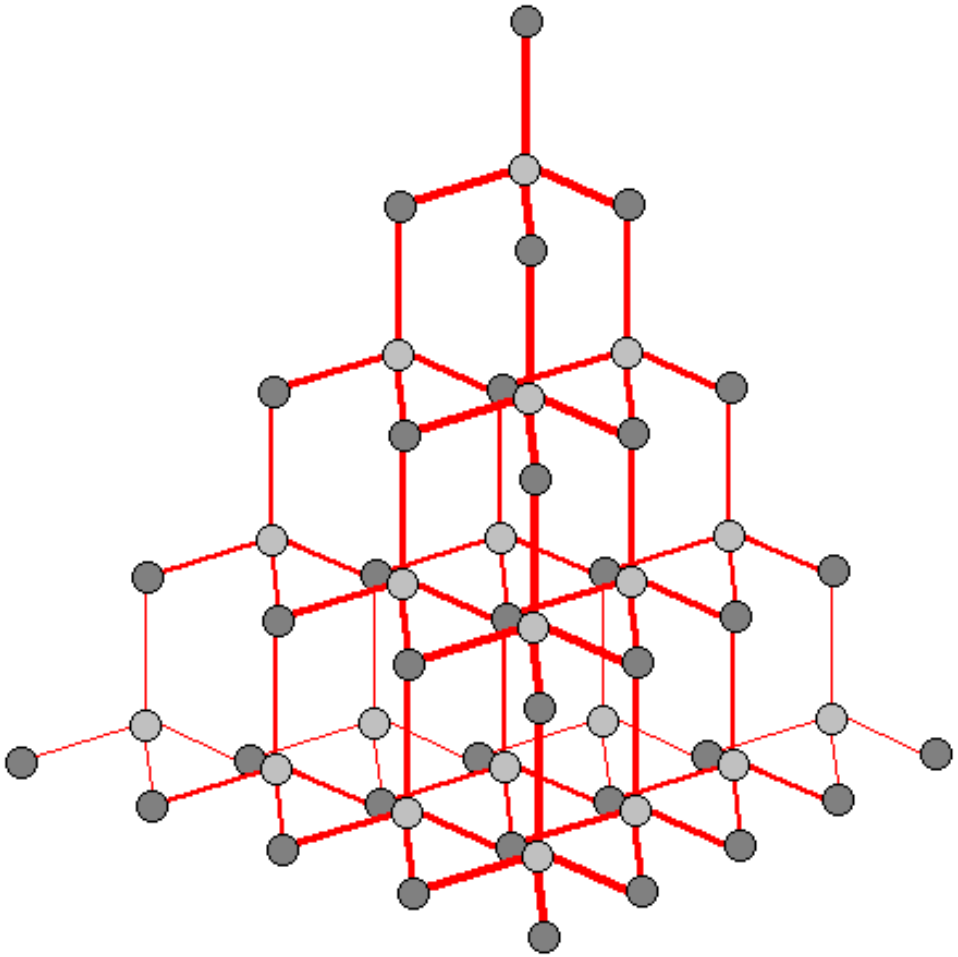
Расчет и конструирование упругих соединительных элементов для моделирования дискретных сред и разработки деталей конструкций

Д. Дзенушко (СПбГПУ, 4 курс, каф. ТМ)
А. М. Кривцов (д.ф.-м.н., проф., зав. каф. ТМ СПбГПУ)

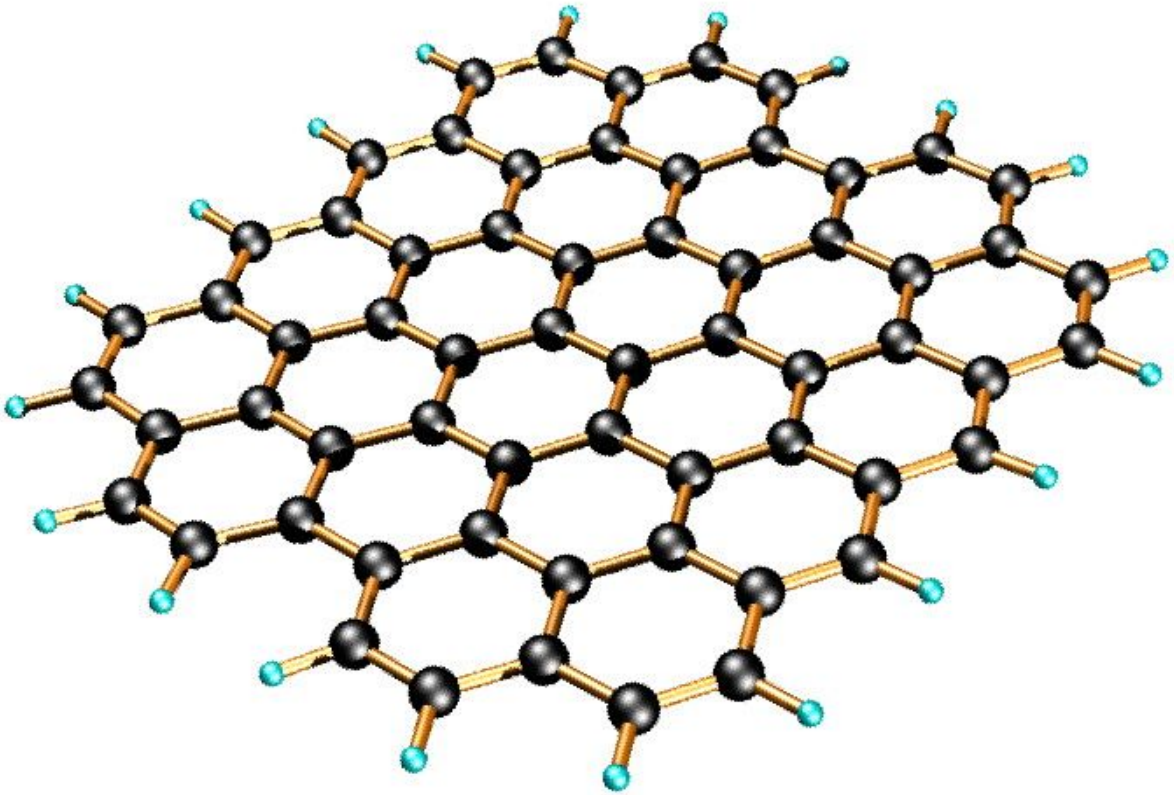
Цель работы

- Разработка и изготовление упругих элементов, имитирующих межатомную связь

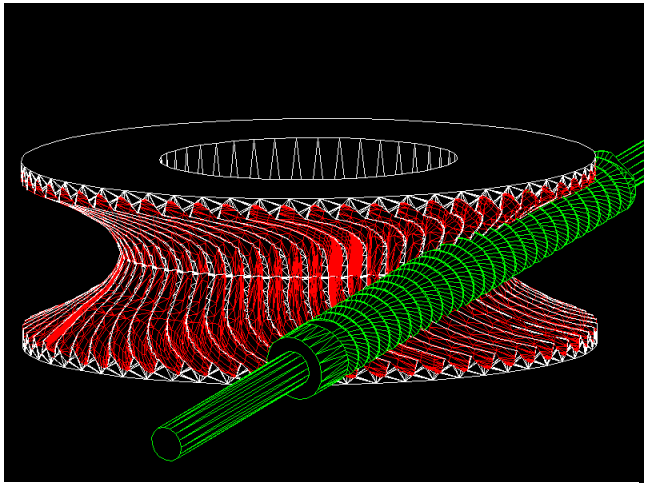


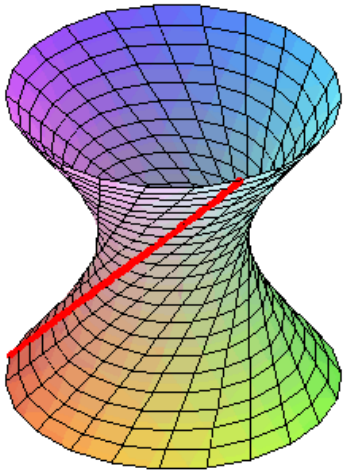
Постановка задачи

- Соотношение между продольной и сдвиговой жесткостями должно быть близко к таковому в связи между атомами углерода
- Легкость сборки и разборки конструкций



Гиперболоидные конструкции

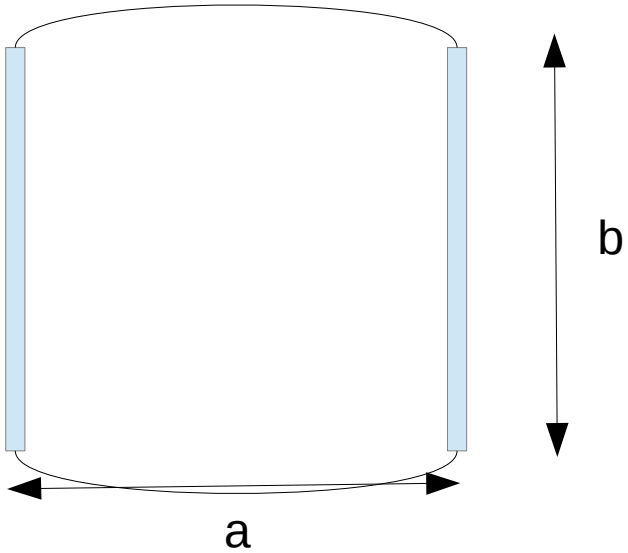


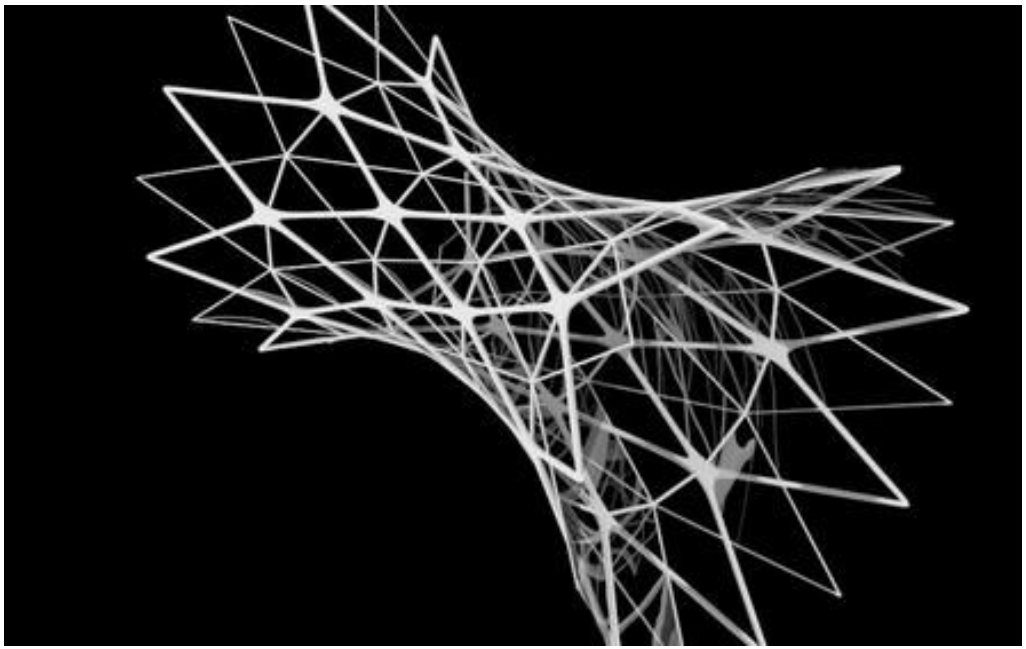


Межатомная связь

- Необходимо выбрать конструкцию, в которой отношение сдвиговой жесткости к жесткости при растяжении (сжатии) будет равно 1/2

