

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., член-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А.М.Кривцов

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

магистерская диссертация

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РОСТА ТРЕЩИНЫ ПРИ  
МОНОТОННОМ И ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ В УСЛОВИЯХ  
СМЕШАННЫХ МОД РАЗРУШЕНИЯ**

по направлению подготовки

01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.04.03\_01 Механика деформируемого твердого тела

Выполнил

студент гр.5040103/20101

\_\_\_\_\_

М.М. Фролов

Руководитель

профессор ВШМиПУ, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

А.С. Семенов

Консультант

Инженер-конструктор 1 категории

\_\_\_\_\_

А.В. Савиковский

Консультант

по нормоконтролю

\_\_\_\_\_

Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург – 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>ГЛАВА 1 Законы, определяющие процесс распространения трещины</b>	<b>8</b>
1.1 Кинематика разрушения . . . . .	8
1.1.1 Контрольный объем с трещиной . . . . .	8
1.1.2 Производная и интеграл в окрестности вершины . . . . .	8
1.2 Напряжения в окрестности вершины трещины . . . . .	12
1.3 Термодинамика хрупкого разрушения . . . . .	13
1.3.1 Работа разрушения и поверхностная энергия . . . . .	14
1.3.2 Первое начало термодинамики . . . . .	15
1.3.3 Второе начало термодинамики . . . . .	17
1.3.4 Вектор потока энергии . . . . .	19
1.4 Критерии разрушения . . . . .	21
1.5 Критерии расчета траектории распространения . . . . .	22
1.5.1 Критерий максимальных окружных напряжений . . . . .	23
1.5.2 Критерий минимума плотности энергии деформаций . . . . .	25
1.5.3 Критерий максимума выделения энергии . . . . .	26
1.5.4 Критерий максимума трехосности напряженного состояния . . . . .	28
1.6 Рост трещины многоциклового усталости . . . . .	29
1.6.1 Закон роста усталостной трещины . . . . .	29
1.6.2 Эквивалентные меры параметров разрушения . . . . .	30
<b>ГЛАВА 2 Расчет траектории трещины на основе пользовательских критериев</b>	<b>31</b>
2.1 Предварительная подготовка геометрии . . . . .	31
2.2 Инициализация параметров и задание критериев . . . . .	32
2.3 Итерационный расчет траектории трещины . . . . .	34
2.4 Верификация вычисления КИН . . . . .	35

## ГЛАВА 3 Численный расчет траектории распространения

<b>трещины</b>	<b>39</b>
3.1 Растяжение прямоугольной пластины с круговым отверстием	40
3.1.1 Постановка задачи . . . . .	40
3.1.2 Конечно-элементная модель . . . . .	41
3.1.3 Влияние размера КЭ и инкремента на траекторию . .	41
3.1.4 Верификация результатов расчета, сравнение критериев	43
3.2 Трехточечный изгиб . . . . .	46
3.2.1 Постановка задачи . . . . .	46
3.2.2 Конечно-элементная модель . . . . .	47
3.2.3 Влияние размера КЭ и инкремента на траекторию . .	47
3.2.4 Валидация результатов расчета. Сравнение критериев	50
3.3 Трехточечный изгиб балки с тремя отверстиями . . . . .	52
3.3.1 Постановка задачи . . . . .	52
3.3.2 Конечно-элементная модель . . . . .	53
3.3.3 Влияние размера КЭ и инкремента на траекторию . .	54
3.3.4 Валидация результатов расчета. Сравнение критериев	54
3.4 Диагональное растяжение СТС образца . . . . .	56
3.4.1 Описание эксперимента . . . . .	57
3.4.2 Геометрия образца для численного расчета . . . . .	58
3.4.3 Конечно-элементная модель . . . . .	59
3.4.4 Влияние размера КЭ на расчетную траекторию . . .	59
3.4.5 Влияние инкремента на расчетное количество циклов	61
3.4.6 Валидация результатов расчета траектории трещины, сравнение критериев . . . . .	62
3.4.7 Валидация результатов расчета усталостной кривой при различных выражениях $\Delta K_{eq}$ . . . . .	62

**Заключение** **66**

**Список использованных источников** **67**

# Введение

*для предотвращения смертельного  
заболевания нужно знать его природу,  
симптомы и характер протекания;  
для обеспечения прочности  
конструкции нужно знать причины и  
характер её возможного разрушения*

---

Ю.Н. Работнов,  
предисловие к книге «механика  
упругопластического разрушения» [7]

С развитием промышленности практика выдвигает всё более строгие требования к прочности, устойчивости и долговечности материалов и конструкций. Важной частью прочностных свойств материалов является их трещиностойкость – способность сопротивляться распространению трещины в определенных условиях эксплуатации и при заданном диапазоне нагрузок. Для повышения трещиностойкости материалов применяются разные методы, такие как: измельчение зерен (например, с помощью интенсивной пластической деформации [1]), введение в объем материала включений [36], создающих концентрацию напряжений и изменяющих траектории трещин, добавление нановолокон [14] и многие другие.

Несмотря на множество работ по методам повышения трещиностойкости материалов, вопрос моделирования распространения трещин на данный момент достаточно плохо изучен. Связано это прежде всего с тем, что разрушение рассматривается как *событие*, а не как *процесс*. Действительно, если необходимо полностью предотвратить разрушение, то траекторию трещины определять незачем, достаточно знать условия, при которых она не будет расти. Однако, для повышения трещиностойкости материала в частности и конструкции в целом, знание о траектории распространения трещины представляется крайне полезным. Небольшое изменение конструкции может изменить траекторию трещины таким образом, что её распространение не скажется на несущей способности фатальным образом.

Предложено множество критериев для расчета траектории распространения трещины [21, 48, 51, 34], базирующихся на различных физических

соображениях. При этом, систематическое исследование влияния различных критериев на расчетную траекторию трещины не проводилось. В литературе существуют эпизодические сравнения критериев по начальному углу отклонения трещины [50, 34, 26], но таких исследований для сравнения траекторий совершенно недостаточно.

Целью данной работы является исследование влияние критерия выбора направления роста трещины на расчетную траекторию при монотонном и циклическом нагружении изотропного линейно упругого материала. В работе были поставлены и решены следующие задачи:

1. разработка APDL макроса для расчета траектории распространения трещины на основе пользовательских критериев;
2. верификация и валидация результатов расчета траектории при монотонном нагружении;
3. валидация результатов расчета траектории и количества циклов усталостного роста при циклическом нагружении.

Основные положения и результаты данной работы докладывались на следующих конференциях:

1. Всероссийская конференция «Неделя науки ФизМех». Санкт-Петербург, 3-7 апреля 2023 г.;
2. II Школа-семинар «Механика, химия и новые материалы». Санкт-Петербург, 25-26 сентября 2023 г.;
3. Всероссийская конференция «Неделя науки ФизМех». Санкт-Петербург, 1-5 апреля 2024 г.

# ГЛАВА 1

## Законы, определяющие процесс распространения трещины

### 1.1 Кинематика разрушения

#### 1.1.1 Контрольный объем с трещиной

Рассмотрим элемент объема  $V$ , изображенный на рис. 1.1. Будем считать, что  $V$  – материальный объем, в различные моменты времени состоящий из одних и тех же точек тела. Элемент объема выбран таким образом, чтобы внутри него оказалась вершина трещины, обозначенная вектором отсчетного положения  $\mathbf{R}_c(t)$ , и фрагмент берегов длины  $l(t)$ .

Расстояние между берегами трещины полагается пренебрежимо малым по сравнению с длиной трещины, а сама трещина отождествляется с кривой  $l(t)$ . В каждой точке кривой  $l$  определена касательная  $\mathbf{e}$  и нормаль  $\mathbf{m}$ . В вершине трещины касательная задает направление распространения трещины. Под распространением трещины понимается *изменение отсчетного положения вершины трещины с течением времени*.

Скорость распространения трещины определяется выражением

$$\mathbf{V}_c = \frac{d\mathbf{R}_c(t)}{dt} = \dot{l}\mathbf{e} . \quad (1.1)$$

#### 1.1.2 Производная и интеграл в окрестности вершины

Значение функции на берегах трещины будем обозначать следующим образом:

$$\Phi^\pm(\mathbf{R}, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\mathbf{R} \pm \varepsilon \mathbf{m}, t) , \quad (1.2)$$

$\Phi^+$  – значение на верхнем берегу,  $\Phi^-$  – значение на нижнем берегу.

В дальнейшем понадобится вычислять интегралы по объему, содержащему трещину. Так как некоторые поля в вершине трещины сингулярны,

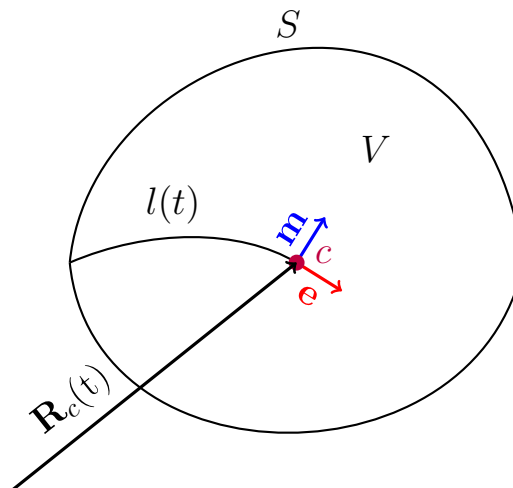


Рисунок 1.1 — Фрагмент тела с трещиной.

интеграл по ним определяется в смысле главного значения. Для этого объем  $V$  разбивается на два по контуру  $\Gamma_\delta$ , который изображен на рис. 1.2.

$$V = V_\delta \cup D_\delta . \quad (1.3)$$

$\Gamma_\delta$  представляет собой окружность радиуса  $\delta$  с центром в вершине трещины, точки которой в данный момент времени совпадают с точками тела, расстояние от которых до вершины трещины равно  $\delta^1$ . При распространении трещины контур  $\Gamma_\delta$  смещается таким образом, чтобы вершина оставалась в его центре, поэтому в различные моменты времени этот контур состоит из различных точек тела.

Интеграл от сингулярной в вершине функции  $\Psi$  определяется следующим образом:

$$\int_V \Psi(\mathbf{R}, t) dV = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{V_\delta} \Psi(\mathbf{R}, t) dV . \quad (1.4)$$

Под «стягиванием» контура  $\Gamma_\delta$  к вершине трещины понимается предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$ . Для обозначения интегралов по контуру, стягиваемому к вершине трещины, вводится следующее обозначение

$$\int_c \Phi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \Phi(\mathbf{R}, t) d\Gamma . \quad (1.5)$$

<sup>1</sup>имеется ввиду расстояние в отсчетной конфигурации

Индекс  $s$  в данном случае не является обозначением какого-то конкретного контура, а просто указывает на то, что интегрирование ведется по контуру, который стягивается к вершине.

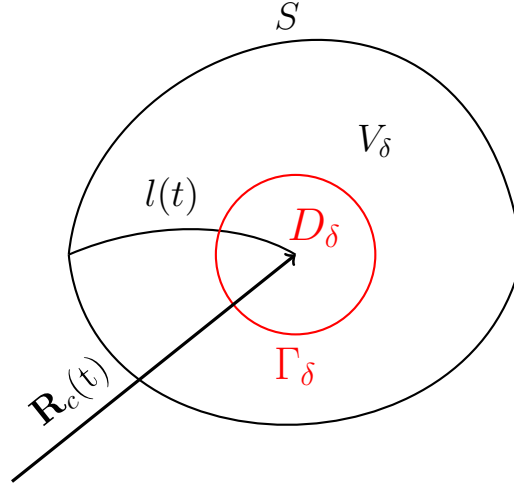


Рисунок 1.2 — Круг с центром в вершине.

