mathbf{d}^0 \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k}^0 \cdot \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{45}$$

где тензоры ${}^4\mathbf{S}^0$, ${}^3\mathbf{d}^0$, $\mathbf{k}^0$ единственным образом выражаются через ${}^4\mathbf{C}^0$,${}^3\mathbf{h}^0$, $\boldsymbol{\beta}^0$ (см. п.III.6.ii или [33]). С учетом $(43)_1$ и (44) из (45) следует, что в линейной фазе

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = {}^4\mathbf{S}^0 \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{E} \cdot {}^3\mathbf{d}^0 \\ \boldsymbol{D} = {}^3\mathbf{d}^0 \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k}^0 \cdot \boldsymbol{E} \end{cases}}$$

Фаза накопления поляризации и пластических деформаций

В некоторый момент времени t_1 потенциал элеутроупругих переключений обращается в ноль:

$$\Phi\left(\mathbf{s}^p, \boldsymbol{E}^p\right) = 0, \tag{46}$$

т. е. происходит *электромеханическое переключение (ferroelectric/ferroelastics switching),* после чего материал начинает накапливать неупругие деформации и поляризацию, обозначенные в данной модели буквами $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ и $\boldsymbol{D}^p$. При этом общие деформации равны сумме

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p,$$
$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p.$$

Линейная («упругая») часть деформаций и электрических смещений по-прежнему может быть найдена из формул (45). Для нахождения остаточной («пластической») части требуется определить значение множителя $\dot{\lambda}$ (см. (38)). Так как условие (46) выполняется на протяжении всего процесса нагружения (в данной фазе), то производные от его обеих частей также равны:

$$\dot{\Phi}\left(\mathbf{s}^p, \boldsymbol{E}^p\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} \cdot\cdot \dot{\mathbf{s}}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^p = 0. \tag{47}$$

С учетом равенства нулю напряжений на элементе «насыщения» в данной фазе, девиатор $\mathbf{s}^p$ тензора напряжений элемента «1-*p*»:

$$\mathbf{s}^p = dev\,\boldsymbol{\sigma}^p =$$
$$= \boldsymbol{\sigma}^p - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}^p \cdot\cdot \mathbf{1}\mathbf{1} = \left(\boldsymbol{\sigma} - {}^4\mathbf{C}^p \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{D}^p \cdot {}^3\mathbf{h}^p\right) - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\sigma} - {}^4\mathbf{C}^p \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{D}^p \cdot {}^3\mathbf{h}^p\right) \cdot\cdot \mathbf{1}\mathbf{1} =$$
$$= \mathbf{s} - \left({}^4\mathbf{C}^p - \frac{1}{3}\mathbf{1}\mathbf{1} \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^p \right) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{D}^i \cdot \left({}^3\mathbf{h}^p - \frac{1}{3}{}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot \mathbf{1}\mathbf{1} \right),$$

или

$$\mathbf{s}^p = \mathbf{s} - {}^4\mathbf{C}^p_{dev} \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p + \boldsymbol{D}^p \cdot {}^3\mathbf{h}^p_{dev}, \tag{48}$$

где

$$ {}^4\mathbf{C}^p_{dev} = {}^4\mathbf{C}^p - \frac{1}{3}\mathbf{11} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C}^p,$$
$$ {}^3\mathbf{h}^p_{dev} = {}^3\mathbf{h}^p - \frac{1}{3}{}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot\, \mathbf{11}.$$

Вектор электрического поля элемента «1-*p*»

$$\boldsymbol{E}^p = \boldsymbol{E} + {}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\beta}^p \cdot \boldsymbol{D}^p \tag{49}$$

Подстановка (48) и (49) в (47) дает

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} \cdot\cdot \left(\dot{\mathbf{s}} - {}^4\mathbf{C}^p_{dev} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{e}}^p - {}^4\dot{\mathbf{C}}^p_{dev} \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p + \dot{\boldsymbol{D}}^p \cdot {}^3\mathbf{h}^p_{dev} + \boldsymbol{D}^p \cdot {}^3\dot{\mathbf{h}}^p_{dev}\right) +$$
$$+ \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{E}} + {}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{e}}^p + {}^3\dot{\mathbf{h}}^p \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p - \boldsymbol{\beta}^p \cdot \dot{\boldsymbol{D}}^p - \dot{\boldsymbol{\beta}}^p \cdot \boldsymbol{D}^p\right) = 0.$$

Вообще говоря, тензоры ${}^4\boldsymbol{C}^p$, ${}^3\boldsymbol{h}^p$, $\boldsymbol{\beta}^p$ зависят от поляризации $\boldsymbol{D}^p$. С учетом этого, а также при использовании уравнений (38) для $\dot{\mathbf{e}}^p$ и $\dot{\boldsymbol{D}}^p$ последнее равенство принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} \cdot\cdot \left(\dot{\mathbf{s}} - {}^4\mathbf{C}^p_{dev} \cdot\cdot\, \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} - \left(\frac{\partial^4\mathbf{C}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right) \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p + \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^i} \cdot {}^3\mathbf{h}^p_{dev} + \boldsymbol{D}^p \cdot \left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right)\right) + \\
&+ \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{E}} + {}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot\, \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} + \left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right) \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p - \boldsymbol{\beta}^p \cdot \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} - \left(\frac{\partial\boldsymbol{\beta}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right) \cdot \boldsymbol{D}^p\right) = 0,
\end{aligned} \tag{50}$$

откуда следует

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} \cdot\cdot\, \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}\right), \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha = &\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} \cdot\cdot \left[{}^4\mathbf{C}^p_{dev} \cdot\cdot\, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^i} + \left(\frac{\partial^4\mathbf{C}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^i} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^i}\right) \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p - \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} \cdot {}^3\mathbf{h}^p_{dev} - \boldsymbol{D}^i \cdot \left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} \cdot \left[-{}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot\, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} - \left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right) \cdot\cdot\, \mathbf{e}^p + \boldsymbol{\beta}^p \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} + \left(\frac{\partial\boldsymbol{\beta}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right) \cdot \boldsymbol{D}^p\right].
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения для скоростей накопления остаточных деформаций и поляризации записываются в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\cdot\cdot\dot{\mathbf{s}} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right), \\ \dot{\boldsymbol{D}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\cdot\cdot\dot{\mathbf{s}} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right). \end{cases}$$

С учетом выбранной формы потенциала переключений Φ (см. (38)), а также учитывая равенство тензора деформаций пластического звена своему девиатору $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{e}^p$ (см. (34)), поведение материала в режиме накопления остаточных деформаций и поляризации определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{e}^p, \\ \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p. \end{aligned} \qquad (50)_1$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^e = {}^4\mathbf{S}^0\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{E}\cdot{}^3\mathbf{d}^0 \\ \boldsymbol{D}^e = {}^3\mathbf{d}^0\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k}^0\cdot\boldsymbol{E} \end{cases} \qquad (50)_2$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{9}{\sigma_1^4}\mathbf{s}^p\mathbf{s}^p\cdot\cdot\dot{\mathbf{s}} + \dfrac{6}{\sigma_1^2E_1^2}\mathbf{s}^p\boldsymbol{E}^p\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right), \\ \dot{\boldsymbol{D}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{6}{\sigma_1^2E_1^2}\boldsymbol{E}^p\mathbf{s}^p\cdot\cdot\dot{\mathbf{s}} + \dfrac{4}{E_1^4}\boldsymbol{E}^p\boldsymbol{E}^p\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right), \end{cases} \qquad (52)_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^p &= \mathbf{s} - {}^4\mathbf{C}^p_{dev}\cdot\cdot\mathbf{e}^p + \boldsymbol{D}^p\cdot{}^3\mathbf{h}^p_{dev}, \\ \boldsymbol{E}^p &= \boldsymbol{E} + {}^3\mathbf{h}^p\cdot\cdot\mathbf{e}^p - \boldsymbol{\beta}^p\cdot\boldsymbol{D}^p \end{aligned} \qquad (50)_4$$

$$\begin{aligned} \alpha = {} & \frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p\cdot\cdot\left[{}^4\mathbf{C}^p_{dev}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p + \left(\frac{\partial^4\mathbf{C}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^i}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\cdot\cdot\mathbf{e}^p - \frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\cdot{}^3\mathbf{h}^p_{dev} - \boldsymbol{D}^p\cdot\left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\right] + \\ & + \frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\cdot\left[-{}^3\mathbf{h}^p\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\cdot\cdot\mathbf{e}^p + \boldsymbol{\beta}^i\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p + \left(\frac{\partial\boldsymbol{\beta}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\cdot\boldsymbol{D}^p\right]. \end{aligned}$$

$$(50)_5$$

Фаза «насыщения»

В процессе накопления поляризации и пластических деформаций величина потенциала электроупругого насыщения Υ возрастает и в конце концов становится равной нулю:

$$\Upsilon = \frac{\mathbf{e}^p\cdot\cdot\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2} + \frac{\boldsymbol{D}^p\cdot\boldsymbol{D}^p}{P_1^2} - 1 = 0.$$

Во время дальнейшего нагружения это равенство выполняется тождественно.

Механизм совместной работы «пластического» элемента и «зазора» в фазе «насыщения» никак не детерминирован ни определениями этих элементов, ни условиями связи между ними. В самом деле, в каждом из равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{s}^p + \mathbf{s}^e + \mathbf{s}^s, \\ \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}^p + \boldsymbol{E}^e + \boldsymbol{E}^s \end{aligned}$$

неизвестными являются по два слагаемых: $\mathbf{s}^p$, $\mathbf{s}^s$, $\boldsymbol{E}^p$, $\boldsymbol{E}^s$. То есть условия соединения уже не могут использоваться для определения этих величин, как они использовались во второй фазе для нахождения $\mathbf{s}^p$, $\boldsymbol{E}^p$ в виде уравнений $(52)_4$

Для снятия неопределенности полагается

$$\text{если } \Upsilon = 0, \text{ то } \Phi = 0 \tag{53}$$

то есть если модель находится в состоянии «насыщения», то она также находится в состоянии пластичности. (Для механического аналога – двух прижатых пластинок с сухим трением, упирающихся в стенку, это скорее всего не так: движение в зазоре будет происходить, если только норма напряжений, направленных по касательной к стенке зазора, будет удовлетворять критерию пластичности).

При определении «зазора» было принято, что его вклад в величины $\mathbf{e}^p, \boldsymbol{D}^p$ не должен изменять их ориентации. Следовательно, учитывая также (53), истинные $\mathbf{e}^p, \boldsymbol{D}^p$ могут быть получены нормировкой $\tilde{\mathbf{e}}^p$ и $\tilde{\boldsymbol{D}}^p$ – пластических деформаций и поляризаций, найденных из уравнений $(52)_3$ в предположении отсутствия насыщения. Пусть

$$\boxed{\mathbf{e}^p = \frac{\tilde{\mathbf{e}}^p}{\sqrt{\tilde{\Upsilon}+1}}; \quad \boldsymbol{D}^p = \frac{\tilde{\boldsymbol{D}}^p}{\sqrt{\tilde{\Upsilon}+1}}.} \tag{54}$$

где

$$\tilde{\Upsilon} = \Upsilon\left(\tilde{\mathbf{e}}^p, \tilde{\boldsymbol{D}}^p\right),$$

а $\tilde{\mathbf{e}}^p$ и $\tilde{\boldsymbol{D}}^p$ – пластические деформации и поляризация, найденные из уравнений $(52)_3$.

Нетрудно убедиться, что при этом

$$\Upsilon\left(\mathbf{e}^p, \boldsymbol{D}^p\right) \equiv 0.$$

Нахождение усилий $\mathbf{s}^s$, $\boldsymbol{E}^s$ теперь не является необходимым.

Тензоры касательных модулей

Тензорами континуальных касательных (тангенциальных) модулей называются коэффициенты ${}^4\boldsymbol{S}^t$, ${}^3\boldsymbol{d}^t$, $\boldsymbol{k}^t$ в уравнениях, связывающих скорости напряжений и деформаций. В случае «мягкого» нагружения (I форма определяющих уравнений) эти уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\boldsymbol{S}^t \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{E}} \cdot {}^3\boldsymbol{d}^t \\ \dot{\boldsymbol{D}} = {}^3\boldsymbol{d}^t \cdot\cdot\, \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{k}^t \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \end{cases} \tag{55}$$

Тензоры тангенциальных модулей образуют матрицу тангенциальных модулей, используемую при решении конечно-элементных уравнений методом Ньютона-Рафсона:

$$G = \begin{bmatrix} {}^4\boldsymbol{S}^t & {}^3\boldsymbol{d}^{t\,T} \\ {}^3\boldsymbol{d}^t & \boldsymbol{k}^t \end{bmatrix}$$

Строго говоря, при решении КЭ уравнений предпочтительнее использовать согласованную матрицу касательных модулей, учитывающую дискретизацию

дифференциальных уравнений при использовании явной или неявной схем интегрирования, и обеспечивающую более высокий порядок точности метода [53]. Однако нахождение континуальной касательной матрицы является более простым. При уменьшении шага дискретизации $\overline{G} \to G$, где $\overline{G}$ – согласованная матрица касательных модулей. Согласованная касательная матрица феноменологической модели Ч.Ландиса [24] найдена А. С. Семеновым в [33]. Используя изложенный в [33] подход можно получить выражение и для согласованной касательной матрицы реологической модели.

В упругом материале тензоры касательных модулей совпадают с тензорами упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических модулей. Если материал линейно упругий, то эти тензоры постоянны. В неупругом материале ${}^4\boldsymbol{S}^t$, ${}^3\boldsymbol{d}^t$, $\boldsymbol{k}^t$ зависят от текущего состояния.

В рассматриваемой модели выражения для касательных модулей изменяются как в момент перехода из одного состояние в другое, так и в рамках текущего состояния.

В первой (линейной) фазе в силу уравнений (45)

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{S}^t &= {}^4\mathbf{S}^0 \\
{}^3\mathbf{d}^t &= {}^3\mathbf{d}^0 \\
\mathbf{k}^t &= \mathbf{k}^0
\end{aligned}
$$

Во второй («пластической») фазе из уравнений $(52)_1$ – $(52)_3$, а также с учетом

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}^p \cdot\cdot \mathbf{s} &= \mathbf{s}^p \cdot\cdot \boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{e}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}^p
\end{aligned}
$$

касательные модули записываются в виде

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{S}^t &= {}^4\mathbf{S}^0 + \frac{1}{\alpha}\frac{9}{\sigma_1^4}\mathbf{s}^p\mathbf{s}^p \\
{}^3\mathbf{d}^t &= {}^3\mathbf{d}^0 + \frac{1}{\alpha}\frac{6}{\sigma_1^2 E_1^2}\boldsymbol{E}^p\mathbf{s}^p \\
\mathbf{k}^t &= \mathbf{k}^0 + \frac{1}{\alpha}\frac{4}{E_1^4}\boldsymbol{E}^p\boldsymbol{E}^p
\end{aligned}
$$

В третьей фазе (фазе «насыщения») деформации и электрическая индукция определяются уравнениями (54), которые удовлетворяют уравнению (46) поверхности насыщения

$$
\frac{\mathbf{e}^p \cdot\cdot \mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2} + \frac{\boldsymbol{D}^p \cdot \boldsymbol{D}^p}{P_1^2} = 1.
$$

или

$$
\hat{\mathbf{e}} \cdot\cdot \hat{\mathbf{e}} + \hat{\boldsymbol{D}} \cdot \hat{\boldsymbol{D}} = 1, \tag{56}
$$

где введены нормированные остаточные деформации и поляризация

$$
\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1}, \quad \hat{\boldsymbol{D}} = \frac{\boldsymbol{D}^p}{P_1}. \tag{57}
$$

Уравнение (56) – уравнение единичной сферы с центром в нуле. Нормаль к поверхности сферы определяется гипервектором N:

$$\mathrm{N} = \left(\hat{\mathbf{e}} \quad \hat{\boldsymbol{D}}\right)^T. \tag{58}$$

Скорости $\dot{\hat{\mathbf{e}}}^p$, $\dot{\hat{\boldsymbol{D}}}^p$ изменения нормированных остаточных деформаций и поляризации в силу (54) будут равны проекции на плоскость, касательную к сфере, нормированных скоростей $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}^p$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{D}}}^p$, вычисленных в предположении «пластического» деформирования и отсутствия «насыщения» по уравнениям $(52)_3$ (Рис. 21). Из (58) следует, что проектором на эту плоскость будет оператор

$$\left[\mathbf{I} - \mathrm{N}\mathrm{N}\right] = \begin{bmatrix} {}^4\mathbf{1} - \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} & -\hat{\mathbf{e}}\hat{\boldsymbol{D}} \\ -\hat{\boldsymbol{D}}\hat{\mathbf{e}} & {}^2\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{D}}\hat{\boldsymbol{D}} \end{bmatrix},$$

а значит

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{e}}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{D}}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} {}^4\mathbf{1} - \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} & -\hat{\mathbf{e}}\hat{\boldsymbol{D}} \\ -\hat{\boldsymbol{D}}\hat{\mathbf{e}} & {}^2\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{D}}\hat{\boldsymbol{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^p \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{D}}}^p \end{pmatrix}.$$

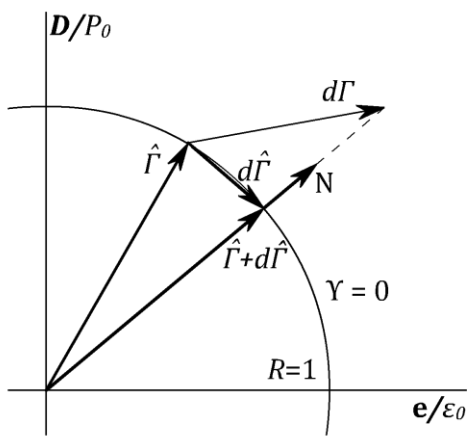

Рис. 21. Нахождение скоростей деформаций в фазе «насыщения»

С учетом $(52)_3$ и (57) скорости изменения остаточной деформации и поляризации в фазе «насыщения» принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^p &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p\cdot\cdot\dot{\mathbf{s}} + \frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right) \\ \dot{\boldsymbol{D}}^p &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p\cdot\cdot\dot{\mathbf{s}} + \frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right) \end{aligned}. \tag{59}$$

Из (59), $(52)_1$ и $(52)_2$ легко найти ${}^4\mathbf{S}^t$ и $\mathbf{k}^t$

$$
{}^4\mathbf{S}^t = {}^4\mathbf{S}^0 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p
$$

$$
\mathbf{k}^t = \mathbf{k}^0 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p
$$

Нахождение ${}^3\mathbf{d}^t$ также не вызывает проблем. Однако уравнения в скоростях уже не могут быть записаны в виде (55). Это следует из уравнений (59): коэффициент при $\dot{\boldsymbol{E}}$ в первом уравнении (59) не равен транспонированному коэффициенту при $\dot{\mathbf{s}}$ во втором уравнении. Таким образом

$$
\begin{aligned}
{}^3\mathbf{d}_D^{\mathbf{t}} &= {}^3\mathbf{d}^0 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p \\
{}^3\mathbf{d}_e^{\mathbf{t}} &= {}^3\mathbf{d}^0 + \frac{1}{\alpha}\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right),
\end{aligned}
\tag{60}
$$

т. е., матрица тангенциальных модулей, вообще говоря, не является симметричной. Возможно, в случае выбора определения элемента «зазор» в виде, удовлетворяющем принципу максимума диссипации, т. е. в виде (41), удастся обеспечить симметричность матрицы тангенциальных модулей.

В случае одноосного нагружения ${}^3\mathbf{d}_D^{\mathbf{t}} \approx {}^3\mathbf{d}_e^{\mathbf{t}}$, причем разница заметна только в течение быстро затухающего переходного процесса сразу после начала фазы «насыщения» (см. IV.2.ii).

ii. Нагружение электрическим смещением и механическими деформациями («жесткое нагружение»)

В п. III.i сделаны предположения о том, что

$$
\begin{aligned}
{}^3\mathbf{h}^0 &\equiv \mathbf{0}, \\
{}^4\mathbf{C}^0 &= const, \\
\boldsymbol{\beta}^0 &= const.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Здесь для облегчения выкладок эти предположения учтены. При необходимости не сложно получить уравнения в общем виде.

При «жестком» нагружении, соответствующей III форме определяющих уравнений, материал также последовательно проходит три состояния.

В линейной фазе будет

$$
\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}^0\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{D}^e\cdot{}^3\mathbf{h}^0, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h}^0\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}^0\cdot\boldsymbol{D}. \end{cases}}
$$

т. к. лишь элемент «0» является активным.

В фазе накопления остаточных деформаций и поляризации будет

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) - \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p\right) \cdot {}^3\mathbf{h}^0, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) + \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p\right). \end{cases} \tag{62}$$

Девиатор тензора напряжений будет

$$\mathbf{s} = dev\,\boldsymbol{\sigma} = dev\left\{{}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) - \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p\right) \cdot {}^3\mathbf{h}^0\right\} = dev\left\{{}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right)\right\} =$$
$$= {}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) - \frac{1}{3}{}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) \cdot\cdot \mathbf{11} = \left({}^4\mathbf{C}^0 - \frac{1}{3}\mathbf{11} \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^0\right) \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) = {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right).$$

Учитывая $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{e}^p$,

$$\mathbf{s} = {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^p\right).$$

Дифференцирование полученного уравнения дает

$$\dot{\mathbf{s}} = {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\mathbf{e}}^p\right)$$

Аналогичное уравнение для электрических компонентов:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\dot{\boldsymbol{D}} - \dot{\boldsymbol{D}}^p\right)$$

По аналогии с уравнением (51) с учетом (61) несложно получить

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i} \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{D}}\right),$$

где

$$\alpha =$$
$$= \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} \cdot\cdot \left[{}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} + {}^4\mathbf{C}^p_{dev} \cdot\cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} + \left(\frac{\partial^4 \mathbf{C}^p_{dev}}{\partial \boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p}\right) \cdot\cdot \mathbf{e}^p - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} \cdot {}^3\mathbf{h}^p_{dev} - \boldsymbol{D}^p \cdot \left(\frac{\partial^3 \mathbf{h}^p_{dev}}{\partial \boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} \cdot \left[\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} - {}^3\mathbf{h}^p \cdot\cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} - \left(\frac{\partial^3 \mathbf{h}^p}{\partial \boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p}\right) \cdot\cdot \mathbf{e}^p + \boldsymbol{\beta}^p \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\beta}^p}{\partial \boldsymbol{D}^p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p}\right) \cdot \boldsymbol{D}^p\right]\right\}$$

Следовательно, скорости изменения пластических деформаций и поляризации будут

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{D}}\right), \\ \dot{\boldsymbol{D}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^p} \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^p} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{D}}\right). \end{cases} \tag{63}$$

Уравнения (62), (63) определяют поведение материала в фазе накопления остаточных деформаций и поляризации.

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) - \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p\right) \cdot {}^3\mathbf{h}^0, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) + \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^p\right). \end{cases} \quad (62)_1}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{C}^0_{dev}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\cdot\boldsymbol{\beta}^0\cdot\dot{\boldsymbol{D}}\right), \\ \dot{\boldsymbol{D}}^p = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{C}^0_{dev}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\cdot\boldsymbol{\beta}^0\cdot\dot{\boldsymbol{D}}\right). \end{cases} \qquad (64)_2$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^p &= \mathbf{s} - {}^4\mathbf{C}^p_{dev}\cdot\cdot\,\mathbf{e}^p + \boldsymbol{D}^p\cdot{}^3\mathbf{h}^p_{dev}, \\ \boldsymbol{E}^p &= \boldsymbol{E} + {}^3\mathbf{h}^p\cdot\cdot\,\mathbf{e}^p - \boldsymbol{\beta}^p\cdot\boldsymbol{D}^p \end{aligned} \qquad (62)_3$$

$$\alpha = \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p}\cdot\cdot\left[{}^4\mathbf{C}^0_{dev}\cdot\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} + {}^4\mathbf{C}^p_{dev}\cdot\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} + \left(\frac{\partial^4\mathbf{C}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right)\cdot\cdot\,\mathbf{e}^p - \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\cdot{}^3\mathbf{h}^p_{dev} - \boldsymbol{D}^p\cdot\left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\cdot\left[\boldsymbol{\beta}^0\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} - {}^3\mathbf{h}^p\cdot\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^p} - \left(\frac{\partial^3\mathbf{h}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right)\cdot\cdot\,\mathbf{e}^p + \boldsymbol{\beta}^p\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p} + \left(\frac{\partial\boldsymbol{\beta}^p}{\partial\boldsymbol{D}^p}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^p}\right)\cdot\boldsymbol{D}^p\right]\right\}$$

$$(62)_4$$

В фазе насыщения, аналогично уравнениям (59):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^p &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{C}^0_{dev}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\cdot\cdot\,\boldsymbol{\beta}^0\cdot\dot{\boldsymbol{D}}\right) \\ \dot{\boldsymbol{D}}^p &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{C}^0_{dev}\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\cdot\cdot\,\boldsymbol{\beta}^0\cdot\dot{\boldsymbol{D}}\right) \end{aligned}. \qquad (65)$$

Тензоры касательных модулей

В рассматриваемом случае «жесткого» нагружения (III форма определяющих уравнений) уравнения в скоростной форме запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathbf{C}^t\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{D}}\cdot{}^3\mathbf{h}^t, \\ \dot{\boldsymbol{E}} = -{}^3\mathbf{h}^t\cdot\cdot\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\beta}^t\cdot\dot{\boldsymbol{D}}. \end{cases} \qquad (66)$$

Тензоры континуальных тангенциальных модулей определяются из уравнений ((62) – (65)) аналогично тому, как это было сделано в случае «мягкого» нагружения.