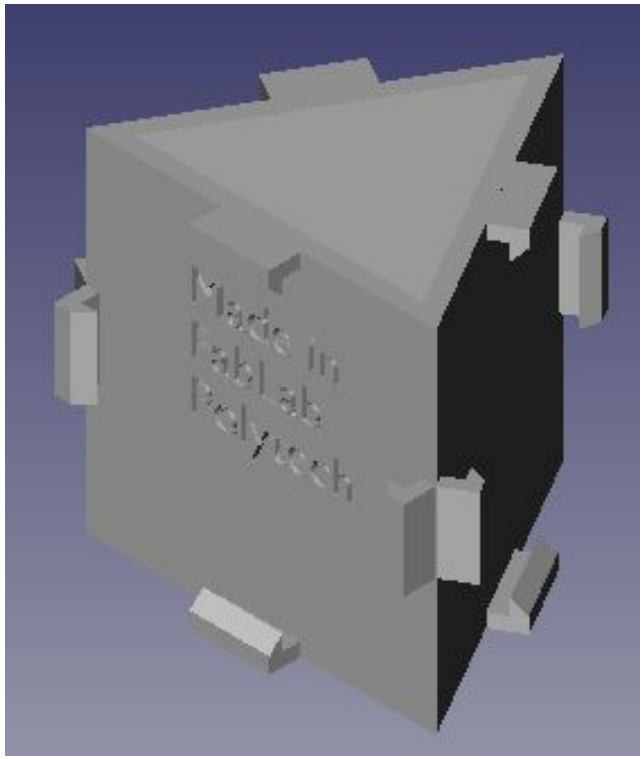
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1 - cosY}{4} \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$$

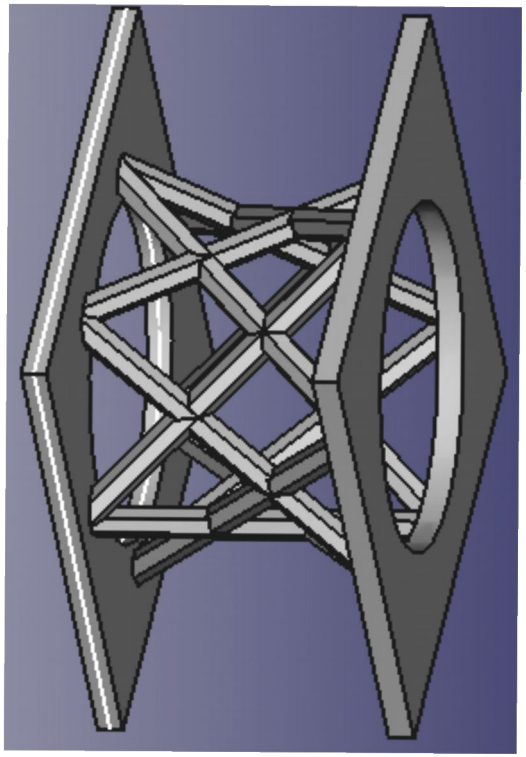


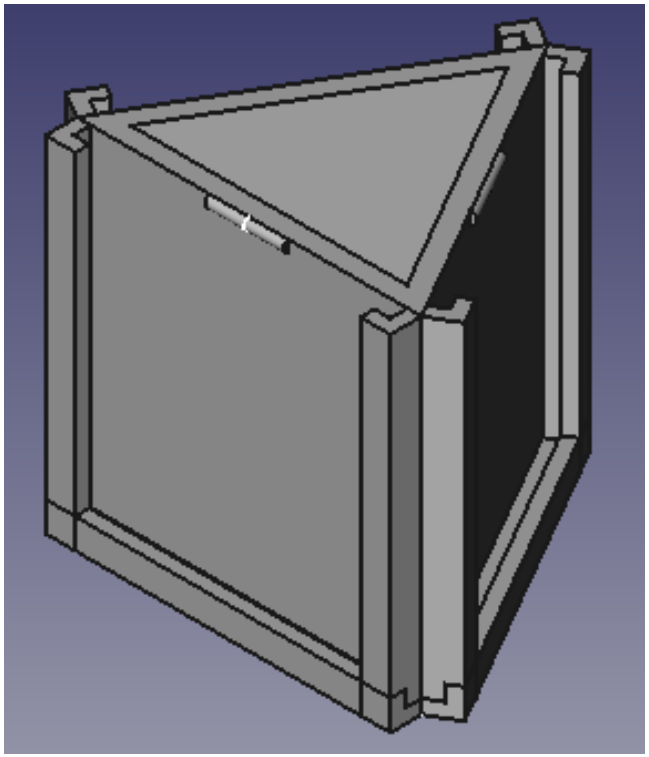


Атом

- Требуется разработать простые в изготовлении и в то же время сборке соединительные модули для межатомных связей

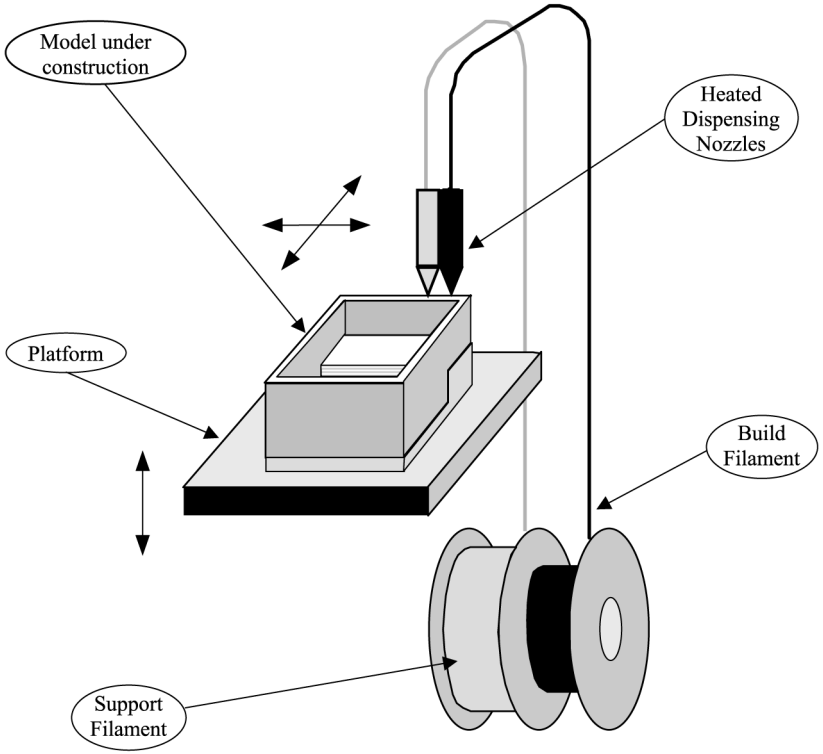


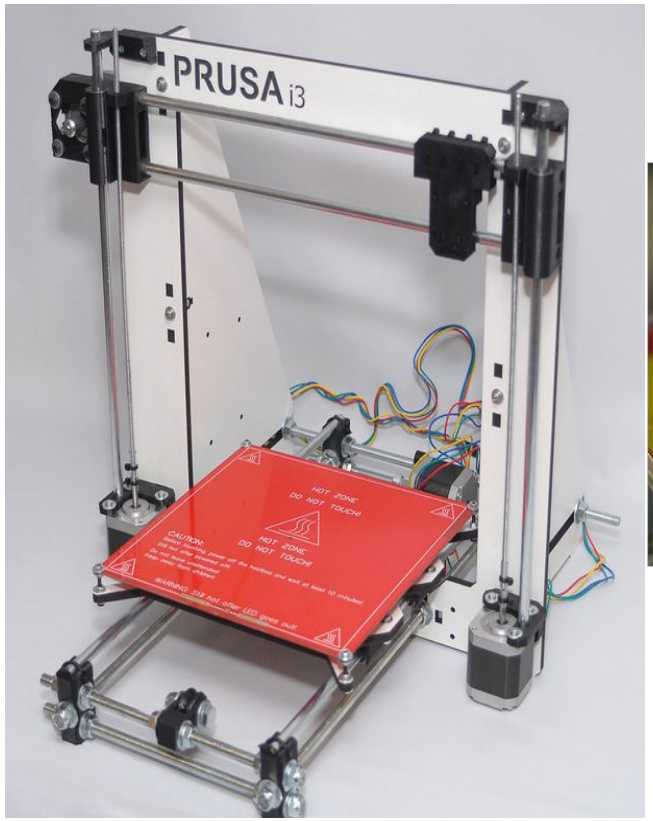




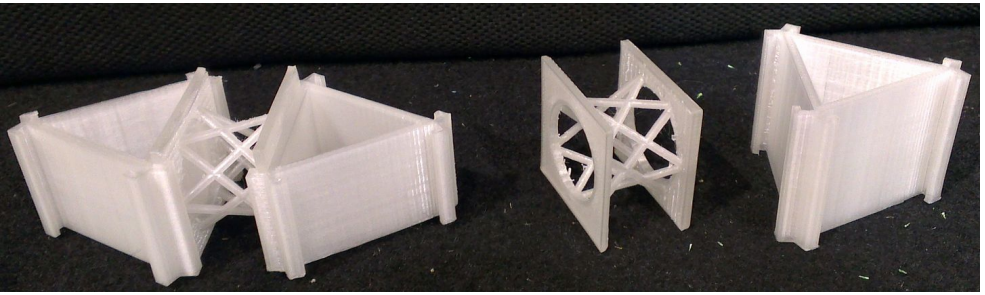
3D принтеры и 3D печать

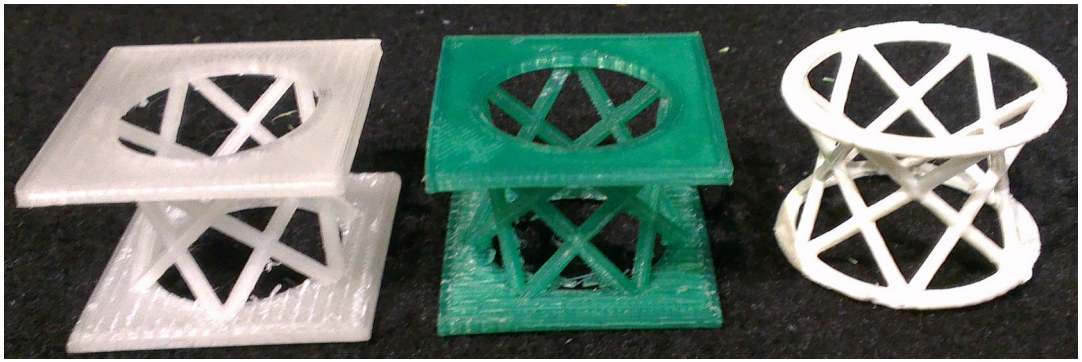
- 3D-принтер — устройство, использующее метод послойного создания физического объекта по цифровой 3D-модели.