Также бывает полезно представлять поле скоростей в системе отсчета, связанной с вершиной трещины. Для этого введем вектор относительного отсчетного положения  $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_c$  (см. рис. 1.3). Относительное актуальное положение определяется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{r}}(\widehat{\mathbf{R}}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}_c + \widehat{\mathbf{R}}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t). \quad (1.6)$$

Переход из глобальной системы отсчета в локальную приводит к следующему соотношению для скоростей:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial t} \right|_{\widehat{\mathbf{R}}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \widehat{\mathbf{R}}} \cdot \frac{\partial \widehat{\mathbf{R}}}{\partial t} = \\ &= \left. \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial t} \right|_{\widehat{\mathbf{R}}} + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \widehat{\mathbf{R}}} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R} - \mathbf{R}_c)}{\partial t} = \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{r}} \nabla_{\widehat{\mathbf{R}}} \cdot \mathbf{V}_c. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В соотношении выше введены обозначения

$$\left. \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial t} \right|_{\widehat{\mathbf{R}}} = \hat{\mathbf{v}}, \quad \nabla_{\widehat{\mathbf{R}}} = \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{R}}}. \quad (1.8)$$



Преобразуем тензор  $\hat{\mathbf{r}}\nabla_{\hat{\mathbf{R}}}$

$$\hat{\mathbf{r}}\nabla_{\hat{\mathbf{R}}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \hat{\mathbf{R}}} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}_c + \hat{\mathbf{R}})}{\partial \hat{\mathbf{R}}} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}_c + \hat{\mathbf{R}})}{(\mathbf{R}_c + \hat{\mathbf{R}})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{R}_c + \hat{\mathbf{R}})}{\partial \hat{\mathbf{R}}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F} . \quad (1.9)$$

Подставив данное преобразование в (1.7), получим окончательную форму преобразования скоростей:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}_c . \quad (1.10)$$

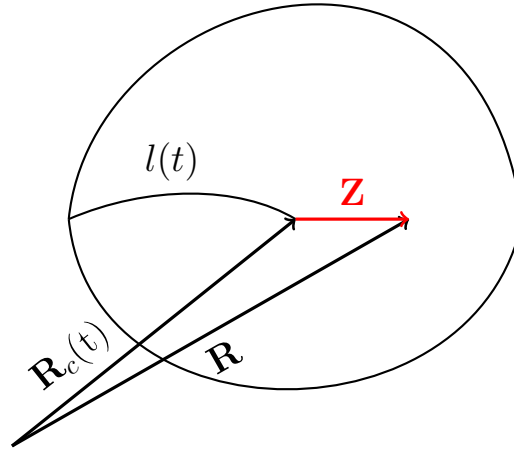


Рисунок 1.3 — Положение точки тела относительно вершины трещины.

### Транспортная теорема Рейнольдса

Теорема Рейнольдса является обобщением правила дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом на многомерный случай. При распространении трещины элемента объема  $V_\delta$  (см. рис. 1.2) меняет свою границу, так как контур  $\Gamma_\delta$  перемещается относительно точек тела. Таким образом,  $V_\delta$  – объем с переменной границей  $\Gamma_\delta$ .

Правило дифференцирования интегралов по такой области выглядит следующим образом [18]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\delta} \Psi dV = \int_{V_\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV - \int_{\Gamma_\delta} \Psi \mathbf{V}_c \cdot \mathbf{N} d\Gamma , \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{V}_c$  – скорость изменения отсчетного положения точек контура  $\Gamma_\delta$ , кото-

рая равна скорости распространения трещины, так как контур смещается вслед за её распространением,  $\mathbf{N}$  – внешняя нормаль к контуру в отсчетном положении. Применяя данную теорему в линейной упругости, допустимо заменить отсчетную нормаль  $\mathbf{N}$  на актуальную  $\mathbf{n}$ .

Переходя к пределу  $V_\delta \rightarrow V$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , получим интегральное соотношение для всего объема:

$$\frac{d}{dt} \int_V \Psi dV = \int_V \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV - \mathbf{V}_c \cdot \int_c \Psi \mathbf{N} . \quad (1.12)$$

## 1.2 Напряжения в окрестности вершины трещины

Рассматривая процесс распространения трещины в рамках континуального подхода, мы полагаем, что всюду (кроме, может быть, вершины трещины) выполняются законы динамики сплошной среды – уравнения баланса количества движения (1.13) и баланса кинетического момента (1.14).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} , \quad (1.13)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$  – вектор перемещений. Объемными силами пренебрегаем.

$$\boldsymbol{\sigma}_\times = \boldsymbol{\sigma} \cdot \times \mathbf{E} = 0 , \quad (1.14)$$

$\boldsymbol{\sigma}_\times$  – векторный инвариант тензора напряжений.

Будем считать, что рассматриваемая среда линейно термоупругая и следует закону Гука (1.15) вплоть до разрушения.

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e , \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} , \quad (1.15)$$

где  ${}^4\mathbf{C}$  – тензор жесткости,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$  – линейный тензор деформаций,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  – упругая деформация,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$  – термическая деформация.

### Коэффициенты интенсивности напряжений

Из решения задач о растяжении и сдвиге в неограниченной плоскости с разрезом [3, 9] известно, что в вершине трещины наблюдается сингулярность компонент напряжений и деформаций. Поле напряжений в окрест-

ности вершины имеет вид:

$$\sigma_{ij} \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} h_{ij}(\theta) + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad (1.16)$$

где  $r, \theta$  – радиус и угол полярных координат,  $K_I, K_{II}, K_{III}$  – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН),  $f, g, h$  – ограниченные в вершине функции полярного угла. Известно также, что двумерные распределения напряжений (и перемещений) вблизи вершины трещины имеют структуру вида (1.16) независимо от формы тела, геометрии трещины и приложенных нагрузок (см. [8, с.18-24] или [10, гл.3 §5]).

Таким образом, при описании хрупкого разрушения оперируют не величинами напряжений и деформаций, а коэффициентами интенсивности напряжений. Эти коэффициенты зависят от длины трещины, величины нагрузки и геометрии образца. Для прямолинейной трещины длины  $2l$  в неограниченной области под действием растягивающих  $p$  и сдвиговых  $\tau$  напряжений эти коэффициенты определяются соотношениями:

$$K_I = p\sqrt{\pi l}, \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}. \quad (1.17)$$

Для тел более сложной геометрии пользуются формулами:

$$K_I = p\sqrt{\pi l}F_I, \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}F_{II}, \quad (1.18)$$

$F_I, F_{II}$  – корректирующие факторы. Обширный перечень корректирующих факторов для тел различной геометрии приведен в справочниках [4, 5].

### 1.3 Термодинамика хрупкого разрушения

Исследования по механике разрушения твердых тел берут свое начало с работы Алана Гриффитса [27]. Эта работа является основополагающей, так как в ней процесс разрушения связывается с наличием в теле трещин. Условие развития трещины Гриффитс сформулировал в виде энергетического баланса

$$\frac{\partial}{\partial l} (W - \Sigma) = 0, \quad (1.19)$$

где  $W$  – энергия деформации,  $\Sigma = \psi_0 l$  – поверхностная энергия трещины. По Гриффитсу, трещина в твердом теле будет развиваться во время его деформации, если скорость освобождения энергии деформации будет больше прироста поверхностной энергии в результате образования новых поверхностей.

### 1.3.1 Работа разрушения и поверхностная энергия

Несмотря на то, что концепция Гриффитса широко используется и по сей день, физическая интерпретация поверхностной энергии неоднократно подвергалась пересмотру. Согласно классической теории Гриффитса, поверхностная энергия определяется поверхностным натяжением материала.

Орован [39] предложил концепцию квазихрупкого разрушения, в которой удельная энергия разрушения представляется в виде суммы поверхностной энергии и удельной работы пластических деформаций

$$\psi = \psi_0 + \psi_p, \quad \psi_p \gg \psi_0 . \quad (1.20)$$

При этом считается, что область пластической деформации настолько мала, что можно с достаточной точностью пользоваться асимптотиками упругого решения (1.16).

Вне зависимости от физической интерпретации, работу разрушения  $\psi$  можно понимать просто как количество энергии, необходимое для образования единицы свободной поверхности трещины.

Скорость изменения энергии  $\Sigma$  имеет вид

$$\dot{\Sigma} = \dot{\psi}l + \psi\dot{l} , \quad (1.21)$$

но, поскольку  $\psi$  обычно рассматривают как константу материала, то величиной  $\dot{\psi}$  пренебрегают:

$$\dot{\Sigma} = \psi\dot{l} . \quad (1.22)$$

При хрупком разрушении такое упрощение допустимо, даже если  $\psi$  не является константой материала, так как скорости распространения трещины при хрупком разрушении очень велики. В силу данного обстоятельства допустимо принять  $\dot{\psi}l \gg \psi\dot{l}$  и пренебречь слагаемым  $\dot{\psi}l$ .

Можно также ввести *вектор поверхностной энергии* разрушения

$$\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e} + \eta \mathbf{m} , \quad (1.23)$$

где  $\eta$  – поверхностный сдвиг,  $\mathbf{m} \perp \mathbf{e}$ .

В таком случае изменение поверхностной энергии представляется произведением вектора поверхностной энергии и скорости распространения

$$\dot{\Sigma} = \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{V}_c . \quad (1.24)$$

Гёртин [29] вводил конфигурационную силу, аналогичную (1.23) по смыслу и структуре, следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\psi} = \psi(\theta) \mathbf{e} + \psi'(\theta) \mathbf{m} , \quad (1.25)$$

где штрихом обозначена производная по углу  $\theta$ . Если работа разрушения изотропна, то данное соотношение упрощается

$$\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e} . \quad (1.26)$$

В дальнейшей работе рассматриваются только материалы с изотропной работой разрушения, поэтому вектор поверхностной энергии принимается в виде (1.26).

### 1.3.2 Первое начало термодинамики

По Гриффитсу, полная энергия  $E$  системы с трещиной может быть представлена в виде суммы внутренней  $U$ , кинетической  $K$  и поверхностной  $\Sigma$  составляющих. Баланс энергии при этом примет вид

$$\dot{U} + \dot{K} + \dot{\Sigma} = N + Q , \quad (1.27)$$

где  $N$  – мощность внешних механических воздействий,  $Q$  – мощность немеханических воздействий. В квазистатической постановке выражение упрощается

$$\dot{U} + \dot{\Sigma} = N + Q . \quad (1.28)$$

Если принять следующее представление для внутренней энергии<sup>2</sup>

$$\dot{U} = \dot{W} + Q , \quad (1.29)$$

где  $W$  – энергия деформации, то можно преобразовать баланс энергии (1.28) к виду

$$\dot{\Sigma} + \dot{W} = N , \quad (1.30)$$

который используется достаточно широко, так как обладает ясным физическим смыслом – вся механическая энергия, подводимая в систему, расходуется на только на деформирование и разрушение. Однако, с точки зрения автора, данная формулировка в общем случае внутренне противоречива<sup>3</sup>, поэтому предпочтение отдается балансу энергии в форме (1.28).

Распишем баланс энергии (1.28) в терминах механики деформируемого твердого тела

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{V}_c = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho r dV , \quad (1.31)$$

$u$  – плотность внутренней энергии,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  – вектор скорости,  $\mathbf{h}$  – вектор теплового потока,  $r$  – плотность источников объемного тепловыделения. Преобразуем баланс энергии, применив теорему Рейнольдса (1.12) для интеграла в левой части и теорему Стокса для интегралов в правой части

$$\int_V \rho \dot{u} dV - \mathbf{V}_c \cdot \int_c \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{V}_c = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV + \int_V (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{h}) dV , \quad (1.32)$$

где  $\tilde{\mathbf{b}} = \rho u \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}$ .

Введем обозначение

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\psi} - \int_c \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} . \quad (1.33)$$

Вектор  $\mathbf{A}$  – сосредоточенная в вершине трещины величина, в то время как все остальные слагаемые в балансе энергии представляют собой

<sup>2</sup>Которое, по сути, является одной из формулировок первого начала термодинамики для тела без трещины

<sup>3</sup>Противоречие заключается в том, что для получения формулы (1.30) используется две формулировки баланса энергии – для тела с трещиной (1.28) и для тела без трещины (1.29)

объемные интегралы. Введем в рассмотрение объемный интеграл

$$\int_V \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_c dV , \quad (1.34)$$

где  $\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_c)$  – дельта-функция.