В линейной фазе:

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{C}^t &= {}^4\mathbf{C}^0 \\ {}^3\mathbf{h}^t &= {}^3\mathbf{h}^0 \\ \boldsymbol{\beta}^t &= \boldsymbol{\beta}^0 \end{aligned}$$

В «пластической» фазе:

$$
{}^4\mathbf{C}^t = {}^4\mathbf{C}^0 - \frac{1}{\alpha}\frac{9}{\sigma_1^4}\,{}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \mathbf{s}^p\mathbf{s}^p \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C}^0_{dev}
$$

$$
{}^3\mathbf{d}^t = -\frac{1}{\alpha}\frac{6}{\sigma_1^2 E_1^2}\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \boldsymbol{E}^p\mathbf{s}^p \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^0_{dev}
$$

$$
\boldsymbol{\beta}^t = \boldsymbol{\beta}^0 - \frac{1}{\alpha}\frac{4}{E_1^4}\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \boldsymbol{E}^p\boldsymbol{E}^p \cdot \boldsymbol{\beta}^0
$$

В фазе «насыщения»:

$$
{}^4\mathbf{C}^t = {}^4\mathbf{C}^0 - \frac{1}{\alpha}\frac{3}{\sigma_1^2}\,{}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\mathbf{s}^p \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C}^0_{dev}
$$

$$
\boldsymbol{\beta}^t = \boldsymbol{\beta}^0 - \frac{1}{\alpha}\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\boldsymbol{E}^p \cdot \boldsymbol{\beta}^0
$$

$$
{}^3\mathbf{d}^{\mathbf{t}}_D = -\frac{1}{\alpha}\frac{3}{\sigma_1^2}\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\boldsymbol{D}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)\mathbf{s}^p \cdot\cdot {}^4\mathbf{C}^0_{dev}
$$

$$
{}^3\mathbf{d}^{\mathbf{t}}_e = -\frac{1}{\alpha}\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p \cdot \boldsymbol{\beta}^0\,{}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\mathbf{e}^p}{\varepsilon_1^2}\cdot\cdot\frac{3}{\sigma_1^2}\mathbf{s}^p - \frac{\mathbf{e}^p\boldsymbol{D}^p}{P_1^2}\cdot\frac{2}{E_1^2}\boldsymbol{E}^p\right)
$$

Как и в случае «мягкого» нагружения, тензоры, отвечающие перекрестным слагаемым в уравнениях (66) различны в каждом из уравнений.

В случаях, когда определяющие уравнения необходимо задать во II форме

$$
\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}\},
$$
$$
\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}\}.
$$

или в IV форме

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}\},
$$
$$
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}\}.
$$

необходимо комбинировать формулы, полученные в пп. III.4.i и III.4.ii. Такая необходимость может возникнуть, например, при постановке задачи с использованием скалярного потенциала (см. (8)). При этом используется II форма определяющих уравнений.

5. Сложная многоповерхностная реологическая модель

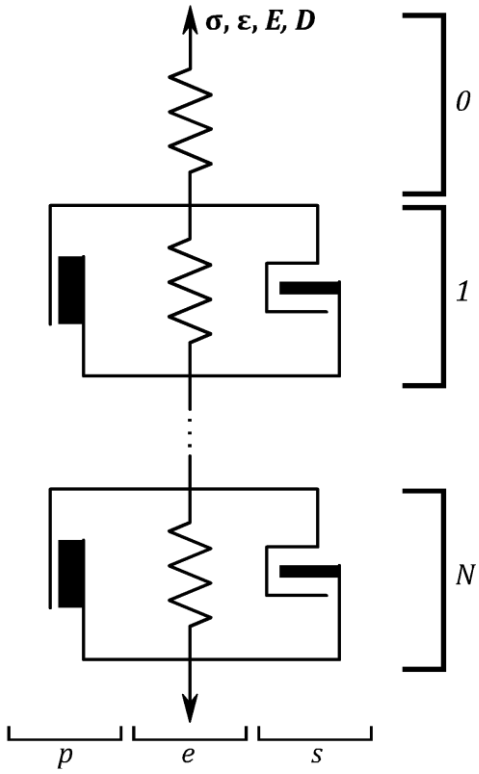

Рис. 22. Схема сложной многоповерхностной реологической модели

Особенностью многоповерхностной модели является возможность одновременной работы нескольких пластических звеньев в том или ином режиме.

При этом оказывается, что уравнения, определяющие каждое из звеньев модели, являются перевязынными, то есть требующими совместного решения. Исключением является случай задания внешней нагрузки в виде поля $\boldsymbol{E}$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ (соответствует «мягкому» нагружению и I форме определяющих уравнений). В этом случае в модели с несколькими звеньями будут выполняться уравнения, аналогичные уравнениям (52), с тем лишь изменением, что суммирование деформаций будет происходить по всем звеньям. То есть вместо $(52)_1$ будет

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}^i,$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^e + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{D}^i,$$

где N – количество всех нелинейных звеньев. Остальные уравнения (52) остаются верными с точностью до замены индекса p на индекс i.

В случае «жесткого» нагружения вместо (62) нужно будет писать

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}^i \right) - \left(\boldsymbol{D} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{D}^i \right) \cdot {}^3\mathbf{h}^0, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h}^0 \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}^i \right) + \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{D}^i \right). \end{cases}$$

Для упрощения выкладок далее принимаем тензоры ${}^4\mathbf{C}^0$, ${}^3\mathbf{h}^0, \boldsymbol{\beta}^0$ в виде (61). Дифференцирование и переход к девиаторам дают при этом

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{e}}^i \right), \\ \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\dot{\boldsymbol{D}} - \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{D}}^i \right). \end{cases}$$

Усилия в пластических элементах выражаются аналогично (48) и (49):

$$\mathbf{s}^i = \mathbf{s} - {}^4\mathbf{C}^i_{dev} \cdot\cdot \mathbf{e}^i + \boldsymbol{D}^i \cdot {}^3\mathbf{h}^i_{dev},$$

$$\boldsymbol{E}^i = \boldsymbol{E} + {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i - \boldsymbol{\beta}^i \cdot \boldsymbol{D}^i$$

Уравнения, аналогичные (50), в случае модели с N нелинейными звеньями, будет

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i} \cdot\cdot \Bigg[{}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \cdot\cdot \sum_{k=1}^{N} \dot{\lambda}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^k} - \\ - {}^4\mathbf{C}^i_{dev} \cdot\cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i} - \left(\frac{\partial {}^4\mathbf{C}^i_{dev}}{\partial \boldsymbol{D}^i} \cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \right) \cdot\cdot \mathbf{e}^i + \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \cdot {}^3\mathbf{h}^i_{dev} + \boldsymbol{D}^i \cdot \left(\frac{\partial {}^3\mathbf{h}^i_{dev}}{\partial \boldsymbol{D}^i} \cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \right) \Bigg] + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \cdot \Bigg[\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{D}} - \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \sum_{k=1}^{N} \dot{\lambda}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^k} + \\ + {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i} + \left(\frac{\partial {}^3\mathbf{h}^i}{\partial \boldsymbol{D}^i} \cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \right) \cdot\cdot \mathbf{e}^i - \boldsymbol{\beta}^i \cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\beta}^p}{\partial \boldsymbol{D}^i} \cdot \dot{\lambda}^i \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i} \right) \cdot \boldsymbol{D}^i \Bigg] = 0, \\ i = \overline{1, N} \end{gathered} \tag{67}$$

(67) – система из N уравнений относительно $\dot{\lambda}^i$, $i = \overline{1, N}$, аналитическое решение которой громоздко и не нужно. В п. IV.1 $\dot{\lambda}^i$ отыскиваются приближенно из решения совместной системы относительно дискретных аналогов $\dot{\lambda}^i, \dot{\mathbf{e}}^i, \dot{\boldsymbol{D}}^i, i = \overline{1, N}$.

6. Тензоры упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей

i. Вид электроупругих тензоров

Каждый линейный элемент в сложных моделях определяется набором трех тензоров: ${}^4\mathbf{C}, {}^3\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta}$, характеризующих соответственно упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические свойства.

$BaTiO_3$ в сегнетоэлектрической фазе – трансверсально изотропный материал с тетрагональной кристаллической решеткой (см. Рис. 1). Такое строение характерно большому числу сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков с тетрагональной фазой. В соответствии с этим матрица жесткости, соответствующая тензорам ${}^4\mathbf{C}, {}^3\mathbf{h}, \boldsymbol{\beta}$ имеет вид, изображенный схематически на Рис. 23.

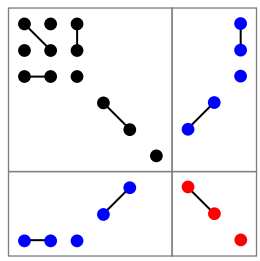

Рис. 23. Матрица упруго-электрических модулей. | - равенство компонентов, • - ненулевой компонент.

При рассмотрении достаточно большого объема поликристаллического материала распределение монокристаллов в поликристалле можно считать непрерывным по направлениям. Пьезоэлектрические свойства такого материала зависят от направления и интенсивности суммарной остаточной поляризации $\boldsymbol{D}^r$. В [24, 18, 22] используется представление

$$ {}^3\mathbf{d} = \frac{\left|\boldsymbol{D}^r\right|}{P^0}\left[d_{33}\boldsymbol{nnn} + d_{31}\boldsymbol{n}(\mathbf{1}-\boldsymbol{nn}) + \frac{d_{15}}{2}\left(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{nnn} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{nn})\boldsymbol{n}\right)\right], \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{D}^r}{\left|\boldsymbol{D}^r\right|} \tag{68} $$

где P^0 соответствует значению $\left|\boldsymbol{D}^r\right|$ в состоянии насыщения.

В методе реологических моделей классически принято использовать постоянные значения упругих свойств линейного элемента. Зависимость тензора ${}^3\mathbf{d}$ от направления поляризации, однако, является принципиально важной, поэтому предлагается для нахождения ${}^3\mathbf{d}$ использовать формулу

$$ {}^3\mathbf{d} = \left[d_{33}\boldsymbol{nnn} + d_{31}\boldsymbol{n}(\mathbf{1}-\boldsymbol{nn}) + \frac{d_{15}}{2}\left(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{nnn} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{nn})\boldsymbol{n}\right)\right], \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{D}}{\left|\boldsymbol{D}\right|} \tag{69} $$

не содержащую зависимости от интенсивности поляризации. Тензор пьезоэлектрических модулей ${}^3\mathbf{d}$ индивидуален для каждого линейного элемента, входящего в модель, то есть

$$ {}^{3}\mathbf{d}^{i} = {}^{3}\mathbf{d}^{i}\left(\boldsymbol{n}^{i}\right), \qquad \boldsymbol{n}^{i} = \frac{\boldsymbol{D}^{i}}{\left|\boldsymbol{D}^{i}\right|} $$

где $\boldsymbol{D}^{i}$ – вектор электрического смещения i-го звена, ${}^{3}\mathbf{d}^{i}$ – тензор пьезоэлектрических модулей этого звена.

Использование представления (69) имеет определенные недостатки. При обращении в ноль модуля диэлектрического смещения $\left|\boldsymbol{D}\right|$ тензор ${}^{3}\mathbf{d}$ оказывается неопределенным. Доопределение ${}^{3}\mathbf{d}$ при $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ не позволяют избежать скачка значений компонентов тензора ${}^{3}\mathbf{d}$ на противоположные при изменении направления вектора $\boldsymbol{D}$ на 180 градусов (что возможно, например, при прохождении $\boldsymbol{D}$ через ноль). Такая ситуация неизбежна, в частности, при одноосном циклическом нагружении материала электрическим полем.

Скачок значений компонентов тензора ${}^{3}\mathbf{d}$ приводит также к скачку макропараметров, особенно проявляющемуся в моделях с несколькими нелинейными звеньями (многоповерхностных моделях) или в случае комбинированного электромеханического нагружения. Явная схема Эйлера интегрирования определяющих уравнений при скачке компонент тензора ${}^{3}\mathbf{d}$ сходится лишь в узком диапазоне параметров, что требует использования неявных численных схем.

Определение ${}^{3}\mathbf{d}$ в форме (68) лишено отмеченного недостатка, однако не соответствует идеологии кусочно-линейной аппроксимации гистерезисных зависимостей, свойственную для метода реологических моделей. В расчетах, результаты которых приведены ниже, используется представление (69).

Упругие и диэлектрические свойства материала не зависят ни от интенсивности поляризации, ни от ее направления, поэтому принимается

$$ {}^{4}\mathbf{S} = const $$
$$ \boldsymbol{\kappa} = const. $$

Структура тензоров ${}^{4}\mathbf{S}, \boldsymbol{\kappa}$ схематически представлена на Рис. 23.

Для упрощения аналитических выкладок в сложной реологической модели предполагается

$$ {}^{3}\mathbf{d}^{0} = \mathbf{0}. \tag{70} $$

Для удобства задания тензоров, характеризующих различные звенья модели, предполагается

$$ \begin{aligned} {}^{4}\mathbf{S}^{i} &= s_{i}\,{}^{4}\mathbf{S}^{0} \\ \boldsymbol{\kappa}^{i} &= k_{i}\,\boldsymbol{\kappa}^{0} \\ {}^{3}\mathbf{d}^{i} &= d_{i}\,{}^{3}\tilde{\mathbf{d}}^{e} \end{aligned} \tag{71} $$

Где ${}^{3}\tilde{\mathbf{d}}^{e}$ – тензор, характеризующий форму пьезоэлектрических тензоров нелинейных звеньев. В расчетах, результаты которых изложены ниже ${}^{3}\tilde{\mathbf{d}}^{e}$ задан в виде (69). При необходимости моделировать поликристалл с различной ориентацией монокристаллов, можно задать тензоры ${}^{4}\mathbf{S}^{p}$, $\boldsymbol{\kappa}^{p}$ независимо.

После задания упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических тензоров в форме ${}^4\mathbf{S}$, ${}^3\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\kappa}$ они могут быть единственным образом пересчитаны в тензоры ${}^4\mathbf{C}$, ${}^3\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\beta}$ (см. п.III.6.ii). Использование формы I при определении тензоров связана, в первую очередь, с непостоянностью ${}^3\mathbf{d}$ и необходимостью вычислять этот тензор в виде (69).

Задание тензоров ${}^4\mathbf{C}$, ${}^3\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\beta}$ в том или ином виде является открытым вопросом и, конечно, эти тензоры могут быть заданы способом, отличным от приведенного в данном параграфе. Возможно, удастся найти способ задания тензора ${}^3\mathbf{h}$ лишенный описанных недостатков и не требующий пересчета из I формы в III.

ii. Формулы пересчета модулей

В п.III.6.i заданы тензоры модулей податливости ${}^4\mathbf{S}$, ${}^3\mathbf{d}$, $\boldsymbol{\kappa}$, характеризующие линейный элемент, определенный в форме I, тогда как всюду используется определение линейного элемента в форме III, требующее задание тензоров модулей жесткости ${}^4\mathbf{C}$, ${}^3\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\beta}$.

Можно получить формулы, позволяющие однозначно выражать одни модули через другие [33, 16]:

Форма	определяющих уравнений	Модули	Формулы пересчета
I	$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D})$	${}^4\boldsymbol{S}^E, {}^3\boldsymbol{d}, \boldsymbol{k}^\sigma$	$\boldsymbol{k}^\sigma = \boldsymbol{\beta}^{\sigma^{-1}}$ ${}^3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{k}^\sigma \cdot {}^3\boldsymbol{g}$ ${}^4\boldsymbol{S}^E = {}^4\boldsymbol{S}^D + {}^3\boldsymbol{g}^T \cdot {}^3\boldsymbol{d}$
II	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D})$	${}^4\boldsymbol{C}^E, {}^3\boldsymbol{e}, \boldsymbol{k}^\varepsilon$	${}^4\boldsymbol{C}^E = {}^4\boldsymbol{S}^{E^{-1}}$ ${}^3\boldsymbol{e} = {}^3\boldsymbol{d} \cdot\cdot {}^4\boldsymbol{C}^E$ $\boldsymbol{k}^\varepsilon = \boldsymbol{k}^\sigma - {}^3\boldsymbol{d} \cdot\cdot {}^3\boldsymbol{e}^T$
III	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E})$	${}^4\boldsymbol{C}^D, {}^3\boldsymbol{h}, \boldsymbol{\beta}^\varepsilon$	$\boldsymbol{\beta}^\varepsilon = \boldsymbol{k}^{\varepsilon^{-1}}$ ${}^3\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \cdot {}^3\boldsymbol{e}$ ${}^4\boldsymbol{C}^D = {}^4\boldsymbol{C}^E + {}^3\boldsymbol{e}^T \cdot {}^3\boldsymbol{h}$
IV	$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E})$	${}^4\boldsymbol{S}^D, {}^3\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\beta}^\sigma$	${}^4\boldsymbol{S}^D = {}^4\boldsymbol{C}^{D^{-1}}$ ${}^3\boldsymbol{g} = {}^3\boldsymbol{h} \cdot\cdot {}^4\boldsymbol{S}^D$ $\boldsymbol{\beta}^\sigma = \boldsymbol{\beta}^\varepsilon - {}^3\boldsymbol{h} \cdot\cdot {}^3\boldsymbol{g}^T$

Всюду в данной работе обозначено:

$$ {}^4\mathbf{S}^E = {}^4\mathbf{S}, \quad \boldsymbol{\kappa}^\sigma = \boldsymbol{\kappa}, \quad {}^4\mathbf{C}^D = {}^4\mathbf{C}, \quad \boldsymbol{\beta}^\varepsilon = \boldsymbol{\beta}. $$

iii. Вычисление производных от электроупругих тензоров

В формулах (52), (64), (67) в связи с тем, что ${}^3\mathbf{d}^i = {}^3\mathbf{d}^i(\boldsymbol{D}^i)$, ненулевыми являются производные пьезоэлектрических тензоров $\mathbf{h}^i$, $\mathbf{h}^i_{dev}$ по $\boldsymbol{D}^i$.

Так как определения линейных элементов равноправны в формах I, II, III или IV, то при ${}^4\mathbf{S}^i = const, \boldsymbol{\kappa}^i = const$ также верным является ${}^4\mathbf{C}^i = const, \boldsymbol{\beta}^i = const$, а значит производные этих тензоров по $\boldsymbol{D}^i$ равны нулю.

Таким образом, пользуясь формулой (69) необходимо найти $\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{D}}$.

Производная произведения тензоров второго ранга по вектору

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial(A_{ij}B_{kl})}{\partial D_n}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_n = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial D_n}B_{kl} + A_{ij}\frac{\partial B_{kl}}{\partial D_n}\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\boldsymbol{e}_n = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D_n}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{e}_n + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{D}}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D_n}\cdot\mathbf{B}\boldsymbol{e}_n + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{D}}}$$

Производная тензора, обратного тензору второго ранга, по вектору

$$\frac{\partial \mathbf{1}}{\partial \boldsymbol{D}} = \mathbf{0} = \frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1})}{\partial \boldsymbol{D}} \overset{(1)}{=} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D_n}\cdot\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{e}_n + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \boldsymbol{D}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \boldsymbol{D}} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D_n}\cdot\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{e}_n}$$

Производная произведения тензоров по скаляру

Пусть ${}^n\mathbf{A}*{}^m\mathbf{B}$ – любое произведение тензоров любых рангов. Тогда

$$\frac{\partial({}^n\mathbf{A}*{}^m\mathbf{B})}{\partial D_i} = \frac{\partial(A_{j_1\ldots j_n}B_{k_1\ldots k_m})}{\partial D_i}\boldsymbol{e}_{j_1}\ldots\boldsymbol{e}_{j_n}*\boldsymbol{e}_{k_1}\ldots\boldsymbol{e}_{k_m} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_{j_1\ldots j_n}}{\partial D_n}B_{k_1\ldots k_m} + A_{j_1\ldots j_n}\frac{\partial B_{k_1\ldots k_m}}{\partial D_n}\right)\boldsymbol{e}_{j_1}\ldots\boldsymbol{e}_{j_n}*\boldsymbol{e}_{k_1}\ldots\boldsymbol{e}_{k_m} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D_i}*\mathbf{B} + \mathbf{A}*\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial D_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial({}^n\mathbf{A}*{}^m\mathbf{B})}{\partial D_i} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial D_i}*\mathbf{B} + \mathbf{A}*\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial D_i}}$$

Производная тензора пьезоэлектрических модулей в первой форме ${}^3\mathbf{d}$

В компонентной форме тензор ${}^3\mathbf{d} = d_{kij}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ определяется соотношением

$$d_{kij} = d_{33}n_k n_i n_j + d_{31}n_k\alpha_{ij} + \frac{1}{2}d_{15}(n_i\alpha_{jk} + n_j\alpha_{ik}),$$

где

$$n_i = \frac{D_i}{D} = \frac{D_i}{\sqrt{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{D}}}, \qquad \alpha_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j.$$

Производные компонентов вычисляются по формулам

$$\frac{\partial n_i}{\partial D_j} = \frac{\partial}{\partial D_j}\left(\frac{D_i}{D}\right) = \frac{\delta_{ij}D - (1/D)D_jD_i}{D^2} = \frac{\delta_{ij}}{D} - \frac{n_i n_j}{D} = \frac{\alpha_{ij}}{D}$$

$$\boxed{\frac{\partial n_i}{\partial D_j} = \frac{\alpha_{ij}}{D}}$$

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial D_n} = \frac{\partial\left(\delta_{ij} - n_i n_j\right)}{\partial D_n} = 0 - \frac{\partial n_i n_j}{\partial D_n} = -\frac{\partial n_i n_j}{\partial D_n} = -\frac{1}{D}\left[n_i \alpha_{jn} + \alpha_{in} n_j\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial D_n} = -\frac{1}{D}\left[n_i \alpha_{jn} + \alpha_{in} n_j\right]}$$

$$\frac{\partial n_k n_i n_j}{\partial D_n} = \frac{1}{D}\left[\alpha_{kn} n_i n_j + n_k \alpha_{in} n_j + n_k n_i \alpha_{jn}\right]$$

$$\frac{\partial n_k \alpha_{ij}}{\partial D_n} = \frac{1}{D}\left[\alpha_{kn} \alpha_{ij} - n_k n_i \alpha_{jn} - n_k \alpha_{in} n_j\right]$$

$$\frac{\partial\left(n_i \alpha_{jk} + n_j \alpha_{ik}\right)}{\partial D_n} = \frac{1}{D}\left[\alpha_{in}\alpha_{jk} - n_i \alpha_{jn} n_k - n_i n_j \alpha_{kn} + \alpha_{jn}\alpha_{ik} - n_j \alpha_{in} n_k - n_j n_i \alpha_{kn}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial d_{kij}}{\partial D_n} = {} & \frac{d_{33}}{D}\left[\alpha_{kn} n_i n_j + n_k \alpha_{in} n_j + n_k n_i \alpha_{jn}\right] + \frac{d_{31}}{D}\left[\alpha_{kn}\alpha_{ij} - n_k \alpha_{in} n_j - n_k n_i \alpha_{jn}\right] + \\ & + \frac{d_{15}}{D}\left[\alpha_{in}\alpha_{jk} - n_i \alpha_{jn} n_k - n_i n_j \alpha_{kn} + \alpha_{jn}\alpha_{ik} - n_j \alpha_{in} n_k - n_j n_i \alpha_{kn}\right]\end{aligned}}$$

Вычисление $\dfrac{\partial^3 \mathbf{e}^T}{\partial D_n}$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{e}^T}{\partial D_n} = \frac{\partial\left({}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^4\mathbf{S}^{-1}\right)^T}{\partial D_n} = \frac{\partial\left(d_{ijk} C_{pqrs} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot\cdot \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q \boldsymbol{e}_r \boldsymbol{e}_s\right)^T}{\partial D_n} = \frac{\partial\left(d_{ijk} C_{pqrs}\left(\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot\cdot \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q\right)\boldsymbol{e}_r \boldsymbol{e}_s \boldsymbol{e}_i\right)}{\partial D_n} =$$

$$= \frac{\partial d_{ijk}}{\partial D_n} C_{pqrs}\left(\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot\cdot \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q\right)\boldsymbol{e}_r \boldsymbol{e}_s \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial d_{ijk}}{\partial D_n} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot\cdot {}^4\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{e}_i$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 \mathbf{e}^T}{\partial D_n} = \frac{\partial d_{ijk}}{\partial D_n} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot\cdot {}^4\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{e}_i}$$

Производная тензора диэлектрических модулей в третьей форме $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial\left(\mathbf{k} - {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T\right)^{-1}}{\partial \boldsymbol{D}} \overset{(2)}{=} -\left(\mathbf{k} - {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T\right)^{-1} \cdot \frac{\partial\left(\mathbf{k} - {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T\right)}{\partial D_n} \cdot \left(\mathbf{k} - {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T\right)^{-1} \boldsymbol{e}_n$$

$$= -\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial\left(\mathbf{k} - {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T\right)}{\partial D_n} \cdot \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial\left({}^3\mathbf{d} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T\right)}{\partial D_n} \cdot \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{e}_n \overset{(3)}{=} \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\frac{\partial^3 \mathbf{d}}{\partial D_n} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T + {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot \frac{\partial^3 \mathbf{e}^T}{\partial D_n}\right) \cdot \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{e}_n$$

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\frac{\partial^3 \mathbf{d}}{\partial D_n} \cdot\cdot {}^3\mathbf{e}^T + {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot \frac{\partial^3 \mathbf{e}^T}{\partial D_n}\right) \cdot \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{e}_n}$$

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial D_n} = \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\frac{\partial^3 \mathbf{d}}{\partial D_n} \cdot\cdot\, {}^3\mathbf{e}^T + {}^3\mathbf{d} \cdot\cdot \frac{\partial^3 \mathbf{e}^T}{\partial D_n} \right) \cdot \boldsymbol{\beta}}$$

Производная тензора пьезоэлектрических модулей во второй форме ${}^3\mathbf{e}$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial \left({}^3\mathbf{d} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{S}^{-1} \right)}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial d_{ijk}}{\partial D_n} C_{pqrs} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \cdot\cdot \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q \boldsymbol{e}_r \boldsymbol{e}_s \boldsymbol{e}_n = \frac{\partial\, {}^3\mathbf{d}}{\partial D_n} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{e}_n$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial\, {}^3\mathbf{d}}{\partial D_n} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{e}_n}$$

Производная тензора пьезоэлектрических модулей в третьей форме ${}^3\mathbf{h}$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial \left(\boldsymbol{\beta} \cdot {}^3\mathbf{e} \right)}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial \left(\beta_{ij}\, e_{klm} \right)}{\partial D_n} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n =$$

$$= \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial D_n} e_{klm} + \beta_{ij} \frac{\partial e_{klm}}{\partial D_n} \right) \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial D_n} \cdot {}^3\mathbf{e}\, \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{D}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{D}} = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial D_n} \cdot {}^3\mathbf{e}\, \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{D}}} \qquad (72)$$

IV. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКА

Задача интегрирования определяющих уравнений материала решается отдельно для каждой точки континуума и связана с интегрированием по времени.