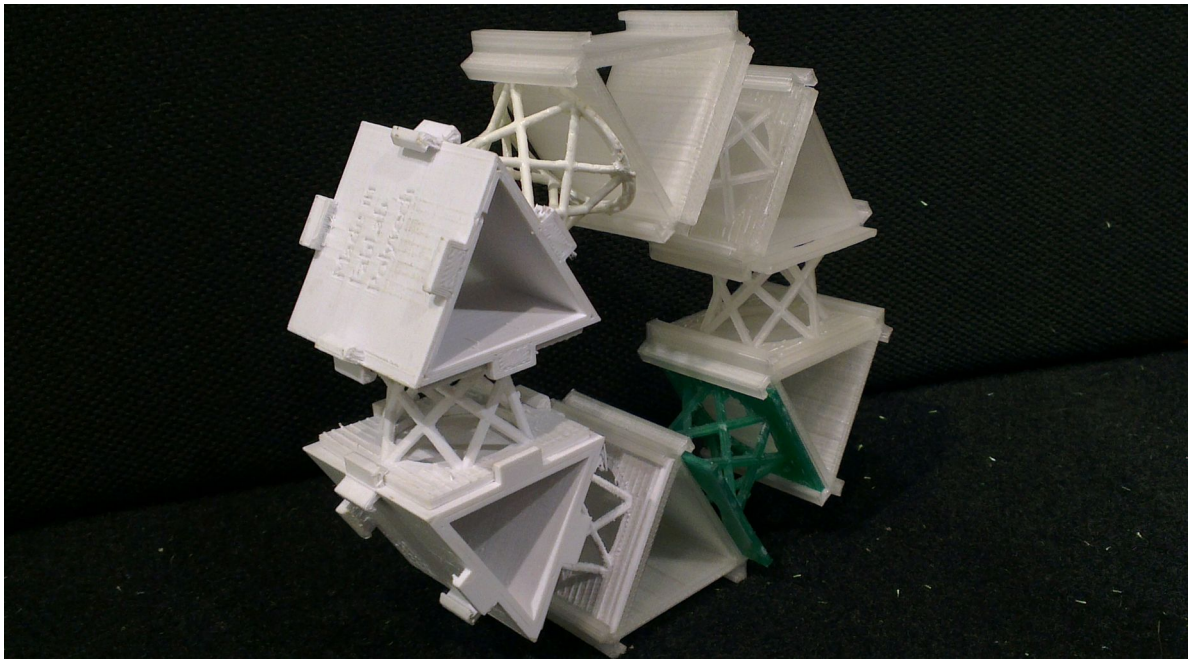




Модель на базе гиперболоидной конструкции







Особенности данного способа

Преимущества

- Не требует разных материалов
- Изготавливается на 1 станке
- Внешний вид

Недостатки

- Размеры конструкции
- Сложность в печати
- Сложная обработка

Альтернативный способ

Использование металлических пружин

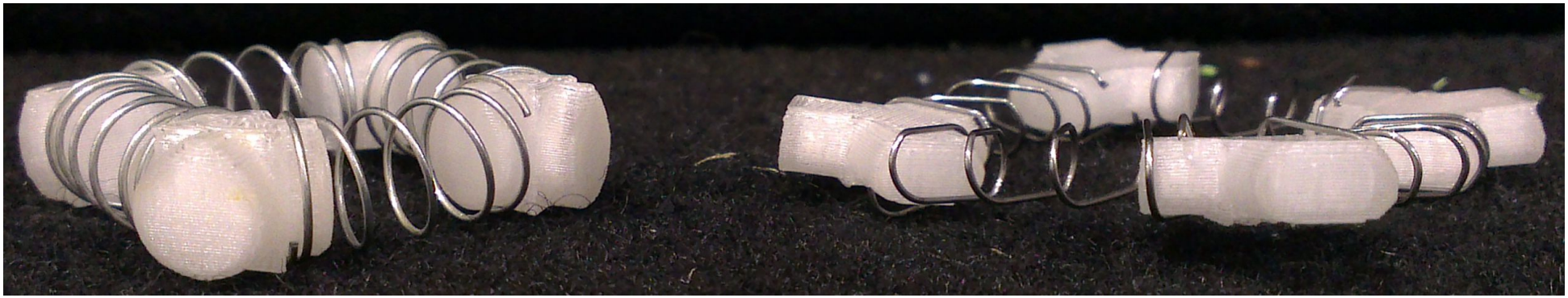
Преимущества

- Малые размеры элементов
- Простота печати
- Высокая добротность связи

Недостатки

- Требуются непечатаемые элементы
- Сложный подбор пружин
- Изготовление пружин с заданными параметрами

Модель на базе стальных витых пружин сжатия



Расчет жесткости пружины при растяжении (сжатии) без запрещения поворотов

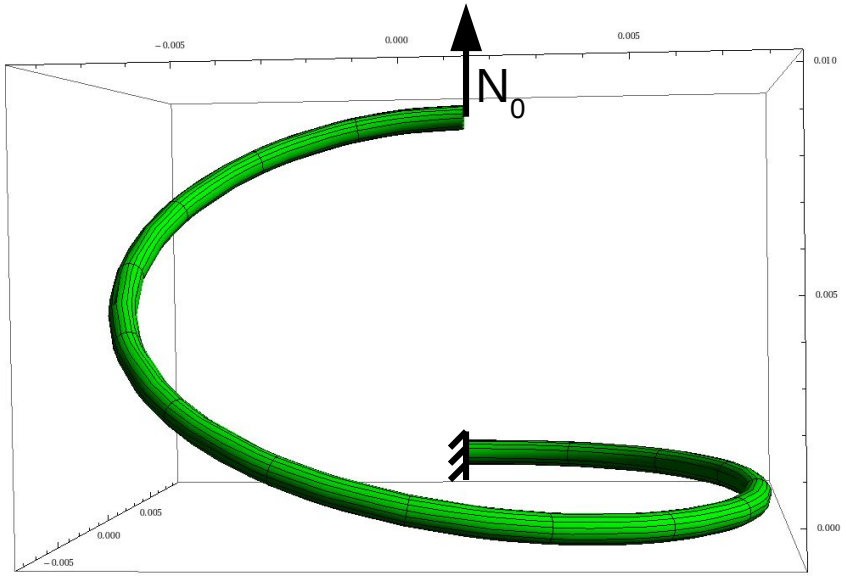
- Решение

$$\underline{r}(s)=R(\sin(\lambda s\,\underline{i})+\cos(\lambda s\,\underline{j}))$$

$$\underline{M}=(\underline{r}(l)-\underline{r}(s))\times\underline{k}\,N_0$$

$$\underline{\Phi}=\frac{1}{C_t}-\frac{1}{C_b}\underline{M}\cdot\underline{t}\,\underline{t} \qquad \underline{t}=\frac{\partial\underline{r}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial s^2}=\underline{\Phi}$$



где:

- C_b и C_t -жесткости на изгиб и кручение
- λ – параметр пружины
- R – радиус витья пружины
- l - длина прутка

$$\frac{\partial\underline{U}(0)}{\partial s}=0 \qquad \underline{U}(0)=0$$

Результат

- Получена формула

$$\widetilde{C}_1(2\pi R) = \frac{E G r_w^4}{6 E R^3 + 4 G R^3},$$

где:

$$C_1 = \frac{\widetilde{C}_1(2\pi R) h}{L},$$

G - модуль сдвига

E - модуль Юнга

r_w - радиус прутка, из которого изготовлено кольцо

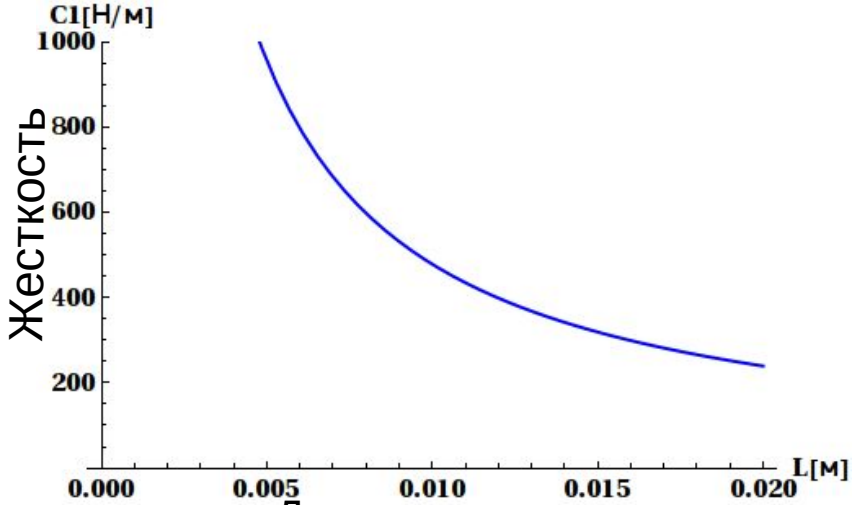
L – длина пружины

h – расстояние между витками пружины

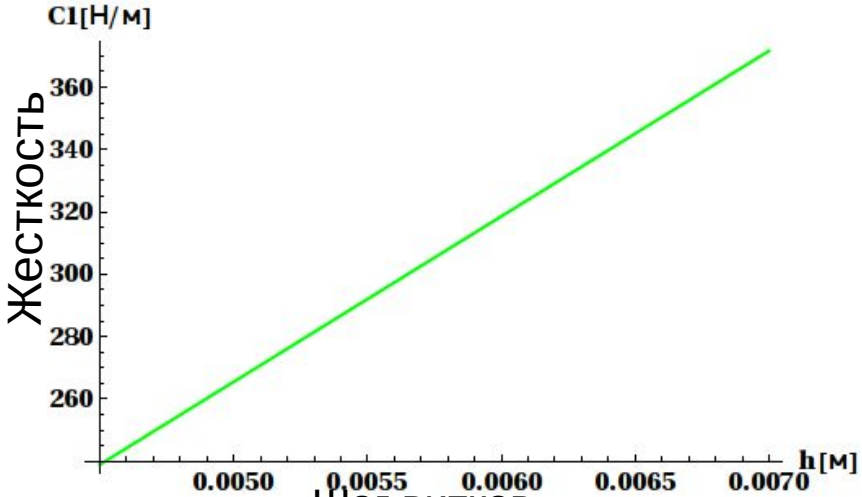
R – срединный радиус пружины

Анализ полученных результатов

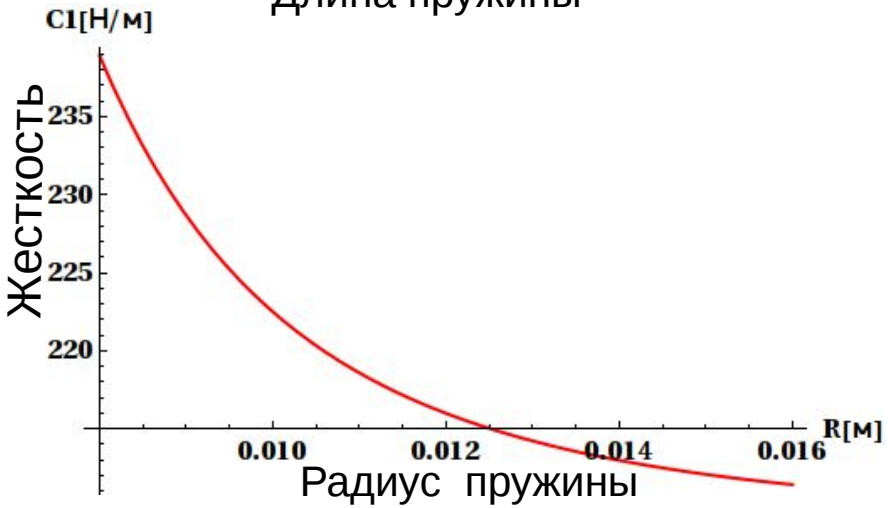
- Были построены графики зависимости жесткости пружины от ее параметров



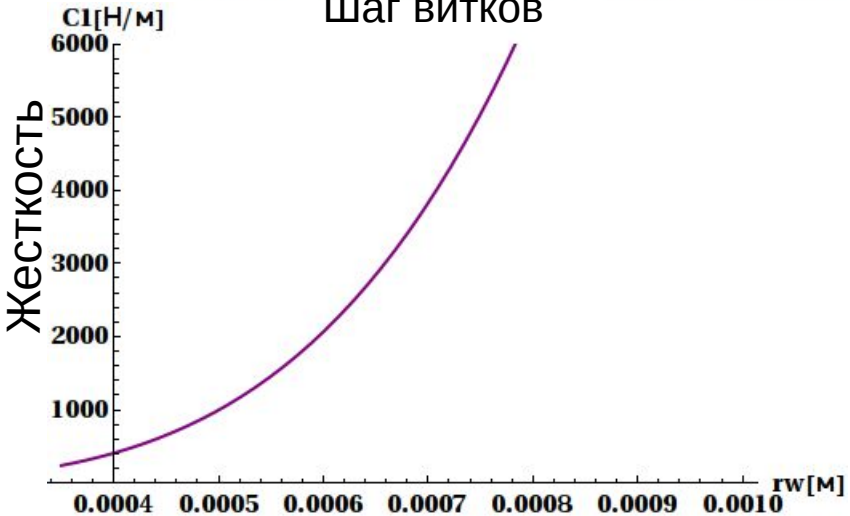
Длина пружины



Шаг витков



Радиус пружины



Радиус прутка

Расчет жесткости пружины при растяжении (сжатии) без запрещения поворотов 2 способ

