Численное моделирование движения тела-точки в кулоновском поле отталкивания

Выполнил: Чеботин А.А., студент гр. 5030103/90301
Руководитель: Иванова Е.А., д.ф.-м.н., проф. ВШТМиМФ

27 июня 2023 г.

Актуальность

- Движение тела-точки определяется дифференциальными уравнениями, которые *не имеют* аналитического решения, для её изучения движения требуются численные методы
- Численные методы *не обязательно* хорошо сохраняют инварианты системы. Например, энергию.
- Возмущения, вносимые численными схемами, могут быть *значительными*.
- Целесообразно применение методов, которые хорошо сохраняют инварианты системы. К таким относятся **симплектические интеграторы**.

Цели работы

- Разработка пакета программ для численного интегрирования уравнений движения тела-точки.
- Построение симплектических интеграторов высоких порядков.
- Сравнение методов.

А также

- Реализация анимации трёхмерного движения тела-точки
- Рекомендации и выводы по использованию методов интегрирования уравнений движения тела-точки

Постановка задачи

Будем рассматривать модель тела-точки, введенной в рассмотрение П.А. Жилиным, кинетическая энергия которой задается выражением

$$K = \frac{1}{2}\, m\, \underline{v} \cdot \underline{v} + B\, \underline{v} \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2}\, J\, \underline{\omega} \cdot \underline{\omega}$$

Количество движения $\underline{K}_1$ и собственный кинетический момент $\underline{K}_2$:

$$\underline{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \underline{v}} = m\, \underline{v} + B\, \underline{\omega}$$

$$\underline{K}_2 = \frac{\partial K}{\partial \underline{\omega}} = B\, \underline{v} + J\, \underline{\omega}$$

Постановка задачи

Замкнутая система уравнений движения тела-точки:

$$m\,\underline{\dot{v}} + B\,\underline{\dot{\omega}} = -\frac{A}{R^3}\underline{R}$$

$$B\,\underline{\dot{v}} + J\,\underline{\dot{\omega}} = B\,\underline{\omega} \times \underline{\dot{R}}$$

$$\underline{\dot{R}} = \underline{v}$$

Н.У.:

$$\underline{R}(0) = \underline{R}_0, \quad \underline{v}(0) = \underline{v}_0, \quad \underline{\omega}(0) = \underline{\omega}_0$$

Начальные условия

Введем 2 параметра:

- d - прицельное расстояние
- L - расстояние между начальным положением налетающей частицы и кулоновским центром

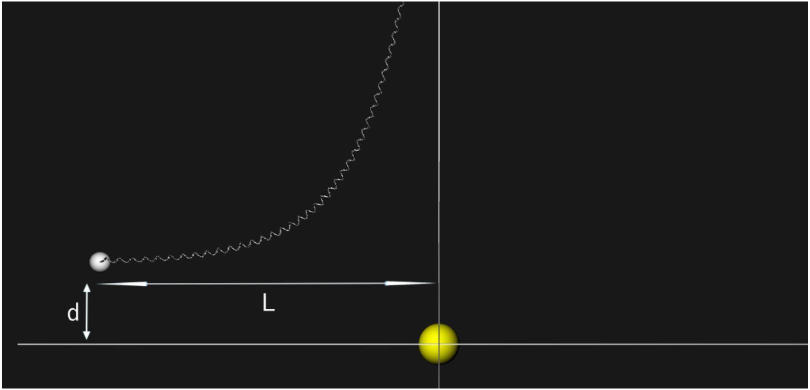

Рис 1. Подлёт тела-точки вблизи кулоновского центра на прицельном расстоянии d.

Подходы к решению задачи

- Подход с применением **традиционных численных схем**
- Подход с применением **симплектических интеграторов**.

Будут рассмотрены следующие численные схемы порядка n:

- Runge-Kutta ($n = 4$)
- Adams-Bashforth ($n = 4$)
- Semi-implicit Euler ($n = 1$)
- Verlet method ($n = 2$)
- Symplectic integrator ($n = 3$)
- Symplectic integrator ($n = 4$)
- Symplectic integrator ($n = 6$)

Последние 5 методов являются симплектическими.