Численные методы, используемые при решении нелинейных связанных электромеханических задач заимствованы из теории пластичности, что обусловлено схожестью определяющих уравнений в континуальной форме. При рассмотрении сегнетоэлектричества, однако, есть ряд особенностей, свойственных только связанным электромеханическим задачам, аналогов которым в пластичности нет. Свою специфику вносит также использование реологического подхода.

Основные отличия определяющих уравнений сегнетоэлектроэластиков, полученных методом реологических моделей, от уравнений пластического течения (для одноповерхностной модели) приведены в Таблице 2 (где N – число звеньев реологической модели)

Указанные особенности отражаются также на алгоритмах численного интегрирования определяющих уравнений.

Таблица 2. Сравнение характеристик определяющих уравнений сегнетоэлектроэластика и пластичного материала

	Сегнетоэлектроупругость	**Пластичность**
Структура переменных	Совокупность тензора и вектора (6 + 3 независимых компонентов)	Тензор (6 независимых компонентов)
Тензоры упруго-пластических модулей	Зависят от внутренних переменных	Постоянны
Эффект насыщения	+	-
Количество состояний	$3N$	2
Критерии переключения	Два критерия, определяются суммой нормы тензора и вектора	Один критерий, определяется нормой тензора

1. Модификация метода возвратных отображений

Для интегрирования определяющих уравнений сегнетоэлектроэластика, построенных на основе реологической модели, предлагается использовать модификацию *метода возвратных отображений*.

Метод возвратных отображений широко используется в пластичности, является неявным интегратором дифференциальных алгебраических уравнений, что обеспечивает ему свойство безусловной устойчивости. Метод возвратных отображений для решения задач сегнетоэлектроупругости был впервые предложен и успешно опробован в [33].

Классический метод возвратных отображений включает два этапа: упругий предиктор и пластический корректор. Модификация заключается в добавлении к этим двум этапам третьего, в результате чего каждый шаг интегрирования состоит из трех этапов:

- Упругий предиктор;
- Пластический корректор;
- Корректор насыщения.

На каждом шаге рассчитывается пробное упругое состояние, после чего проверяется выполнение условие перехода в пластическое состояние. Если условие не выполняется, значит переход в пластическое состояние не произошел, и результат предиктора является верным. Если же результат, предсказанный предиктором, выходит за поверхность нагружения (т. е. потенциал электромеханических переключений становится больше нуля), то результат предиктора не является верным, так как не может выполниться в действительности. В этом случае происходит переход к пластическому корректору, который использует результат предиктора в качестве начальных условий, и осуществляет наикратчайшую проекцию состояния на поверхность нагружения в пространстве напряжений. Далее происходит проверка критерия насыщения. Если состояние не удовлетворяет критерию насыщения (т. е. материал не находится в состоянии насыщения), то результат пластического корректора является правильным и не противоречит условиям, накладываемым включенным в модель элементом насыщения. Если же в результате работы пластического корректора состояние оказывается за пределами поверхности насыщения, то корректор насыщения осуществляет наикратчайшую проекцию на поверхность насыщения, но в пространстве деформаций.

Описанная схема позволяет удовлетворить и критерию пластичности, и критерию насыщения, не допустить запрещенных состояний, а также отследить момент выхода из состояния насыщения или пластичности.

Наиболее сложным в реализации и затратным при вычислениях этапом является пластический корректор. Пластический корректор подразумевает дискретизацию дифференциальных определяющих уравнений и решение полученной системы нелинейных алгебраических уравнений.

Для дискретизации уравнений используется неявный метод Эйлера, для решения системы алгебраических уравнений применяется метод Ньютона.

Ниже приводится алгоритм численного интегрирования определяющих уравнений сегнетоэлектроэластика, полученных с использованием реологической модели с N нелинейными звеньями (см. п.III.5) с учетом предположений, высказанных в п.III.6.i.

Над обозначениями переменных, соответствующих упругому предиктору, проставлены вогнутые черты (например $\breve{\boldsymbol{\sigma}}$). Переменные, соответствующие пластическому корректору отмечены тильдой (например $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$), однако это обозначение используется только в пунктах IV.1.iv, IV.1.v, где на основе предсказанных пластическим корректором величин устанавливается истинное состояние с учетом корректора насыщения. В пункте IV.1.iii, где принято предположение о пластическом характере деформирования (без насыщения) тильды опущены для упрощения без того громоздкой записи. Следует помнить, что истинное состояние материала устанавливается корректором насыщения, и нужно отличать значения переменных, соответствующих пластическому корректору, и корректору насыщения.

i. Упругий предиктор

Пусть

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}^k$$
$$\boldsymbol{D}^r = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{D}^k$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^r$, $\boldsymbol{D}^r$ – остаточные (remnant) деформации и поляризация, являющиеся суммой деформаций и поляризаций по всем нелинейным звеньям модели. По предположению предиктора эти величины остаются неизменными на данном шаге интегрирования, т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k = \boldsymbol{\varepsilon}_n^k$$
$$\boldsymbol{D}_{n+1}^k = \boldsymbol{D}_n^k$$

Тогда в зависимости от способа нагружения

$$\text{I} \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) \qquad \begin{cases} \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma} \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1} = \boldsymbol{E} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \qquad \begin{cases} \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^r\right) \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1} = \boldsymbol{E} \end{cases}$$

$$\text{III} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E}) \qquad \begin{cases} \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^r\right) \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_n^r\right) \end{cases}$$

$$\text{IV} \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{E}) \qquad \begin{cases} \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma} \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_n^r\right) \end{cases}$$

ii. Проверка условия пластичности

В выражение критерия пластичности (см. (38)) входят внутренние переменные, характеризующие усилия в пластическом элементе звена. Эти величины определяются из условия соединения:

$$\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^i &= \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - {}^4\mathbf{C}^i \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}_n^i + \boldsymbol{D}_n^i \cdot {}^3\mathbf{h}^i \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1}^i &= \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1} + {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}_n^i - \boldsymbol{\beta}^i \cdot \boldsymbol{D}_n^i \end{aligned} \tag{73}$$

Тензоры ${}^4\mathbf{C}^i$, ${}^3\mathbf{h}^i$, $\boldsymbol{\beta}^i$, вообще говоря, зависят от $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, $\boldsymbol{D}^i$. В рамках предиктора эти величины постоянны, а в дальнейшем индексы, характеризующие номер шага по времени, опускаются для удобства записи, т. е. предполагается

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{C}^i &\equiv {}^4\mathbf{C}^i_{n+1} = {}^4\mathbf{C}^i\left(\boldsymbol{\varepsilon}^i_{n+1}, \boldsymbol{D}^i_{n+1}\right)\\
{}^3\mathbf{h}^i &\equiv {}^3\mathbf{h}^i_{n+1} = {}^3\mathbf{h}^i\left(\boldsymbol{\varepsilon}^i_{n+1}, \boldsymbol{D}^i_{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\beta}^i &\equiv \boldsymbol{\beta}^i_{n+1} = \boldsymbol{\beta}^i\left(\boldsymbol{\varepsilon}^i_{n+1}, \boldsymbol{D}^i_{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Девиаторная часть выражения $(73)_1$ равна тензору $\breve{\mathbf{s}}^i_{n+1}$, который вместе с $\breve{\boldsymbol{E}}^i_{n+1}$ позволяют вычислить значение потенциала переключений

$$
\breve{\Phi}^i_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\breve{\mathbf{s}}^i_{n+1}\cdot\cdot\breve{\mathbf{s}}^i_{n+1}}{\sigma_i^2} + \frac{\breve{\boldsymbol{E}}^i_{n+1}\cdot\breve{\boldsymbol{E}}^i_{n+1}}{E_i^2} - 1
$$

Если $\breve{\Phi}^i_{n+1} < 0$, то результат, показанный предиктором, является истинным и

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \breve{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}\\
\boldsymbol{E}_{n+1} &= \breve{\boldsymbol{E}}_{n+1}\\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \breve{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}\\
\boldsymbol{D}_{n+1} &= \breve{\boldsymbol{D}}_{n+1}
\end{aligned}
$$

Если $\breve{\Phi}^i_{n+1} \geq 0$ для каких-либо $i = \overline{1, N}$, то для этих звеньев запускается пластический корректор. Пусть число таких звеньев равняется M, где $1 \leq M \leq N$. Во всех случаях, кроме задания нагружения в форме I, т. е. задания $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{E})$, пластический корректор является совместным для всех M звеньев, перешедших в пластическое состояния. Иными словами, требуется совместное решение системы уравнений, содержащей внутренние переменные различных звеньев модели.

iii. Пластический корректор

Когда материал находится в пластическом состоянии, его определяет система дифференциально-алгебраических уравнений. Для ее дискретизации используется неявный метод Эйлера, а для замыкания используется условие равенства нулю потенциала Φ в пластическом состоянии:

$$
\begin{cases}
\mathbf{e}^i_{n+1} = \mathbf{e}^i_n + \Delta\lambda^i_{n+1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^i_{n+1}}\\
\boldsymbol{D}^i_{n+1} = \boldsymbol{D}^i_n + \Delta\lambda^i_{n+1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^i_{n+1}}\\
\Phi^i_{n+1} = 0
\end{cases}
\tag{74}
$$

где $\Delta\lambda^i_{n+1} = \dot{\lambda}\Delta t_{n+1}$. Искомые величины $\mathbf{e}^i_{n+1}$ и $\boldsymbol{D}^i_{n+1}$ входят также в $\Delta\lambda^i_{n+1}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{s}^i_{n+1}}$ и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{E}^i_{n+1}}$, и, таким образом, заданы неявно. По этой причине возникает необходимость

итерационного поиска решения системы (74), для чего используется метод Ньютона. Пусть

$$\left\{ \ldots \quad \mathbf{r}^{\mathbf{e}^i}_{n+1} \quad \mathbf{r}^{\boldsymbol{D}^i}_{n+1} \quad r^{\Phi^i}_{n+1} \quad \ldots \right\}^T$$

– вектор невязки решений системы (74), то есть

$$\mathbf{r}^{\mathbf{e}^i}_{n+1} = -\mathbf{e}^i_{n+1} + \mathbf{e}^i_n + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}}$$
$$\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}^i}_{n+1} = -\boldsymbol{D}^i_{n+1} + \boldsymbol{D}^i_n + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}}$$
$$r^{\Phi^i}_{n+1} = \Phi^i_{n+1}$$

Варьирование уравнений (74) дает

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}^{\mathbf{e}^i}_{n+1} - \delta\mathbf{e}^i_{n+1} + \delta\Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\ 2}_{n+1}} \cdot\cdot\, \delta\mathbf{s}^i_{n+1} = 0 \\
\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{D}^i}_{n+1} - \delta\boldsymbol{D}^i_{n+1} + \delta\Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\ 2}_{n+1}} \cdot \delta\boldsymbol{E}^i_{n+1} = 0 \\
r^{\Phi^i}_{n+1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, \delta\mathbf{s}^i_{n+1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot \delta\boldsymbol{E}^i_{n+1} = 0
\end{gathered} \tag{75}$$

Вариации обобщенных сил $\delta\mathbf{s}^i_{n+1}$ и $\delta\boldsymbol{E}^i_{n+1}$ в случае «жесткого» нагружения:

$$\begin{gathered}
\delta\mathbf{s}^i = -{}^4\hat{\mathbf{C}}^0 \cdot\cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \delta\mathbf{e}^k - {}^4\hat{\mathbf{C}}^i \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i + {}^3\hat{\mathbf{h}}^i \cdot \delta\boldsymbol{D}^i \\
\delta\boldsymbol{E}^i = -\boldsymbol{\beta}^0 \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \delta\boldsymbol{D}^k - \hat{\boldsymbol{\beta}}^i \cdot \delta\boldsymbol{D}^i + {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i
\end{gathered} \tag{76}$$

где тензоры ${}^4\hat{\mathbf{C}}^0$, ${}^4\hat{\mathbf{C}}^i$, ${}^3\hat{\mathbf{h}}^i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^i$ определяются соотношениями

$$\begin{gathered}
{}^4\hat{\mathbf{C}}^0 = {}^4\mathbf{C}^0_{dev} \\
{}^4\hat{\mathbf{C}}^i = {}^4\mathbf{C}^0_{dev} + {}^4\mathbf{C}^i_{dev} \\
{}^3\hat{\mathbf{h}}^i = {}^3\mathbf{h}^{i\ T}_{dev} + \boldsymbol{D}^i \cdot \frac{\partial\, {}^3\mathbf{h}^i_{dev}}{\partial \boldsymbol{D}^i} - \frac{\partial\, {}^4\mathbf{C}^i_{dev}}{\partial D^i_n} \cdot\cdot\, \mathbf{e}^i \boldsymbol{e}_n \\
\hat{\boldsymbol{\beta}}^i = \boldsymbol{\beta}^0 + \boldsymbol{\beta}^i - \mathbf{e}^i \cdot\cdot \frac{\partial\, {}^3\mathbf{h}^i}{\partial \boldsymbol{D}^i} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}^i}{\partial D^i_n} \cdot \boldsymbol{D}^i \boldsymbol{e}_n
\end{gathered} \tag{77}$$

Подстановка выражений (76) в уравнения (75) после перегруппировки слагаемых дает линейную систему уравнений относительно $\delta\mathbf{e}^i_{n+1}$, $\delta\boldsymbol{D}^i_{n+1}$, $\Delta\lambda^i_{n+1}$, $i = \overline{1, M}$:

$$\mathbf{r}^{\mathbf{e}^i}_{n+1} - \left[\left\{ {}^4\mathbf{1} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\,2}_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^i \right\} \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i_{n+1} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\,2}_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^0 \cdot\cdot \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \delta\mathbf{e}^k_{n+1} - \right.$$

$$\left. - \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\,2}_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^3\hat{\mathbf{h}}^i \cdot \delta\boldsymbol{D}^i_{n+1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \delta\Delta\lambda^i_{n+1} \right] = 0$$

$$\mathbf{r}^{\boldsymbol{D}^i}_{n+1} - \left[\left\{ {}^2\mathbf{1} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\,2}_{n+1}} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^i \right\} \cdot \delta\boldsymbol{D}^i_{n+1} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\,2}_{n+1}} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \delta\boldsymbol{D}^k_{n+1} - \right.$$

$$\left. - \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\,2}_{n+1}} \cdot {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i_{n+1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \delta\Delta\lambda^i_{n+1} \right] = 0$$

$$r^{\Phi^i}_{n+1} - \left[\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^i - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot {}^3\mathbf{h}^i \right\} \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i_{n+1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^0 \cdot\cdot \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \delta\mathbf{e}^k_{n+1} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^3\hat{\mathbf{h}}^i - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^i \right\} \cdot \delta\boldsymbol{D}^i_{n+1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \delta\boldsymbol{D}^k_{n+1} \right] = 0$$

Полученную систему можно представить в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \cdots \\ \mathbf{r}^{\mathbf{e}^i}_{n+1} \\ \mathbf{r}^{\boldsymbol{D}^i}_{n+1} \\ r^{\Phi^i}_{n+1} \\ \cdots \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{B}^1 & \cdots & \mathbf{B}^1 & \cdots & \mathbf{B}^1 \\ \mathbf{B}^2 & \mathbf{A}^2 & \cdots & \mathbf{B}^2 & \cdots & \mathbf{B}^2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B}^i & \mathbf{B}^i & \cdots & \mathbf{A}^i & \cdots & \mathbf{B}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{B}^N & \mathbf{B}^N & \cdots & \mathbf{B}^N & \cdots & \mathbf{A}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cdots \\ \delta\mathbf{e}^i_{n+1} \\ \delta\boldsymbol{D}^i_{n+1} \\ \delta\Delta\lambda^i_{n+1} \\ \cdots \end{Bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} {}^4\mathbf{1} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\,2}_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^i & -\Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\,2}_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^3\hat{\mathbf{h}}^i & -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \\ -\Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\,2}_{n+1}} \cdot {}^3\mathbf{h}^i_{n+1} & {}^2\mathbf{1} + \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\,2}_{n+1}} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^i & -\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^i - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot {}^3\mathbf{h}^i & -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^3\hat{\mathbf{h}}^i + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}^i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{s}^{i\,2}_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\lambda^i_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^{i\,2}_{n+1}} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}^i_{n+1}} \cdot\cdot\, {}^4\hat{\mathbf{C}}^0 & \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{E}^i_{n+1}} \cdot \boldsymbol{\beta}^0 & 0 \end{bmatrix} \tag{78}$$

Здесь и выше для упрощения записи опущены индексы k, означающие номер итерации в процедуре решения системы нелинейных алгебраических уравнений (74).

Аналогичная система уравнений может быть получена для случая «мягкого» нагружения. При этом вариации обобщенных сил $\delta\mathbf{s}^i_{n+1}$ и $\delta\boldsymbol{E}^i_{n+1}$ будут

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{s}^i &= -\,{}^4\hat{\mathbf{C}}^i \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i + {}^3\hat{\mathbf{h}}^i \cdot \delta\boldsymbol{D}^i \\ \delta\boldsymbol{E}^i &= -\hat{\boldsymbol{\beta}}^i \cdot \delta\boldsymbol{D}^i + {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot\, \delta\mathbf{e}^i \end{aligned} \tag{79}$$

где тензоры ${}^4\hat{\mathbf{C}}^i$, ${}^3\hat{\mathbf{h}}^i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^i$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} {}^4\hat{\mathbf{C}}^i &= {}^4\mathbf{C}^i_{dev} \\ {}^3\hat{\mathbf{h}}^i &= {}^3\mathbf{h}^{i\,T}_{dev} + \boldsymbol{D}^i \cdot \frac{\partial\,{}^3\mathbf{h}^i_{dev}}{\partial\boldsymbol{D}^i} - \frac{\partial\,{}^4\mathbf{C}^i_{dev}}{\partial D^i_n} \cdot\cdot\, \mathbf{e}^i \boldsymbol{e}_n \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}^i &= \boldsymbol{\beta}^i - \mathbf{e}^i \cdot\cdot \frac{\partial\,{}^3\mathbf{h}^i}{\partial\boldsymbol{D}^i} + \frac{\partial\boldsymbol{\beta}^i}{\partial D^i_n} \cdot \boldsymbol{D}^i \boldsymbol{e}_n, \end{aligned} \tag{80}$$

Система уравнений в матричном виде при этом будет аналогична (78), с тем отличием что для вычисления тензоров ${}^4\hat{\mathbf{C}}^i$, ${}^3\hat{\mathbf{h}}^i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^i$ следует использовать (80) вместо (77), а матрицы $\mathbf{B}^{\mathbf{i}}$, связывающие уравнения различных звеньев друг с другом, оказываются равными нулю (то есть система распадается на M независимых систем, где M – число активных звеньев)

Линейная система (78) решается методом Гаусса, позволяя найти приближение к значению приращения переменных $\mathbf{e}^i_{n+1}$, $\boldsymbol{D}^i_{n+1}$, $\Delta\lambda^i_{n+1}$ на данном шаге по времени, на данной итерации.

В качестве начальных значений $\mathbf{e}^i_{n+1}$, $\boldsymbol{D}^i_{n+1}$, $\Delta\lambda^i_{n+1}$ используется результат по предиктору (для рассматриваемой реологической модели это и есть результат с предыдущего шага по времени).

Решение системы (78) относительно $\delta\mathbf{e}^i_{n+1}$, $\delta\boldsymbol{D}^i_{n+1}$, $\Delta\lambda^i_{n+1}$, $i=\overline{1,M}$ позволяет найти деформации и значение сегнетоэлектрического множителя $\Delta\lambda^i_{n+1}$ в каждом звене на k-ой итерации:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{i\,(k+1)}_{n+1} &= \mathbf{e}^{i\,(k)}_{n+1} + \delta\mathbf{e}^{i\,(k)}_{n+1} \\ \boldsymbol{D}^{i\,(k+1)}_{n+1} &= \boldsymbol{D}^{i\,(k)}_{n+1} + \delta\boldsymbol{D}^{i\,(k)}_{n+1} \\ \Delta\lambda^{i\,(k+1)}_{n+1} &= \Delta\lambda^{i\,(k)}_{n+1} + \delta\Delta\lambda^{i\,(k)}_{n+1} \end{aligned} \tag{81}$$

и определить соответствующие им значения механических напряжений и напряженности электрического поля

$$
\begin{array}{lll}
\text{I} & (\boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\varepsilon},\, \boldsymbol{D}) & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{E}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{E} \end{cases} \\
\text{II} & (\boldsymbol{\varepsilon},\, \boldsymbol{E}) \to (\boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{D}) & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{r\ (k+1)}\right) \\ \boldsymbol{E}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{E} \end{cases} \\
\text{III} & (\boldsymbol{\varepsilon},\, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{E}) & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = {}^4\mathbf{C}^0 \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{r\ (k+1)}\right) \\ \boldsymbol{E}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_n^{r\ (k+1)}\right) \end{cases} \\
\text{IV} & (\boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{D}) \to (\boldsymbol{\varepsilon},\, \boldsymbol{E}) & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{E}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\beta}^0 \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}_n^{r\ (k+1)}\right) \end{cases}
\end{array}
\tag{82}
$$

а также их значение в каждом из пластических элементов:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i\ (k+1)} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} - {}^4\mathbf{C}^i \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i\ (k+1)} + \boldsymbol{D}_n^{i\ (k+1)} \cdot {}^3\mathbf{h}^i \\
\boldsymbol{E}_{n+1}^{i\ (k+1)} &= \boldsymbol{E}_{n+1}^{k+1} + {}^3\mathbf{h}^i \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i\ (k+1)} - \boldsymbol{\beta}^{i\,(k+1)} \cdot \boldsymbol{D}_n^i
\end{aligned}
$$

Критерием сходимости итерационной процедуры служит неравенство

$$
\left\| \ldots \quad \mathbf{r}^{\mathbf{e}^i}{}_{n+1} \quad \mathbf{r}^{\boldsymbol{D}^i}{}_{n+1} \quad r^{\Phi^i}{}_{n+1} \quad \ldots \right\| \le tol
$$

выполнение которого является условием окончания итераций.

iv. Проверка условия насыщения

После нахождения «пластического» решения необходимо проверить условие отсутствия насыщения

$$
\tilde{\Upsilon}_{n+1}^i = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^i \cdot\cdot\, \tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^i}{\varepsilon_i^2} + \frac{\tilde{\boldsymbol{D}}_{n+1}^i \cdot \tilde{\boldsymbol{D}}_{n+1}^i}{P_{\mathrm{i}}^2} - 1 < 0 \tag{83}
$$

где $\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^i$, $\tilde{\boldsymbol{D}}_{n+1}^i$ является результатом, соответствующим пластическому корректору, вычисленным по формулам (81) (в формуле (81), как и во всем пункте IV.1.iii, опущены тильды). Если для i-го звена это условие выполняется, то состояние, предсказанное пластическим корректором является верным на данном шаге.

v. Корректор насыщения

Если для каких-либо i оказывается $\Upsilon_{n+1}^i \ge 0$, где Υ_{n+1}^i вычисляется по формуле (83), то для этих звеньев необходимо использовать корректор насыщения. Корректор насыщения может быть вычислен отдельно для каждого из звеньев и требует лишь с нормировки полученных значений деформаций $\mathbf{e}_{n+1}^i$ и электрических смещений $\boldsymbol{D}_{n+1}^i$:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{i} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^{i}}{\sqrt{\tilde{\Upsilon}_{n+1}^{i} + 1}}$$

$$\boldsymbol{D}_{n+1}^{i} = \frac{\tilde{\boldsymbol{D}}_{n+1}^{i}}{\sqrt{\tilde{\Upsilon}_{n+1}^{i} + 1}}$$

где $\tilde{\mathbf{e}}_{n+1}^{i}$, $\tilde{\boldsymbol{D}}_{n+1}^{i}$ является результатом, соответствующим пластическому корректору, а $\tilde{\Upsilon}_{n+1}^{i}$ вычисляется по формуле (83).

После уточненных таким образом значений деформаций $\mathbf{e}_{n+1}^{i}$ и электрических смещений $\boldsymbol{D}_{n+1}^{i}$ макроскопические поля вычисляются по формулам (82) с учетом внесенных уточнений.

2. Исследование реологической модели сегнетоэлектроэластика при различных видах нагружения

i. Параметры моделирования

Для исследования реологических моделей используется программа Constitutive Equation Studio (CES) v.3.4 [68], в рамках которой реализованы описанные в п.IV.1 алгоритмы и заданы приведенные ниже параметры.

Материал PZT-5H

Тензоры модулей материала PZT-5H задаются в виде матрицы, структура которой обсуждается в п.III.6.i. В [27, 16] приведены следующие значения:

$$G = \begin{Bmatrix} \{^4\boldsymbol{S}\} & \{^3\boldsymbol{d}\}^T \\ \{^3\boldsymbol{d}\} & \{\boldsymbol{k}\} \end{Bmatrix} = \tag{84}$$

1.65e-011	-4.78e-12	-4.78e-12	0	0	0	0	0	-2.74e-10
	1.65e-11	-4.78e-12	0	0	0	0	0	-2.74e-10
		1.65e-11	0	0	0	0	0	5.93e-10
			1.064e-11	0	0	0	0	0
				1.064e-11	0	0	1.85e-10	0
		SYM			1.064e-11	1.85e-10	0	0
						2.77e-08	0	0
							2.77e-08	0
								2.77e-08

где приняты единицы измерения в системе СИ: $[G] = \begin{pmatrix} Па^{-1} & \frac{м}{В} \\ \frac{м}{В} & \frac{Кл}{В \cdot м} \end{pmatrix}$

Другие параметры материала задаются в соответствии с Таблицей 3.