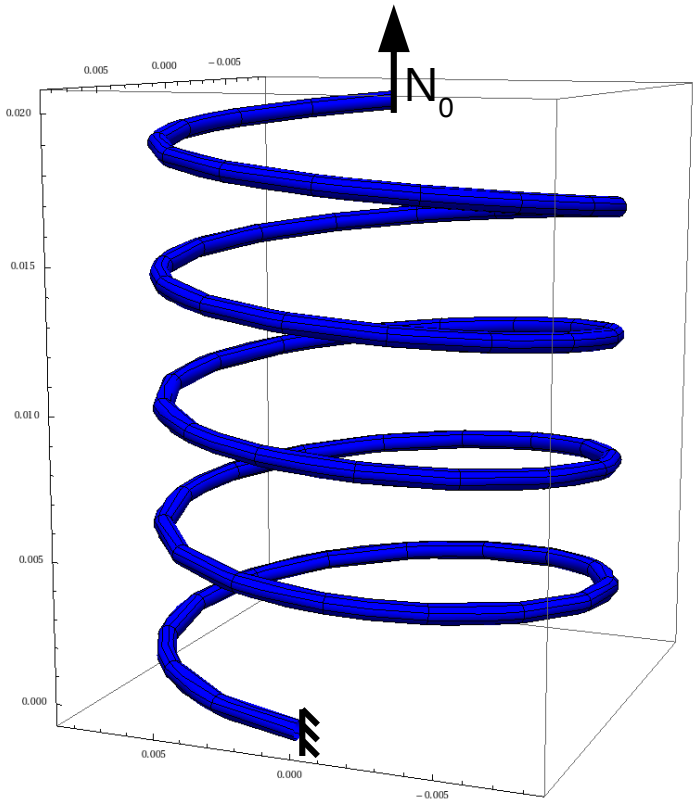
- Решение

$$\underline{r}(s)=R(\sin(\lambda s\,\underline{i})+\cos(\lambda s\,\underline{j}))+\gamma s\,\underline{k}$$

$$\underline{M}=(\underline{r}(l)-\underline{r}(s))\times\underline{k}\,N_0$$

$$\underline{\Phi}=\frac{1}{C_t}-\frac{1}{C_b}\underline{M}\cdot\underline{t}\,\underline{t} \qquad \underline{t}=\frac{\partial\underline{r}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial s^2}=\underline{\Phi}$$

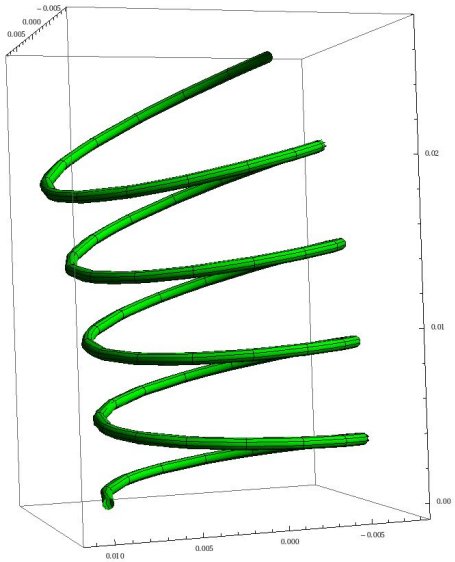


где:

- C_b и C_t -жесткости на изгиб и кручение
- λ , γ – параметры пружины
- R – радиус витья пружины
- l - длина прутка

$$\frac{\partial\underline{U}(0)}{\partial s}=0 \qquad \underline{U}(0)=0$$

Результат



- Получена формула

$$C_1 = \frac{EGh\pi^2\sqrt{h^2+4\pi^2R^2}\,r_w^4}{R^2\left(-4h\left(Gh^2+2E\pi^2R^2\right)\sin\left(\frac{2\pi L}{h}\right)+\pi\left(4\left(2Gh^2+(3E+2G)\pi^2R^2\right)L(E-2G)h\pi r^2\sin\left(\frac{4\pi L}{h}\right)\right)\right)},$$

где:

G - модуль сдвига

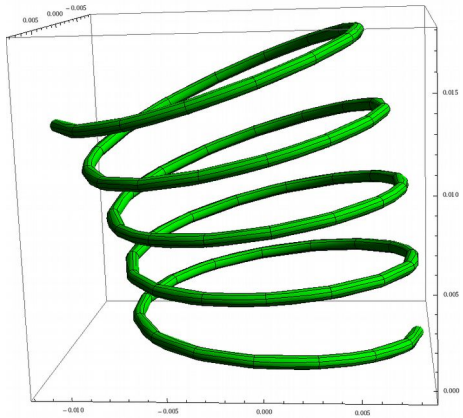
E - модуль Юнга

r_w - радиус прутка, из которого изготовлено кольцо

L – длина пружины

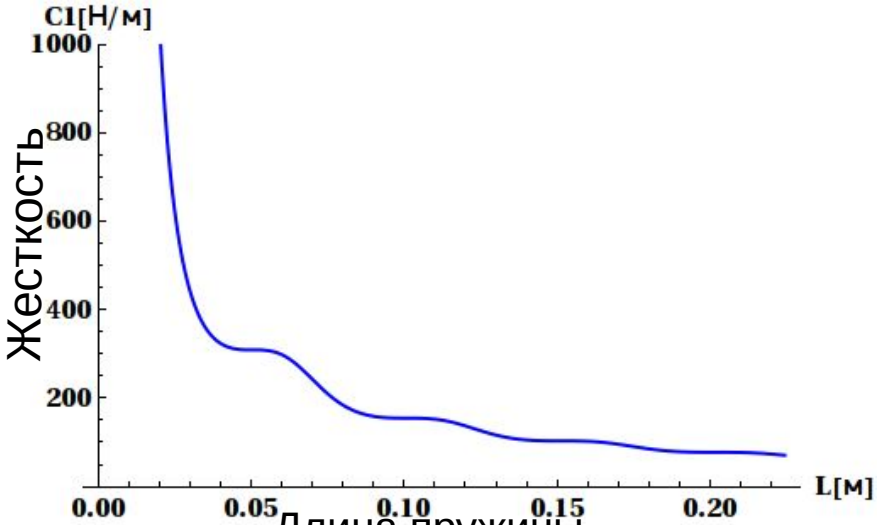
h – расстояние между витками пружины

R – срединный радиус пружины

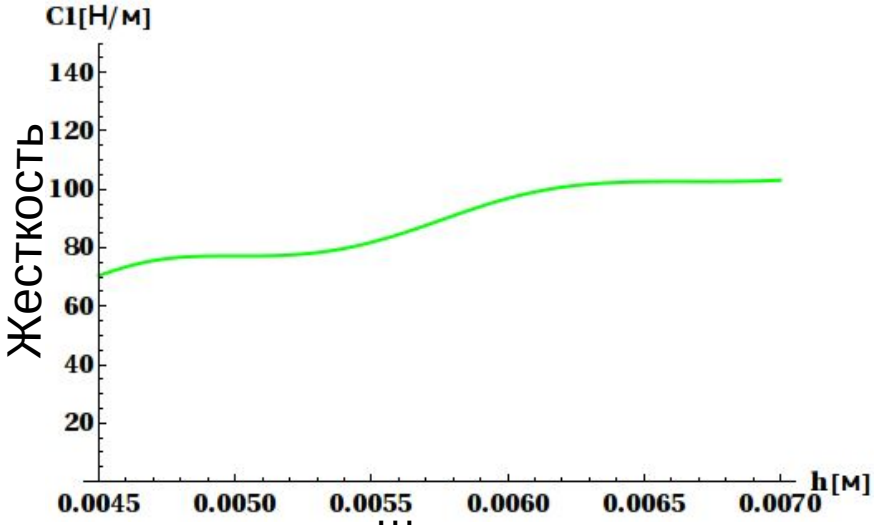


Анализ полученных результатов

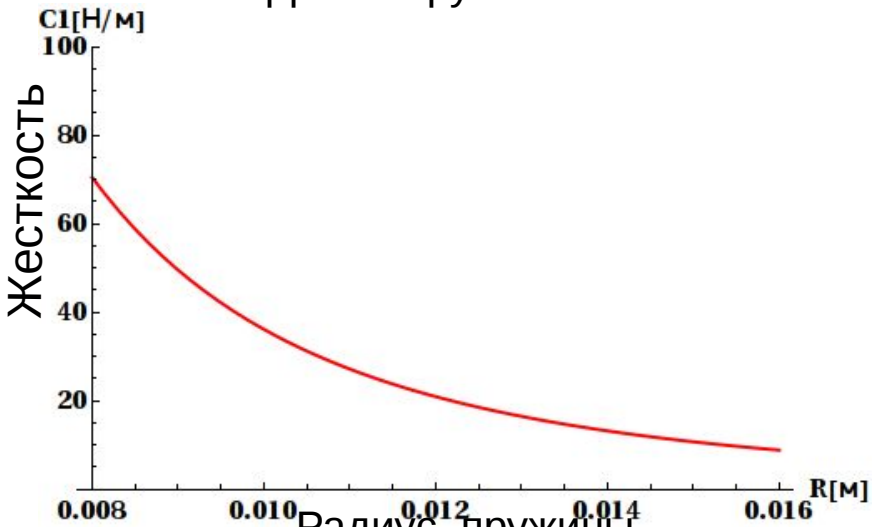
- Были построены графики зависимости жесткости пружины от ее параметров