С помощью данного интеграла баланс энергии можно переписать в виде

$$\int_V (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho r + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_c) dV = 0 . \quad (1.35)$$

Из данного интегрального равенства, в силу произвольности выбора объема  $V$ , следует<sup>4</sup>:

- в любой точке объема, за исключением вершины трещины, выполняется локальный баланс энергии сплошной среды

$$\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla \cdot \mathbf{h} - \rho r = 0 . \quad (1.36)$$

- в вершине трещины выполняется локальное равенство

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_c = \left( \boldsymbol{\psi} - \int_c \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{V}_c = 0 . \quad (1.37)$$

### 1.3.3 Второе начало термодинамики

В механике деформируемого твердого тела наиболее распространенной формой записи второго начала термодинамики является неравенство Клаузиуса-Дюгема [6]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV + \int_S \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \frac{1}{T} \rho r \geq 0 , \quad (1.38)$$

где  $s$  – массовая плотность энтропии,  $T$  – абсолютная температура. Преобразуя данное неравенство по теореме Рейнольдса (1.12), получим

$$\int_V \rho \dot{s} dV - \mathbf{V}_c \cdot \oint_c \rho s \mathbf{n} + \int_V \left( \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \rho r \right) dV \geq 0 . \quad (1.39)$$

<sup>4</sup>данный вывод, конечно, не претендует на строгое доказательство, а лишь мотивирует автора к его проведению в будущем

Выразим из баланса энергии слагаемые  $\nabla \cdot \mathbf{h} - \rho r$  и подставим их в энтропийное неравенство

$$\int_V \left( \rho \dot{s} + \frac{1}{T} [-\rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}_c] - \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot \nabla T \right) dV - \mathbf{V}_c \cdot \int_c \rho s \mathbf{n} \geq 0. \quad (1.40)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{s} = \int_c \rho s \mathbf{n}, \quad (1.41)$$

и, аналогично преобразованию баланса энергии, внесем сосредоточенную в вершине величину под интеграл

$$\int_V \left( \rho \dot{s} + \frac{1}{T} [-\rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] - \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot \nabla T + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_c) \left[ \frac{1}{T} \mathbf{A} - \mathbf{s} \right] \cdot \mathbf{V}_c \right) dV \geq 0. \quad (1.42)$$

Как и в случае с балансом энергии, энтропийное неравенство во всех точках, кроме вершины трещины, имеет стандартный вид

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{u} - \rho T \dot{s} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \nabla T \geq 0, \quad (1.43)$$

а в вершине должно выполняться отдельное неравенство

$$(\mathbf{A} - T \mathbf{s}) \cdot \mathbf{V}_c \geq 0. \quad (1.44)$$

Преобразуем выражение в скобках

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - T \mathbf{s} &= \int_c (\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} - \rho T s \mathbf{n}) = \int_c (\rho u \mathbf{E} - \rho T s \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \\ &= \int_c (\rho f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \int_c \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$\mathbf{b}$  – тензор напряжений Эшелби [23],  $f = u - T s$  – свободная энергия Гельмгольца.



Полученный интеграл

$$\mathbf{J} = \int_c (\rho f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} , \quad (1.46)$$

есть вектор потока энергии в вершину трещины [10].

С учетом выражения для вектора потока энергии (1.46) локальная форма энтропийного неравенства в вершине трещины (1.44) принимает вид

$$(\mathbf{J} - \boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{V}_c \geq 0 . \quad (1.47)$$

### 1.3.4 Вектор потока энергии

Вектор потока энергии (1.46) есть векторная форма интеграла Черепанова-Райса

$$J_1 = \int_c \left( \rho f n_1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) . \quad (1.48)$$

Данный интеграл был впервые получен Эшелби [22] как конфигурационная сила, действующая на включение в упругой среде. Несколько позже вектор потока энергии появился в работах по механике разрушения [12, 33, 17].

Структура (1.47), согласно формализму Онзагера [2], есть произведение термодинамической силы на поток, порожденный этой силой. В качестве силы в данном случае выступает разность<sup>5</sup>  $\mathbf{J} - \boldsymbol{\psi}$ , в качестве потока – скорость распространения трещины  $\mathbf{V}_c$ .

Важным свойством вектора потока энергии является его инвариантность – значение интеграла на любом контуре, охватывающем вершину трещины и проходящем в области однородного<sup>6</sup> материала, одинаково.

Между КИН и компонентами вектора потока энергии для изотропного материала установлены следующие соотношения [33, 17]

$$J_1 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{J} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{\hat{E}} , \quad J_2 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{J} = -2 \frac{K_I K_{II}}{\hat{E}} , \quad (1.49)$$

$\hat{E} = E/(1 - \nu^2)$  для плоского деформированного состояния,  $\hat{E} = E$  для

<sup>5</sup>Если быть точным, то  $(\mathbf{J} - \boldsymbol{\psi})/T$ , т.к. (1.47) представляет собой производство энтропии, умноженное на температуру

<sup>6</sup>однородными должны быть свойства материала и поле температуры

плоского напряженного состояния ( $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона).

Физический смысл  $J_1$  непосредственно следует из законов термодинамики (1.37), (1.47)

$$(\mathbf{J} - \boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{V}_c = (\mathbf{J} - \boldsymbol{\psi}) \cdot V_c \mathbf{e} = (J_1 - \psi) V_c \geq 0 . \quad (1.50)$$

Таким образом,  $J_1$  является параметром разрушения. При достижении критического значения данного параметра начинается распространение трещины.

Для того, чтобы установить физический смысл  $J_2$ , заметим, что на основе второго начала термодинамики (1.47) можно предложить определяющее соотношение вида

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_c(\mathbf{J}) = \mathbf{V}_c(J_1, J_2) . \quad (1.51)$$

Вместе с этим, можно разложить скорость вершины на величину и направление

$$\mathbf{V}_c(J_1, J_2) = V_c(J_1, J_2) \mathbf{e}(J_1, J_2) . \quad (1.52)$$

Рассмотрим частный случай – распространение прямолинейной трещины. Для этого случая известно, что  $J_2 = 0$ .

$$\frac{\partial \mathbf{V}_c}{\partial l} = \frac{\partial V_c(J_1) \mathbf{e}(J_1, 0)}{\partial l} = \frac{\partial V_c(J_1)}{\partial l} \mathbf{e}(J_1, 0) , \quad (1.53)$$

т.к. для прямолинейной трещины  $\mathbf{e} = \text{const}$ . Получили соотношение

$$\mathbf{e}(J_1, 0) = \text{const} . \quad (1.54)$$

К сожалению, вывод о независимости  $\mathbf{e}$  и  $J_1$  невозможно распространить на смешанную моду, т.к. направление может быть задано нелинейной функцией компонент потока энергии. Например, согласно критерию максимума выделения энергии направление задается соотношением

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} . \quad (1.55)$$

Пусть  $J_2$  и не входит в критерий разрушения, учет этой компоненты необходим для определения направления распространения трещины.

## 1.4 Критерии разрушения

Исходя из энергетических соображений (законов термодинамики (1.37) и (1.47)), распространение трещины при хрупком разрушении представляет собой критический процесс – когда некоторая величина достигает критического значения, трещина начинает распространяться, до достижения данного значения трещина неподвижна. В механике хрупкого разрушения существует два основных подхода к формулировке критерия разрушения – силовой и энергетический.

### Силовой критерий разрушения

Ирвин [32] предположил, что если процесс разрушения определяется напряженно-деформированным состоянием в окрестности вершины трещины (которое, в свою очередь, зависит от КИН), то разумно предположить существование критического значения КИН, при котором наступает разрушение

$$\dot{l} > 0 \iff K_I = K_{IC} \vee K_{II} = K_{IIC} . \quad (1.56)$$

### Энергетический критерий разрушения

Для квазистатического разрушения в изотермической постановке предложен Гриффитсом [27]. Фактически, энергетический критерий разрушения является формулировкой первого (1.37) или второго (1.47) начала термодинамики.

Из первого начала термодинамики:

$$\dot{l} \neq 0 \implies \mathbf{e} \cdot \int_c (\rho u \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \psi . \quad (1.57)$$

Из второго начала термодинамики:

$$\dot{l} \neq 0 \implies \mathbf{e} \cdot \int_c (\rho f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} \geq \psi , \quad (1.58)$$

в условиях квазистатического хрупкого разрушения данное соотношение допустимо разрешать со знаком равенства, так как вся выделяемая энергия затрачивается на разрушение.

Нетрудно заметить, что формулировки энергетического критерия на ос-

нове двух законов термодинамики различаются на величину

$$\int_c (\rho u \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} - \int_c (\rho f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \int_c \rho T s \mathbf{n} , \quad (1.59)$$

которая обращается в нуль, если определяющее соотношение свободной энергии формулируется без учета термических слагаемых.

Можно рассматривать энергетический критерий как одну из двух эквивалентных форм

$$\mathbf{e} \cdot \int_c (\rho f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \psi^* , \quad (1.60)$$

$$\mathbf{e} \cdot \int_c (\rho f \mathbf{E} - \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} \geq \psi , \quad (1.61)$$

которые совпадают при выполнении соотношения

$$\psi^* = \psi + \int_c \rho T s \mathbf{n} . \quad (1.62)$$

## 1.5 Критерии расчета траектории распространения

Критерии расчета траектории распространения можно разделить на две группы – локальные и интегральные. Локальные критерии позволяют итерационно рассчитывать траекторию, разбивая её на малые приращения (инкременты), перед каждым из которых рассчитывается угол, на который этот инкремент отклонится от предыдущего. В линейной механике разрушения, как правило, локальные критерии выражаются через отношение  $K_I/K_{II}$ . Интегральные критерии [7, с. 202] обычно выражаются через интегралы вдоль искомой линии трещины и предполагают определение уравнения линии распространения трещины путем однократного анализа напряженного состояния тела с трещиной (или без трещины).

В данной работе рассматриваются локальные критерии для расчета двумернотраектории трещины. Перечень используемых критериев приведен ниже.

### 1.5.1 Критерий максимальных окружных напряжений

Самый старый и широко используемый критерий для определения траектории распространения трещины. Распространение трещины происходит в направлении, для которого окружные напряжения  $\sigma_\theta$  максимальны [21].

Окружные напряжения в смешанной моде имеют вид [9, стр. 18]

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) . \quad (1.63)$$

Условие экстремума  $\sigma_\theta$  в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 , \quad (1.64)$$

причем этот экстремум является максимумом, что нетрудно проверить.

Введем параметр смешанности мод

$$\zeta = \frac{K_{II}}{K_I} \quad (1.65)$$

и перепишем через него критерий максимальных окружных напряжений

$$\sin \theta + \zeta (3 \cos \theta - 1) = 0 . \quad (1.66)$$

Распределение окружных напряжений и кривая уравнения (1.66) при  $\zeta = 0,5$  представлены на рис. 1.4.

Уравнение (1.66) имеет следующее решение [49]

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{-2\zeta}{1 + \sqrt{1 + 8\zeta^2}} \right) , \quad (1.67)$$

которое часто представляют в другой форме [31, 47]

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{4\zeta} - \frac{1}{4} \sqrt{\zeta^{-2} + 8} \right) , \quad \zeta \geq 0 \quad (1.68)$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{4\zeta} + \frac{1}{4} \sqrt{\zeta^{-2} + 8} \right) , \quad \zeta < 0 \quad (1.69)$$

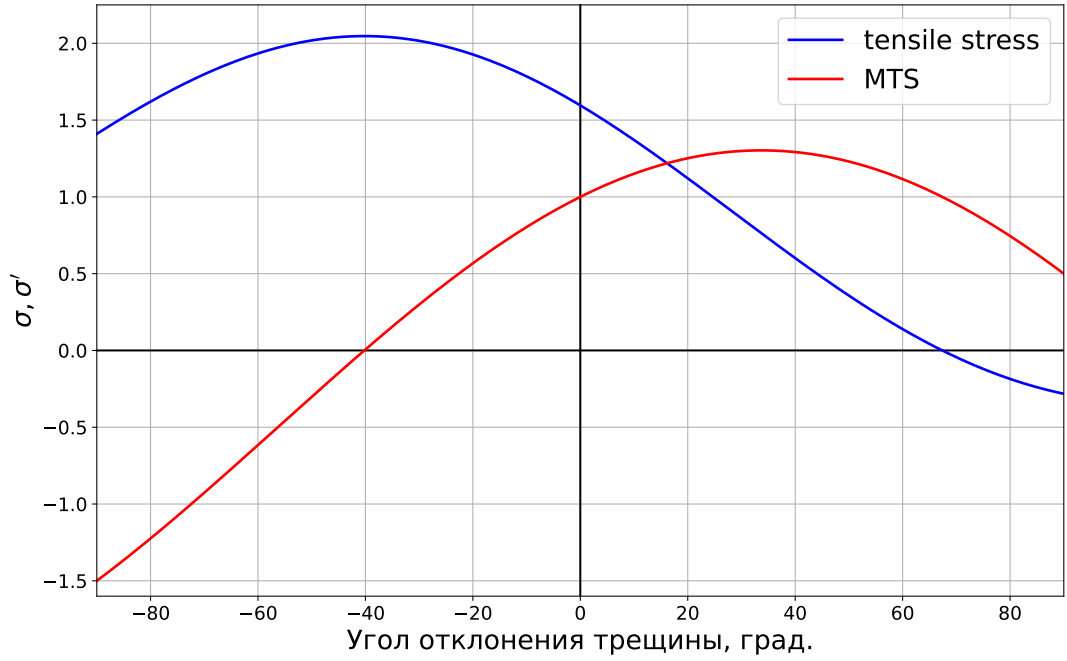


Рисунок 1.4 — Распределение окружных напряжений (tensile stress) и кривая уравнения критерия максимума окружных напряжений (MTS) в диапазоне углов от  $-90$  до  $90$  градусов при  $\zeta = 0,5$ .