Численная схема Рунге-Кутты (1/2)

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{1v} = -\frac{AJ}{R_{i-1}^3}\underline{R}_{i-1} - B^2\underline{\omega}_{i-1} \times \underline{v}_{i-1}$$

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{1\omega} = -\frac{AB}{R_{i-1}^3}\underline{R}_{i-1} - mB\ \underline{\omega}_{i-1} \times \underline{v}_{i-1}$$

$$\underline{K}_{1r} = \underline{v}_{i-1}$$

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{2v} = -\frac{AJ}{\left[R_{i-1} + \frac{h}{2}K_{1r}\right]^3}\left(\underline{R}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1r}\right) - B^2\left(\underline{\omega}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1\omega}\right) \times \left(\underline{v}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1v}\right)$$

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{2\omega} = -\frac{AB}{\left[R_{i-1} + \frac{h}{2}K_{1r}\right]^3}\left(\underline{R}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1r}\right) - mB\left(\underline{\omega}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1\omega}\right) \times \left(\underline{v}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1v}\right)$$

$$\underline{K}_{2r} = \underline{v}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{1r}$$

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{3v} = -\frac{AJ}{\left[R_{i-1} + \frac{h}{2}K_{2r}\right]^3}\left(\underline{R}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2r}\right) - B^2\left(\underline{\omega}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2\omega}\right) \times \left(\underline{v}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2v}\right)$$

Численная схема Рунге-Кутты (2/2)

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{3\omega} = -\frac{AB}{\left[R_{i-1} + \frac{h}{2} K_{2r}\right]^3} \left(\underline{R}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2r}\right) - mB \left(\underline{\omega}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2\omega}\right) \times \left(\underline{v}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2v}\right)$$

$$\underline{K}_{3r} = \underline{v}_{i-1} + \frac{h}{2}\underline{K}_{2r}$$

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{4v} = -\frac{AJ}{\left[R_{i-1} + hK_{3r}\right]^3} \left(\underline{R}_{i-1} + h\underline{K}_{3r}\right) - B^2 \left(\underline{\omega}_{i-1} + h\underline{K}_{3\omega}\right) \times \left(\underline{v}_{i-1} + h\underline{K}_{3v}\right)$$

$$\left(mJ - B^2\right) \underline{K}_{4\omega} = -\frac{AB}{\left[R_{i-1} hK_{3r}\right]^3} \left(\underline{R}_{i-1} + h\underline{K}_{3r}\right) - mB \left(\underline{\omega}_{i-1} + h\underline{K}_{3\omega}\right) \times \left(\underline{v}_{i-1} + h\underline{K}_{3v}\right)$$

$$\underline{K}_{4r} = \underline{v}_{i-1} + h\underline{K}_{3r}$$

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{i-1} + \frac{h}{6}\left(\underline{K}_{1v} + 2\underline{K}_{2v} + 2\underline{K}_{3v} + \underline{K}_{4v}\right)$$

$$\underline{\omega}_i = \underline{\omega}_{i-1} + \frac{h}{6}\left(\underline{K}_{1\omega} + 2\underline{K}_{2\omega} + 2\underline{K}_{3\omega} + \underline{K}_{4\omega}\right)$$

$$\underline{R}_i = \underline{R}_{i-1} + \frac{h}{6}\left(\underline{K}_{1r} + 2\underline{K}_{2r} + 2\underline{K}_{3r} + \underline{K}_{4r}\right)$$

Численная схема Адамса-Башфорта

$$\underline{v}_i = \underline{v}_{i-1} + \frac{h}{24}\frac{1}{(mJ - B^2)}\Bigg(-55\left[\frac{AJ}{R^3_{i-1}}\underline{R}_{i-1} + B^2\underline{\omega}_{i-1}\times\underline{v}_{i-1}\right] + \\ +59\left[\frac{AJ}{R^3_{i-2}}\underline{R}_{i-2} + B^2\underline{\omega}_{i-2}\times\underline{v}_{i-2}\right] - 37\left[\frac{AJ}{R^3_{i-3}}\underline{R}_{i-3} + B^2\underline{\omega}_{i-3}\times\underline{v}_{i-3}\right] + \\ +9\left[\frac{AJ}{R^3_{i-4}}\underline{R}_{i-4} + B^2\underline{\omega}_{i-4}\times\underline{v}_{i-4}\right]\Bigg)$$