Таблица 3. Параметры модели материала PZT-5H

Предел текучести	σ_0	24,6	МПа
Коэрцитивная сила	E_0	0,82	МВ/м
Спонтанная деформация	ε_0	0,93	%
Спонтанная поляризация	P_0	0,24	Кл/м²

Материал PZT PIC-151

Тензоры модулей материала PZT PIC-151 также задаются в виде матрицы, структура которой обсуждается в п.III.6.i. В [29] приведены следующие значения:

$$G = \begin{Bmatrix} \{^4\boldsymbol{S}\} & \{^3\boldsymbol{d}\}^T \\ \{^3\boldsymbol{d}\} & \{\boldsymbol{k}\} \end{Bmatrix} = \tag{85}$$

1.21e-011	-2.08e-12	-6.51e-12	0	0	0	0	0	-1.28e-10
	1.21e-11	-6.51e-12	0	0	0	0	0	-1.28e-10
		1.92e-11	0	0	0	0	0	3.15e-10
			7.07e-12	0	0	0	0	0
				1.09e-11	0	0	2.41e-10	0
		SYM			1.09e-11	2.41e-10	0	0
						1.50e-08	0	0
							1.50e-08	0
								1.30e-08

где используются единицы Си. Другие параметры материала задаются в соответствии с Таблицей 4.

Таблица 4. Параметры модели материала PZT PIC-151

Предел текучести	σ_0	24,6	МПа
Коэрцитивная сила	E_0	0,82	МВ/м
Спонтанная деформация	ε_0	0,93	%
Спонтанная поляризация	P_0	0,24	Кл/м²

Матрицы G^i, соответствующие упругим элементам различных звеньев модели вычисляются в соответствии с (70), (71), где в качестве исходных тензоров, располагающихся в (71) в правой части, служат заданные по формулам (84), (85). Коэффициенты s_i, k_i, d_i в уравнении (71) для каждого из элементов зависят от их общего числа. В случае одноповерхностной модели (одного нелинейного звена) коэффициенты задаются по Таблице 5.

Таблица 5. Коэффициенты линейных элементов модели, материалы PZT-5H, PZT PIC-151

	i	s_i	d_i	k_i
Линейное звено	0	1	0	1
Нелинейное звено	1	10	10	10

ii. Циклическое одноосное нагружение электрическим полем

Простейшим тестом модели является одноосное циклическое нагружения электрическим полем. Моделируется материал PZT-5H.

Параметры нагружения представлены в Таблице 6. Результаты представлены на Рис. 25 – Рис. 30.

Таблица 6. Параметры циклического нагружения одноосным электрическим полем

$E_x(t)$: в соответствии с Рис. 24	
$E_y = E_z = 0$	
А. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$	**Б.** $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$

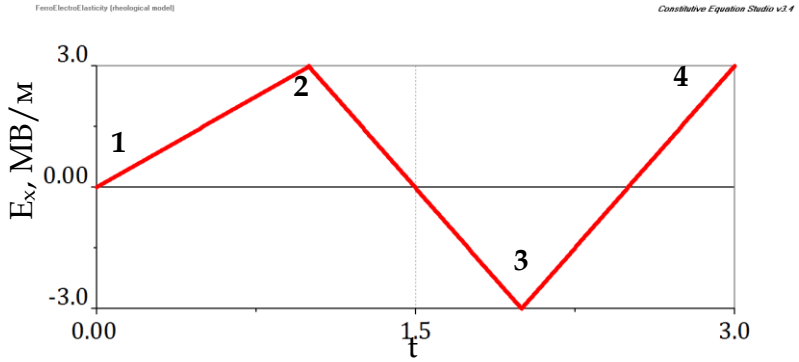

Рис. 24. Диаграмма $E_x(t)$ одноосного циклического нагружения электрическим полем.

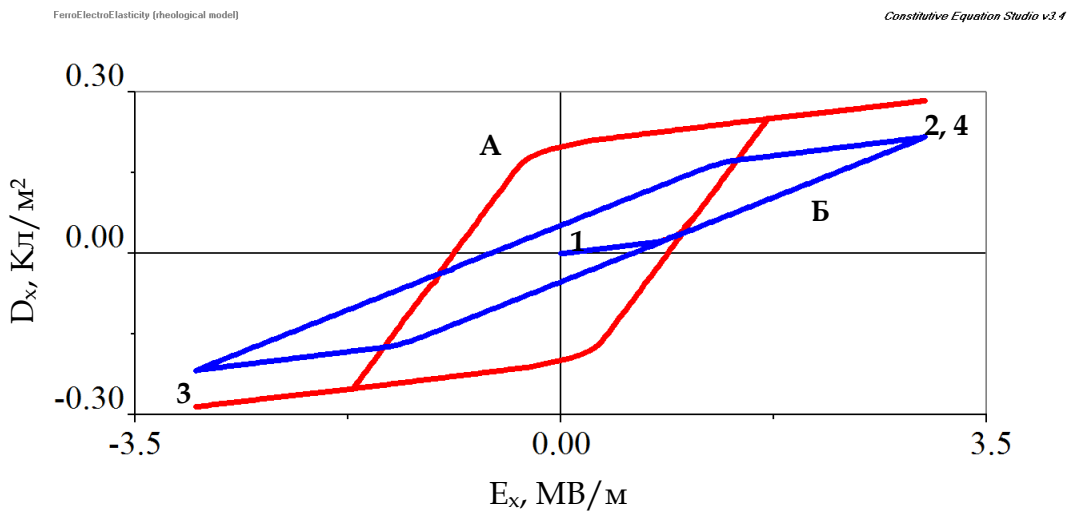

Рис. 25. Диэлектрическая зависимость $D_x(E_x)$ в форме гистерезиса. А. $\sigma = 0$; Б. $\varepsilon = 0$.

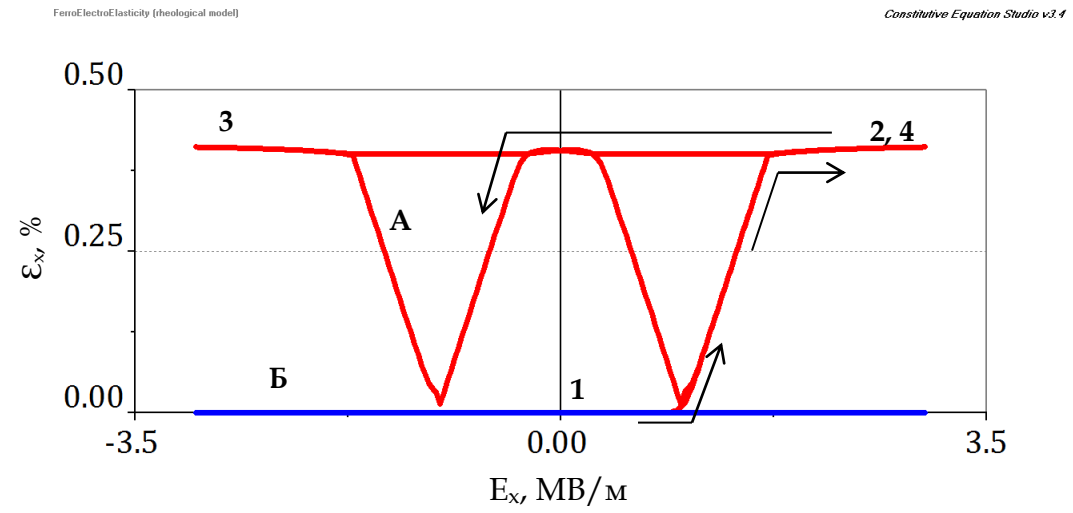

Рис. 26. Электромеханическая зависимость $\varepsilon_x(E_x)$ в форме «бабочки». А. $\sigma = 0$; Б. $\varepsilon = 0$.

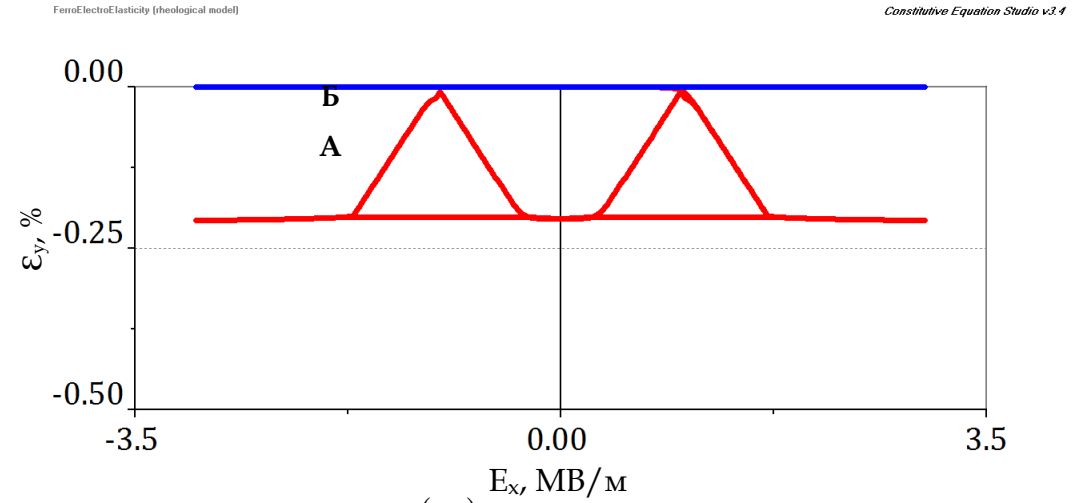

Рис. 27. Поперечная деформация $\varepsilon_y(E_x)$ в форме перевернутой «бабочки». А. $\sigma = 0$; Б. $\varepsilon = 0$.

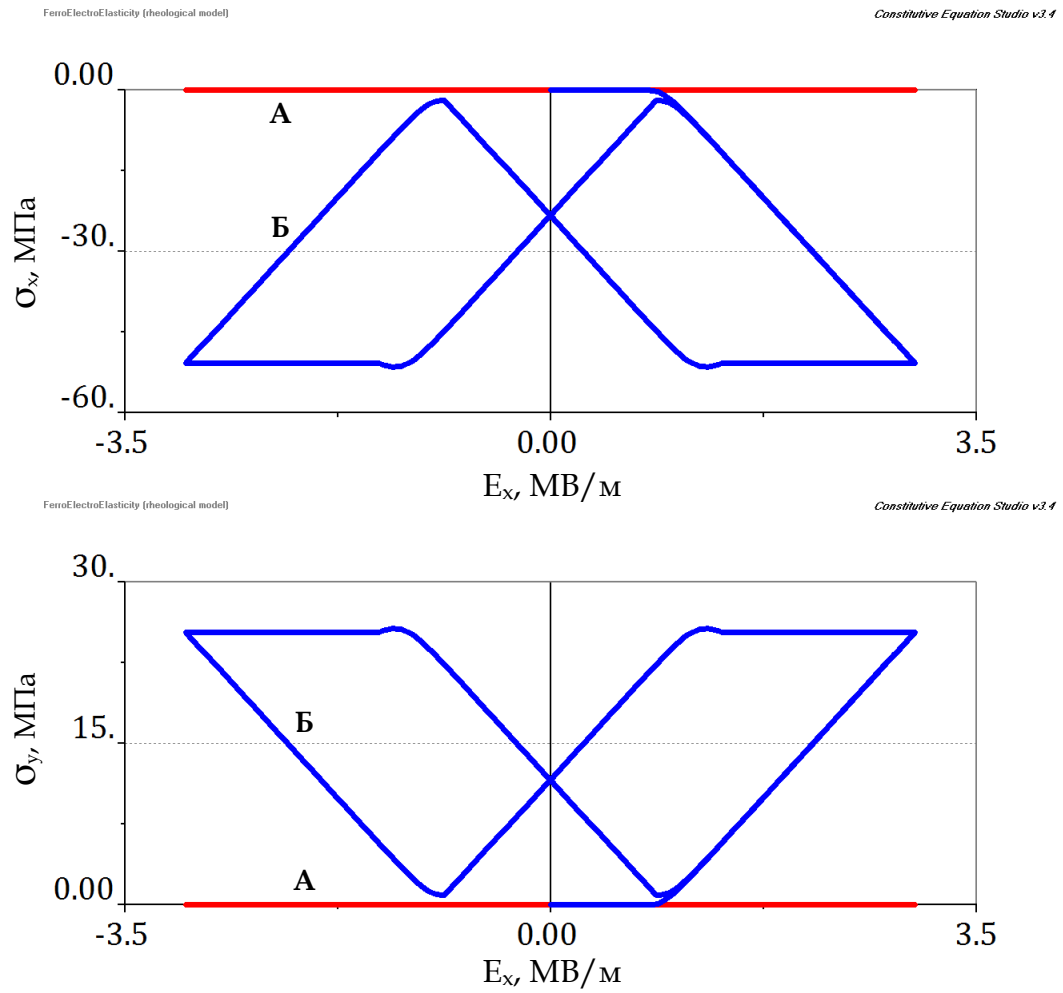

Рис. 28. Напряжения, возникающие в зафиксированном континууме под действием электрического поля. Сверху: $\sigma_x(E_x)$**, снизу:** $\sigma_y(E_x)$**. А.** $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$**; Б.** $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$**.**

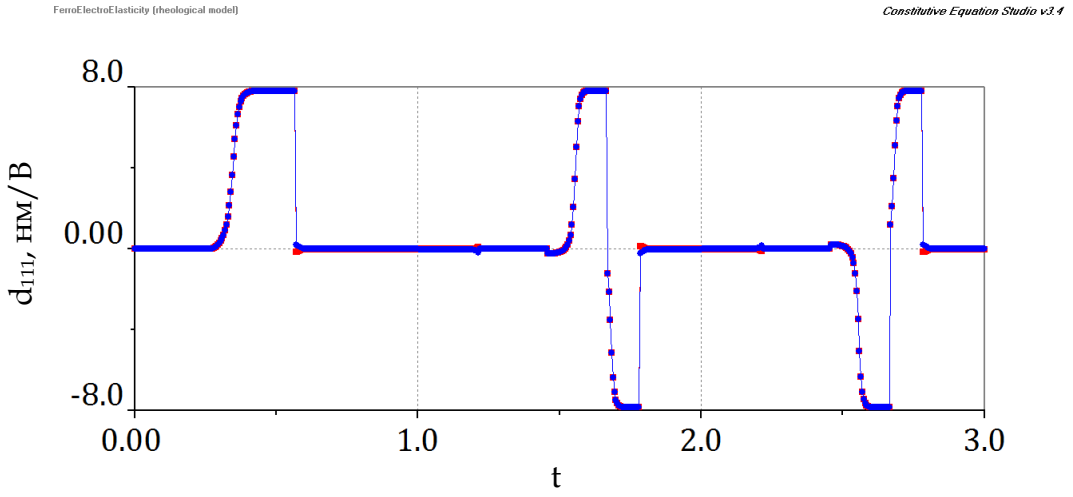

Рис. 29. Компонента d_{111} **тензора пьезоэлектрических тангенциальных модулей по** $(60)_1$ **и** $(60)_2$**.**

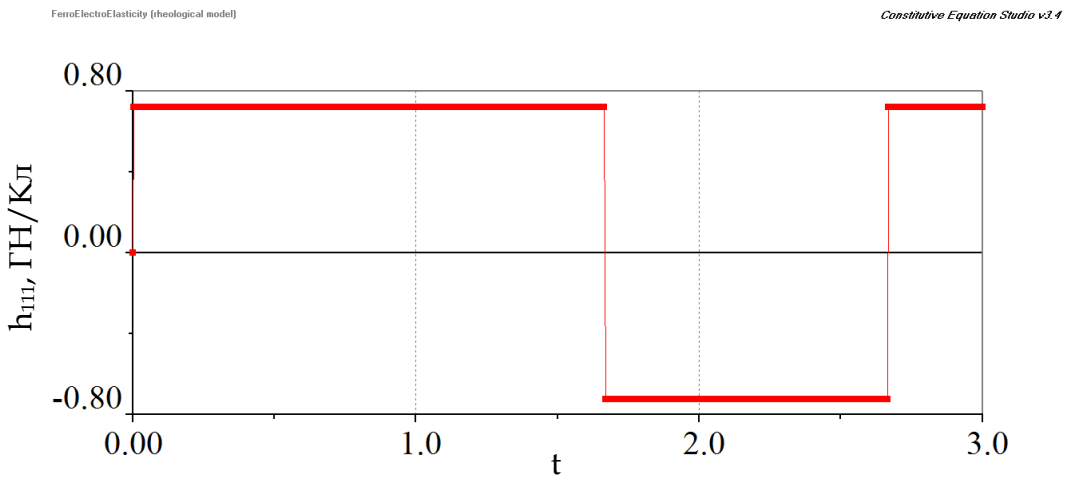

Рис. 30. Компонента h_{111} тензора пьезоэлектрических модулей звена «1-е»

iii. Асинхронное двуосное нагружение электрическим полем

Моделируется материал PZT-5H. Параметры нагружения представлены в Таблице 7. Результаты представлены на Рис. 32 – Рис. 33.

Таблица 7. Параметры двуосного нагружения электрическим полем

$E_x(t)$, $E_y(t)$: в соответствии с Рис. 31
$E_z = 0$
$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$

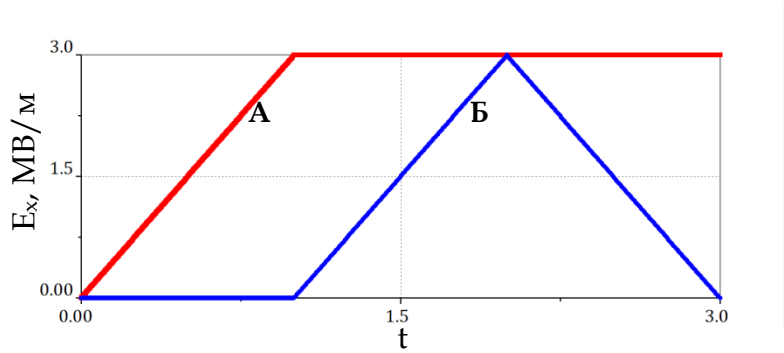

Рис. 31. Диаграмма асинхронного нагружения электрическим полем. А. $E_x(t)$. Б. $E_y(t)$

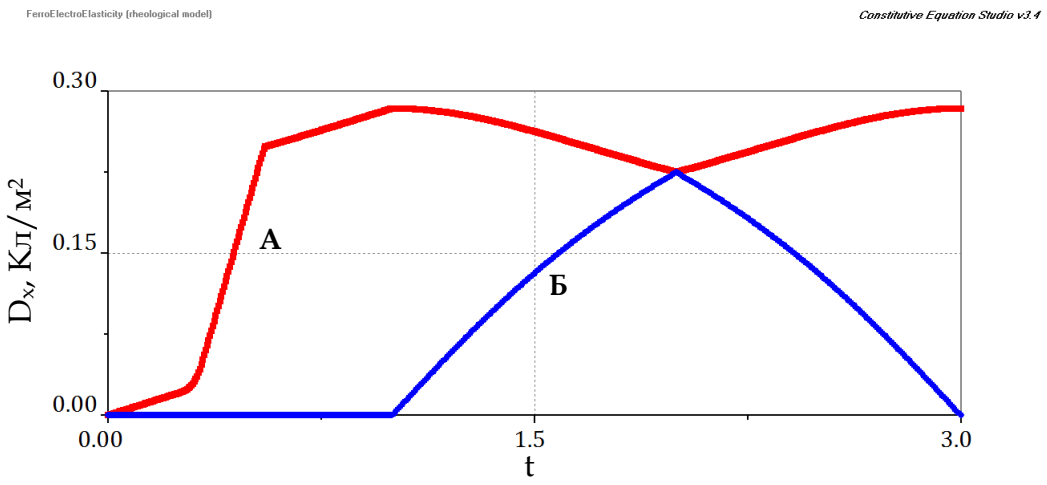

Рис. 32. Зависимости диэлектрического смещения от времени. А. $D_x(t)$**. Б.** $D_y(t)$

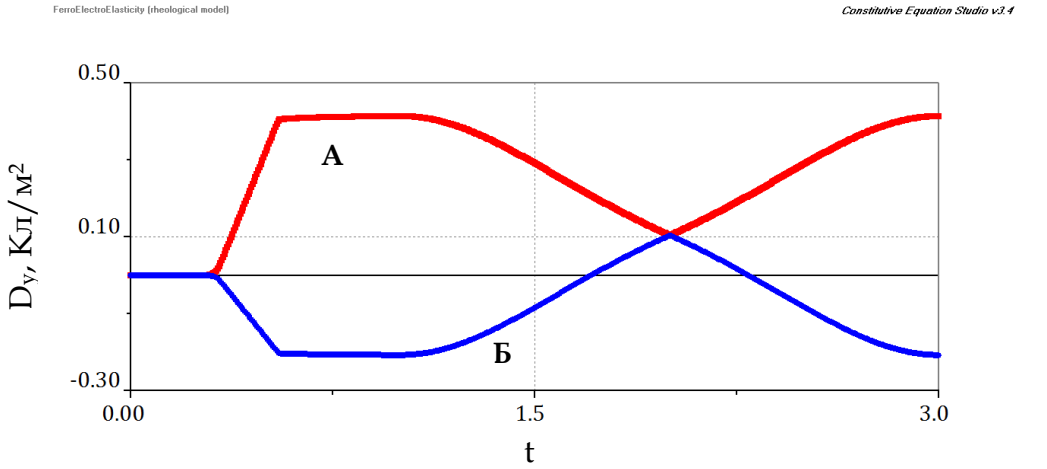

Рис. 33. Зависимость механических деформаций от времени. А. $\varepsilon_x(t)$**. Б.** $\varepsilon_y(t)$

iv. Реполяризация

Моделируется материал PZT-5H. Параметры нагружения представлены в Таблице 8, результаты на Рис. 35 – Рис. 36. Аналогичные результаты получены автором в [48]. На Рис. 36 при достижении значения $|D| = 0$ наблюдается эффект, вызванный скачками пьезоэлектрических модулей на каждом шаге интегрирования. Причиной такого поведения является выбор тензора ${}^{3}\mathbf{d}$ в виде (69). На практике при реполяризации состояние $|D| = 0$ не осуществляется без приложения электрического поля, направленного в сторону противоположную поляризации.

Таблица 8. Параметры эксперимента по реполяризации материала

$E_x(t)$, $\sigma_x(t)$: в соответствии с Рис. 34	
А. $\lvert\sigma_x\rvert^{\max} = 30$ МПа	Б. $\lvert\sigma_x\rvert^{\max} = 50$ МПа
$E_y = E_z = 0$	
$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$	

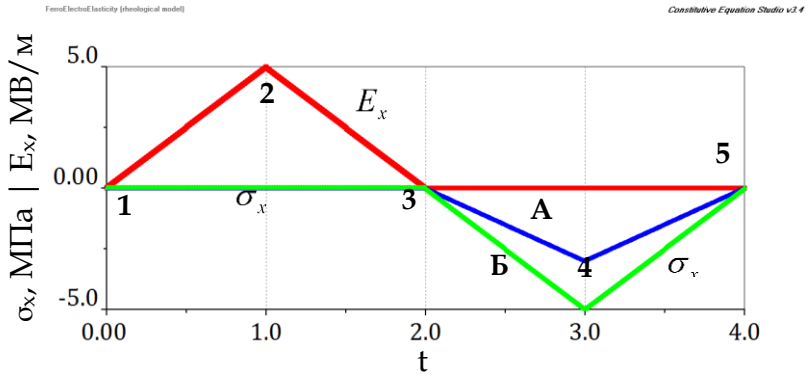

Рис. 34. Диаграмма нагружения электрическим полем с последующей реполяризацией сжимающим механическим напряжением. А. $|\sigma_x|^{\max} = 30$ МПа. Б. $|\sigma_x|^{\max} = 50$ МПа

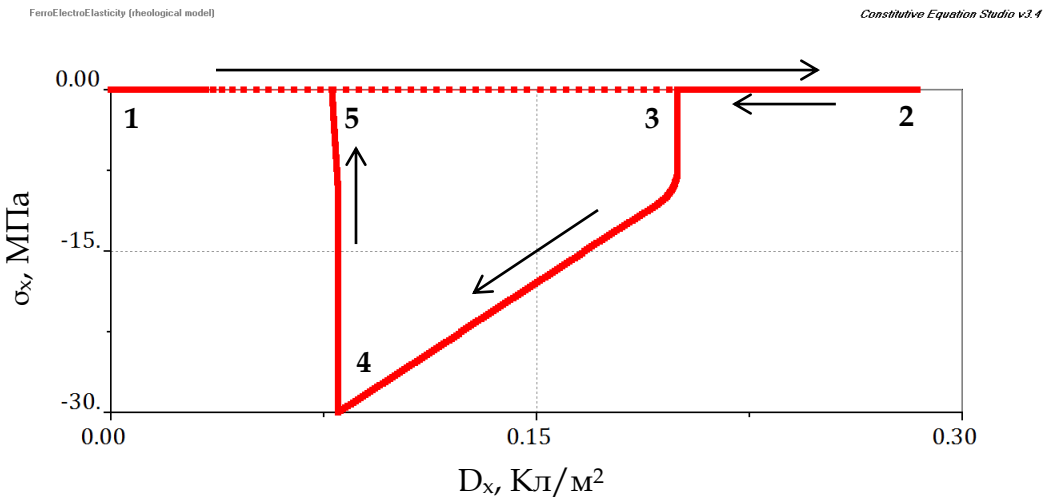

Рис. 35. Зависимость электрического смещения от механических напряжений. Случай А.

$|\sigma_x|^{max} = 30$ **МПа**

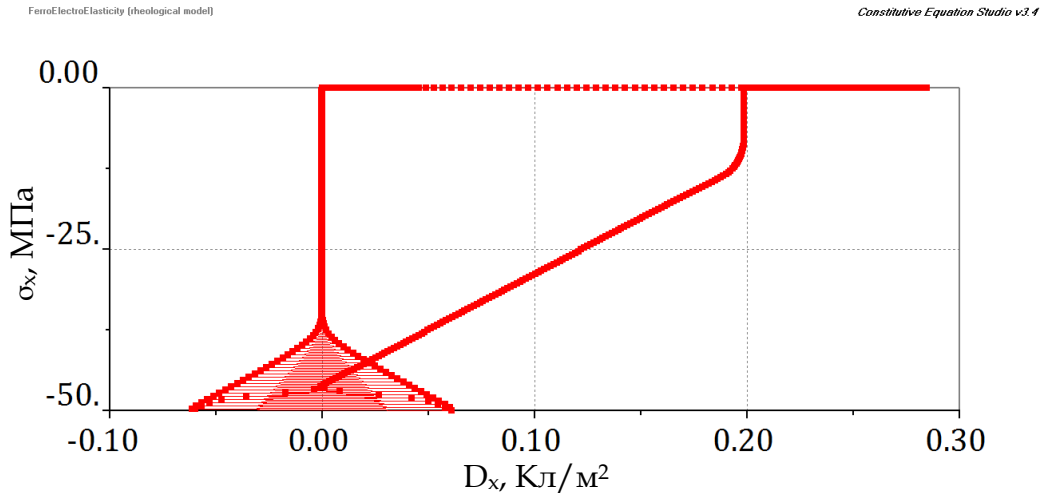

Рис. 36. Зависимость электрического смещения от механических напряжений. Случай Б.