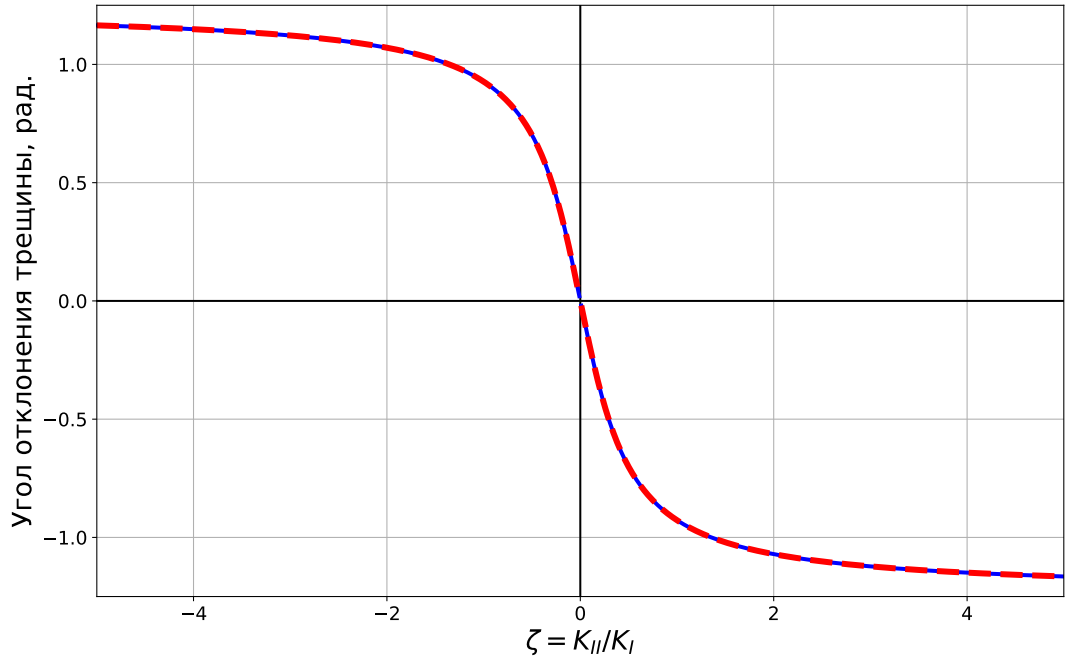


Рисунок 1.5 — Сравнение решений (1.67) (синяя сплошная кривая) и (1.68) (красная прерывистая кривая) уравнения критерия максимальных окружных напряжений (1.66).

### 1.5.2 Критерий минимума плотности энергии деформаций

Трещина распространяется в радиальном направлении, на котором плотность энергии деформации достигает минимума [48]. По аналогии с КИН можно ввести коэффициент плотности энергии деформаций<sup>7</sup>  $S$  согласно следующему определению

$$w = \frac{S(\theta)}{r}, \quad (1.70)$$

где  $w$  – плотность энергии деформаций. Различие между коэффициентом плотности энергии деформаций и КИН состоит в том, что  $S$  содержит в себе функцию угла. Си, автор данного критерия, предполагал, что замена постоянного коэффициента на функцию угла дает больше возможностей по определению направления роста трещины.

В смешанной моде  $S$  имеет следующее представление

$$S(\theta) = a_{11}(\theta)K_I^2 + 2a_{12}(\theta)K_I K_{II} + a_{22}(\theta)K_{II}^2, \quad (1.71)$$

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} (1 + \cos \theta) (\varkappa - \cos \theta), \quad (1.72)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} \sin \theta (2 \cos \theta - \varkappa + 1), \quad (1.73)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} ((\varkappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)), \quad (1.74)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $\varkappa$  – параметр плоской задачи, имеющий следующие значения:  $\varkappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  – в случае плоского напряжения,  $\varkappa = 3 - 4\nu$  – в случае плоской деформации.

Критерий минимума плотности энергии деформаций формулируется в терминах коэффициента  $S$  следующим образом

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = A_{11}K_I^2 + 2A_{12}K_I K_{II} + A_{22}K_{II}^2 = 0, \quad A_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial \theta}. \quad (1.75)$$

Разделив данное соотношение на  $K_I^2$ , можно получить уравнение в терминах коэффициента смешанности мод

$$A_{11} + 2A_{12}\zeta + A_{22}\zeta^2 = 0. \quad (1.76)$$

<sup>7</sup>Strain-energy density factor

Неудобство в применении критерия минимума плотности энергии деформаций заключается в том, что уравнение (1.76) всегда имеет несколько решений, из которых необходимо выбрать то, которое отвечает минимуму. Это обстоятельство накладывает соответствующие ограничения к применяемому методу численного решения или правильному определению области поиска решений. Распределение коэффициента плотности энергии деформаций (1.71) и кривая критерия минимума плотности энергии деформаций (1.76) приведены на рис. 1.6.

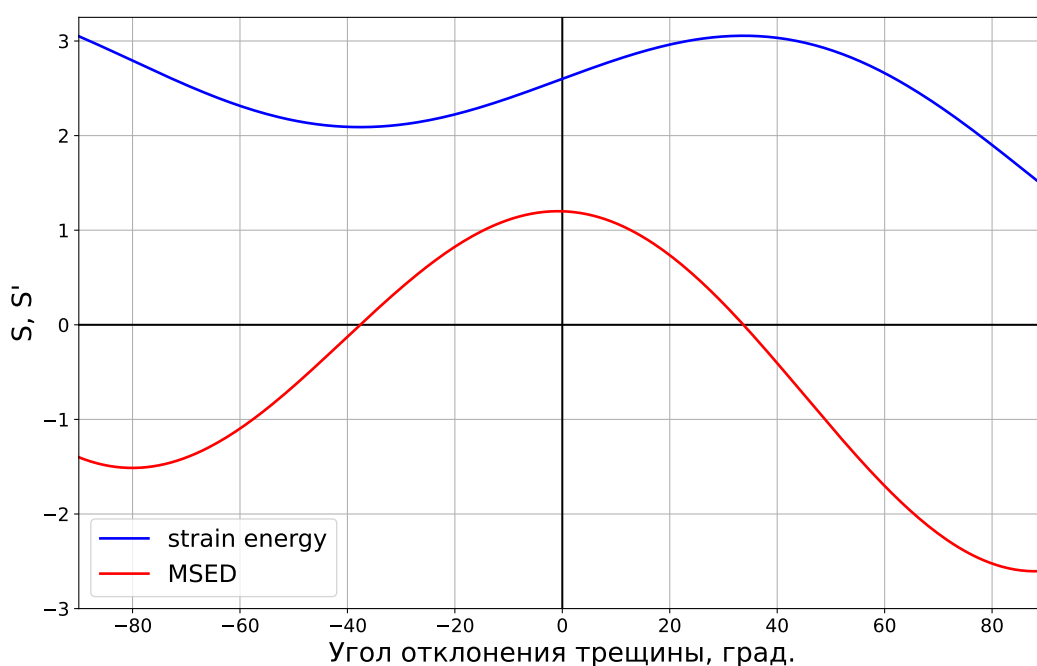


Рисунок 1.6 — Распределение плотности энергии деформации (strain energy) и кривая уравнения критерия минимума плотности энергии деформации (MSED) в диапазоне углов от  $-90$  до  $90$  градусов при  $\zeta = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$

### 1.5.3 Критерий максимума выделения энергии

Трещина развивается в направлении, вдоль которого освобождающаяся энергия будет максимальной [30]. В условиях квазистатического хрупкого разрушения данный критерий эквивалентен также условию максимума  $J$ -интеграла [51] и критерию потока энергии [10]. В изотропной среде эквивалентен также критерию максимума диссипации [29].

Существует также подход к определению направления распространения по конфигурационной силе [28], который приводит к тому же соотношению,



т.к. используемая в данном подходе конфигурационная сила совпадает с потоком энергии  $\mathbf{J}$ .

В терминах вектора потока энергии  $\mathbf{J}$  (1.46) данный критерий записывается следующим образом:

$$\operatorname{tg}\theta = \max_{\theta} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J}) , \quad (1.77)$$

где  $\mathbf{e}_r$  – радиальный базисный вектор полярной системы координат. Очевидно, что максимум данного выражения достигается в случае, когда  $\mathbf{e}_r$  совпадает по направлению с вектором потока энергии, поэтому угол можно найти непосредственно по компонентам  $\mathbf{J}$  (1.49)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{J_2}{J_1} = \frac{-2K_I K_{II}}{K_I^2 + K_{II}^2} . \quad (1.78)$$

Распределение проекций потока энергии  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J}$  и производных от этих проекций по углу приведено на рис. 1.7.

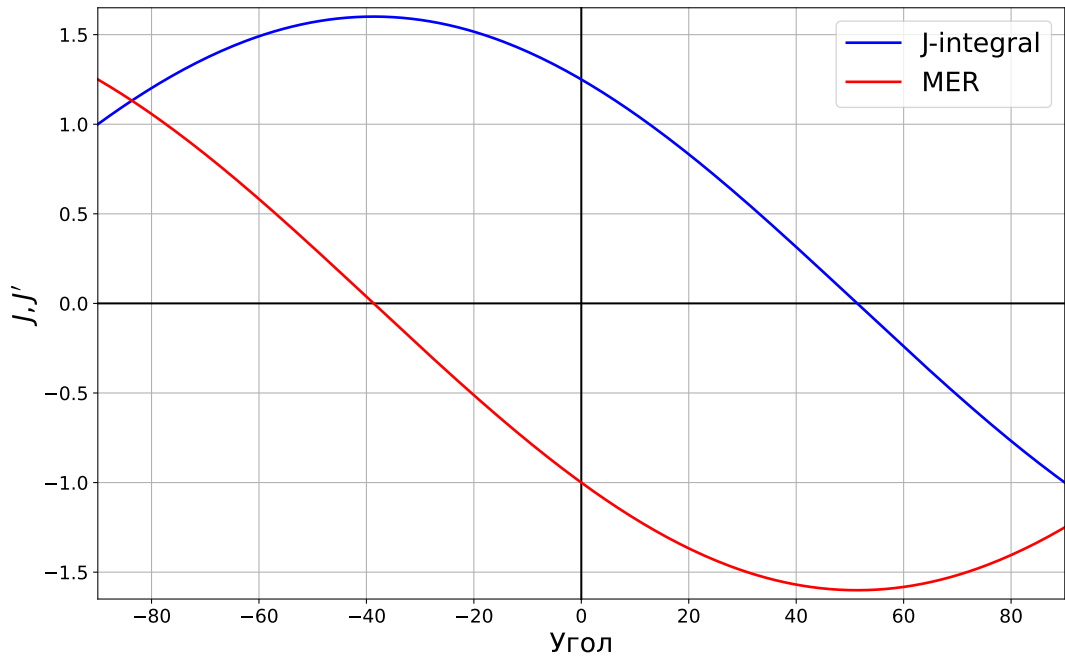


Рисунок 1.7 — Распределение проекций потока энергии (J-integral) и производная этой проекции по углу (MER) в диапазоне углов от  $-90$  до  $90$  градусов при  $\zeta = 0,5$ .

### 1.5.4 Критерий максимума трехосности напряженного состояния

Предложен Конгом [34]. Параметр трехосности напряженного состояния  $M$  вводится как отношение шаровой части тензора напряжений к интенсивности напряжений по Мизесу

$$M = \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_i} . \quad (1.79)$$

Максимум трехосности напряженного состояния определяется решением следующего уравнения

$$\text{tg}^4 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{\zeta} \text{tg}^3 \frac{\theta}{2} - \left(1 - \frac{2}{\zeta^2}\right) \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2\zeta} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) \text{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) = 0 . \quad (1.80)$$

Распределение параметра трехосности напряженного состояния (1.79) и кривая критерия максимума трехосности напряженного состояния (1.80) приведены на рис. 1.8.