$$\underline{\omega}_i = \underline{\omega}_{i-1} + \frac{h}{24}\frac{1}{(mJ - B^2)}\Bigg(-55\left[\frac{AB}{R^3_{i-1}}\underline{R}_{i-1} + mB\underline{\omega}_{i-1}\times\underline{v}_{i-1}\right] + \\ +59\left[\frac{AB}{R^3_{i-2}}\underline{R}_{i-2} + mB\underline{\omega}_{i-2}\times\underline{v}_{i-2}\right] - 37\left[\frac{AB}{R^3_{i-3}}\underline{R}_{i-3} + mB\underline{\omega}_{i-3}\times\underline{v}_{i-3}\right] + \\ +9\left[\frac{AB}{R^3_{i-4}}\underline{R}_{i-4} + mB\underline{\omega}_{i-4}\times\underline{v}_{i-4}\right]\Bigg)$$

$$\underline{R}_i = \underline{R}_{i-1} + \frac{h}{24}\left(55\underline{v}_{i-1} - 59\underline{v}_{i-2} + 37\underline{v}_{i-3} - 9\underline{v}_{i-4}\right)$$

Схема симплектического интегратора порядка n

$$\underline{R}^{(1)}_{i-1} = \underline{R}_{i-1} + C_1 \underline{v}_{i-1} h$$

$$\underline{v}^{(1)}_{i-1} = \underline{v}_{i-1} - D_1 \frac{1}{(mJ - B^2)} \left[\frac{AJ}{(R^{(1)}_{i-1})^3} \underline{R}^{(1)}_{i-1} - B^2 \underline{\omega}_{i-1} \times \underline{v}_{i-1} \right] h$$

$$\underline{\omega}^{(1)}_{i-1} = \underline{\omega}_{i-1} - D_1 \frac{1}{(mJ - B^2)} \left[\frac{AB}{(R^{(1)}_{i-1})^3} \underline{R}^{(1)}_{i-1} + mB \underline{\omega}_{i-1} \times \underline{v}_{i-1} \right] h$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\underline{R}^{(k-1)}_{i-1} = \underline{R}^{(k-2)}_{i-1} + C_{k-1} \underline{v}^{(k-2)}_{i-1} h$$

$$\underline{v}^{(k-1)}_{i-1} = \underline{v}^{(k-2)}_{i-1} - D_{k-1} \frac{1}{(mJ - B^2)} \left[\frac{AJ}{(R^{(k-1)}_{i-1})^3} \underline{R}^{(k-1)}_{i-1} - B^2 \underline{\omega}_{i-1} \times \underline{v}_{i-1} \right] h$$

$$\underline{\omega}^{(k-1)}_{i-1} = \underline{\omega}^{(k-2)}_{i-1} - D_{k-1} \frac{1}{(mJ - B^2)} \left[\frac{AB}{(R^{(k-1)}_{i-1})^3} \underline{R}^{(k-1)}_{i-1} + mB \underline{\omega}_{i-1} \times \underline{v}_{i-1} \right] h$$

$$\underline{R}_i = \underline{R}^{(k)}_{i-1} = \underline{R}^{(k-1)}_{i-1} + c_k \underline{v}^{(k-1)}_{i-1} h$$

$$\underline{v}_i = \underline{v}^{(k)}_{i-1} = \underline{v}^{(k-1)}_{i-1}$$

$$\underline{\omega}_i = \underline{\omega}^{(k)}_{i-1} = \underline{\omega}^{(k-1)}_{i-1}$$

Сравнение подходов. Отклонение энергии при изменении расстояния L

Сравним численные схемы на **относительное отклонение энергии от среднего значения**. Будем менять параметр L.