$|\sigma_x|^{max} = 50$ **МПа**

3. Сравнение результатов моделирования однородного электромеханического поля с экспериментальными данными

В п.IV.2 и далее в расчетах используются значения параметров материала, взятые из литературы. Следует отметить, что параметры отдельных реологических элементов могут не совпадать со значениями наблюдаемых в базовых опытах таких величин, как коэрцитивная сила, предел текучести, спонтанная поляризация и спонтанная деформация. В частности, эти параметры зависят от определения реологических элементов [47]. При этом нужно идентифицировать параметры реологической модели на основе экспериментальных данных.

Вопросы идентификации параметров реологической модели рассмотрены в [44], где решена задача идентификации электрических параметров модели изотропного материала по экспериментальной диаграмме одноосного нагружения электрическим полем. Здесь исследуются простые режимы нагружения, одноповерхностная реологическая модель, параметры модели подбираются эмпирически.

i. Моделирование материала PZT-51

Результаты моделирования сравниваются с экспериментальными данными [11] для материала PZT-51 (выдержки из [11] приведены также в п.I.5). При соответствующем выборе параметров результаты расчета аппроксимируют экспериментальные зависимости с приемлемым уровнем точности. Параметры моделирования представлены в Таблице 9. Результат расчета и данные эксперимента приведены на Рис. 37 – Рис. 38.

В связи с тем, что численная схема сходится при разных условиях нагружения в разном диапазоне параметров модели, приходится для моделирования различных процессов использовать различные коэффициенты тензоров, характеризующих нелинейное звено модели. Так, например, величины модуля податливости нелинейного звена S^{p}_{1111}, равного 5,0e-11 Па$^{-1}$ и предела текучести σ_1 , равного 20 МПа (см. Таблицу 9), позволяет описать механическое нагружение. Тогда как при электрическом нагружении такие значения механических модулей приводят к расходимости численной схемы при том же числе инкрементов.

В связи с этим требуется наложение дополнительных ограничений на соотношения параметров материала, которые могут быть получены из термодинамических ограничений, из требования положительной определенности матрицы касательных модулей. Вопросы устойчивости численной схемы и ее сходимости требуют отдельной проработки и здесь не исследуются.

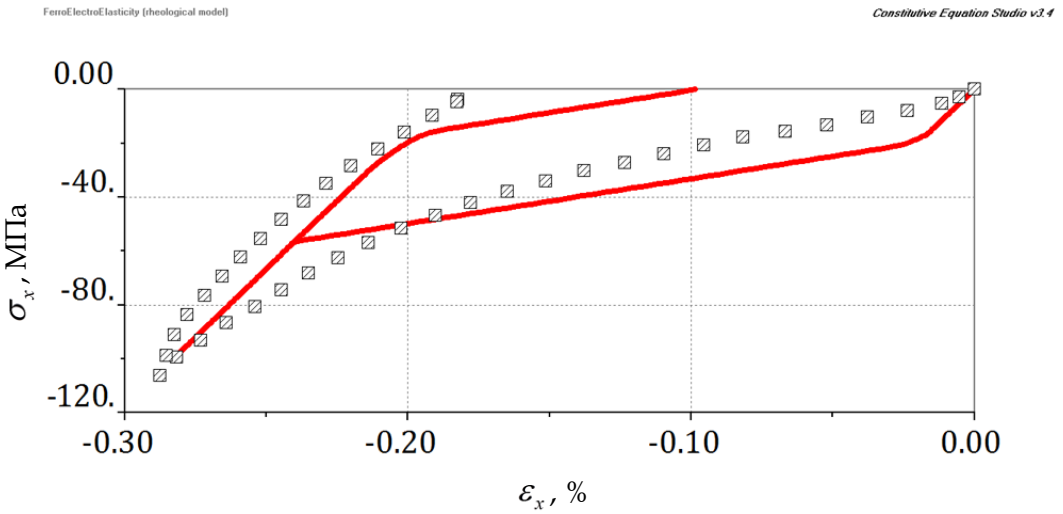

Рис. 37. Воздействие сжимающих механических напряжений

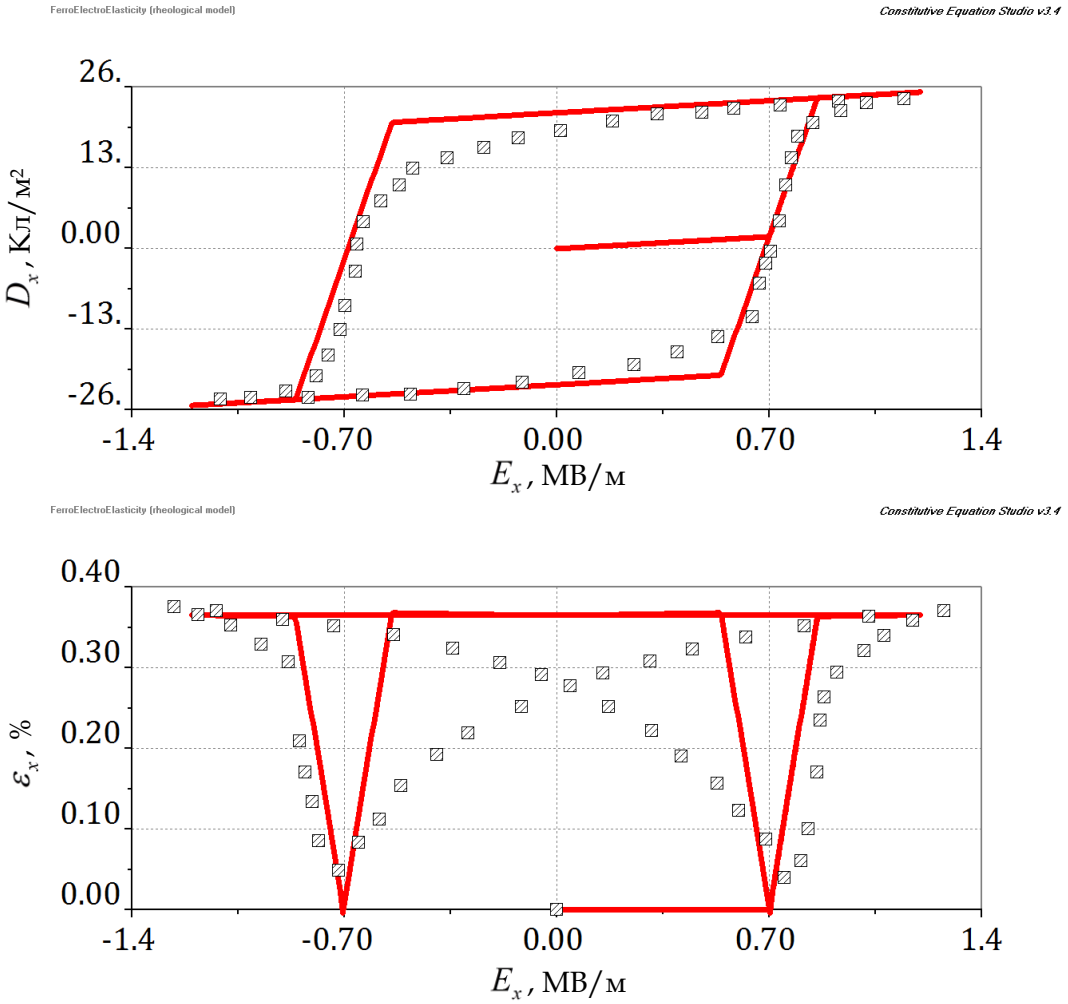

Рис. 38. Электрический гистерезис и электромеханическая зависимость в форме «бабочки»

Таблица 9. Параметры модели материала PZT-51

Параметры линейных элементов					
	Линейное звено		**Нелинейное звено**		
Модуль податливости	S^0_{1111}	1.0e-11	S^p_{1111}	5.0e-11	Па$^{-1}$
Диэлектрический модуль	κ^0_{11}	2.77e-8	κ^p_{11}	1.39e-6	$Кл\ /\ В \cdot м$
Пьезоэлектрический модуль	d^0_{111}	0	d^p_{111}	2.20e-8	М/В
Параметры «пластического» элемента и элемента «зазор»					
Предел текучести			σ_1	20	МПа
Коэрцитивная сила			E_1	0.70	МВ/м
Деформация насыщения			ε_1	0.22	%
Поляризация насыщения			P_1	0.25	Кл/м^2

ii. Моделирование материала PZT PIC-151

Моделируется материал PZT PIC-51. Используются результаты экспериментов одноосного нагружения электрическим полем [37]. При соответствующем выборе параметров результаты расчета аппроксимируют экспериментальные зависимости с приемлемым уровнем точности. Параметры моделирования сведены в Таблицу 10. Результат расчета и данные эксперимента приведены на Рис. 39 – Рис. 40. Некоторые из идентифицированных параметров отличаются от приведенных в п.IV.2.i, однако остаются в рамках одного порядка. В расчетах п.V используются параметры из п.IV.2.i.

Таблица 10. Параметры модели материала PZT PIC-151

Параметры линейных элементов					
	Линейное звено		**Нелинейное звено**		
Модуль податливости	S^0_{1111}	9.0e-012	S^p_{1111}	9.0e-11	Па$^{-1}$
Диэлектрический модуль	κ^0_{11}	4.0e-008	κ^p_{11}	4.17e-5	$Кл\ /\ В \cdot м$
Пьезоэлектрический модуль	d^0_{111}	0	d^p_{111}	1.48e-8	М/В
Параметры «пластического» элемента и элемента «зазор»					
Предел текучести			σ_1	100	МПа
Коэрцитивная сила			E_1	1	МВ/м
Деформация насыщения			ε_1	0.33	%
Поляризация насыщения			P_1	0.38	Кл/м^2

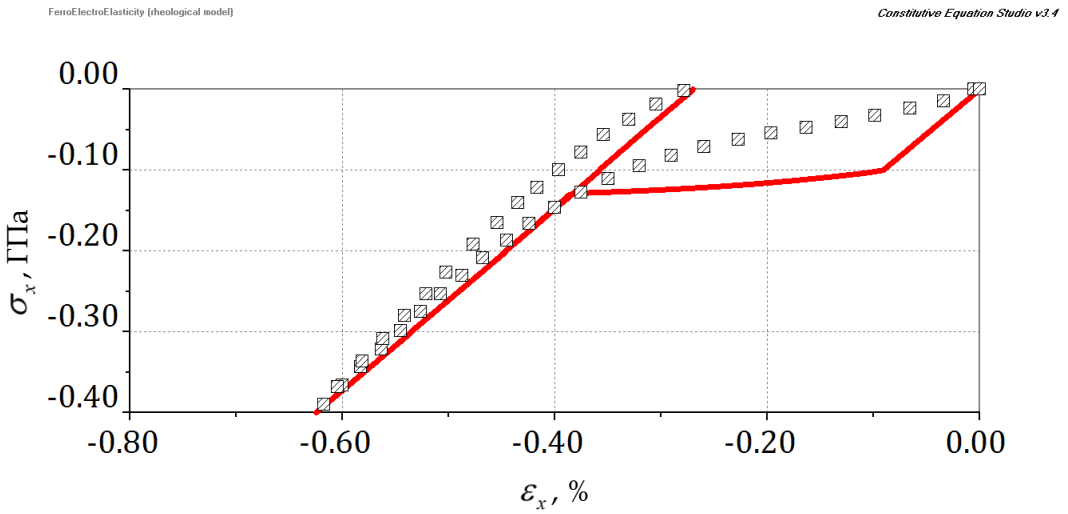

Рис. 39. Воздействие сжимающих механических напряжений

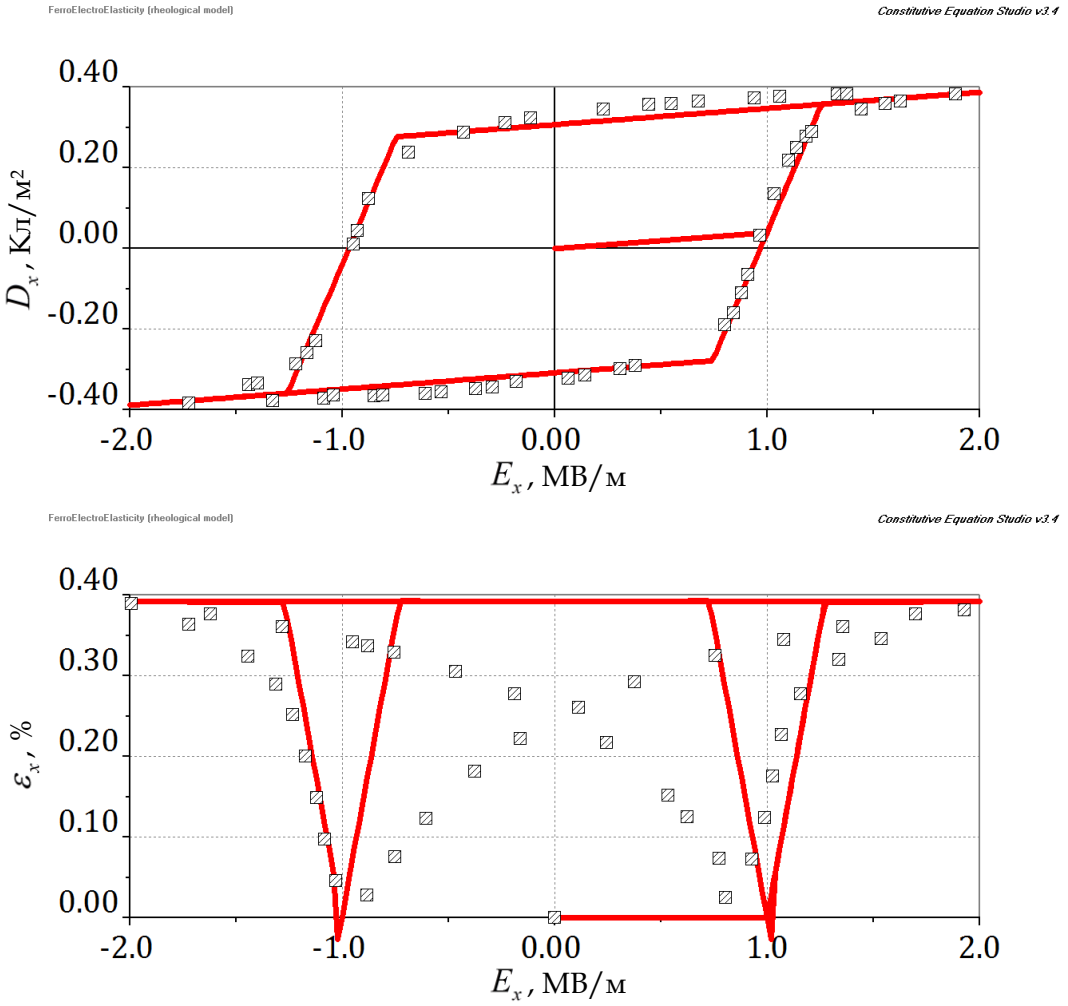

Рис. 40. Электрический гистерезис и электромеханическая зависимость в форме «бабочки»

V. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МКЭ

Предложенная в работе реологическая модель сегнетоэлектроэластика реализована в программе КЭ анализа PANTOCRATOR [52, 69]. Ниже представлены решения ряда тестовых задач, а также задача о многослойном актуаторе, посвященная анализу концентрации напряжений и электрических полей в вершине электрода.

Используется инкрементально-итерационный подход, позволяющий учесть предысторию процесса нагружения сегнетоэлектроэластика [53]. При этом конечно-элементная система уравнений решается итерационным методом Ньютона-Рафсона для каждого момента времени (из дискретного набора в рамках рассматриваемого отрезка времени). В каждый момент времени в каждом узле всех конечных элементов производится интегрирование определяющих уравнений материала способом, описанным в п.IV.

Конечно-элементная постановка краевой задачи сегнетоэлектроупругости с использованием векторного потенциала (см. п.II) впервые предложена в [32] и кратко приведена ниже.

1. Векторно-потенциальная конечно-элементная постановка краевой задачи

Пусть вектор перемещений $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\} = \{u_x(\boldsymbol{r}), u_y(\boldsymbol{r}), u_z(\boldsymbol{r}),\}$ и векторный потенциал $\{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r})\} = \{\psi_x(\boldsymbol{r}), \psi_y(\boldsymbol{r}), \psi_z(\boldsymbol{r}),\}$ внутри одного конечного элемента [36] выражаются через значения в узловых точках $\{\boldsymbol{u}^n\}$ и $\{\boldsymbol{\psi}^n\}$ через функции формы $[\mathbf{N}^u(\boldsymbol{r})]$ и $[\mathbf{N}^\psi(\boldsymbol{r})]$:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{u}\} &= [\mathbf{N}^u]\{\boldsymbol{u}^n\}, \\ \{\boldsymbol{\psi}\} &= [\mathbf{N}^\psi]\{\boldsymbol{\psi}^n\}. \end{aligned} \tag{86}$$

Дифференцирование по пространству последних уравнений дает выражения для вектор-столбцов деформаций и электрических смещений:

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\mathbf{B}^u]\{\boldsymbol{u}^n\}, \\ \{\boldsymbol{D}\} &= [\mathbf{B}^\psi]\{\boldsymbol{\psi}^n\}, \end{aligned} \tag{87}$$

где $[\mathbf{B}^u], [\mathbf{B}^\psi]$ – матрицы градиентов [36].

Определяющие уравнения, полученные с использованием различных реологических (и других феноменологических) моделей могут быть сведены к виду

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r\right) - \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^r\right) \cdot {}^3\mathbf{h}, \\ \boldsymbol{E} = -{}^3\mathbf{h} \cdot\cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r\right) + \boldsymbol{\beta} \cdot \left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^r\right). \end{cases} \tag{88}$$

Подстановка уравнений (86) – (88) с учетом выражений для матриц градиентов и функций нормы в вариационный принцип (12), модифицированный с учетом Кулоновской калибровки (14), приводит к системе конечно-элементных уравнений

$$\begin{cases} \left[\mathbf{K}^{uu}\right]\left\{\boldsymbol{u}^n\right\} + \left[\mathbf{K}^{u\psi}\right]\left\{\boldsymbol{\psi}^n\right\} = \left\{\boldsymbol{F}_r\right\} + \left\{\boldsymbol{F}_V\right\} + \left\{\boldsymbol{F}_S\right\}, \\ \left[\mathbf{K}^{\psi u}\right]\left\{\boldsymbol{u}^n\right\} + \left(\left[\mathbf{K}^{\psi\psi}\right] + \left[\mathbf{K}^{\alpha}\right]\right)\left\{\boldsymbol{\psi}^n\right\} = \left\{\boldsymbol{Q}_r\right\} + \left\{\boldsymbol{Q}_S\right\}, \end{cases} \tag{89}$$

где матрицы жесткости вычисляются по формулам

$$\left[\mathbf{K}^{uu}\right] = \int_V \left[\mathbf{B}^u\right]^T \left[\mathbf{C}\right]\left[\mathbf{B}^u\right] dV \qquad \left[\mathbf{K}^{u\psi}\right] = -\int_V \left[\mathbf{B}^u\right]^T \left[\mathbf{h}\right]^T \left[\mathbf{B}^\psi\right] dV$$

$$\left[\mathbf{K}^{\psi u}\right] = -\int_V \left[\mathbf{B}^\psi\right]^T \left[\mathbf{h}\right]\left[\mathbf{B}^u\right] dV \qquad \left[\mathbf{K}^{\psi\psi}\right] = \int_V \left[\mathbf{B}^\psi\right]^T \left[\boldsymbol{\beta}\right]\left[\mathbf{B}^\psi\right] dV \qquad \left[\mathbf{K}^{\alpha}\right] = \int_V \alpha \left\{\mathbf{A}\right\}\left\{\mathbf{A}\right\}^T dV,$$

а векторы нагрузки

$$\left\{\boldsymbol{F}_r\right\} = \int_V \left[\mathbf{B}^u\right]^T \left\{\boldsymbol{\sigma}_r\right\} dV \qquad \left\{\boldsymbol{F}_V\right\} = \int_V \left[\mathbf{N}^u\right]^T \left\{\boldsymbol{f}_V\right\} dV \qquad \left\{\boldsymbol{F}_S\right\} = \int_{S_E} \left[\mathbf{N}^u\right]^T \left\{\boldsymbol{f}_S\right\} dS$$

$$\left\{\boldsymbol{Q}_r\right\} = \int_V \left[\mathbf{B}^\psi\right]^T \left\{\boldsymbol{E}_r\right\} dV \qquad \left\{\boldsymbol{Q}_S\right\} = \int_{S_\sigma} \left[\mathbf{B}^\psi\right]^T \phi_S \left\{\boldsymbol{n}\right\} dV$$

где $\left\{\mathbf{A}\right\}$ – вектор дивергенции:

$$\left\{\mathbf{A}\right\}^T = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}\left[\mathbf{N}\right],$$

где

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^r = \left[\mathbf{C}\right]\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^r\right\} - \left[\mathbf{h}\right]^T \left\{\boldsymbol{D}^r\right\}, \\ \boldsymbol{E}^r = -\left[\mathbf{h}\right]\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^r\right\} + \left[\boldsymbol{\beta}\right]\left\{\boldsymbol{D}^r\right\}. \end{cases}$$

Система (89) – система нелинейных алгебраических уравнений, которая может быть решена любым численным методом. В расчетах, результаты которых изложены ниже, используется реализованный в системе PANTOCRATOR итерационный метод Ньютона-Рафсона, требующий для решения системы (89) знания согласованной касательной матрицы жесткости (подробнее см. [33], где согласованная касательная матрица впервые получена для феномеологической модели Ландиса). Здесь вместо согласованной касательной матрицы используется континуальная, полученная при рассмотрении одноповерхностной модели в п. III.4, к которой при измельчении шага по времени стремится согласованная касательная матрица.

2. Однородная поляризация куба

В качестве простейшей иллюстрации возможности использования реологической модели сегнетоэлектроэластика для решения задач МКЭ, а также в целях проверки правильности реализации расчетной схемы в рамках PANTOCRATOR, решена следующая задача.

Рассматривается куб (Рис. 41) Три перпендикулярные стороны куба закреплены по перемещениям по нормали, остальные грани свободны. С двух противоположных сторон куба, перпендикулярных оси Oz присоединены электроды, создающие разность потенциалов, изменяющуюся во времени как

$$\Delta\phi = \phi(t) - 0 = \phi(t) = \phi_{\max}\frac{t}{t_{\max}}$$

$\phi_{\max}$ принимается равным -3МВ/м², а количество шагов по времени равно 20. В соответствии с Рис. 25, при такой разности потенциалов в полную силу проявляются нелинейные эффекты, и достигается состояние насыщения.

Модель может также рассматриваться как простейшая модель актуатора, действующего на удлинение (Stack Actuator).

Образец предполагается выполненным из материала PZT-5H. Параметры материала заданы в соответствии с п.IV.2.i.

Куб представляется одним восьмиузловым конечным элементом. Задача решается в векторно-потенциальной формулировке, число степеней свободы в узле равно шести.

Распределение электрических и механических полей в кубе при $t = t_{\max}$ приведены на Рис. 42 – Рис. 44, где перемещения отмасштабированы для наглядности.