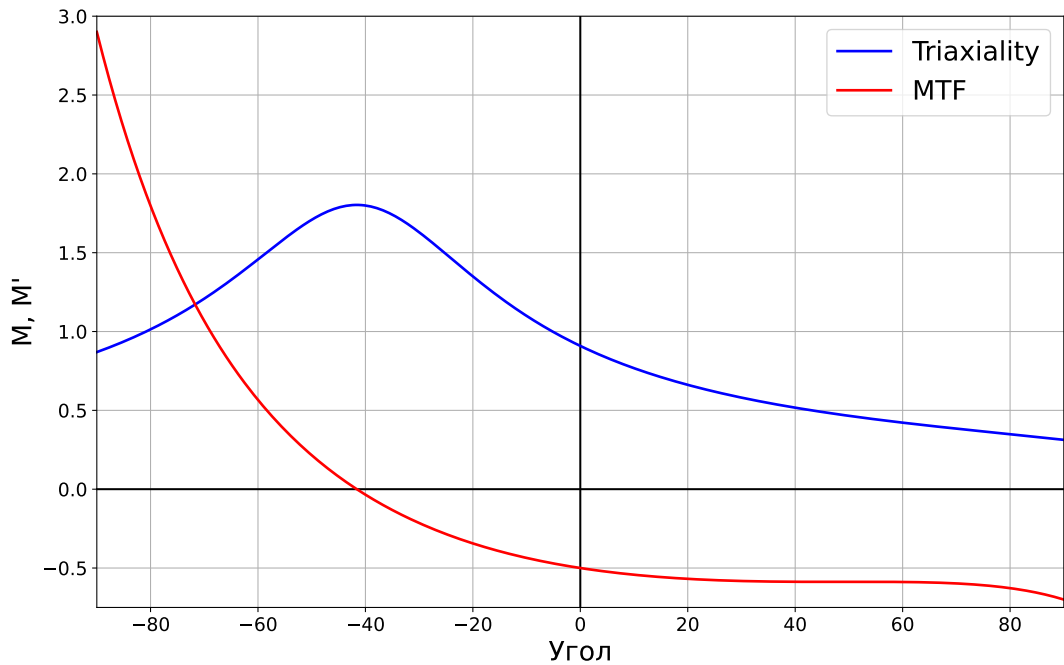


Рисунок 1.8 — Распределение коэффициента трехосности напряженного состояния (Triaxiality) и кривая критерия максимума трехосности напряженного состояния (MTF) в диапазоне углов от  $-90$  до  $90$  градусов при  $\zeta = 0,5$ .

## 1.6 Рост трещины многоциклового усталости

С точки зрения энергетического подхода, хрупкое разрушение является критическим процессом, однако на практике быстрому критическому распространению зачастую предшествует медленный докритический рост. Одним из механизмов такого роста является многоцикловая усталость. Характерными особенностями многоциклового усталости являются небольшие, по сравнению с пределом текучести, циклические нагрузки и большое количество циклов нагружения. Несмотря на макроскопически хрупкое поведение, многоцикловая усталость вызывается совокупностью необратимых процессов на микроуровне. На долговечность при усталости может влиять множество как внешних (амплитуда нагружения, коэффициент асимметрии, изменение амплитуды, внезапные интенсивные нагрузки или периоды выдержки и т.д.), так и внутренних (состав сплава, размер зерен, термообработка, состояние поверхности и т.д.) факторов.

### 1.6.1 Закон роста усталостной трещины

Распространение усталостной трещины выражается через подрастание длины трещины на за цикл и описывается эмпирическими зависимостями вида

$$\frac{\Delta l}{\Delta N} = f(\Delta K_{eq}) , \quad (1.81)$$

где  $\Delta l$  – приращение длины трещины,  $\Delta N$  – количество циклов, за которое произошло это приращение,  $\Delta K_{eq}$  – некоторая эквивалентная мера размахов КИН в смешанной моде.

Простейший закон усталостного роста – степенной закон Пэриса [40]

$$\frac{\Delta l}{\Delta N} = C(\Delta K_I)^m , \quad (1.82)$$

где  $\Delta K_I = K_I^{max} - K_I^{min}$  размах КИН,  $C, m$  – некоторые постоянные.

Обобщение закона Пэриса на смешанную моду сделал Танака [50]

$$\frac{\Delta l}{\Delta N} = C(\Delta K_{eq})^m , \quad (1.83)$$

$$\Delta K_{eq} = f(\Delta K_I, \Delta K_{II}).$$

При заданных приращениях  $\Delta l_i$ , количество циклов вычисляется суммированием по инкрементам

$$N = \sum_i \Delta N_i = \sum_i \frac{\Delta l_i}{C(\Delta K_{eq}^i)^m} . \quad (1.84)$$

В соотношении (1.84) величина  $\Delta K_{eq}^i$  вычисляется при длине трещины  $l_i = l_{i-1} + \Delta l_i$ . Если КИН увеличивается с ростом длины трещины, то оценка (1.84) аппроксимирует количество циклов снизу, в противном случае получаем аппроксимацию сверху.

### 1.6.2 Эквивалентные меры параметров разрушения

Для расчетов распространения усталостной моды существует множество различных определений эквивалентной меры КИН  $\Delta K_{eq}$ . Рассмотрим некоторые из них.

*Модель Ирвина* [11]. Основана на выделении энергии в смешанной моде

$$\Delta K_{eq} = \sqrt{(\Delta K_I)^2 + (\Delta K_{II})^2} . \quad (1.85)$$

*Модель Рихарда* [44]. Предложена по аналогии с классическими теориями прочности для материалов, чувствительных к давлению

$$\Delta K_{eq} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta K_I)^2 + 4(\beta \Delta K_{II})^2} , \quad (1.86)$$

где  $\beta = K_{IIC}/K_{IC} \approx 1,155$  [46].

*Модели Танаки* [50]. Основаны на постулате Ларднера [35] и дислокационной теории Виртмана [54].

$$\Delta K_{eq} = \sqrt{\Delta K_I^2 + 2\Delta K_{II}^2} , \quad (1.87)$$

$$\Delta K_{eq} = \sqrt[4]{\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4} . \quad (1.88)$$

*Модель Демира* [19, 20]. Получена с использованием нелинейной регрессии на численных и экспериментальных данных по СТС образцам

$$\Delta K_{eq} = \sqrt[4]{1,0519\Delta K_I^4 - 0,035\Delta K_{II}^4 + 2,3056\Delta K_I^2\Delta K_{II}^2} . \quad (1.89)$$

## ГЛАВА 2

### Расчет траектории трещины на основе пользовательских критериев

Современное инженерное ПО имеет достаточно широкие возможности для прочностных расчетов. Развиваются инструменты для решения сложных междисциплинарных задач в связанной постановке. Несмотря на это, возможности большинства конечно-элементных пакетов в области моделирования распространения трещин весьма ограничены.

На сегодняшний день ANSYS является наиболее популярным ПО для большинства инженерных расчетов. Инструментарий, который предоставляет ANSYS для расчетов механики разрушения, также достаточно широк – имеется три методики для расчета распространения трещины: VCCT, XFEM и SMART. Все перечисленные методики имеют разные преимущества и один общий недостаток – невозможность задать пользовательский критерий для расчета траектории.

Для преодоления ограничений встроенных средств ANSYS был реализован макрос расчета траектории распространения трещины на языке APDL, описанию работы которого посвящена данная глава. Разделы 2.1 и 2.2 посвящены предварительной подготовке геометрии и набору параметров, задание которых необходимо для полной инициализации расчета. Последний раздел данной главы посвящен пошаговому описанию работы макроса. В кратком виде содержание этого раздела отражено на блок схеме рис. 2.5.

#### 2.1 Предварительная подготовка геометрии

Для корректной работы макроса необходимо подготовить подходящую геометрию. «Подготовка» геометрии состоит в её разделении минимум на две области, как показано на рис. 2.1. В одной из областей будет распространяться трещина и на каждом цикле эта область будет перестраиваться, все остальные области останутся неизменными.

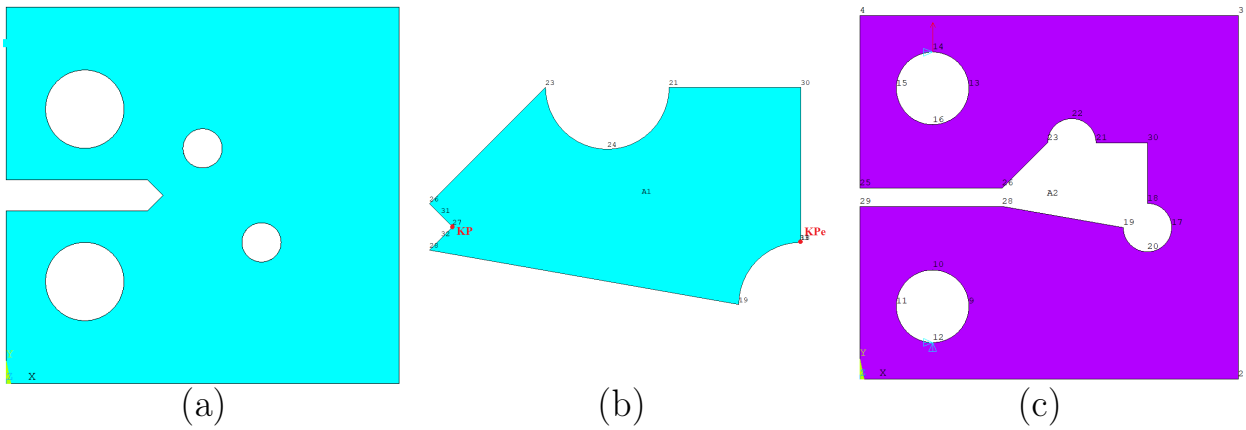


Рисунок 2.1 — Подготовка геометрии для макроса. (а) – исходная геометрия, (б) – область распространения трещины, (с) – образец за вычетом области распространения.

Подготовленная геометрия должна содержать две ключевые точки – КР и КРе (например, как на рис. 2.1 (б)). КР – начальное положение вершины трещины, КРе – опорная точка для разделения области распространения. Назначение точки КРе в дальнейшем будет раскрыто более подробно.

## 2.2 Инициализация параметров и задание критериев

После построения геометрии происходит инициализация следующих параметров макроса:

1. Prop\_size – характерный размер элементов в области распространения трещины;
2. Area – номер области распространения трещины;
3. КР – начальное положение вершины трещины;
4. КРе – опорная точка для разделения области распространения;
5. a – длина начальной трещины;
6. ar – инкремент;
7. Theta – угол между начальной трещиной и осью абсцисс глобальной системы координат;
8. cycle – количество итераций расчета;

9.  $R$  – коэффициент асимметрии цикла;
10.  $F_{max}$  – максимальная нагрузка за цикл;
11.  $K_C$  – трещиностойкость;
12.  $\Gamma$  – работа разрушения.

В случае, если из параметров разрушения (трещиностойкость и работа разрушения) задан только один, второй автоматически вычисляется.

На следующем шаге инициализируются критерии:

1. Fracture\_criterion – критерий разрушения:
  - 0 – критерий не применяется;
  - 1 – критерий Ирвина;
  - 2 – критерий Гриффитса.
2. Direction\_criterion – критерий расчета траектории:
  - 0 – критерий не применяется;
  - 1 – критерий максимальных окружных напряжений;
  - 2 – критерий минимума плотности энергии деформаций;
  - 3 – критерий максимума выделения энергии;
  - 4 – критерий максимума трехосности напряженного состояния.
3. Growth\_criterion – закон усталостного роста:
  - 0 – критерий не применяется;
  - 1 – закон Пэриса.
4. Equivalent\_SIF\_measure – выражение для  $\Delta K_{eq}$  в законе роста:
  - 0 –  $\Delta K = \Delta K_I$ ;
  - 1 – модель Ирвина (1.85);
  - 2 – модель Рихарда (1.86);
  - 3 – Модель Танаки (1) (1.87);
  - 4 – Модель Танаки (2) (1.88);
  - 5 – Модель Демира (1.89).