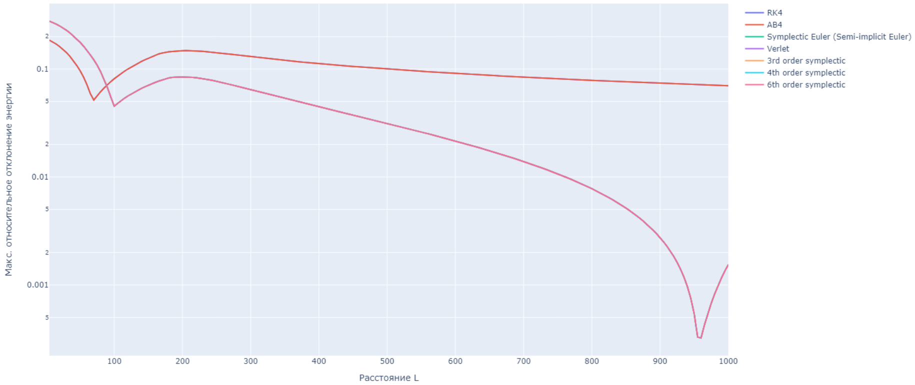

Рис 2. Зависимость относительного отклонения энергии от первоначального значения от расстояния L.

Сравнение подходов. Отклонение энергии при изменении расстояния L

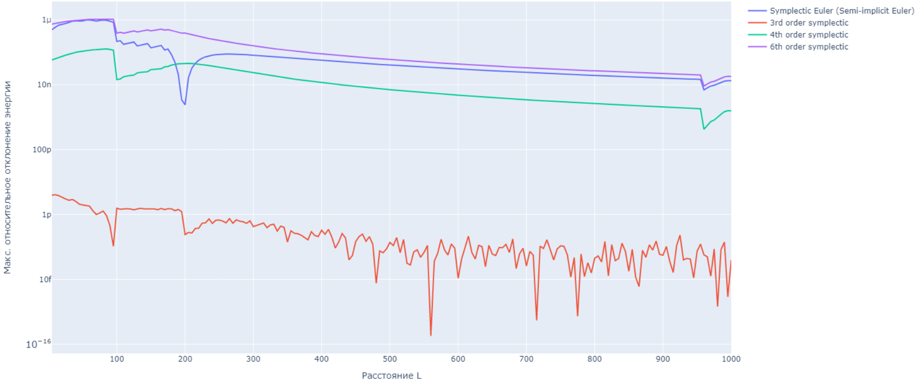

Рис 3. Зависимость относительного отклонения энергии от первоначального значения от расстояния L.

Сравнение подходов. Отклонение энергии при изменении расстояния L.

Вывод

- Чем ближе тело-точка к силовому центру, тем большее отклонение энергии даёт любая численная схема.
- Симплектические методы дают лучшие результаты, **но**
- При близких прохождениях, традиционные методы работают точнее.

Рекомендация

- Разработка универсального численного метода с переменным шагом интегрирования, который при близких прохождениях будет автоматически уменьшать шаг h.

Сравнение подходов. Отклонение энергии при изменении шага h

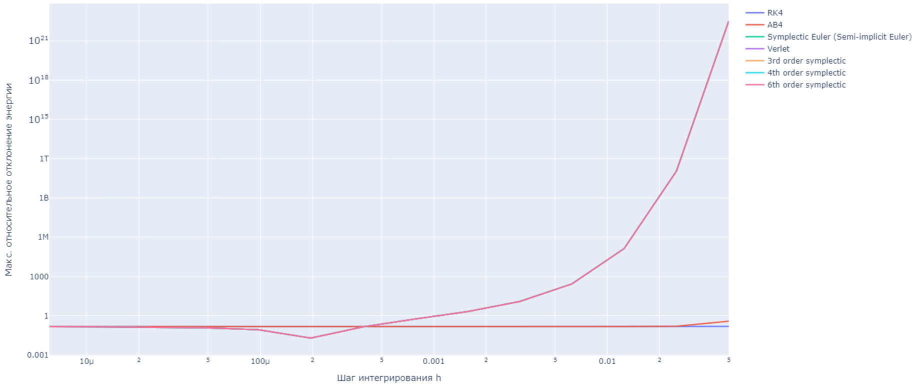

Рис 4. Зависимость максимального относительного отклонения энергии от первоначального значения при изменении шага интегрирования h