В результате моделирования получены также величины, характеризующие однородное поле при $t = t_{\max}$:

$$E_z = 3\,MBm;\quad D_z = 0.29\,Кл/м^2;\quad \varepsilon_x = -0.09\%;\quad \varepsilon_y = -0.09\%;\quad \varepsilon_z = 0.45\%;$$
$$E_x = E_y = 0;\quad D_x = D_y = 0;\quad \sigma_{ij} = 0,\ i,j = \overline{1,3};\quad \varepsilon_{ij} = 0,\ i,j = \overline{1,3}, i \neq j.$$

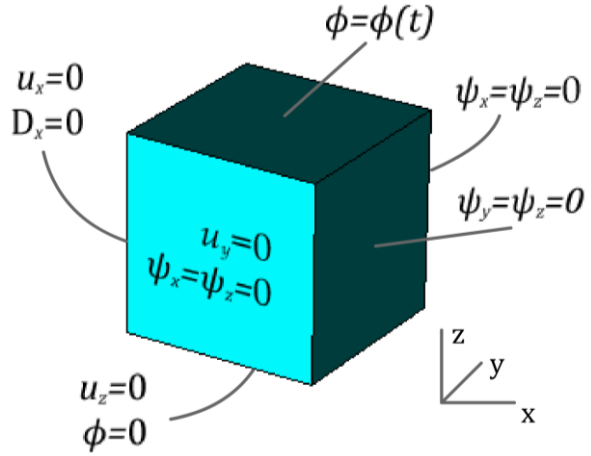

Рис. 41. Модель и граничные условия в задаче об однородном деформировании куба электрическим полем

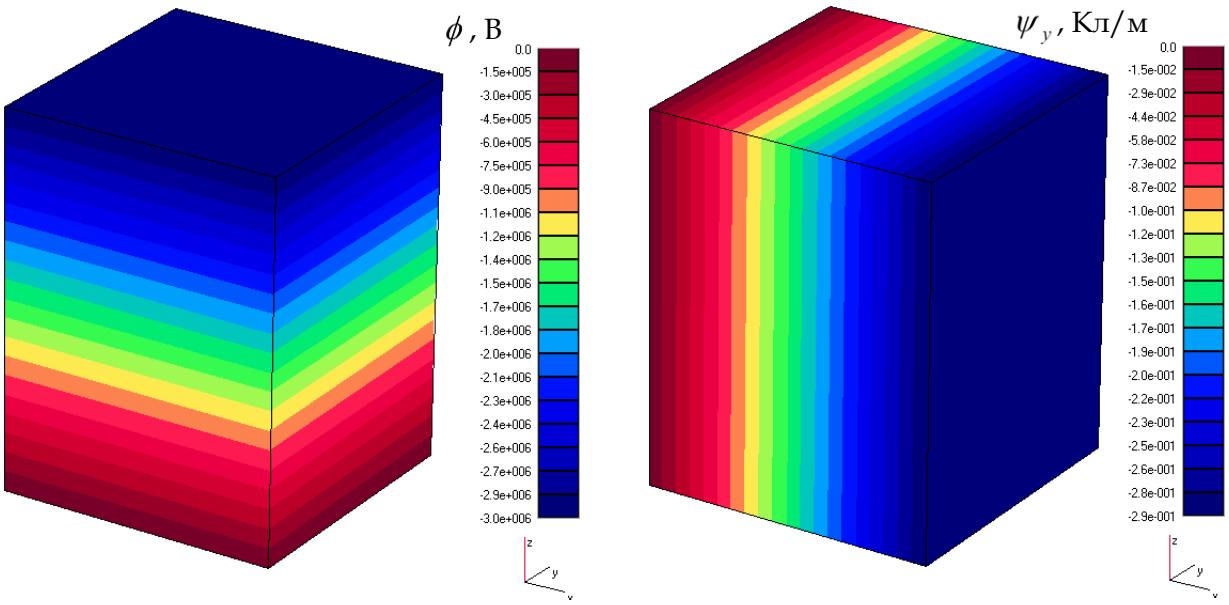

Рис. 42. Слева: распределение скалярного электрического потенциала ϕ; справа: распределение ψ_y – ненулевой компоненты векторного электрического потенциала

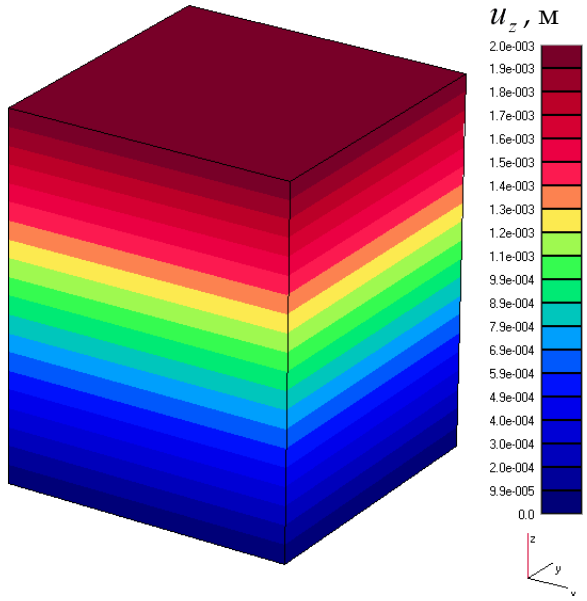

Рис. 43. Распределение поля перемещений u_z

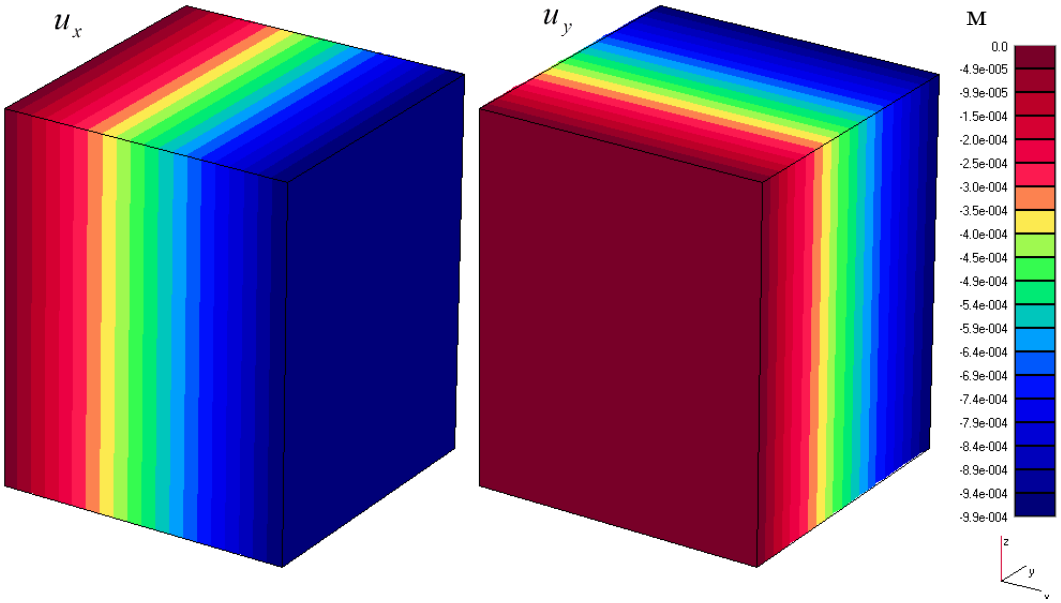

Рис. 44. Распределение полей перемещений: слева – u_x, справа – u_y.

3. Радиальная поляризация полого цилиндра

Рассматривается бесконечный полый толстостенный цилиндр с радиусами a и b. К внешней и внутренней границе цилиндра подсоединены электроды, создающие разность скалярных потенциалов. Потенциал на внешней границе равен нулю, потенциал на внутренней границе одинаков во всех точках границы, и равномерно возрастает во времени. Конечно-элементная модель, граничные условия изображены на Рис. 45. Цилиндр сделан из материала PZT PIC-151, модули которого приведены в п.IV.2.i. Размеры образца и величина нагрузки представлены в Таблице 11. С учетом центральной симметрии, КЭ модель является четвертью цилиндра. Модель состоит из 32 конечных элементов, содержит 90 узлов. Используется векторно-потенциальная формулировка, поэтому каждый узел обладает 6 степенями свободы.

Задача решена численно и аналитически при отсутствии электромеханической связи в [33], где использованы определяющие уравнения феноменологической модели [24]. В данной работе используется реологическая модель и решается полностью электромеханически связанная задача.

В процессе нагружения участки цилиндра переходят в нелинейное состояние, начиная с внутренних точек. (Рис. 49). При $\phi = \phi_{\max}$ внешняя часть цилиндра остается в линейном состоянии, что находит отражение в значении электрического поля в разных точках цилиндра (Рис. 46, Рис. 47). Распределение диэлектрических и механических смещений в конце нагружения представлено на Рис. 48.

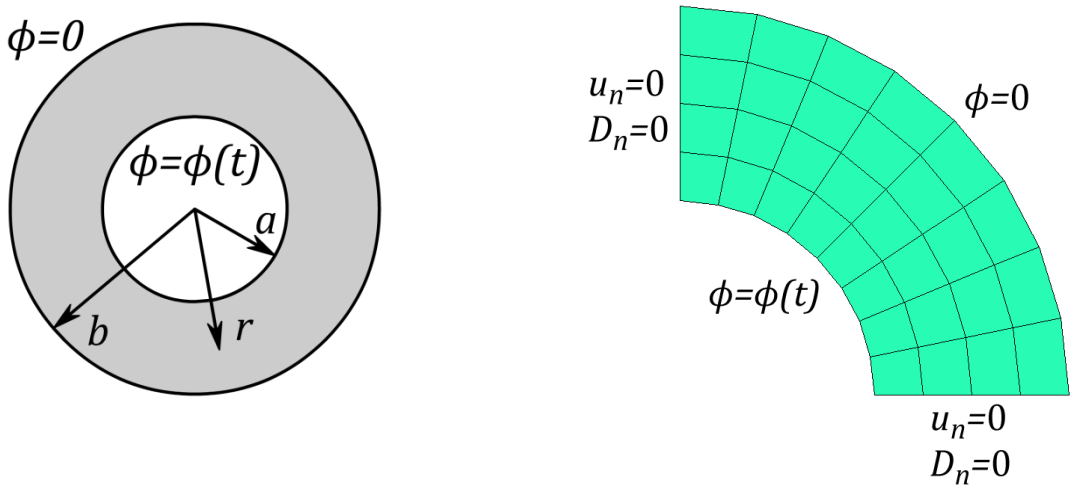

Рис. 45. Полый толстостенный цилиндр. Граничные условия и конечно-элементная модель

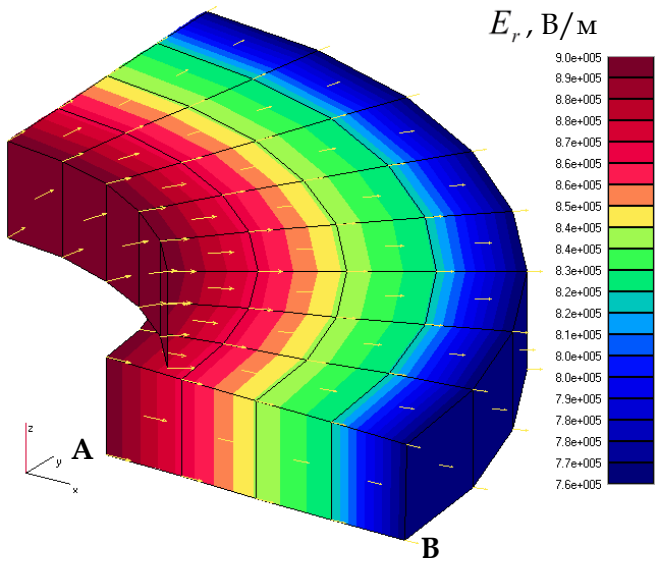

Рис. 46. Направление и интенсивность электрического поля

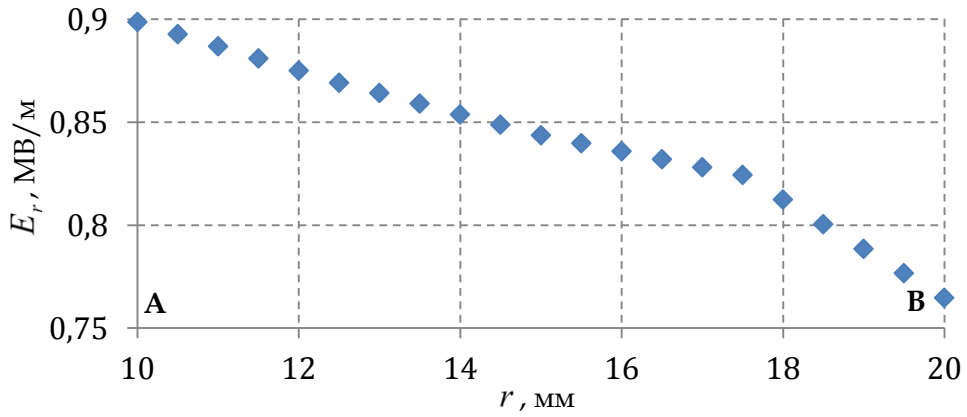

Рис. 47. Нелинейное распределение интенсивности электрического поля вдоль радиуса, вызванное переходом в нелинейное состояние внутренней части цилиндра

Таблица 11. Размеры образца и величина нагрузки в задаче поляризации цилиндра

Внутренний радиус	a	10	мм
Внешний радиус	b	20	мм
Потенциал на внутренней границе	$\phi_{\max}$	8401	В

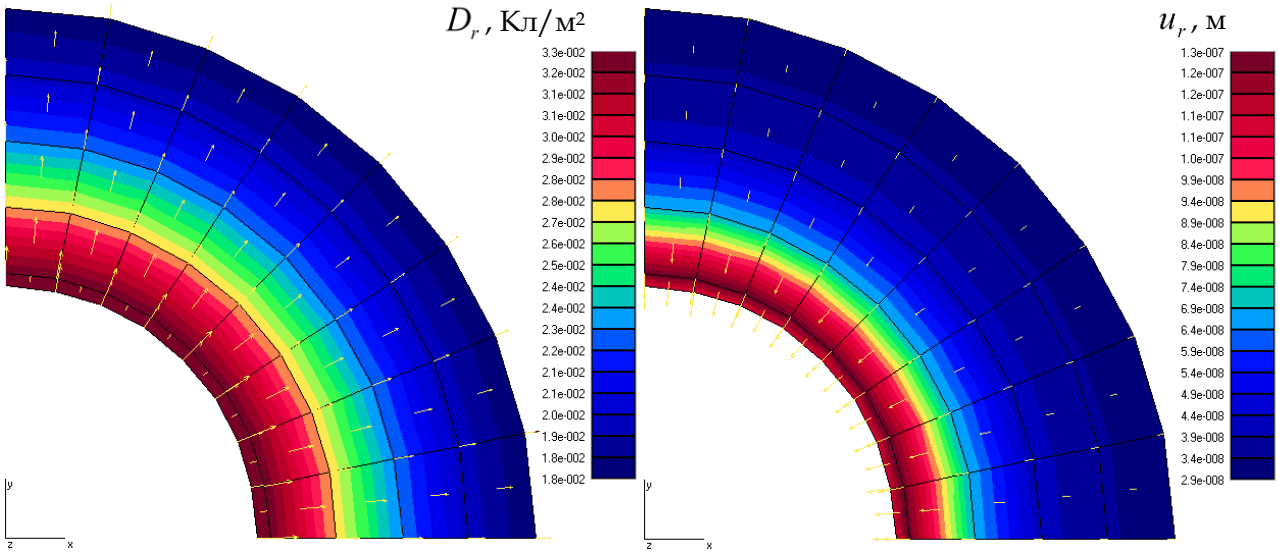

Рис. 48. Слева: направление и интенсивность диэлектрических смещений; справа: направление и интенсивность механических перемещений

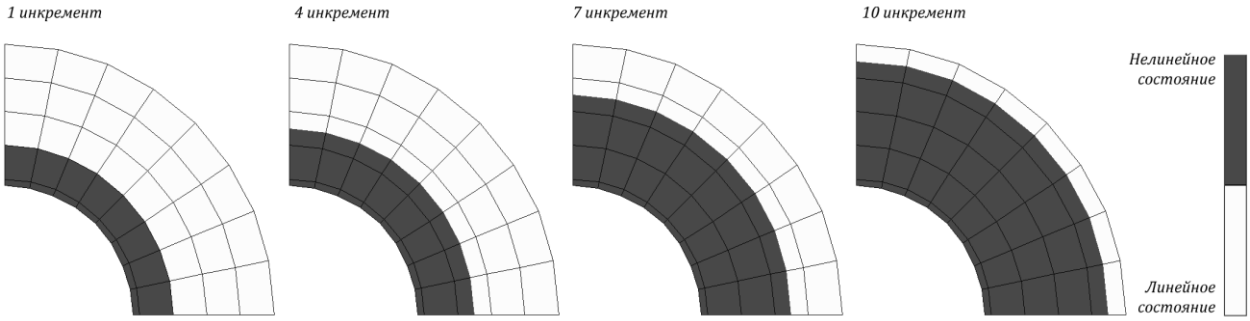

Рис. 49. Эволюция зоны нелинейности в процессе нагружения. Шаги по времени отсчитаны с момента перехода в нелинейное состояние

4. Поляризация пластины с цилиндрическим отверстием

Рассматривается прямоугольный параллелепипед размерами 20мм x 20мм x 6 мм с отверстием диаметром 4 мм. В образце, начиная с некоторого момента времени, создается разность потенциалов 2ϕ, причем ϕ равномерно увеличивается во времени и достигает $\phi_{\max} = 20$ кВ. Число шагов по времени в нелинейной фазе составляет 10. Конечно-элементная модель, граничные условия изображены на Рис. 50. Материал образца PZT PIC-151, модули которого приведены в п.IV.2.i. С учетом симметрии, КЭ модель является четвертью исходного образца. Модель состоит из 100 конечных элементов, содержит 242 узла. Сетка сгущается вблизи отверстия. Используется векторно-потенциальная формулировка, поэтому каждый узел обладает 6 степенями свободы.

На Рис. 51 – Рис. 57 представлены результаты моделирования. На Рис. 53 видно, что отверстие является концентратором электрического поля. На Рис. 55 изображены поля деформаций и напряжений в образце. Наибольшим является растягивающее напряжение $\sigma_y = 80$ МПа. На Рис. 55 видно, что σ_y резко возрастает вблизи отверстия.

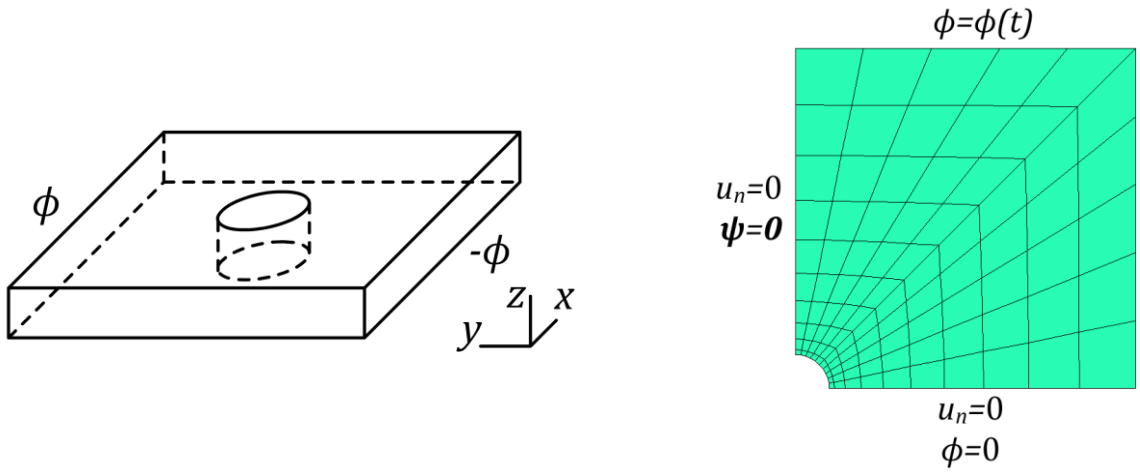

Рис. 50. Прямоугольный образец с отверстием. Граничные условия и КЭ модель

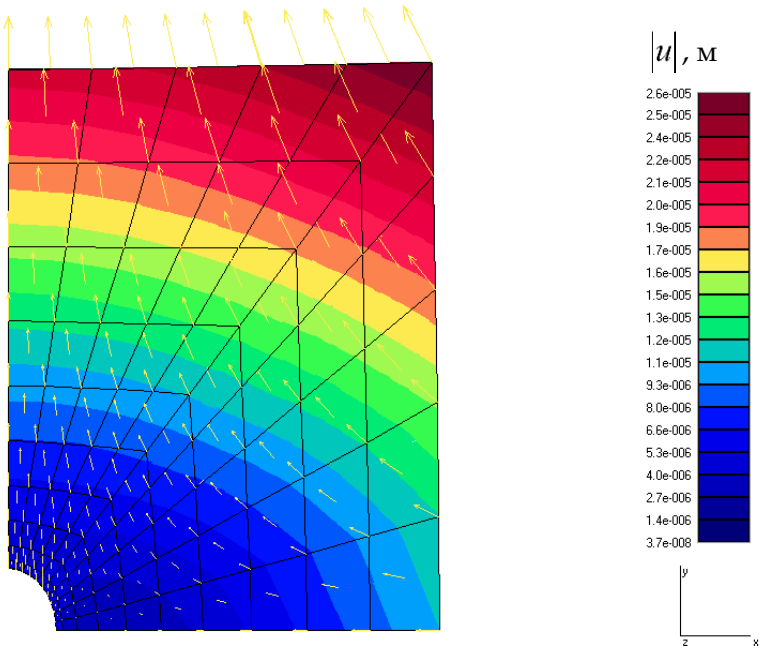

Рис. 51. Деформированное состояние, направление и величина перемещений, вызванных приложением разности потенциалов

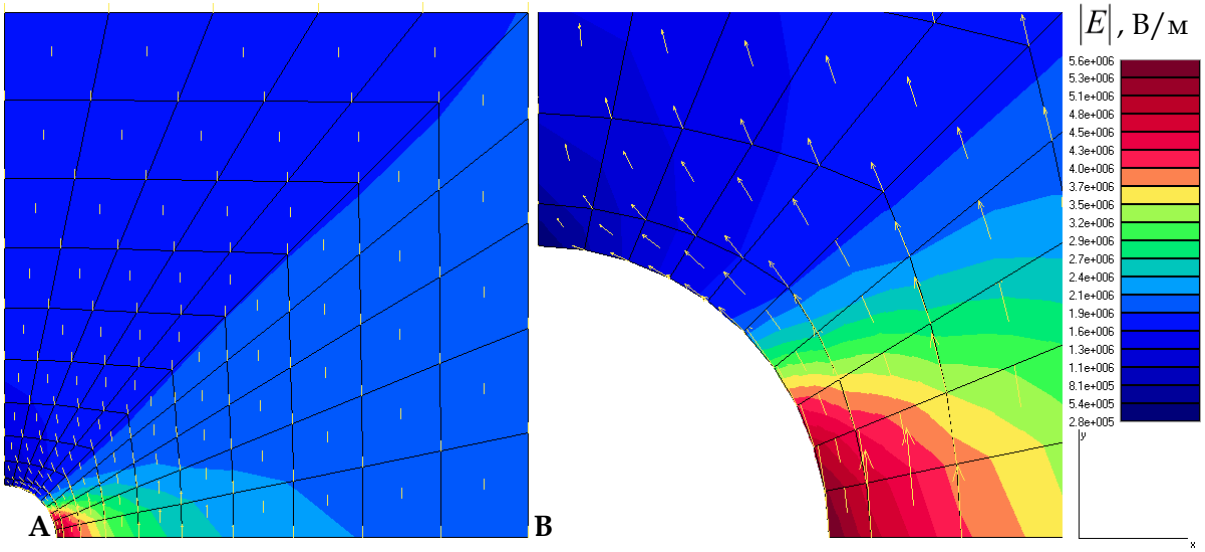

Рис. 52. Направление и интенсивность вектора напряженности электрического поля

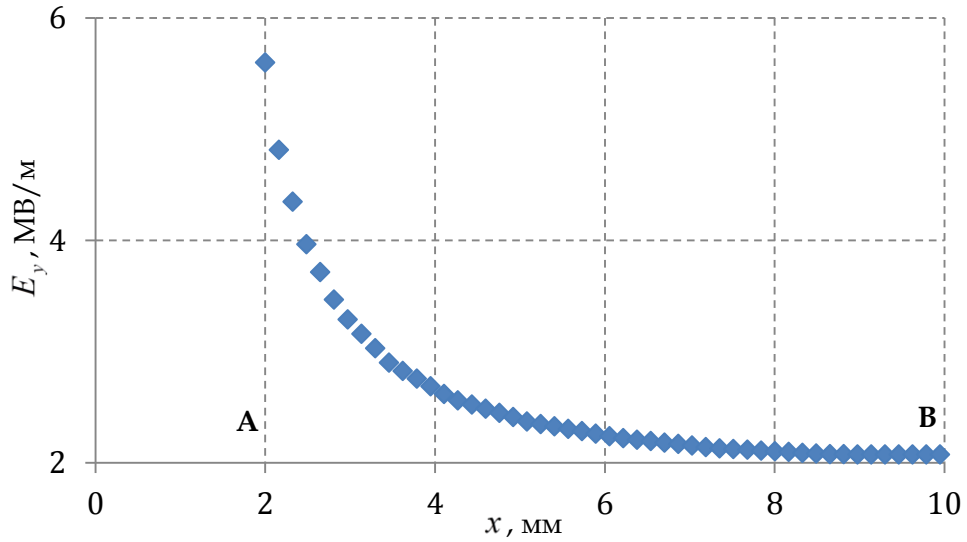

Рис. 53. Распределение E_y вдоль линии АБ (см. Рис. 52)

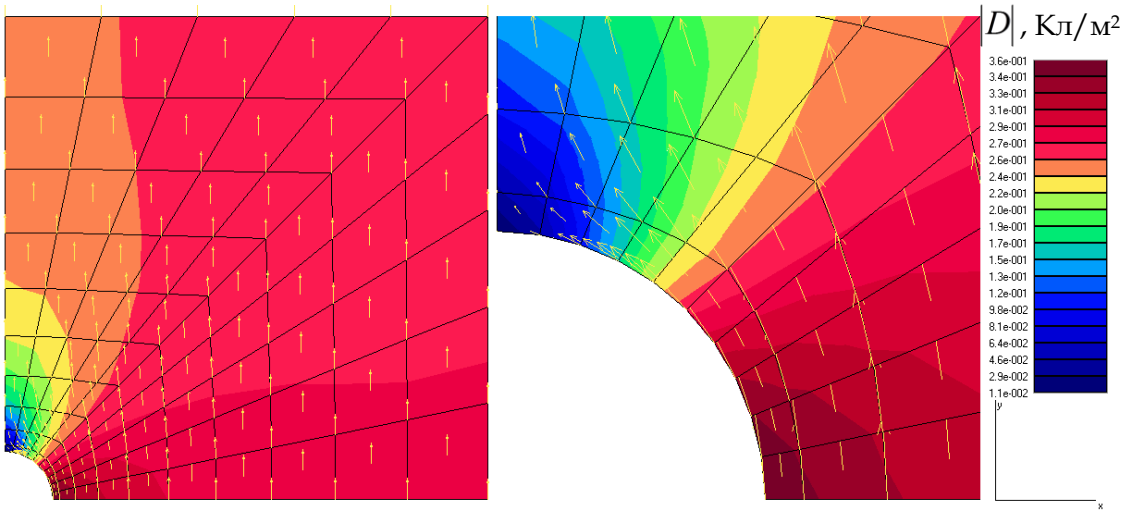

Рис. 54. Направление и интенсивность вектора диэлектрического смещения

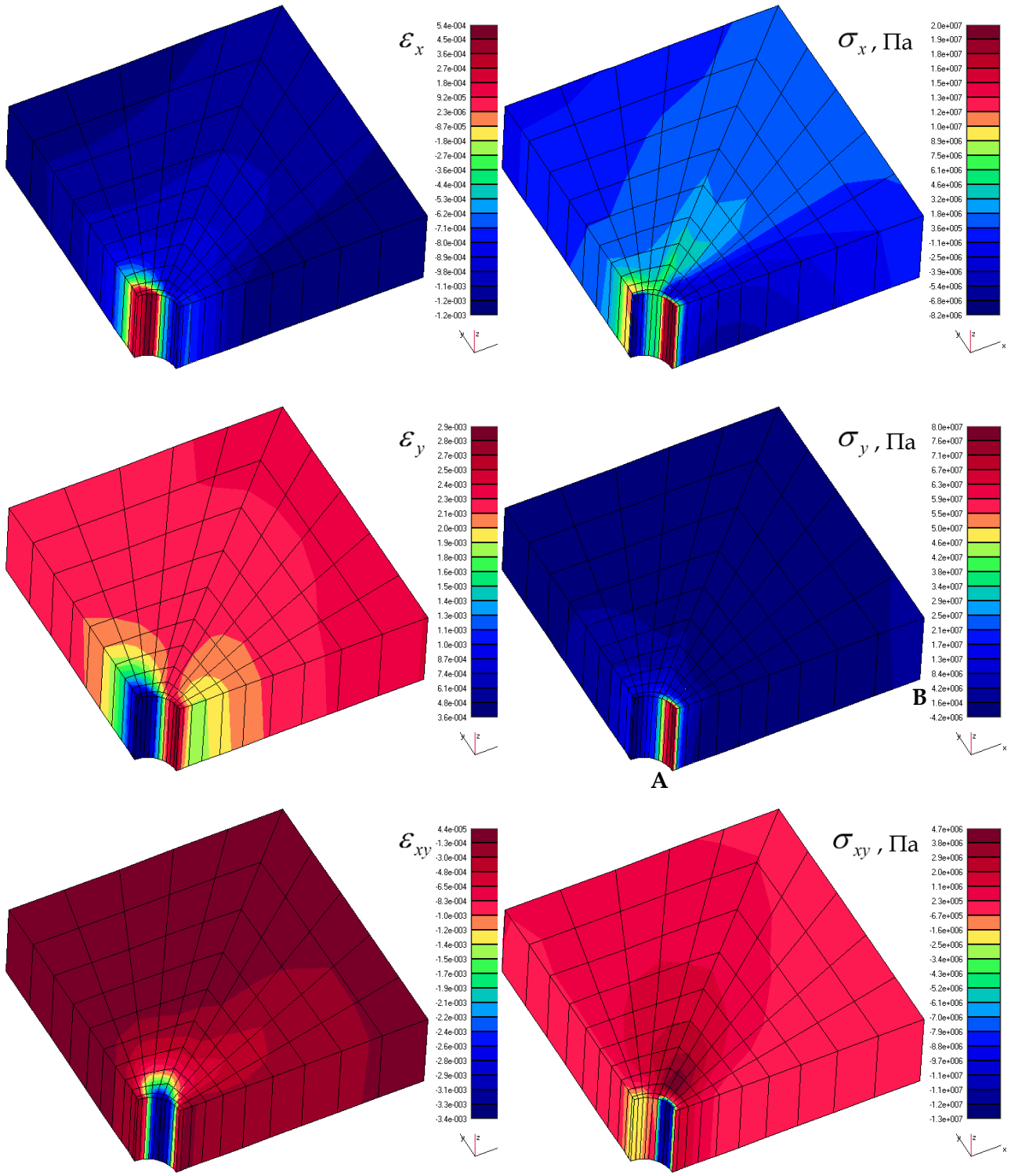

Рис. 55. Поля деформаций (слева) и напряжений (справа), вызванных приложенной разностью потенциалов