## 2.3 Итерационный расчет траектории трещины

На каждой итерации область распространения трещины удаляется и перестраивается. Перестроение происходит в три этапа: приращение трещины (рис. 2.2), построение круга вокруг вершины (рис. 2.3 (а)), достраивание остальных областей в зоне распространения (рис. 2.3 (b,c)). Круг вокруг вершины трещины необходим для регуляризации сетки вблизи вершины. На рис. 2.4 приведен пример перестроения геометрии при расчете траектории трещины. На рис. 2.4 (b) показана исходная область распространения, на рис. 2.4 (c) – перестроенная область по окончании расчета траектории. Как можно видеть, исходная область распространения была разделена на несколько частей. Такое разделение необходимо, т.к. верхний и нижний берег трещины являются двумя различными линиями, точки которых имеют одинаковые координаты. Генератор областей в ANSYS не может построить область по совпадающим линиям, поэтому исходная область разделяется на две части – одна половина содержит только верхний берег трещины, вторая половина – только нижний берег. Вспомогательная точка КРе, заданная в качестве параметра в предыдущем разделе, нужна для построения линии, которая разделяет область распространения пополам.

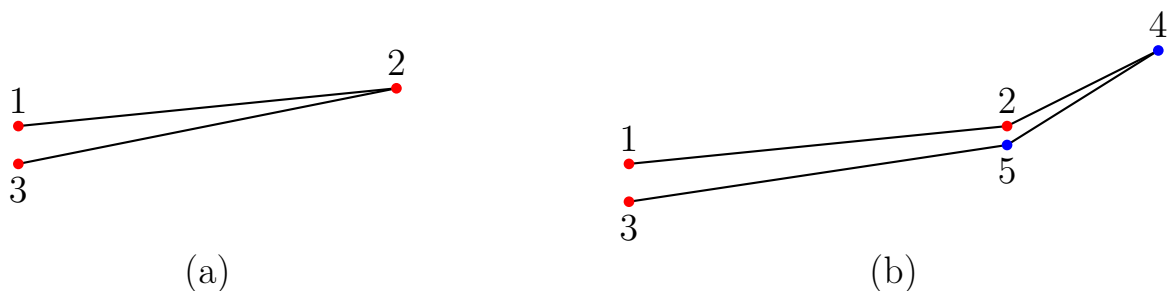


Рисунок 2.2 — Схема приращения трещины. (а) – берега трещины до приращения, (b) – берега трещины после приращения. Пары точек 1,3 и 2,5 имеют одинаковые координаты, расстояние между ними изображено для наглядности.

После перестроения зоны распространения трещины происходит расчет статической задачи и вычисляется КИН. Если коэффициент асимметрии цикла  $R$  равен нулю, то вычисление происходит в одну итерацию (прикладывается только максимальная нагрузка), если отличен от нуля – в две итерации.

Вычисление КИН осуществляется командой **CINT**, с помощью которой параметры разрушения вычисляются через интеграл взаимодействия [53].



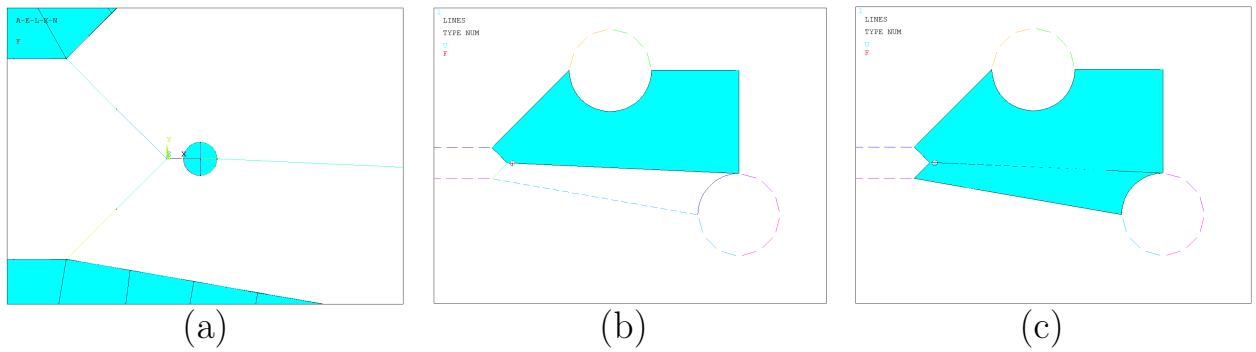


Рисунок 2.3 — Перестроение области распространения трещины. (а) – построение круга вокруг вершины, (б) – построение верхней половины области распространения, (с) – построение нижней половины области распространения.

Если параметры, отвечающие за инициализацию критерия расчета траектории и закона роста, не равны нулю, то вычисляются соответственно угол дальнейшего распространения трещины (в зависимости от значения параметра, по одному из уравнений (1.66), (1.76), (1.78), (1.80)) и количество циклов (по уравнению (1.84)).

Описанная последовательность действий повторяется заданное параметром `cycles` количество раз. При хрупком и усталостном разрушении процедура расчета совершенно одинаковая, единственное отличие заключается в вычислении количества циклов  $\Delta N$  по закону усталостного роста (1.84).

После расчета требуемого количества циклов формируется выходной текстовый файл, в который записываются основные параметры расчета. Структура данного файла отражена в табл. 2.1.

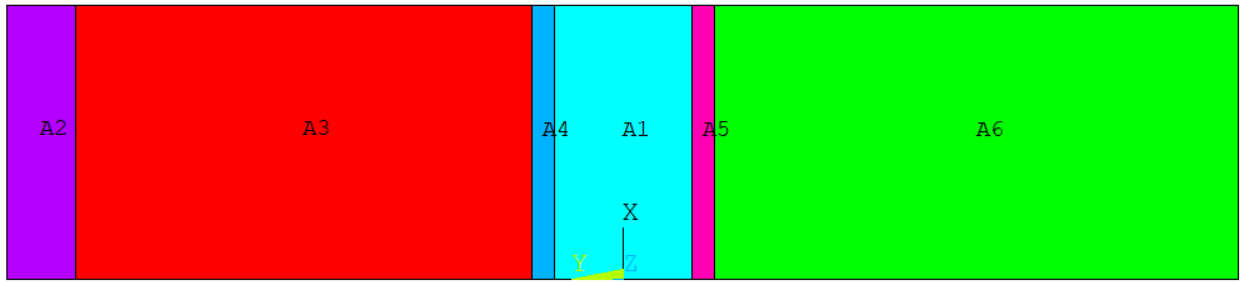
## 2.4 Верификация вычисления КИН

Для проверки корректности расчета КИН решим задачу о растяжении компактного образца, изображенного на рис. 2.6. Для данной задачи известно выражение для  $K_I$  [4, с. 57]

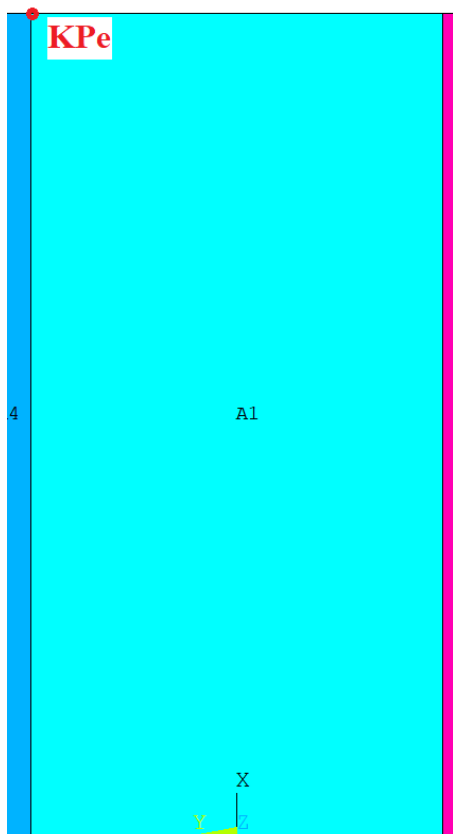
$$K_I = \frac{F}{\sqrt{W}} \frac{(2 + \alpha) (0,886 + 4,64\alpha - 13,32\alpha^2 + 14,72\alpha^3 - 5,64\alpha^4)}{\sqrt{(1 - \alpha)^3}}, \quad (2.1)$$

$\alpha = a/W$ ,  $F = 100$  Н – растягивающая сила,  $W = 50$  мм – ширина образца,  $a$  – длина трещины.

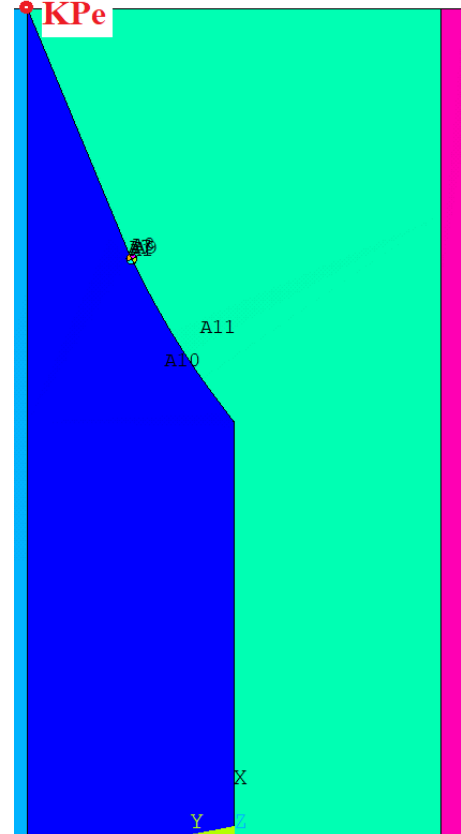
На рис. 2.7 приведено сравнение результатов численного расчета КИН с



(a)



(b)



(c)

Рисунок 2.4 — Пример перестроения геометрии при расчете траектории распространения трещины. (a) – начальная геометрия без трещины, (b) – начальная геометрия области распространения трещины, (c) – область распространения трещины в конце расчета.

Таблица 2.1

Выходной файл макроса расчета траектории трещины

$K_I$	$K_{II}$	$\Delta K_I$	$\Delta K_{II}$	$\theta$	$l$	$\Delta N$	X	Y
0,0176	0,0085	0,0176	0,0085	35,5869	5,0000	0	5,0000	0,0000
0,0234	0,0010	0,0234	0,0010	4,7840	6,0000	0	5,8132	0,5819

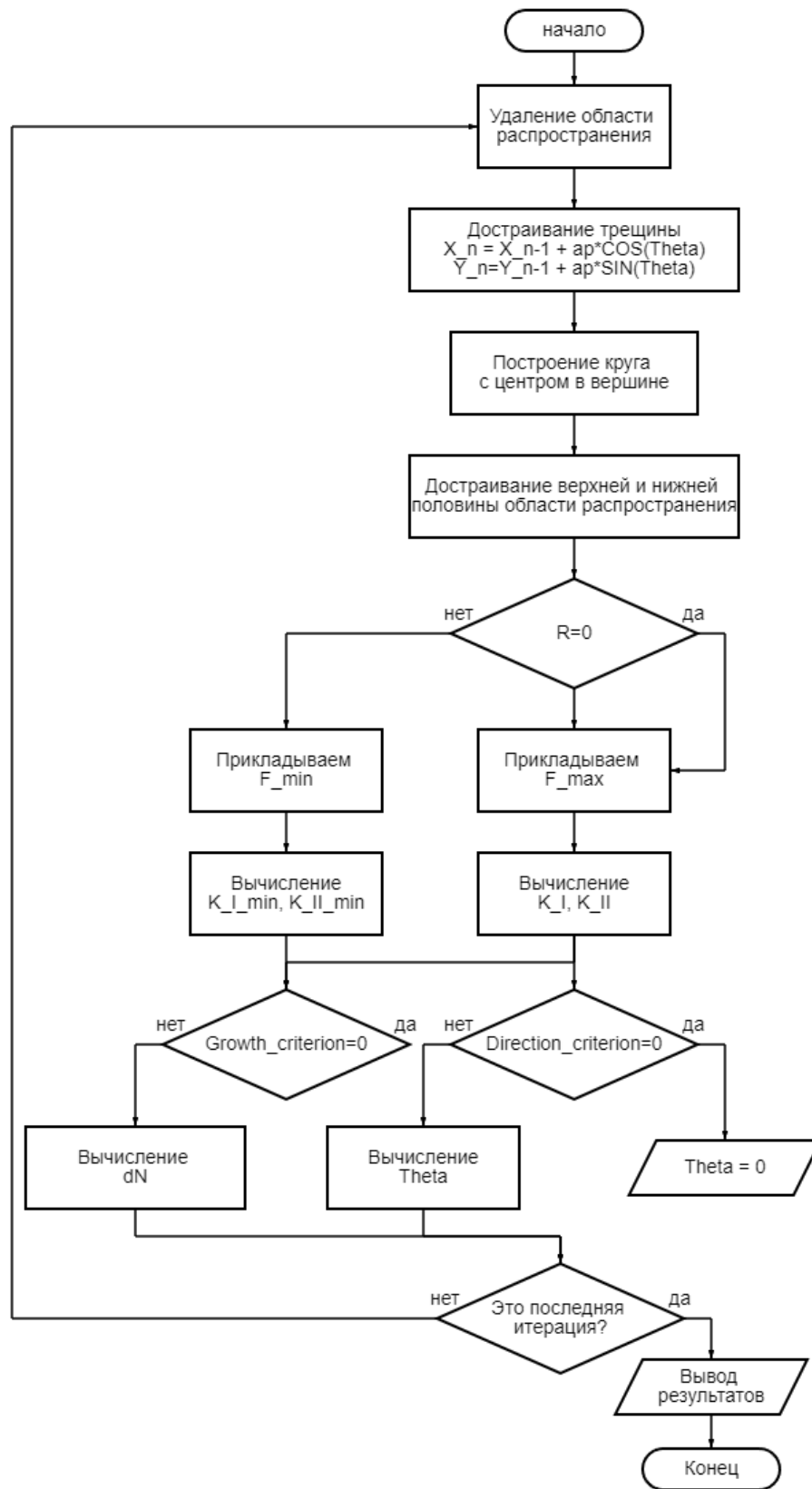


Рисунок 2.5 — Блок-схема макроса для расчета траектории распространения трещины.