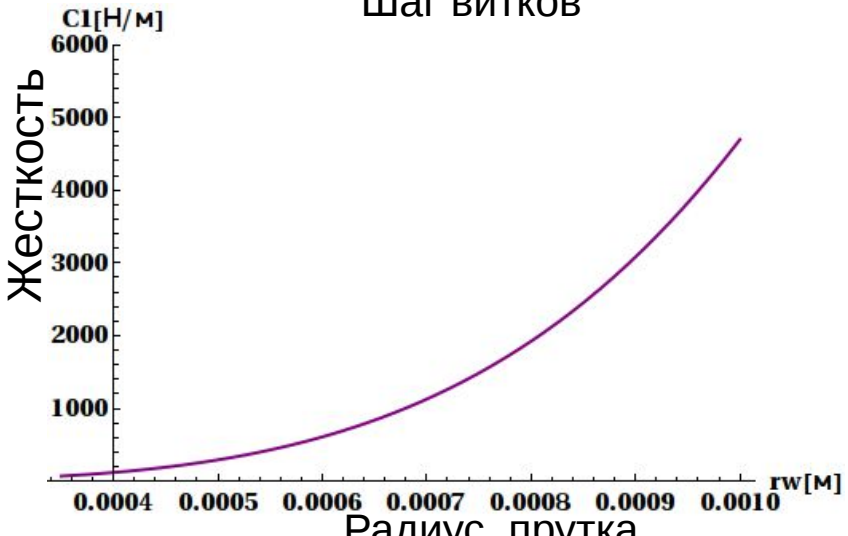
Длина пружины



Шаг витков



Радиус пружины



Радиус прутка

Сравнение полученных результатов

- Производится сравнение с известной из [5] формулой

$$C_1 = \frac{G\, d_D^4}{8\, d_F^3\, n},$$

где

G - модуль сдвига материала

d_D - диаметр используемой для намотки пружины проволоки

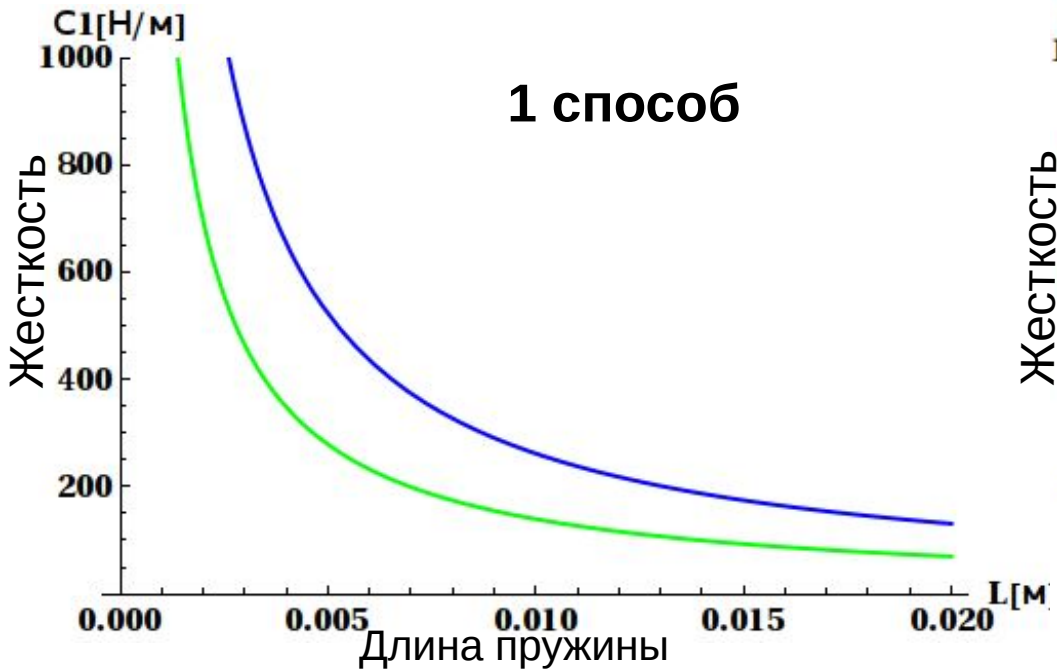
d_F - срединный диаметр пружины

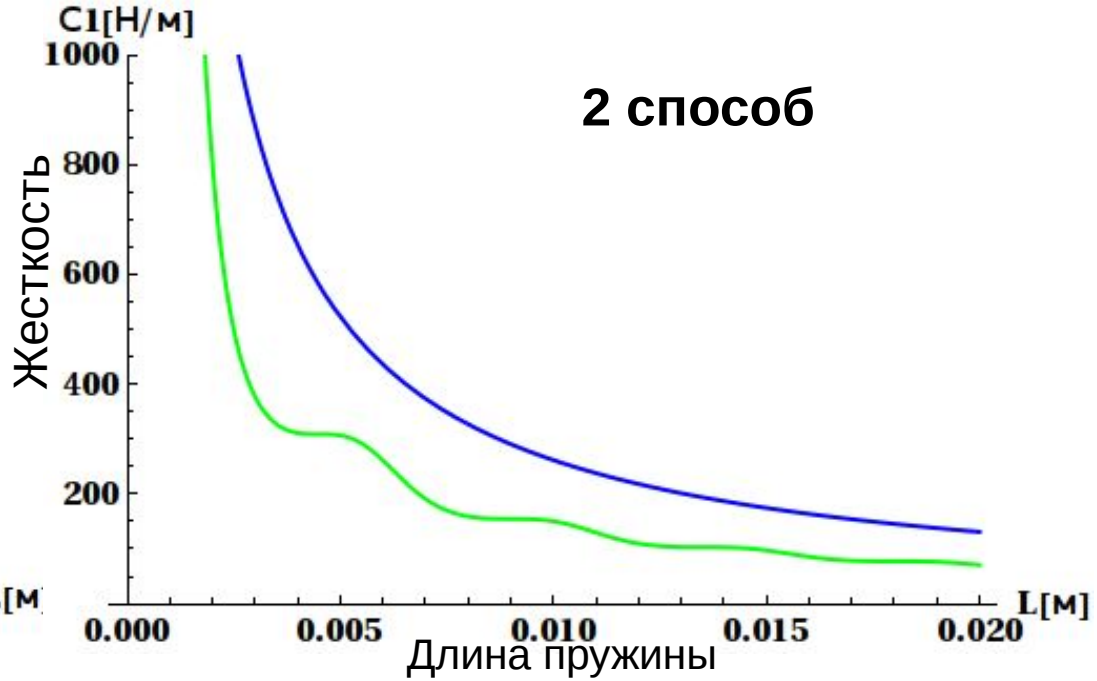
n - количество витков пружины

- *[5]П. Г. Гузенков “Краткий справочник к расчетам деталей машин” Высшая школа, Москва, 1964г, с.331*

Сравнение полученных результатов

Сравнение полученного графика (зеленый) с формулой [5] (синий)





Полученная жесткость при L→∞ в 1.87762 раза меньше, жесткости, получаемой по известной из [5] формуле .

- *[5] П. Г. Гузенков “Краткий справочник к расчетам деталей машин” Высшая школа, Москва, 1964г, с.331*

Расчет жесткости пружины при растяжении (сжатии) с запретом поворотов

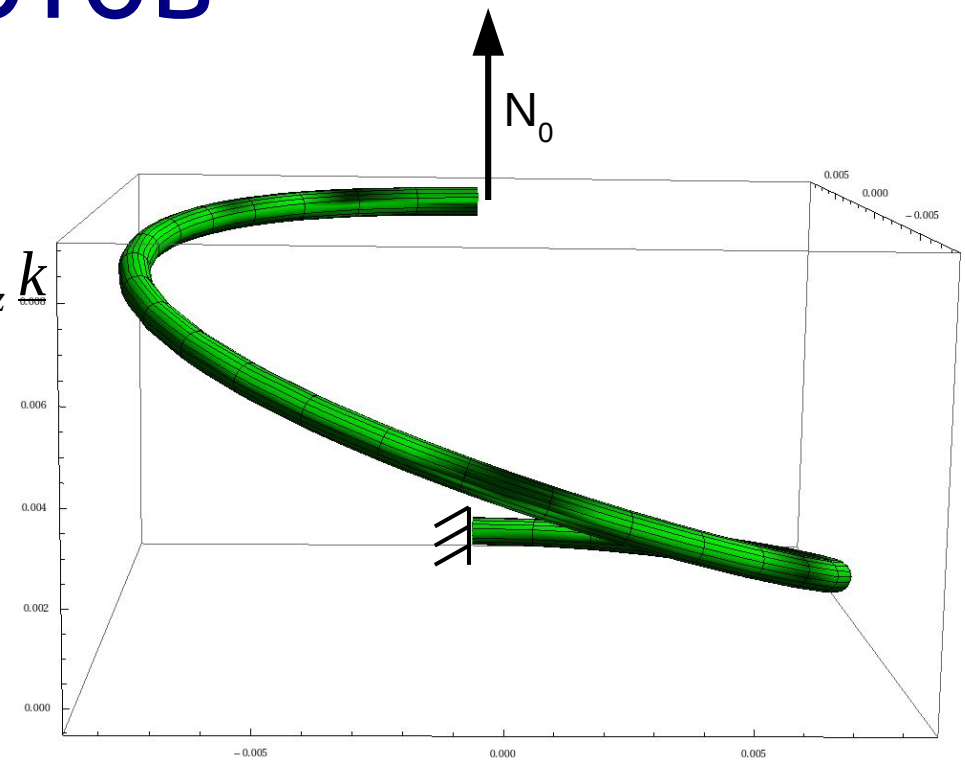
- Решение

$$\underline{r}(s)=R(\sin(\lambda s\,\underline{i})+\cos(\lambda s\,\underline{j}))$$

$$\underline{M}=(\underline{r}(l)-\underline{r}(s))\times\underline{k}\,N_0+M_x\underline{i}+M_y\underline{j}+M_z\underline{k}$$

$$\underline{\Phi}=\frac{1}{C_t}-\frac{1}{C_b}\underline{M}\cdot\underline{t}\,\underline{t} \qquad \underline{t}=\frac{\partial\underline{r}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial s^2}=\underline{\Phi}$$



где:

- C_b и C_t -жесткости на изгиб и кручение
- λ – параметр пружины
- R – радиус витья пружины
- l - длина прутка

$$\frac{\partial\underline{U}(0)}{\partial s}=0 \qquad \frac{\partial\underline{U}(l)}{\partial s}=0 \qquad \underline{U}(0)=0$$

Расчет жесткости пружины при растяжении (сжатии)

- Получена формула, совпадающая с формулой из [5]

$$C_1 = \frac{G\, d_D^4}{8\, d_F^3\, n},$$

где

d_D - диаметр проволоки

d_F - диаметр намотки (измеряемый от оси проволоки)

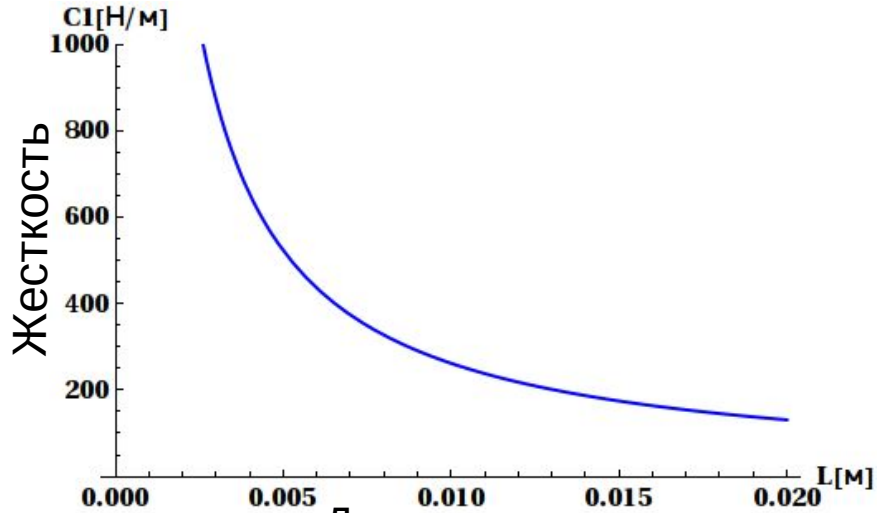
G – модуль сдвига

n – число витков

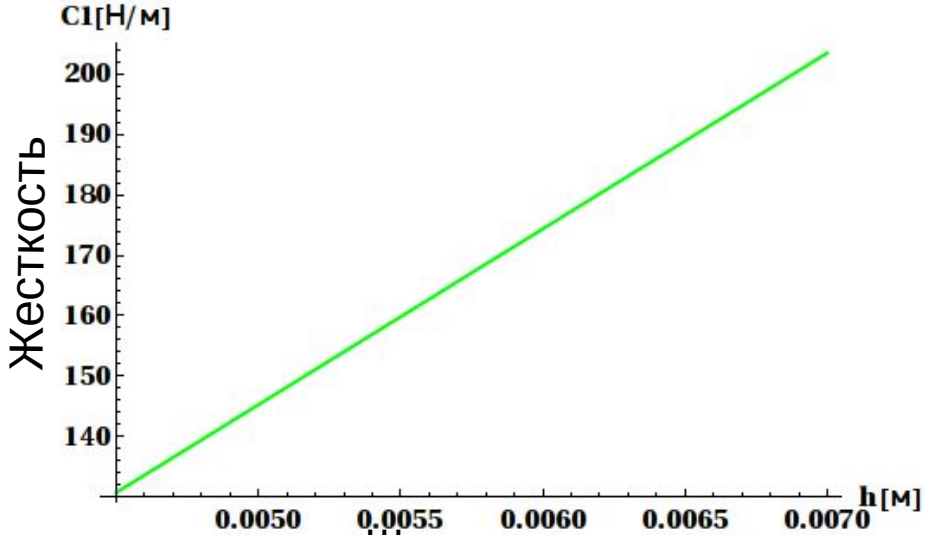
- *[5]П. Г. Гузенков “Краткий справочник к расчетам деталей машин” Высшая школа, Москва, 1964г, с.331*