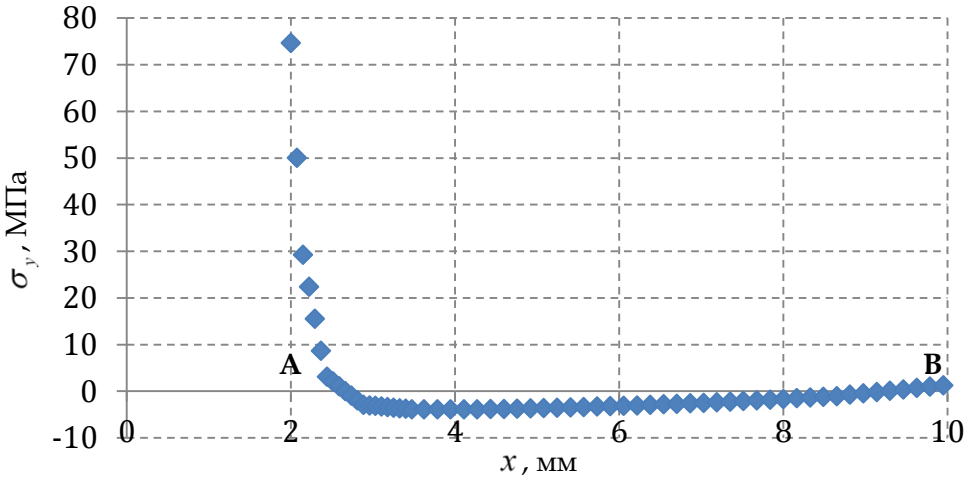

Рис. 56. Распределение σ_y вдоль линии AB (см. Рис. 55)

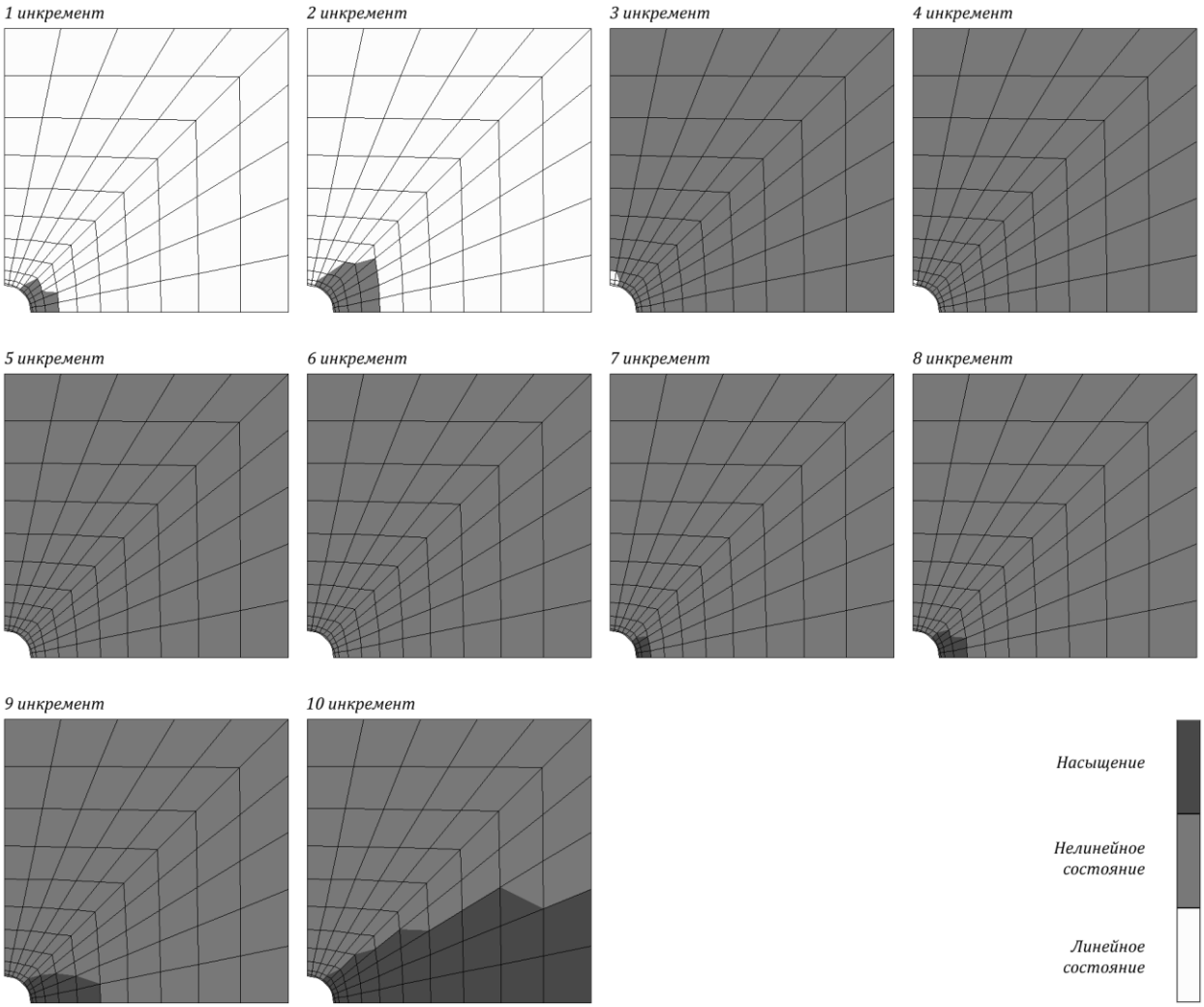

Рис. 57. Состояние участков образца в разные моменты времени. Шаги по времени отсчитаны с момента перехода в нелинейное состояние

5. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойного актуатора

Керамические многослойные актуаторы находят широкое применение в технических приложениях благодаря малым размерам, быстрому отклику, малому энергопотреблению, способностью создавать большое усилие [14]. Существуют различные способы подключения электродов к слоям актуатора. Одна из наиболее распространенных конструкций изображена на Рис. 58. Актуатор состоит из сотен слоев, разделенных тонкими металлическими пленками, которые являются электродами. Каждая из металлических пленок соединяется с одной стороны с наружным проводником, а другой стороной вставлена между керамическими слоями. Сингулярность напряжений в окрестности конца электрода является причиной разрушения керамики вблизи электрода [13,14, 21]. Причем эти напряжения присутствуют как во время работы актуатора, так и после снятия электрического поля [21], что объясняется нелинейным поведением материала и наличием остаточных деформаций.

Для моделирования многослойного актуатора с учетом симметрии рассматривается ячейка, отмеченная на Рис. 58 серым цветом, и изображенная в увеличенном масштабе. Размеры ячейки приняты 410 μм x 57.5 μм, нижний электрод обрывается в середине ячейки. Это типичные размеры подобных устройств [21, 14]. Модель одного слоя актуатора и граничные условия представлены на Рис. 59. Для моделирования используется материал PZT-5H, модули которого приведены в п.IV.2.i.

Модель состоит из 400 конечных элементов, содержит 693 узла. Сетка сгущается вблизи окончания нижнего электрода. Используется векторно-потенциальная формулировка, поэтому каждый узел обладает 6 степенями свободы.

На Рис. 60 – Рис. 64 представлены результаты моделирования. На Рис. 62 – Рис. 64 видно, что окончание электрода является концентратором механических напряжений.

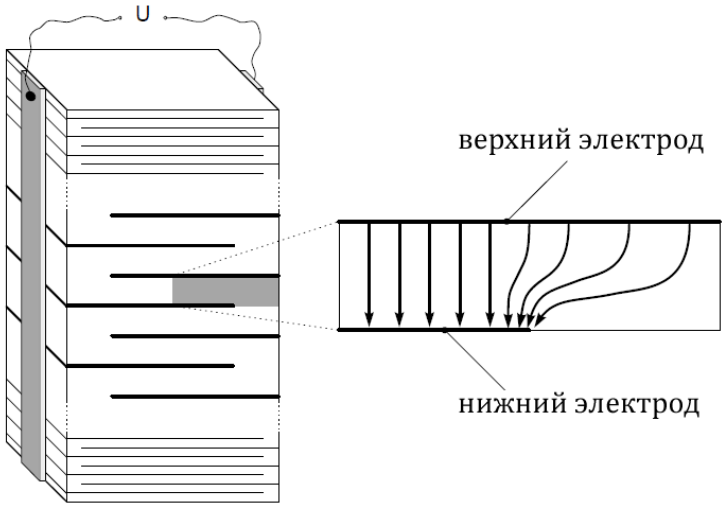

Рис. 58. Многослойный актуатор [4]

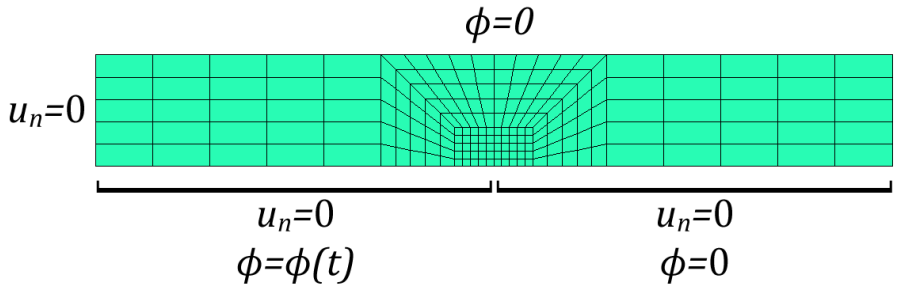

Рис. 59.Многослойный актуатор. КЭ модель и граничные условия

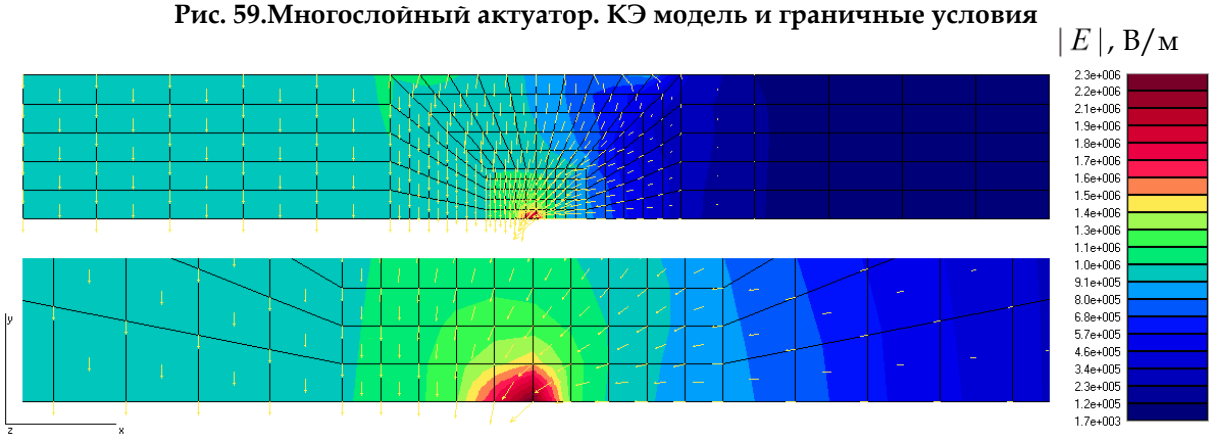

Рис. 60. Направление и интенсивность электрического поля в актуаторе (сверху), вблизи окончания электрода (снизу)

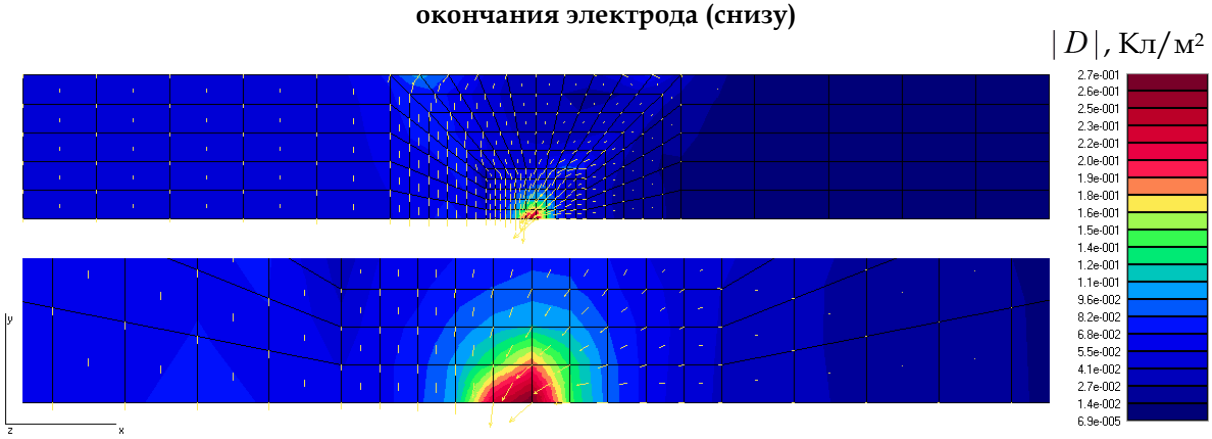

Рис. 61. Направление и интенсивность диэлектрического смещения в актуаторе (сверху), вблизи окончания электрода (снизу)

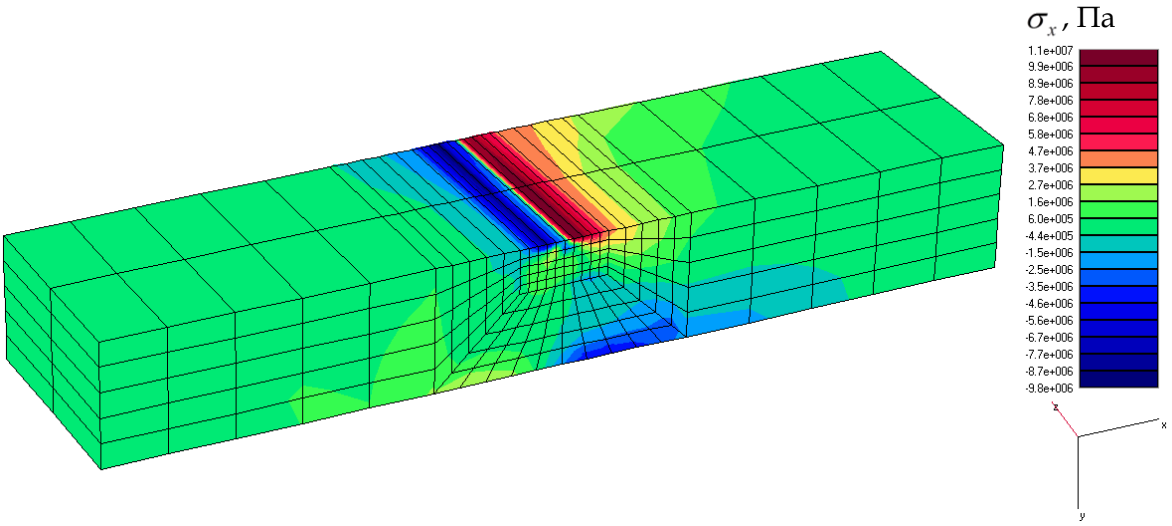

Рис. 62. Распределение поля напряжения σ_x в актуаторе

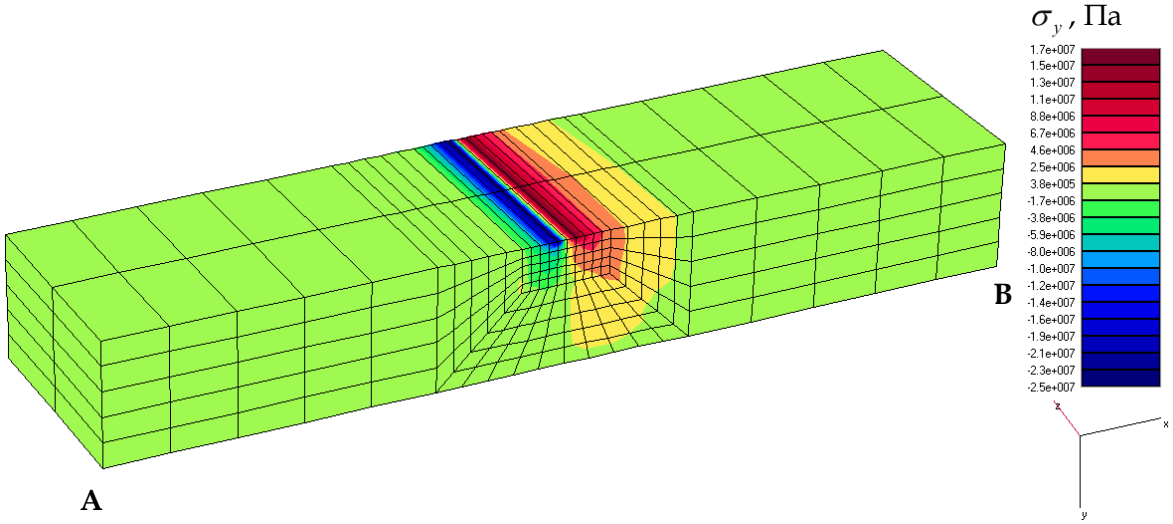

Рис. 63. Распределение поля напряжения σ_y в актуаторе

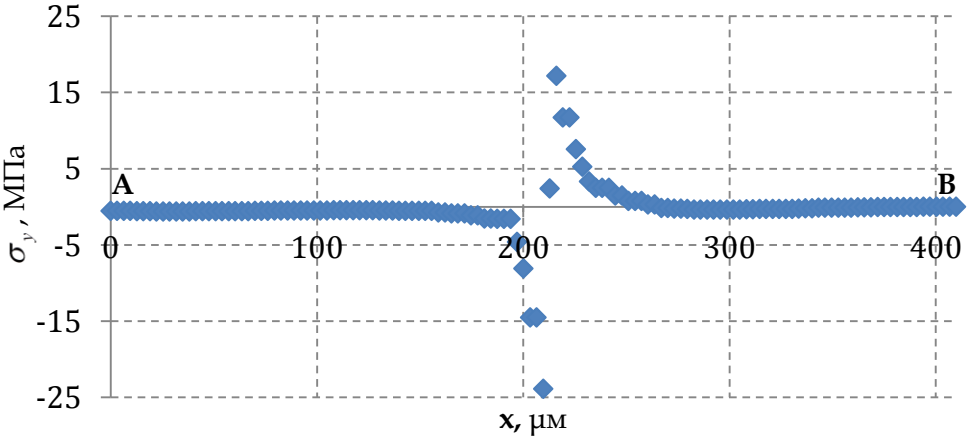

Рис. 64. Распределение напряжения σ_y вдоль линии AB

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Результаты

Следующие результаты впервые получены, и ранее не были заявлены другими авторами:

- Предложено использовать метод реологических (структурных) моделей, распространенный в механике деформируемого твердого тела, для решения электромеханически связанных краевых задач.
- Сформулированы определения трех электромеханически связанных реологических элементов. Проведена аналогия с механическими структурными элементами, дана термодинамическая и феноменологическая мотивация введенным определениям, рассмотрены особенности введенных реологических элементов.
- Подробно рассмотрена работа одноповерхностной реологической модели сегнетоэлектроэластика при различных видах нагружения. Получены выражения для скоростей деформаций и диэлектрических смещений в трех состояниях модели. Получены матрицы касательных модулей, соответствующие всем трем состояниям для всех способов нагружения.
- Рассмотрена многоповерхностная реологическая модель сегнетоэлектроэластика.
- Предложены формы тензоров, характеризующих линейные элементы реологической модели. Получена производная по поляризации тензора пьезоэлектрических модулей, заданного в различных формах.
- На основе метода возвратных отображений разработан и реализован алгоритм неявного интегрирования определяющих уравнений, полученных с использованием одно- или многоповерхностной реологической модели материала.
- Исследована работа реологической модели в условиях однородного поля при различных видах нагружения.
- Проведено сравнение результатов экспериментов одноосного электрического и механического нагружения с результатами расчета для материалов PZT-5H, PZT PIC-151. Идентифицированы некоторые параметры реологической модели.
- Алгоритм решения определяющих уравнений интегрирован в программу конечно-элементного анализа PANTOCRATOR. Решены четыре тестовые задачи.

2. Выводы

В ходе детального изучения возможностей метода реологических моделей для моделирования электромеханически связанных процессов в сегнетоэлектроупругих материалах были перепробованы многочисленные варианты определения связанных реологических элементов, различные типы элементов, способы задания упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических тензоров, способы соединения, реализованы различные численные схемы. Так как для описания ферроиков подход применяется впервые, то априорные оценки использования той или иной комбинации не всегда оказывались верными. Проведенные исследования и полученные результаты позволяют утверждать следующее:

- Метод реологических моделей *может* использоваться для моделирования связанных электромеханических процессов в различных сегнетоэлектриках и сегнетоэластиках. Так как реологическая модель является феноменологической, тот же аппарат может применяться для описания процессов в ферромагнетиках, где характер наблюдаемых на макроуровне магнитных свойств материала подобен характеру диэлектрических свойств сегнетоэлектриков.
- Определения электромеханических реологических элементов являются расширением определений механических элементов, поэтому определения связанных реологических элементов могут быть даны *различными способами*, не противоречащими законам термодинамики. При этом могут описываться или не описываться те или иные режимы нагружения материала. Предлагаемые в работе определения позволяют описать многоосное нагружение электрическим полем, непропорциональное нагружение механическим напряжением. При описании комбинированного нагружения в некоторых режимах возникают сложности, вызванные, по всей видимости, разрывом в значениях компонентов пьезоэлектрического тензора. В достаточно узком диапазоне параметров одноповерхностная модель лишена этого недостатка. Связанные реологические модели, кроме того, обладают рядом особенностей, не характерных чисто механическим аналогам: непостоянство и разрывы в значениях упругих модулей, наличие величин разных порядков в системе связанных уравнений, наличие большего числа состояний модели. Эти особенности находят свое отражение также при численном интегрировании определяющих уравнений.
- Параметры модели могут быть идентифицированы по данным экспериментов одноосного нагружения. При этом параметры реологической модели не всегда соответствуют общепринятым понятиям коэрцитивной силы, спонтанной поляризации, предела текучести, спонтанной деформации. Указанные параметры реологической модели зависят также от используемых определений простых элементов и числа звеньев модели.
- Для численного интегрирования определяющих уравнений сегнетоэлектроэластика, полученных с использованием реологической модели, может применяться *метод возвратных отображений* с неявной схемой Эйлера интегрирования

дифференциальных уравнений. При этом метод возвратных отображений должен быть модифицирован с учетом эффекта насыщения. Метод сходится в диапазоне параметров, соответствующем параметрам реальных материалов, однако при различных условиях нагружения эти диапазоны могут быть разными.

- Реологические модели сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков могут использоваться для решения электромеханически связанных краевых задач в нелинейной постановке методом конечных элементов. Матрицы касательных (тангенциальных) модулей, используемые в МКЭ не являются симметричными, тогда как в механике при использовании ассоциированного закона пластического течения матрица касательных модулей симметрична. Это негативно сказывается на скорости сходимости итерационных процедур при решении задач МКЭ. Возможно, при другом определении реологических элементов, удастся обеспечить симметричность касательной матрицы.

Плюсы и минусы реологических моделей сегнетоэлектроэластиков сведены в Таблицу 12.