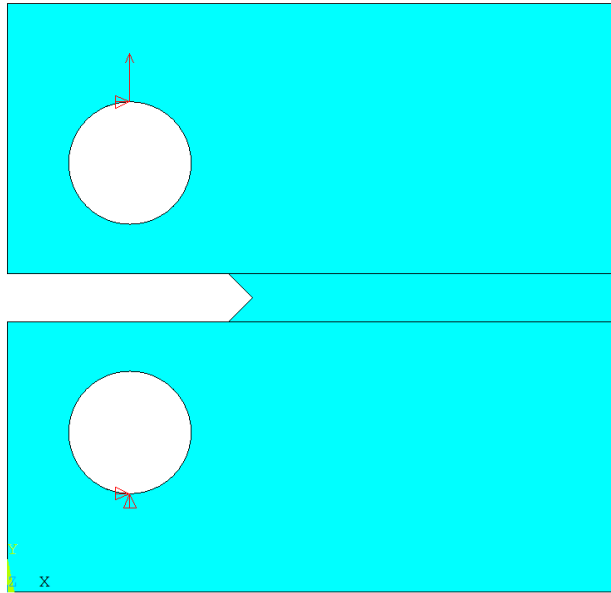


Рисунок 2.6 — Расчетная модель компактного образца для верификации вычисления КИН.

помощью двух команд – **CINT** (расчет с помощью интеграла взаимодействия) и **KCALC** (расчет по полям перемещений). Как можно видеть на графике, расчет КИН по интегралу взаимодействия практически совпадает с аналитическим значением, в то время как расчет по перемещениям дает некоторую погрешность. В дальнейшем для расчетов КИН используется только **CINT**.

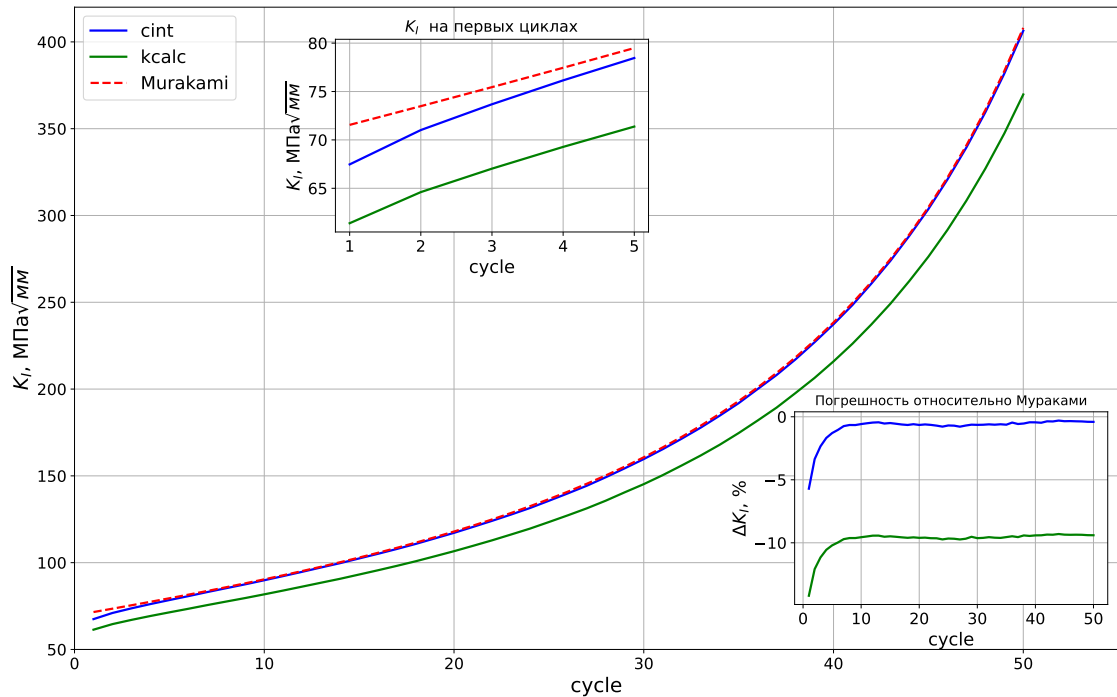


Рисунок 2.7 — Сравнение результатов численного расчета  $K_I$  со значениями, полученными по формуле (2.1).

## ГЛАВА 3

### Численный расчет траектории распространения трещины

В данной главе рассмотрены результаты испытаний образцов различной геометрии с целью получения траектории распространения трещины. Приведенные ниже эксперименты можно разделить на три типа.

Первый тип экспериментов – численные эксперименты по монотонному нагружению. К данному типу относится только первый эксперимент – растяжение прямоугольной пластины с отверстием. Данный эксперимент не имеет под собой основы в качестве натурального испытания. Этот эксперимент часто используется для верификации сеточных алгоритмов и для него есть данные по расчетным траекториям от нескольких авторов [42, 16, 38], поэтому он был выбран для верификации авторского макроса.

Второй тип экспериментов – натурные эксперименты по монотонному нагружению. К данному типу относятся второй и третий эксперименты, которые представляют собой различные вариации испытания балки на трехточечный изгиб. Второй эксперимент – несимметричный трехточечный изгиб балки с симметрично расположенной трещиной. Третий эксперимент – симметричный трехточечный изгиб балки с тремя отверстиями и несимметрично расположенной трещиной. Различного рода асимметрия расположения нагрузки и трещины в данных экспериментах позволяет получить искривленную траекторию трещины.

Третий тип экспериментов – натурные эксперименты по циклическому нагружению. К данному типу относится последний, четвертый, эксперимент. В нем рассматривается нагружение компактного образца диагонально приложенной силой. Исследуется три случая с углами приложения силы в 30, 45 и 60 градусов. Для каждого эксперимента по закону Пэриса с помощью перечисленных в первой главе выражений для  $\Delta K_{eq}$  строится усталостная кривая, отражающая длину трещины в зависимости от количества циклов.

### 3.1 Растяжение прямоугольной пластины с круговым отверстием

Задача о растяжении прямоугольной пластины рассматривается в работах [42, 16, 38] для верификации алгоритмов сеточной генерации при распространении трещины. Экспериментальных данных по данной задаче, насколько известно автору, не существует. Однако наличие данных о расчетных траекториях, полученных разными авторами с использованием различных подходов, позволяет верифицировать результаты расчетов с помощью авторского макроса.

#### 3.1.1 Постановка задачи

Рассматривается прямоугольная пластина с круговым отверстием и трещиной (см. рис. 3.1) под действием растягивающей силы  $P$ , равномерно распределенной по верхнему и нижнему торцу пластины. Геометрические параметры и упругие свойства расчетной модели перечислены в табл. 3.1.

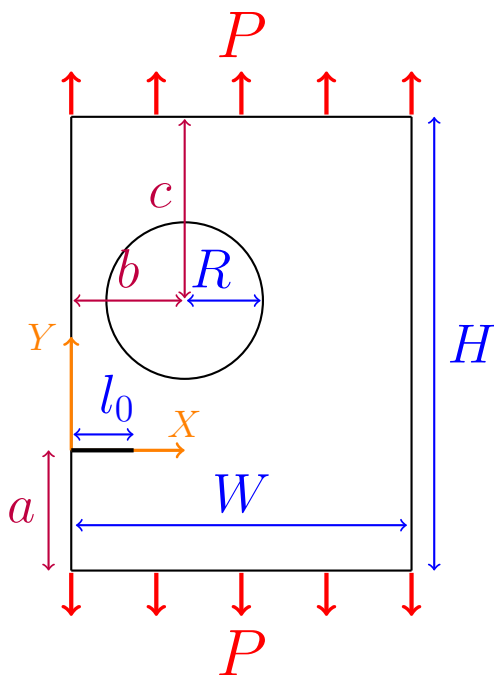


Рисунок 3.1 — Геометрия образца для задачи о растяжении прямоугольной пластины с отверстием.

Таблица 3.1

Упругие модули и геометрические параметры пластины с отверстием и трещиной

$E$ , МПа	$\nu$	$W$ , мм	$H$ , мм	$l_0$ , мм	$R$ , мм	$a$ , мм	$b$ , мм	$c$ , мм
98000	0,3	15	20	2,75	3,75	5,3	5	8,1

### 3.1.2 Конечно-элементная модель

В соответствии со схемой рис. 3.1 была построена геометрическая модель, изображенная на 3.2 (а). Трещина распространяется в области А2, области А1 и А3 остаются неизменными. В областях А1 и А3 создается регулярная четырехугольная КЭ сетка с характерным размером элемента 0,5 мм. На рис. 3.2 (b) можно видеть КЭ сетку по окончании расчета траектории.

Для построения сетки используется PLANE183 – двумерный квадратичный 8-ми (6-ти, если форма треугольная) конечный элемент. Формулировка плоской задачи – плоское напряженное состояние. Упругие свойства материала приведены в табл. 3.1.

### 3.1.3 Влияние размера КЭ и инкремента на траекторию

Направление распространения трещины определяется коэффициентами интенсивности напряжений, поэтому устойчивость траектории к изменениям параметров расчетной модели в первую очередь зависит от того, насколько чувствителен алгоритм вычисления КИН к качеству сетки и размеру её элементов.