Анализ полученных результатов

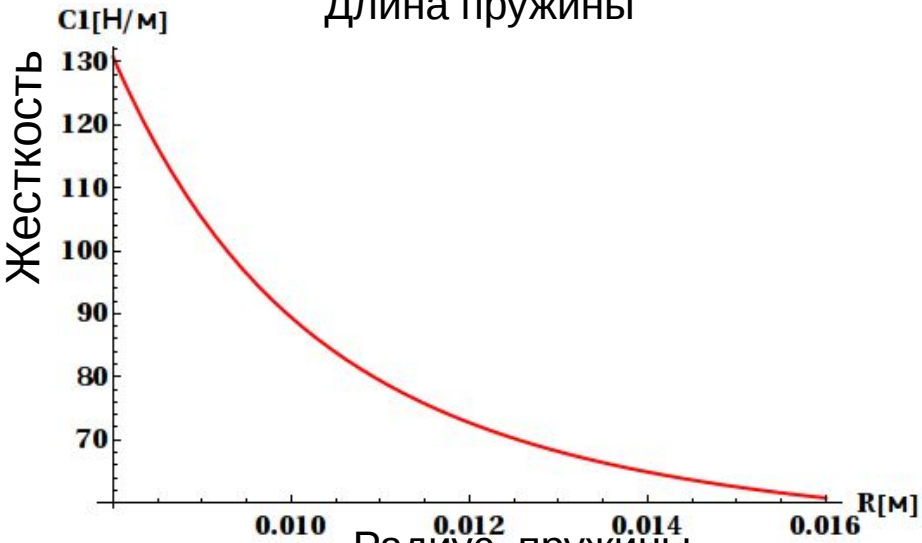
- Были построены графики зависимости жесткости пружины от ее параметров



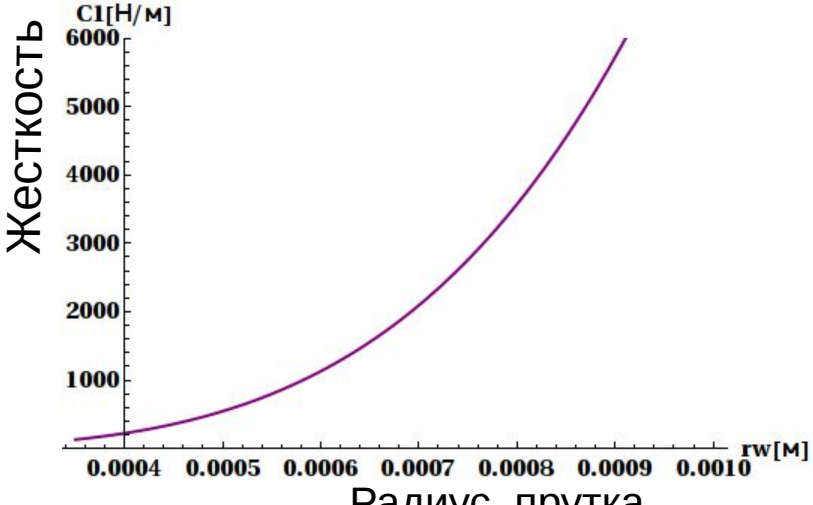
Длина пружины



Шаг витков



Радиус пружины



Радиус прутка

Расчет жесткости пружины при растяжении (сжатии) 2 способ

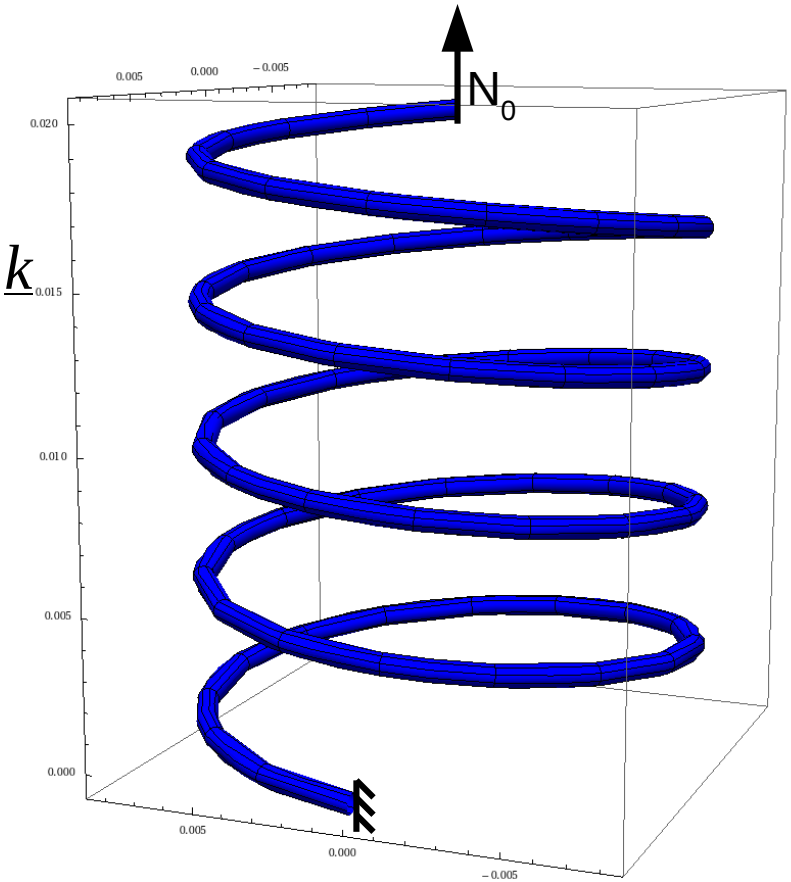
- Решение

$$\underline{r}(s)=R(\sin(\lambda s\,\underline{i})+\cos(\lambda s\,\underline{j}))+\gamma s\,\underline{k}$$

$$\underline{M}=(\underline{r}(l)-\underline{r}(s))\times\underline{k}\,N_0+M_x\underline{i}+M_y\underline{j}+M_z\underline{k}$$

$$\underline{\Phi}=\frac{1}{C_t}-\frac{1}{C_b}\underline{M}\cdot\underline{t}\,\underline{t} \qquad \underline{t}=\frac{\partial\underline{r}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial s^2}=\underline{\Phi}$$



где:

- C_b и C_t -жесткости на изгиб и кручение
- λ , γ – параметры пружины
- R – радиус витья пружины
- l - длина прутка

$$\frac{\partial\underline{U}(0)}{\partial s}=0 \qquad \frac{\partial\underline{U}(l)}{\partial s}=0 \qquad \underline{U}(0)=0$$

Результат

- Получена формула

$$C_1 = \frac{h\pi^3 r_w^4 \left(-2h^4 R^2 \alpha^2 + 2L^2 \varepsilon \eta + hR^2 \alpha \left(2h^3 \alpha \cos(\zeta) + \pi L \varepsilon \sin(\zeta)\right)\right)}{4R^2 \left(h^2 + 4\pi^2 R^2\right)^{\frac{3}{2}} L \left(-Gh^4 + 2\pi^2 \left(-Eh^2 R^2 + L^2 \eta\right) + h^2 \left(Gh^2 + 2E\pi^2 R^2\right) \cos(\zeta) + h\pi^3 R^2 L \varepsilon \sin(\zeta)\right)},$$

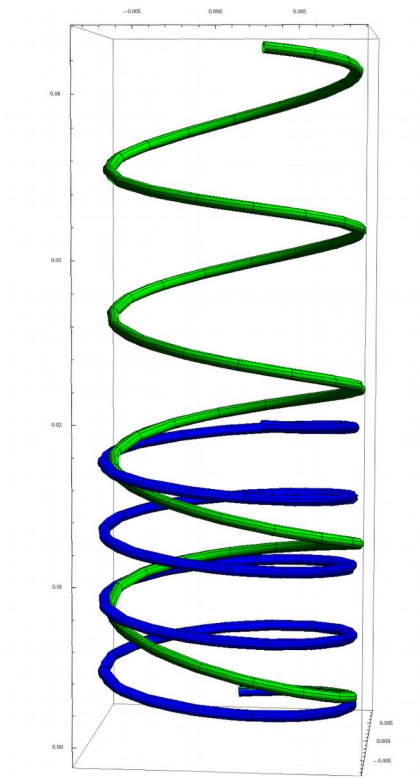
$$\alpha = E - 2G$$

$$\beta = E + 2G$$

$$\varepsilon = Eh^2 + 8G\pi R^2$$

$$\eta = Gh^2 + \pi^2 R^2 \beta$$

$$\zeta = \frac{2\pi L}{h}$$



где:

G - модуль сдвига

E - модуль Юнга

r_w - радиус прутка, из которого изготовлено кольцо

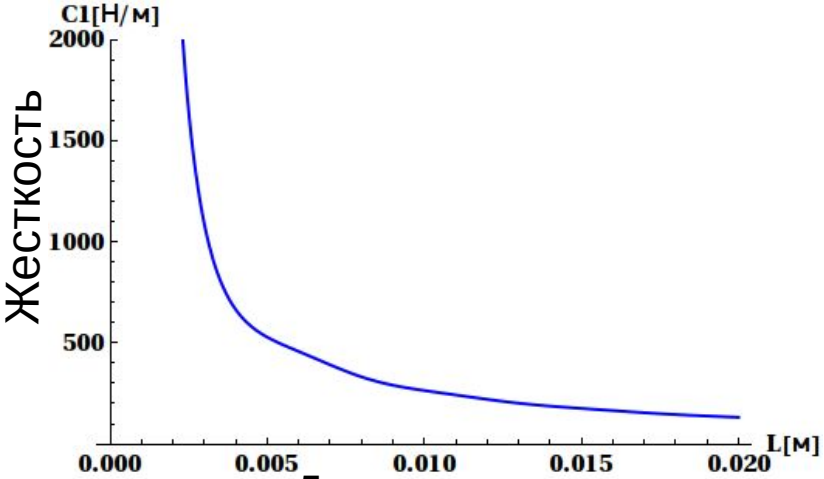
L – длина пружины

h – расстояние между витками пружины

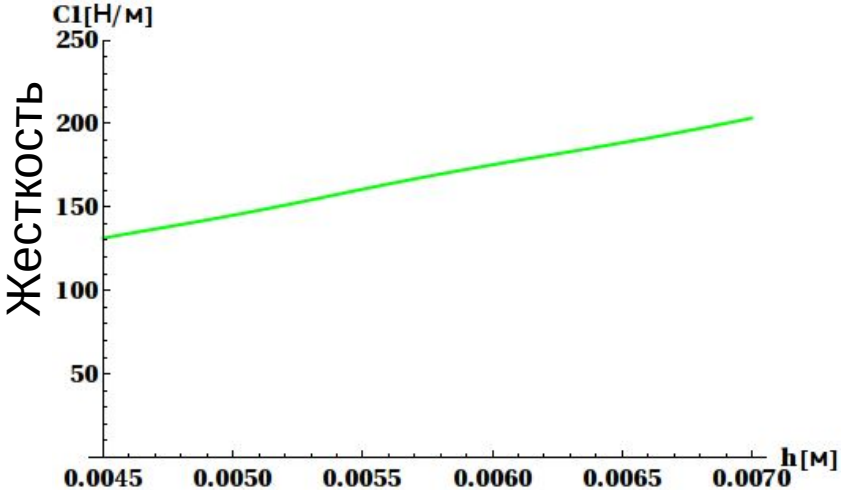
R – срединный радиус пружины

Анализ полученных результатов

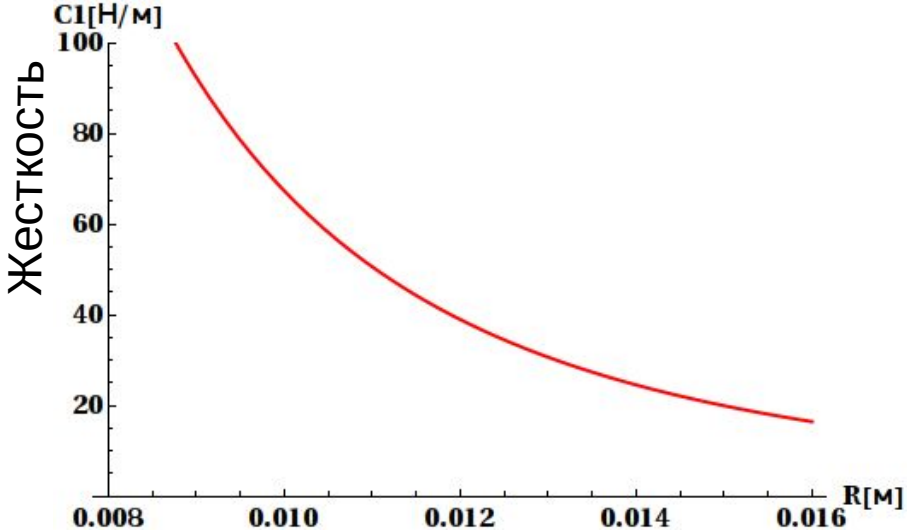
- Были построены графики зависимости жесткости пружины от ее параметров