Сравнение подходов. Отклонение энергии при изменении шага h

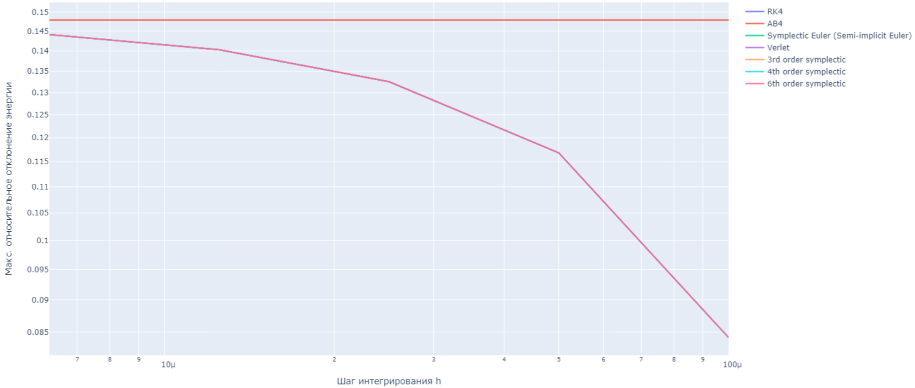

Рис 5. Зависимость максимального относительного отклонения энергии от первоначального значения при малых шагах интегрирования h

Сравнение подходов. Отклонение энергии при изменении шага h

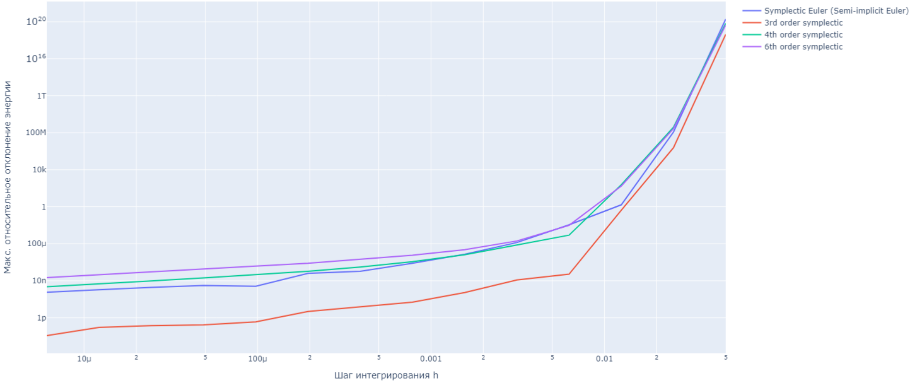

Рис 6. Зависимость максимального относительного отклонения энергии от первоначального значения при изменении шага интегрирования h для симплектических методов

Сравнение подходов. Время решения задачи в зависимости от количества точек n

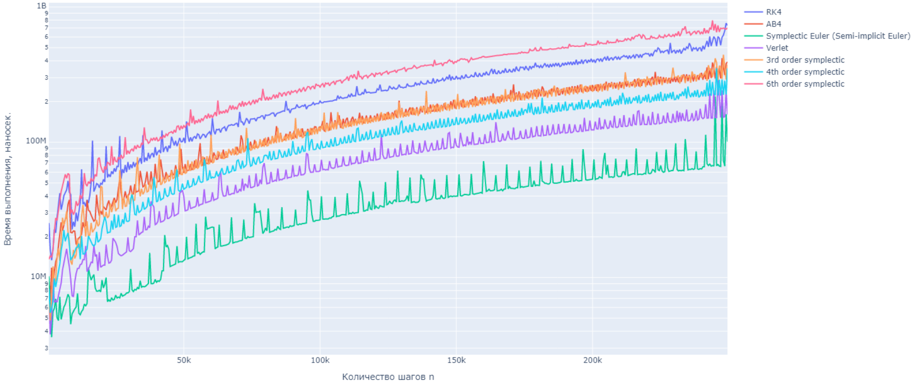

Рис 7. Зависимость времени решения системы уравнений движения тела-точки от количества шагов n, логарифмический мастштаб по оси Oy.