Таблица 12. Преимущества и недостатки реологического подхода к описанию сегнетоэлектроэластиков

Преимущества	**Недостатки**
Наглядность визуального представления определяющих уравнений	Наличие эффектов, скрытых от интутивного представления о работе реологической модели
Каждый элемент отражает один эффект. Модификация элемента позволяет более точно описать этот эффект, добавление элемента позволяет учесть большее число эффектов. Законы термодинамики для сложной модели выполняются автоматически, если выполняются для простых элементов	Определение того или иного реологического элемента ограничено только термодинамикой. Сложно предугадать, как принятие той или иной гипотезы скажется на качестве модели
Увеличение количества звеньев модели позволяет более точно описать материал, а также проводить аналогию с поликристаллическим материалом	Необходимость совместного решения на каждом шаге интегрирования системы уравнений порядка 10N для всех N звеньев модели
Возможность применения мощного аппарата вычислительной пластичности для численного моделирования сегнетоэлектроэластиков	Наличие особенностей, отсутствующих в пластичности, ограничивающих возможности вычислительного аппарата теории пластичности и требующих дополнительной проработки
Высокий уровень параметризации позволяет удовлетворить результатам экспериментов одноосного нагружения	Оптимальный способ задания некоторых параметров, например тензора пьезоэлектрических модулей, пока не найден

VII. БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

1. Анализ и оценка условий труда в вычислительной лаборатории

Для решения задач компьютерного моделирования необходимо использование вычислительной техники. Практика работы с вычислительной техникой показывает, что наиболее эффективной работы и можно добиться при одновременном использовании большого числа электронно-вычислительных машин, сосредоточенных в вычислительном центре (ВЦ), и при тесном сотрудничестве специалистов различного профиля. Критериями выбора оптимального варианта организации работы в ВЦ является техническая эффективность и соответствие требованиям эргономики и охраны труда. Эргономикой изучаются возможности и особенности деятельности человека в процессе труда с целью создания таких условий, методов и организаций трудовой деятельности, которые делают трудовой процесс наиболее производительным и вместе с тем обеспечивают безопасность и удобство работающему, сохраняют его здоровье и работоспособность [66].

Аттестация рабочих мест осуществляется по условиям труда и фактору травмоопасности с учетом обеспеченности работников средствами индивидуальной защиты. Условия труда определяются с помощью гигиенических критериев по показателям вредности и опасности факторов производственной среды, тяжести и напряженности трудового процесса. В современных условиях любой труд человека связан с производственным процессом или выполняется с применением техники. В основе умственного труда лежат восприятие, переработка информации и принятие решений. Особенностью данного вида труда является повышенное эмоциональное напряжение, напряжение слуха и зрения и в отдельных случаях – однообразие и простота выполняемых функций (монотония), а также пониженная мышечная активность (гипокинезия).

По природе действия вредные и опасные факторы подразделяются на следующие группы:

- **Физические факторы**: температура, влажность и подвижность воздуха, неионизирующие электромагнитные излучения (ультрафиолетовое, видимое, инфракрасное, лазерное, микроволновое, радиочастотное, низкочастотное), статическое, электрические и магнитные поля, ионизирующие излучения, производственный шум, вибрация (локальная, общая), ультразвук, аэрозоли преимущественно фиброгенного действия (пыли), освещенность (отсутствие естественного освещения, недостаточная освещенность, повышенная ультрафиолетовая радиация);
- **Химические факторы**, в том числе некоторые вещества биологической природы (антибиотики, витамины, гормоны, ферменты);

- **Биологические факторы**: патогенные микроорганизмы, микроорганизмы продуценты, препараты, содержащие живые клетки и споры микроорганизмов, белковые препараты;
- **Факторы трудового процесса, характеризующие тяжесть физического труда**: физическая динамическая нагрузка, масса поднимаемого и перемещаемого груза, стереотипные рабочие движения, статическая нагрузка, рабочая поза, наклоны корпуса, перемещение в пространстве;
- **Факторы трудового процесса, характеризующие напряженность труда**: интеллектуальные, сенсорные, эмоциональные нагрузки, монотонность нагрузок, режим работы.

i. Классы условий труда

Условия труда на рабочем месте в соответствии с гигиеническими критериями оценки подразделяются на четыре класса:

1-й класс – **оптимальные** условия труда – такие условия, при которых сохраняется не только здоровье работающих, но и создаются предпосылки для поддержания высокого уровня работоспособности. Оптимальные нормативы производственных факторов установлены для микроклиматических параметров и факторов трудового процесса. Для других факторов условно за оптимальные принимаются такие условия труда, при которых неблагоприятные факторы не превышают уровни, принятые в качестве безопасных для населения.

2-й класс – **допустимые** условия труда – характеризуются такими уровнями факторов среды и трудового процесса, которые не превышают установленных гигиеническими нормативами для рабочих мест, а возможные изменения функционального состояния организма восстанавливаются во время регламентированного отдыха или к началу следующей смены и не должны оказывать неблагоприятного воздействия в ближайшем и отдаленном периоде на состояние здоровья работающих и их потомство. Оптимальный и допустимый классы соответствуют безопасным условиям труда.

3-й класс – **вредные** условия труда – характеризуются наличием вредных производственных факторов, превышающих гигиенические нормативы и оказывающих неблагоприятное воздействие на организм работающего и/или его потомство. Вредные условия труда по степени превышения гигиенических нормативов и выраженности изменений в организме работающих подразделяются на четыре степени вредности:

1-я степень 3-го класса – условия труда, характеризующиеся такими отклонениями от гигиенических нормативов, которые, как правило, вызывают обратимые функциональные изменения и обусловливают риск развития заболеваемости;

2-я степень 3-го класса – условия труда с такими уровнями производственных факторов, которые могут вызывать стойкие функциональные нарушения, приводящие в большинстве случаев к росту заболеваемости с временной утратой трудоспособности, повышению частоты общей заболеваемости, появлению начальных признаков профессиональной патологии;

3-я степень 3-го класса – условия труда, характеризующиеся такими уровнями вредных факторов, которые приводят к развитию, как правило, профессиональной патологии в

легких формах в период трудовой деятельности, росту хронической общесоматической патологии, включая повышенные уровни заболеваемости с временной утратой трудоспособности;

4-я степень 3-го класса – условия труда, при которых могут возникать выраженные формы профессиональных заболеваний, отмечаются значительный рост хронической патологии и высокие уровни заболеваемости с временной утратой трудоспособности;

4-й класс --- **опасные (экстремальные)** условия труда – характеризуются такими уровнями производственных факторов, воздействие которых в течение рабочей смены (или ее части) создает угрозу для жизни, высокий риск возникновения тяжелых форм острых профессиональных поражений.

ii. Гигиенические критерии условий труда

Классы условий труда определяются в зависимости от уровня гигиенических нормативов факторов производственной среды, показателей тяжести и напряженности трудового процесса [58]:

1. содержание в воздухе рабочей зоны вредных веществ;
2. показатели ионизирующих излучений на рабочих местах;
3. показатели электромагнитных излучений на рабочих местах;
4. показатели шума и вибрации на рабочих местах;
5. параметры световой среды производственных помещений;
6. показатели микроклимата в рабочей зоне;
7. эргономические требования;
8. показатели напряженности трудового процесса.

iii. Оценка критериев производственной среды

Содержание в воздухе рабочей зоны вредных веществ

Содержание вредных химических веществ в производственных помещениях, работа на видеодисплейных терминалах (ВДТ) и персональных электронно-вычислительных машинах (ПЭВМ) в которых является основной (диспетчерские, операторские, расчетные, кабины и посты управления, залы вычислительной техники и др.), не должно превышать «Предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест» [62, 63].

Излучения

В настоящее время электронно-лучевые дисплеи практически повсеместно заменены жидкокристаллическими, в которых отсутствует излучение электронно-лучевой трубки дисплея (рентгеновское, радиочастотное, видимое и ультрафиолетовое). Однако работа за компьютером, особенно длительное время, вредит зрению даже с использованием ЖК мониторов. Экран видеомонитора должен находиться от глаз пользователя на оптимальном расстоянии 600-700 мм, но не ближе 500 мм с учетом размеров алфавитно-цифровых знаков и символов. Продолжительность непрерывной работы с ВДТ без регламентированного перерыва не должна превышать 2часов. Рекомендуется использовать комплексы упражнений для глаз [65].

Уровень шума

На рабочем месте программиста источником шума является вычислительная машина, производящая постоянный небольшой шум. Шум представляет собой сочетание звуков, различных по интенсивности и частоте в частотном диапазоне 16--20 кГц, не несущих полезной информации. Шум вредно воздействует не только на органы слуха, но и на весь организм человека в целом через центральную нервную систему. Шум – причина преждевременного утомления, ослабления внимания, памяти. Постоянным считается шум, уровень звука которого за 8-часовой рабочий день изменяется во времени не более чем на 5дБА. Предельно допустимый уровень (ПДУ) шума 50 дБ (для помещения в котором осуществляется эксплуатация ЭВМ) [67, 64].

Мой персональный компьютер является шумным для своего класса, однако для моего рабочего помещения уровень шума не превышает ПДУ, что соответствует второму (допустимому) классу условий труда. Поэтому применение специальных звукоизоляционных материалов не требуется. Воздействие вибрации, инфра- и ультразвука в помещении отсутствует.

Освещение

Помещения с ВДТ и ПЭВМ должны иметь естественное и искусственное освещение. Естественное освещение должно осуществляться через светопроемы, ориентированные преимущественно на север и северо-восток, и обеспечивать коэффициент естественной освещенности (КЕО) не ниже 1.2% в зонах с устойчивым снежным покровом и не ниже 1.5 на остальной территории [61].

Мое рабочее помещение обладает достаточным естественным (окна) и искусственным (система общего равномерного освещения) освещением, а также мое рабочее место дополнительно оборудовано светильниками местного освещения.

Микроклиматические условия

Устанавливаемые СанПиН [66] и Гигиеническими требованиями к микроклимату производственных помещений [60] оптимальные нормы температуры (23-25°С) и относительной влажности (40-60%) для теплого периода года, а также (22-24 °С) и (40-60%) соответственно для холодного и переходного, скорости движения воздуха соблюдаются благодаря наличию системы кондиционирования, работающей в режиме автоматического регулирования. Скорость движения воздуха не превышает допустимого значения (<0.1м/с, как для холодного, так и для теплого периода).

Эргономические требования

Рассмотрим более подробно требования эргономики, предъявляемые к рабочему месту оператора при работе с ВДТ. Под рабочим местом понимается зона, оснащенная необходимыми техническими средствами, в которой совершается трудовая деятельность исполнителя или группы исполнителей, совместно выполняющих одну работу или операцию. Организацией рабочего места называется система мероприятий по оснащению рабочего места средствами и предметами труда и их размещению в определенном порядке. Конструкция рабочего места должна обеспечивать быстроту, безопасность, простоту и экономичность технического обслуживания в нормальных и аварийных условиях; полностью отвечать функциональным требованиям и предполагаемым условиям эксплуатации. Площадь на одно рабочее место с ВДТ или ПЭВМ для взрослых пользователей должна составлять не менее 6.0кв. м., а объем не менее

20.0 куб. м.. Рабочие места с ВДТ и ПЭВМ при выполнении творческой работы, требующей значительного умственного напряжения или высокой концентрации внимания, следует изолировать друг от друга перегородками высотой 1.5-2.0 м.

В моем конкретном случае эти условия выполняются.

Конструкция рабочего стола должна обеспечивать оптимальное размещение на рабочей поверхности используемого оборудования с учетом его количества и конструктивных особенностей (размер ВДТ и ПЭВМ, клавиатуры и др.), характера выполняемой работы. При этом допускается использование рабочих столов различных конструкций, отвечающих современным требованиям эргономики. Высота рабочей поверхности стола для взрослых пользователей должна регулироваться в пределах 680-800 мм; при отсутствии такой возможности высота рабочей поверхности стола должна составлять 725 мм. Конструкция рабочего стула (кресла) должна обеспечивать подержание рациональной рабочей позы при работе на ВДТ и ПЭВМ, позволять изменять позу с целью снижения статического напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления. Тип рабочего стула (кресла) должен выбираться в зависимости от характера и продолжительности работы с ВДТ и ПЭВМ с учетом роста пользователя. Рабочий стул (кресло) должен быть подъемно-поворотным и регулируемым по высоте и углам наклона сиденья и спинки, а также расстоянию спинки от переднего края сиденья, при этом регулировка каждого параметра должна быть независимой, легко осуществляемой и иметь надежную фиксацию. Поверхность сиденья, спинки и других элементов стула (кресла) должна быть полумягкой, с нескользящим, неэлектризующимся и воздухонепроницаемым покрытием, обеспечивающим легкую очистку от загрязнений. Клавиатуру следует располагать на поверхности стола на расстоянии 100--300 мм от края, обращенного к пользователю, или на специальной, регулируемой по высоте рабочей поверхности, отделенной от основной столешницы.

Мой стол является не регулируемым по высоте, высота рабочей поверхности составляет 725 мм, что удовлетворяет необходимым требованиям. Рабочий стул также удовлетворяет предъявляемым требованиям.

Напряженность трудового процесса

Тяжесть моего трудового процесса можно отнести к оптимальному классу условий труда (легкая физическая нагрузка): работа связана с интеллектуальной нагрузкой, есть возможность в любое время менять рабочую позу прерываться для отдыха. Как видно из всего выше написанного, моя рабочая обстановка является оптимальной и соответствует всем установленным нормам. Так как выполняемый мной вид работ относится к интеллектуальному виду деятельности, то основная нагрузка на организм ложится на нервную систему и зрение. Остальные факторы являются сопутствующими.

Оценка моей рабочей деятельности по степени напряженности:

- Содержание работы (интеллектуальные нагрузки)
    - решение сложных задач с выбором по известным алгоритмам (напряженный труд 1-ой степени);
    - иногда эвристическая, творческая деятельность, требующая решения сложных задач при отсутствии алгоритма (напряженный труд 2-ой степени);
- Степень сложности задания (интеллектуальные нагрузки)

    - Обработка, выполнение задания и его проверка (Допустимый уровень, напряженность труда средней степени)

- Характер выполняемой работы (интеллектуальные нагрузки)
    - Большая часть времени – работа по установленному графику с возможной его коррекцией по ходу деятельности (напряженный труд 1-ой степени);
    - иногда – работа в условиях дефицита времени и информации с повышенной ответственностью за конечный результат (напряженный труд 2-ой степени);

- Наблюдение за экранами ВДТ (сенсорные нагрузки)
    - более четырех часов за рабочий день (напряженный труд 2-ой степени);

- Степень ответственности (эмоциональная нагрузка)
    - Несет ответственность за функциональное качество основной работы. Влечет за собой исправления за счет дополнительных усилий всего коллектива (напряженный труд 2-ой степени);

- Степень риска для собственной жизни (эмоциональная нагрузка)
    - исключена (напряженность труда легкой степени);

- Степень риска за безопасность других лиц (эмоциональная нагрузка)
    - исключена (напряженность труда легкой степени);

- Фактическая продолжительность рабочего дня (режим работы)
        - 8 – 9 часов (напряженность труда средней степени).

Подводя итог, можно сказать, что условия труда в моем случае являются оптимальными, а сам трудовой процесс можно отнести к напряженному по количеству условий, относящихся к напряженному труду первой и второй степени.

VIII. БИБЛИОГРАФИЯ

1. Allik H., Hughes T.J.R. Finite element method for piezoelectric vibration // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1970. №2. C.151–57.

2. Bassiouny E., Ghaleb A.F., Maugin G.A. Thermomechanical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-I. Basic Equations, II. Poling of Ceramics. Int. J. Engng. Sci. 1988 г., T. 26, стр. 1279-1306.

3. Belov A.Yu., Kreher W.S. Simulation of microstructure evolution in polycrystalline ferroelectrics-ferroelastics // Acta Mater. 2006. Vol. 54, P. 3463–3469.

4. Boehle U. Phaenomenologische Modellierung und Finite-Elemente-Simulationen von nichtliniaren elektromechanischen Vorgaegen in ferroelectrischen Materialien. Genehmigte dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eins Doktors der Ingenieurwissenschaften von der Fakultat fuer Maschinenbau der Universitaet Karlsruhe. Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe. 1999.

5. Busch G., Scherer P. A New Seignette-Electric Substance // Naturwiss, №23. C.737-38. 1935

6. Chen P. J., Percy P. S. One Dimentional Dynamic Electromechanical Constitutive Relations of Ferroelectric Materials. Acta Mech. 1979 г., T. 31, стр. 231-241.

7. Chen P.J., Madsen M.M. One Dimentional Polar Responses of the Electrooptic Ceramics PLZT 7/65/35 Due to Domain Switching. Acta Mech. 1981 г., T. 41, стр. 255-264.

8. Chen P.J., Mongomery S. T. A Macroscopic Theory for the Existence of the Hysteresis and Butterfly Loops in Ferroelectricity. Ferroelectrics. 1980 г., T. 23, стр. 199-208.

9. Chen Y.H., Lu Tj. 2003. Cracks and fracture in piezoelectrics // Adv.Appl.Mech. 39, 121-213

10. Cross L.E., Newnham R.E. History of Ferroelectrics // Ceramics and Civilization. T.3 High-Technology Ceramics – Past Present and Future. American Ceramic Society. 1987.

11. Daining Fang, Changqing Li. Nonlinear electric-mechaniocal behavior of a soft PZT-51 ferroelectric ceramic. Journal of Materials Science. 1999 г., T. 34, стр. 4001-4010.

12. Devonshire A. F. //Philos. Mag. 1949. T.40, C.42.

13. Futura A., Uchino K. Dynamic observation of crack propagation in piezoelectric multilayer actuators. J. Am. Ceram. Soc. 76, 1615-1617. 1993.

14. Gong X., Suo Z. Reliability of Ceramic Multilayer Actuators: a Nonlinear Finite Element Solution // J. Mech. Phys. Solids. Vol. 44 N. 5, pp. 751-769. 1996.

15. Gray B. Transducer and Method of Making Same. U.S. Patent No. 2 486560. 1946.

16. Huber J.E. Ferroelectrics: models and applications. A thesis submitted for the degree of Ph.D. in the University of Cambridge. Peterhouse. 1998.

17. Huber J.E., Fleck N.A., Landis, C.M., McMeeking, R.M. A constitutive model for ferroelectric polycrystals // J.Mech. Phys. Solids 47, 1663–1697. 1999.

18. Huber J.E., Fleck N.A.. Multi-axial electrical switching of a ferroelectric: theory versus experiment // J. Mech. Phys. Solids 49, 785–811. 2001.

19. Hwang S.C., Lynch C.S., McMeeking R. M. Ferroelectric/Ferroelastic Interactions and a polzrization switching model // Acta Metall. Mater. v. 43 №5. C.2073-84. 1995.

20. Kamlah M. Ferroelectric and ferroelastic piezoceramics – modeling of electromechanical hysteresis phenomena // Continuum Mech. Thermodyn. 13: 219–268. 2001

21. Kamlah M., Boehle U., Munz D. On a non-linear finite element method for piezoelectric structures made of hysteretic ferroelectric ceramics // Comp. Mat. Sc. 19. 81-86. 2000.

22. Kamlah M., Tsakmakis C. Phenomenological modeling of the non-linear electromechanical coupling in ferroelectrics. Int. J. Solids Struct. 36, 669–695. 1999.

23. Landis C.M. A new finite-element formulation for electromechanical boundary value problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002; №55. C.613–28.

24. Landis C. M. Fully coupled, multi-axial, symmetric constitutive laws for polycrystalline ferroelectric ceramics. J. Mech. Phys. Solids 50. 2001. p. 127-152.

25. Lynch C.S. Electro-Mechanical Coupling in 8/65/35 PLZT // Acta Mater. v. 44. C.4137-41. 1996

26. Merz W. Domain Formation and Domain Wall Motions in Ferroelectric $BaTiO_3$ Single Crystals. Phys. Rev. №96(6). C. 690-98. 1954.

27. Morgan Matroc Ltd. Piezoelectric Ceramics. Vauxhall Industrial Estate, Ruabon, Wrexham, Clwyd LL14 6HY. UK.

28. Mueller H. Properties of Rochelle Salt IV // Phys. Rev. №58(9). C.805-11. 1940

29. Pathak A., McMeeking R.M. Three-dimensional FE simulations of ferroelectric polycrystals under electrical and mechanical loading // J Mech. and Phys. of Solids. 2008, P. 663-683.

30. Sawaguchi E. Ferroelectriciry vs. Antiferroelectricity in the Solid Solutions of $PbZrO_3$: $PbTiO_3$ // J. Phys. Soc. Jpn., 8(5). C.615-29. 1953.

31. Semenov A.S., Balke H. Nonlinear Finite Element Analysis of Fully Coupled Electro-mechanical Problem. Materials of the seventh inter-national conference on reliability of materials and structures RELMAS 2008, St. Petersburg. Polytechnic University publishing office.

32. Semenov A.S., Kessler H., Liskowsky A.C., Balke H. On a vector potential formulation for 3D electromechanical finite element analysis // Communications in Numerical Methods in Engineering 2006. №22. C.357–75.

33. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity

34. Shirane G., Takeda A. Phase Transitions in Solid Solutions of $PbZrO_3$, and $PbTiO_3$. I. Small concentrarion of $PbTiO_3$ // J. Phys. Soc. Jpn., №7(1) C. 5-11. 1952

35. Valasek J. Piezoelectric Activity of Rochelle Salt Under Various Conditions // Phys. Rev. №19(5). C.478-91. 1922.

36. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Butterworth-Heinemann, Reed Educational and Professional Publishing, Ltd. Oxford, UK. 2000.

37. Zhou D. Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics.

38. Гинзбург В. Л. // ЖЭТФ 15. 1945. С.739.

39. Гриднев С. А. Сегнетоэластики – новый класс кристаллических твердых тел // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т.6 №8. С.100.

40. Гриднев С. А. Электрические кристаллы // Соросовский образовательный журнал, 1996. №7. С.99-104.

41. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. М.: Наука. 1968.

42. Курчатов И. В. Избранные труды в трех томах. Том 1. Сегнетоэлектричество. М.: Наука, 1982.

43. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.II «Теория поля». С.95. М.: Наука, 1988.

44. Ле-Захаров С. А. Моделирование поведения ферро-электро-упругих материалов при циклическом нагружении на основе реологических моделей. Выпускная работа бакалавра. Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, физико-механический факультет, кафедра «Механика и процессы управления». 2009.

45. Ле-Захаров С.А., Семенов А.С. Аппроксимация гипергеометрической функцией потенциала ферроэлектроупругого материала // XXXVII Неделя науки СПбГПУ. Материалы Всероссийской межвузовской научной конференции. Ч. V. С.-Петербург. СПбПУ. 2008. С. 67-69.

46. Ле-Захаров С.А., Семенов А.С. Гипергеометрическая аппроксимация свободной энергии ферроэлектроупругого материала // Материалы лучших докладов XXXVII Недели науки СПбГПУ. С.-Петербург. СПбПУ. 2008. С. 50-52.

47. Ле-Захаров С.А., Семёнов А.С. Влияние степени связанности электрических и механических процессов на поведение реологических моделей сегнетоэлектроупругих материалов // XXXIX Неделя науки СПбГПУ. Материалы международной научно-практической конференции. Ч. V. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2010. С. 63-66.

48. Ле-Захаров С.А., Семёнов А.С. Моделирование явления реполяризации сегнетоэлектроэластиков с использованием электромеханических реологических моделей // XXXIX Неделя науки СПбГПУ. Материалы международной научно-практической конференции. Ч. I. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2010. С. 387-389.

49. Ле-Захаров С.А., Семёнов А.С., Мельников Б.Е Необходимость использования неклассических реологических элементов для описания эффекта насыщения сегнетоэлектриков/сегнетоэластиков // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ. Материалы международной научно-практической конференции. Ч. I. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2009. С. 411-413.

50. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб.: Профессия. 2007.

51. Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976.

52. Семёнов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технич. пробл. прогнозирования надежн. и долговечн. конструкций и методы их решения". С.-Петербург. Изд-во СПбГПУ, 2003. 466-480.

53. Семёнов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. СПб : Издательство Политехнического университета, 2008.

54. Семёнов А.С., Лисковски А.Ч., Ноймайстер П., Бальке Х., Ле-Захаров С.А., Додонов П.А., Мельников Б.Е. Эффективные методы решения нелинейных краевых задач сегнетоэлектроупругости. Морские Интеллектуальные Технологии. 2010. № 1. С. 55-61.

55. Семёнов А.С., Лисковски А.Ч., Ноймайстер П., Бальке Х., Ле-Захаров С.А., Додонов П.А., Мельников Б.Е. Эффективные методы решения нелинейных конечно-элементных задач сегнетоэлектроупругости // Тезисы докл. XXIII межд. конф. "Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов". С.-Петербург. 2009. С. 189-190.
56. Семёнов А.С., Лисковски А.Ч., Ноймайстер П., Бальке Х., Ле-Захаров С.А., Додонов П.А., Мельников Б.Е. Эффективные методы решения нелинейных конечно-элементных задач сегнетоэлектроупругости // Труды XXIII межд. конф. "Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов". С.-Петербург. 2009. С. 400-409.

57. Смоленский Г.А., Шувалов Л.А. История развития сегнетоэлектричества в СССР // Физика: Проблемы. История. Люди: Сб. статей. М.: Наука. 1986.

58. Гигиенические критерии оценки и классификации условий труда по показателям вредности и опасности факторов производственной среды, тяжести и напряженности трудового процесса, Руководство Р 2.2.755-99.

59. Гигиенические требования к аэроионному составу воздуха производственных и общественных помещений}, СанПиН 2.2.4.1294-03.

60. Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений}, СанПиН 2.2.4.548-96.

61. Естественное и искуственное освещение, СниП 23-05-95.

62. Предельно допустимые концентрации (ПДК) вредных веществ в воздухе рабочей зоны} ГН 2.2.5.1313.03.

63. Предельно допустимые концентрации (ПДК) загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест}, ГН 2.1.6.1338-03.

64. Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий. Санитарные нормы, СН.2.2.4/2.1.8.566-96.

65. Производственная гимнастика для работников умственного труда, Приказ Минздравмедпрома России и Госсанэпиднадзора России 280/88 от 05.10.1995.

66. Санитарные правила и нормы, СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03, 10.06.2003.

67. Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории жилой застройки. Санитарные нормы, СН 2.2.4/2.1.8.562-96.

Информационные ресурсы

68. http://pantocrator.narod.ru/CES.htm

69. http://pantocrator.narod.ru

70. http://www.ksm.spbstu.ru/index.php/ru/education/learning-movies/smart-materials