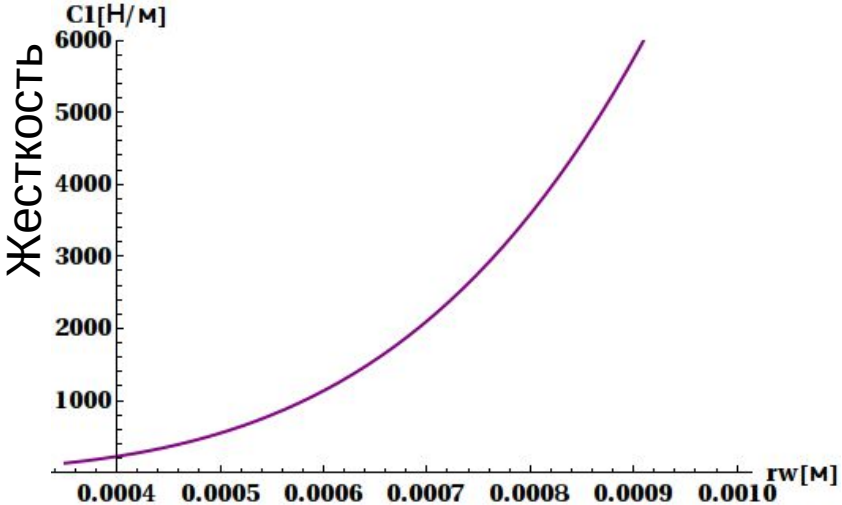
Длина пружины



Шаг витков



Радиус пружины

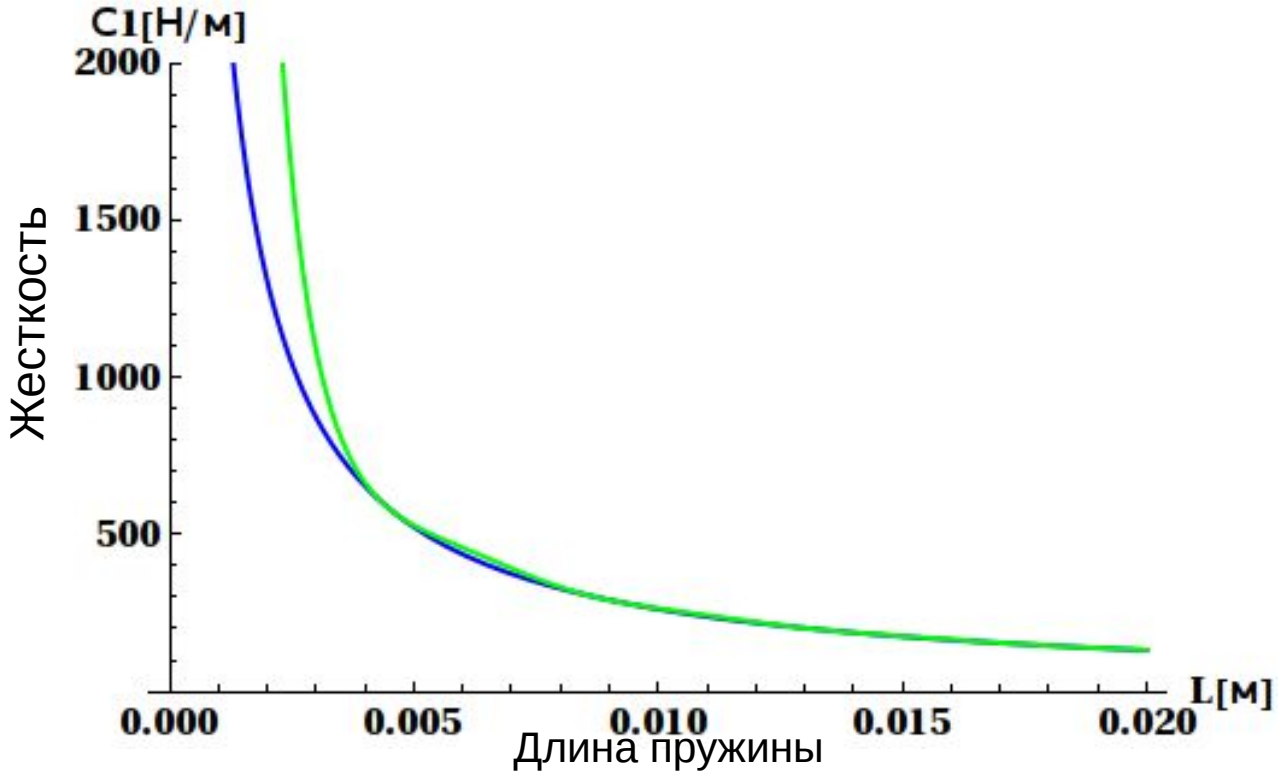


Радиус прутка

Сравнение полученных результатов

Сравнение полученного графика (зеленый) с формулой из [5] (синий)

- Расхождение при L =→∞ составило **0.14%**



- *[5] П. Г. Гузенков “Краткий справочник к расчетам деталей машин” Высшая школа, Москва, 1964г, с.331*

Расчет жесткости пружины при сдвиге

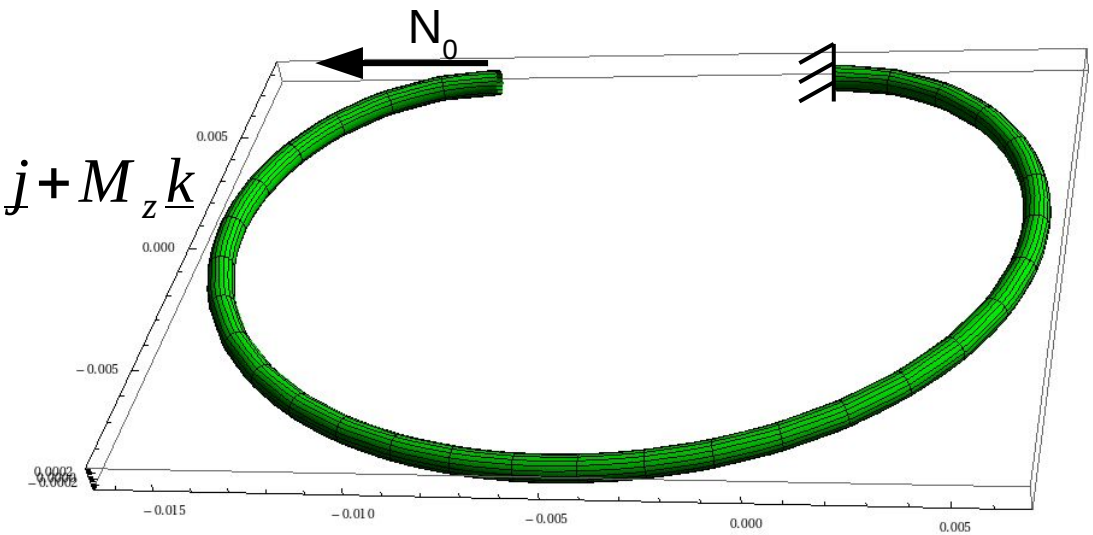
- Решение

$$\underline{r}(s)=R(\sin(\lambda s\,\underline{i})+\cos(\lambda s\,\underline{j}))$$

$$\underline{M}=(\underline{r}(l)-\underline{r}(s))\times\underline{i}\,N_0+M_x\,\underline{i}+M_y\,\underline{j}+M_z\,\underline{k}$$

$$\underline{\Phi}=\frac{1}{C_t}-\frac{1}{C_b}\underline{M}\cdot\underline{t}\,\underline{t} \qquad \underline{t}=\frac{\partial\underline{r}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2\underline{U}}{\partial s^2}=\underline{\Phi}$$



- Где:
- C_b и C_t -жесткости на изгиб и кручение
- λ – параметр пружины
- R – радиус витья пружины
- l - длина прутка

$$\frac{\partial\underline{U}(0)}{\partial s}=0 \qquad \frac{\partial\underline{U}(l)}{\partial s}=0 \qquad \underline{U}(0)=0$$

Расчет жесткости пружины при сдвиге

- Получена формула

$$\widetilde{C}_2(2\pi R)=\frac{E r_w^4}{4R^3},$$

$$C_2=\frac{\widetilde{C}_2(2\pi R)h}{L},$$

где:

r_w - радиус проволоки

R – срединный радиус намотки

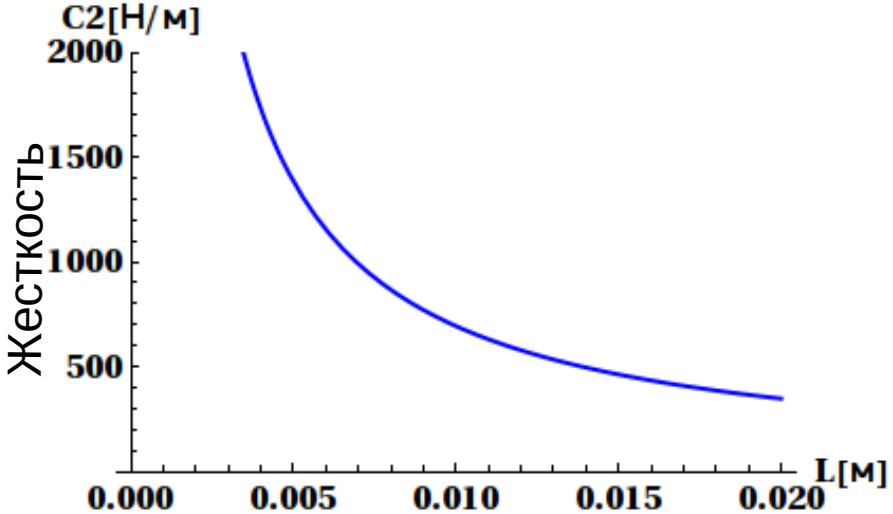
E – модуль Юнга

h – расстояние между витками

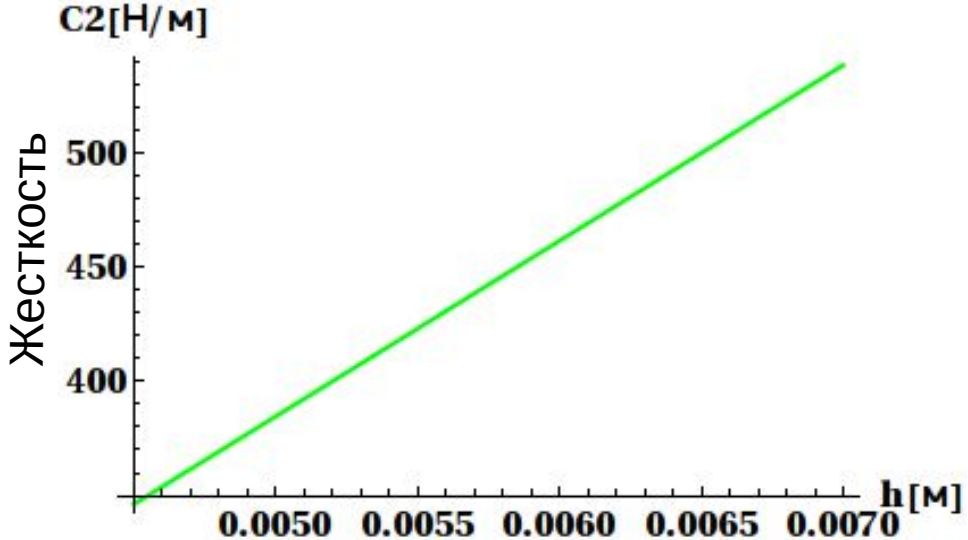
L – длина пружины

Анализ полученных результатов

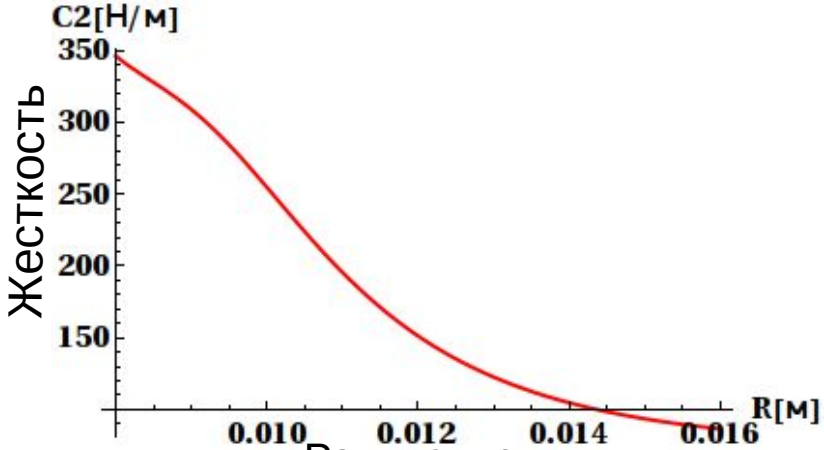
- Были построены графики зависимости жесткости пружины от ее параметров