Сравнение подходов. Время решения задачи в зависимости от количества точек n

Вывод:

- Чем выше порядок метода, тем дольше решается задача
- Симплектический метод Эйлера работает быстрее, при этом даёт результат лучше, чем трудоемкий метод Рунге-Кутты или Адамса-Башфорта

Приложение для анимации трёхмерного движения тела-точки

Разработано в рамках ВКР на языке Java.

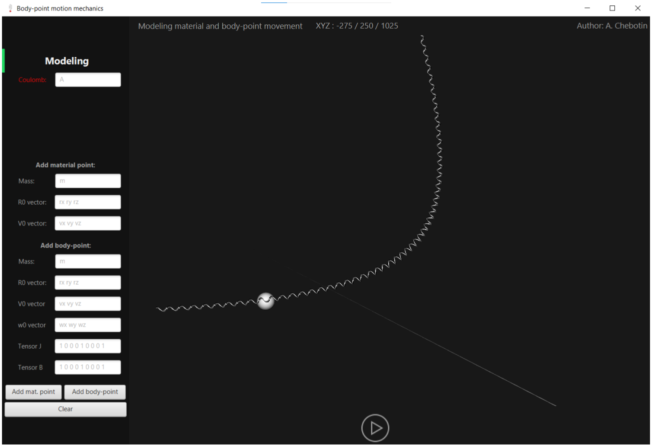

Рис 8. Пользовательский интерфейс приложения

Функционал приложения

- Анимация трёхмерного движения тела-точки
- Параллельная анимация: можно задать произвольное количество тел-точек и оследить их траектории
- Объектно-ориентированный стиль программы,

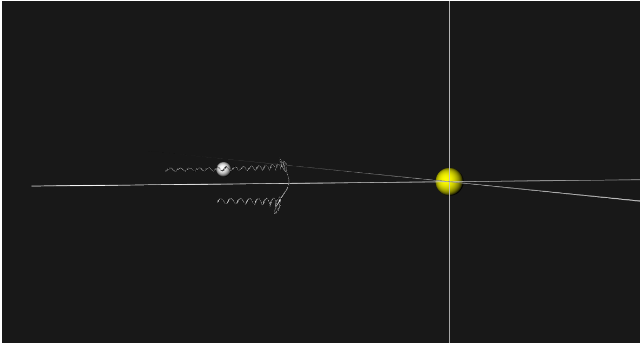

Рис 9. Кадр из анимации движения тела-точки

Некоторые траектории тела-точки

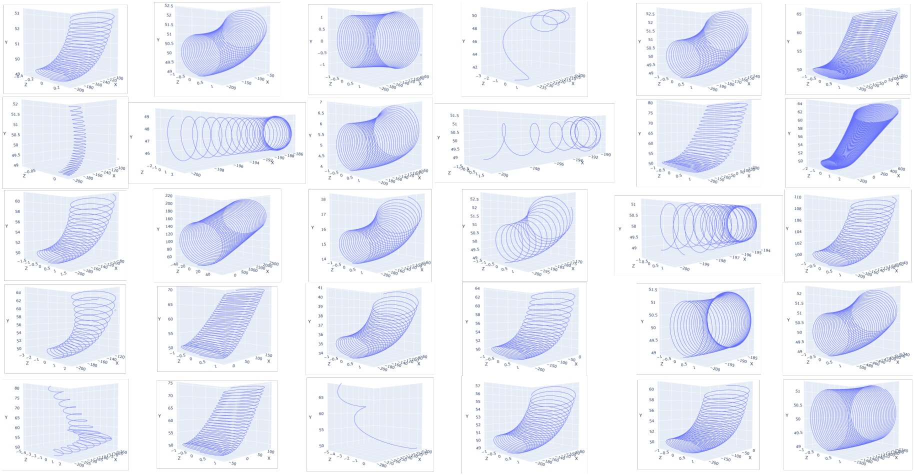

Рис 10. Набор траекторий при различных параметрах

ИТОГИ

- Разработано приложение, включающее пакет программ численных методов и реализацию анимации трехмерного движения тела-точки. Функционал приложения этим не ограничивается.
- Все методы исследованы и сравнены, построены различные зависимости.
- Исходя из зависимостей, составлены различные рекомендации по применению численных схем при решении задачи о движении тела-точки в кулоновском поле.

Спасибо за внимание!