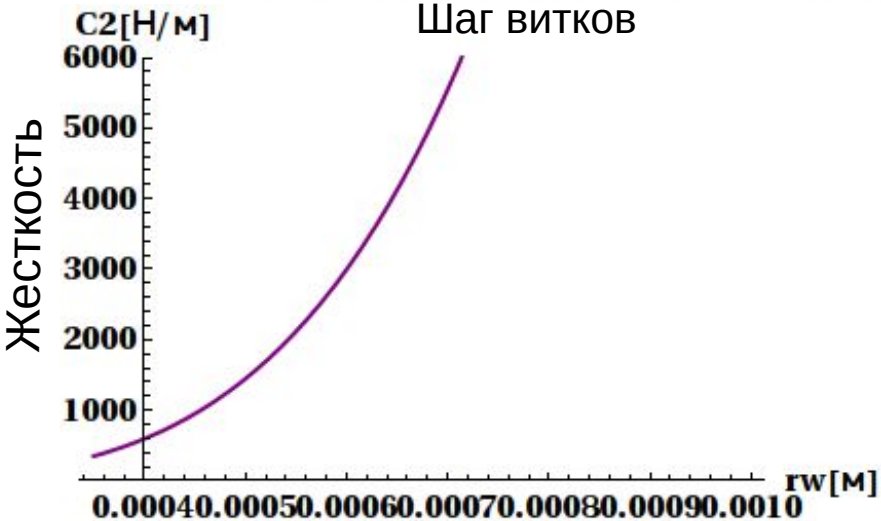
Длина пружины



Шаг витков



Радиус пружины



Радиус прутка

Подбор пружины

- На основе полученных формул

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{E}{G}=\frac{1}{2}$$

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\nu=-\frac{3}{4}$$

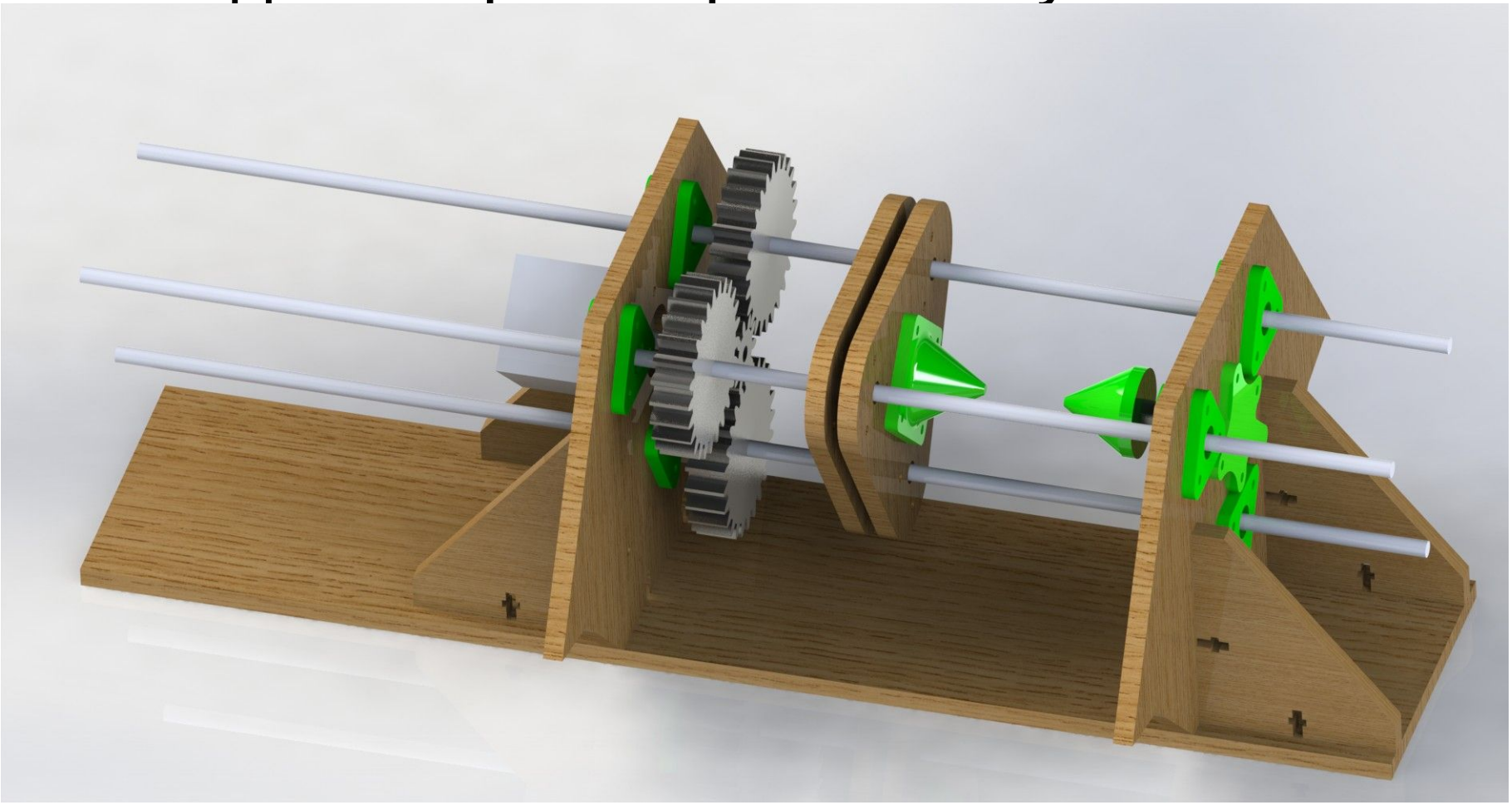
Из известных материалов минимальным коэффициентом Пуассона обладает литий (ν = - 0.54)

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{E}{G}=2(1+\nu)=0.92$$

К счастью, на практике возникает изгиб

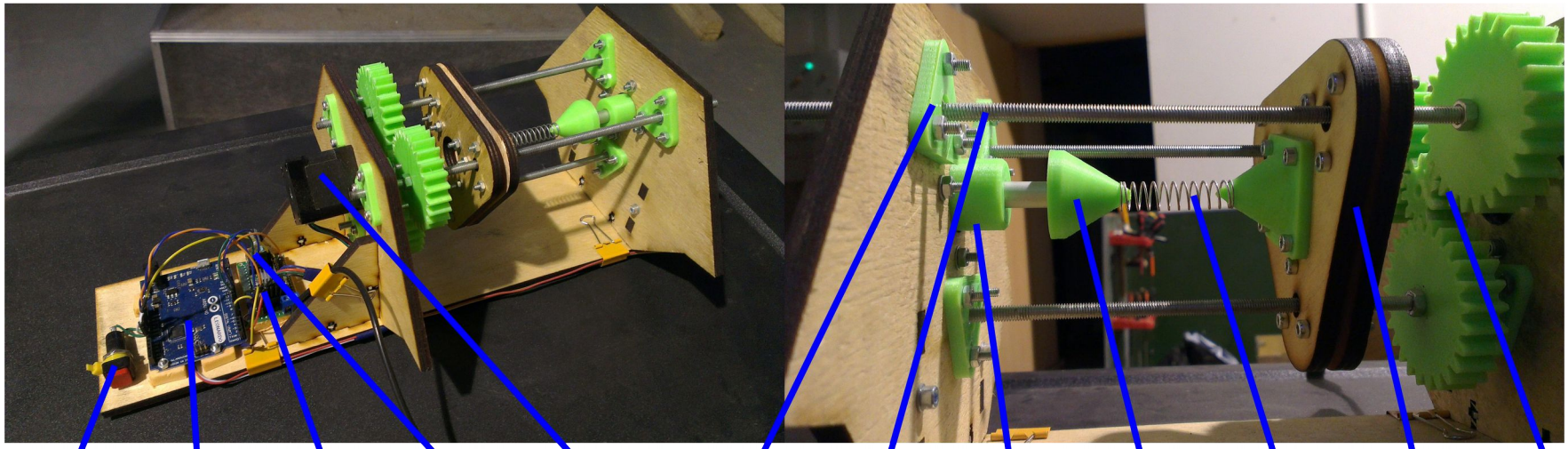
Разработка установки для определения жесткости пружины при сжатии

- 3D модель спроектированной установки



Разработка установки для определения жесткости пружины при сжатии

- Схема установки



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1 - кнопка начала испытания
2 - контроллер Arduino Leonardo
3 - контроллер шагового двигателя
4 - калибровочный резистор
5 - шаговый двигатель
6 - шариковые подшипники
7 - винтовые направляющие
8 - корпус датчика давления
9 - подвижный конус
10 - испытуемая пружины
11 - подвижная каретка
12 - редуктор-синхронизатор вращения направляющих

Получаемые результаты

- График показаний датчика от перемещения каретки при нагружении и разгрузке пружины

Выводы

- Проведены опыты по применению гиперболоидных конструкций
  - Обнаружена невозможность изготовления
- Проведены опыты по применению витых пружин
  - Обнаружен ряд преимуществ в их использовании
- Получены выражения для жесткости пружин при растяжении (сжатии)
  - Получены выражения для различных граничных условий
- Проведено сравнение с применяемой формулой [5]
  - Обнаружено, что, полученные при решении задачи о деформации витой пружины, соотношения лучше описывают случай малого количества витков
- Получено выражение для сдвиговой жесткости пружины
- Проведен подбор пружины на основании полученных формул
  - Обнаружено, что в случае применения полученных соотношений материал пружины должен являться ауксетиком, например литий
  - Обнаружена необходимость расчетов для получения действительной сдвиговой жесткости
- Разработана установка по определению жесткости при сжатии
  - Данная установка может применяться в данных целях при условии точной калибровки

Список литературы

1. Hugh O. Pierson “Handbook of Carbon, Graphite, Diamond and Fullerenes. Properties, Processing and Applications”, NOYES PUBLICATIONS, Park Ridge, New Jersey, U.S.A. 1993, P.198-223

2. И.Е. Беринский “Моделирование межатомных взаимодействий в графене

с применением линейной теории стержней”, Мезо-, нано-, биомеханика и механика природных процессов

Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 388–390

3. А. М. Кривцов “Механическая модель углеродной связи” (14 августа – 5 сентября 2013 неопубликованные материалы)

4. П.А. Жилин “Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней”,

Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2007г

5. П. Г. Гузенков “Краткий справочник к расчетам деталей машин” Высшая школа, Москва, 1964г

6. Тимошенко С. П. “Курс сопротивления материалов”, Изд-во кн. маг. Л. Идзиковского, Киев, 1911г

7. О.С. Лыбашева “Исследование упругих и прочностных свойств стержневых конструкций” (2014 неопубликованные материалы)

Спасибо за внимание