На рис. 3.4 приведены результаты расчета траектории распространения трещины по критерию максимальных окружных напряжений при различных величинах конечного элемента и при различных инкрементах. На рис. 3.4 (а) можно видеть, что расчетная траектория не изменяется при измельчении сетки, что позволяет экономить вычислительные ресурсы и использовать более грубую сетку. Чувствительность траектории к размеру инкремента, при этом, весьма существенна (см. 3.4 (b)). При уменьшении инкремента трещина «поднимается» выше, приближаясь ближе к отвер-

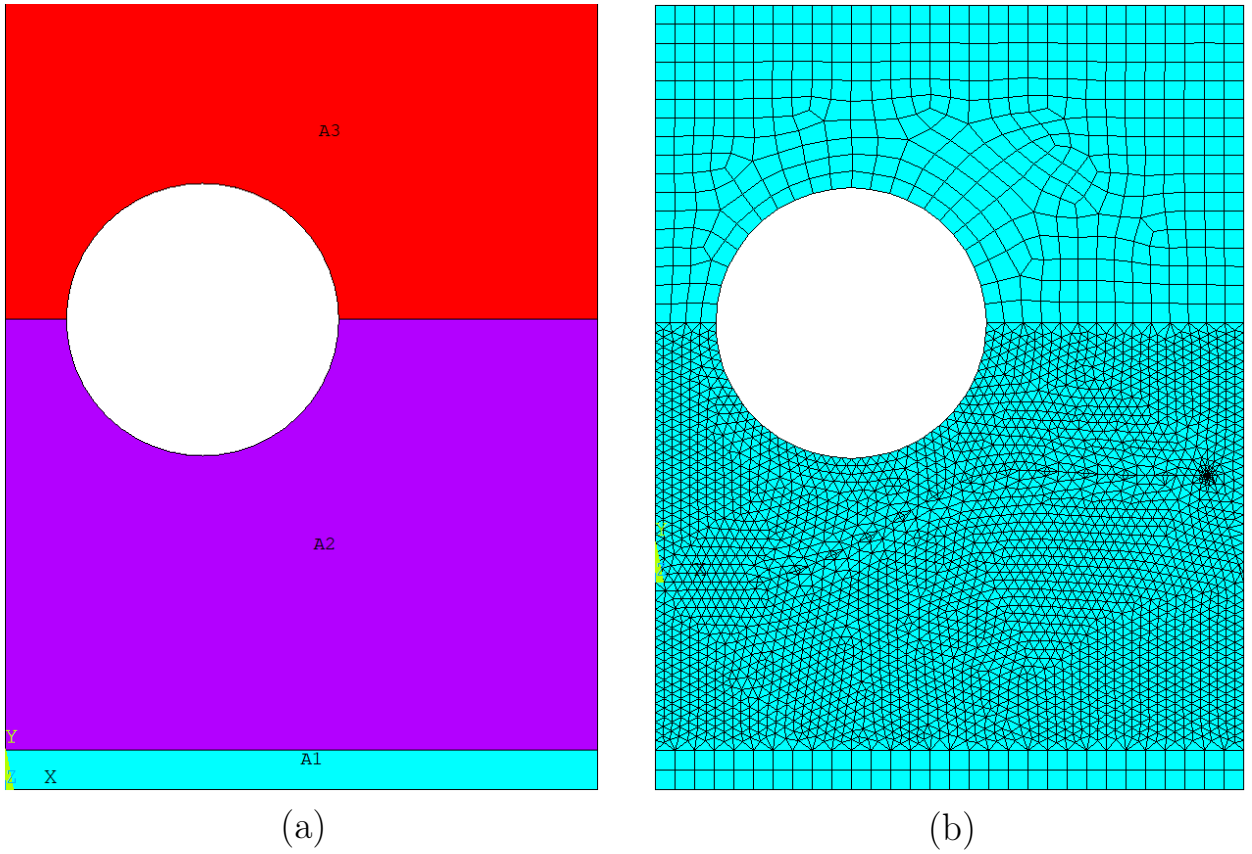


Рисунок 3.2 — Расчетная модель пластины с отверстием. (a) — расчетная геометрия, (b) — конечно-элементная сетка.

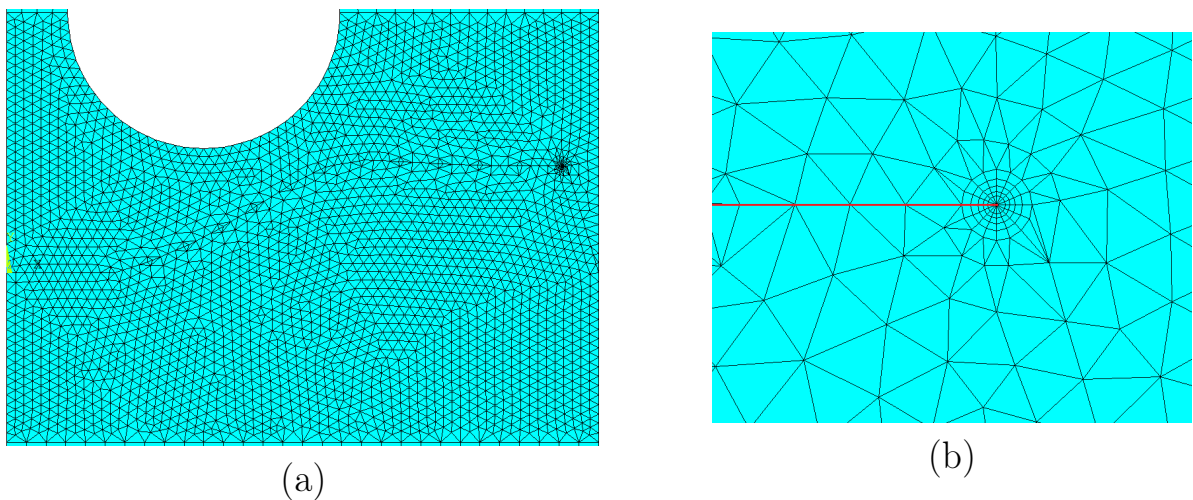


Рисунок 3.3 — Конечно-элементная сетка пластины с отверстием в конце расчета траектории. (a) — область перестроения целиком, (b) — сетка вблизи вершины трещины (линия трещины выделена красным). Размер КЭ в области распространения трещины 0,25 мм.



стию. Такое поведение траектории обусловлено тем, что при уменьшении инкремента вершина трещины находится вблизи отверстия большее количество итераций, вследствие чего имеет возможность приблизиться к нему сильнее. На рис. 3.5 можно проследить изменение  $K_{II}$  вдоль траектории трещины при разной величине инкремента. График имеет два пика – в начале распространения и в области поворота трещины, когда она переходит из наклонного режима распространения в горизонтальный. С уменьшением инкремента второй пик сильнее локализуется, что свидетельствует о том, что переход из наклонного режима в горизонтальный происходит быстрее. При этом начало пика смещается вправо – это следствие того факта, что трещина дольше распространяется в наклонном режиме и ближе подходит к отверстию.

Сравнивая расчетные траектории с результатами из [38], можно сделать вывод, что оптимальной величиной инкремента является 0,75 мм (отношение инкремента к длине трещины 0,05).

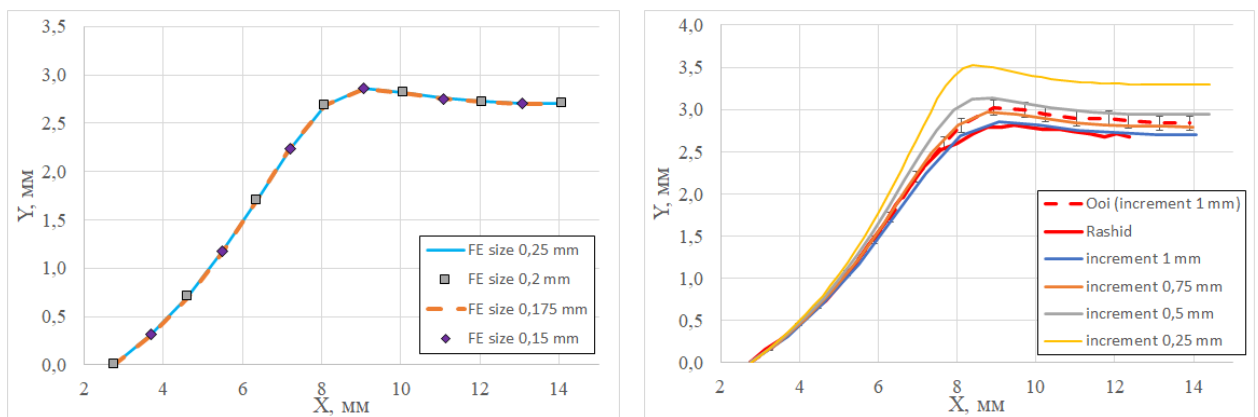


Рисунок 3.4 — Расчетная траектория трещины при различных размерах КЭ и инкрементах. (а) – траектория трещины при различных КЭ (инкремент 1 мм), (б) – траектория трещины при различных инкрементах (размер КЭ 0,25 мм).

### 3.1.4 Верификация результатов расчета, сравнение критериев

На рис. 3.6 представлены результаты расчета траектории распространения трещины, вычисленные с помощью четырех критериев: максимальных окружных напряжений (MTS), минимума плотности энергии деформаций (MSED), максимума выделения энергии (MER) и максимума трехосности напряженного состояния (MTF). Как можно видеть на графике, расчетные траектории, полученные с помощью перечисленных критериев, прак-

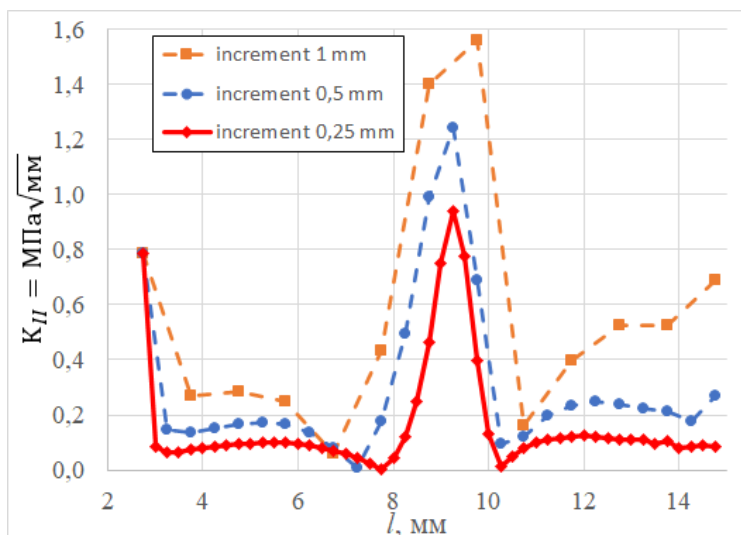


Рисунок 3.5 — Изменение абсолютной величины  $K_{II}$  по длине трещины при разной величине инкремента.

тически совпадают между собой и с расчетами Rashid [42] и Ooi [38]. Расчеты данных авторов были проведены при размере инкремента 1 мм с помощью критерия максимальных окружных напряжений. Незначительные различия в траекториях вызваны различными методами генерации сетки и вычисления КИН.

Как было показано в главе I, все рассматриваемые критерии для расчета траектории являются функциями параметра смешанности мод  $\zeta$  (1.65). Малое различие между прогнозами различных критериев в данном случае вызвано тем, что параметр смешанности мод достаточно мал (см. рис. 3.7). Даже при наибольшем значении параметра, соответствующем началу траектории, разница в прогнозах различных критериев составляет не более 0,9 градусов. Начальные углы отклонения для всех используемых критериев приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Начальные углы отклонения в задаче о растяжении пластины с отверстием

Критерий	Ooi	MTS	MSED	MER	MTF
угол	17,5 – 20,5	18,15	17,28	18,13	18,17

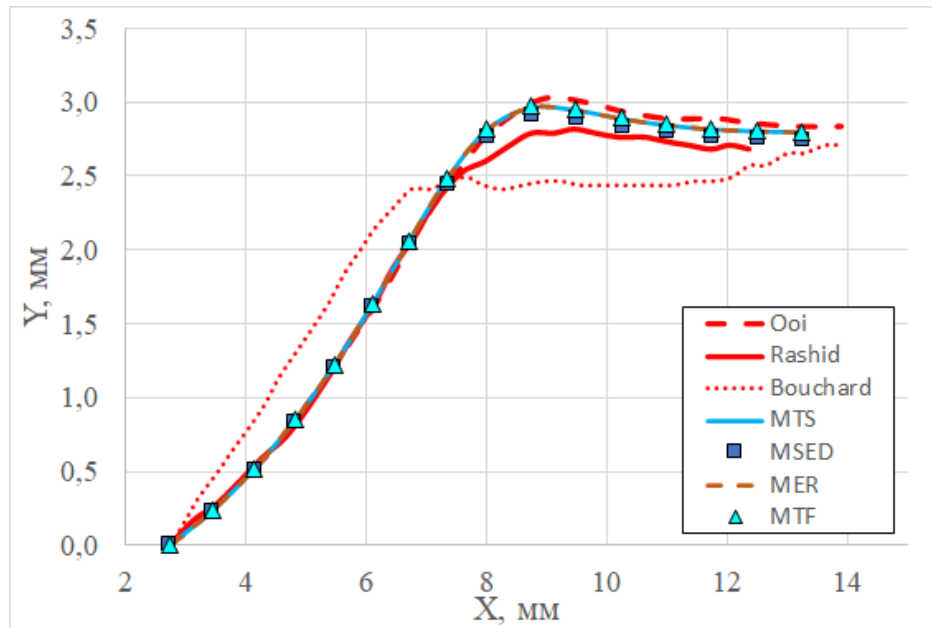


Рисунок 3.6 — Сравнение расчетных траекторий, полученных различными критериями, с результатами расчетов Rashid [42], Bouchard [16] и Ooi [38].

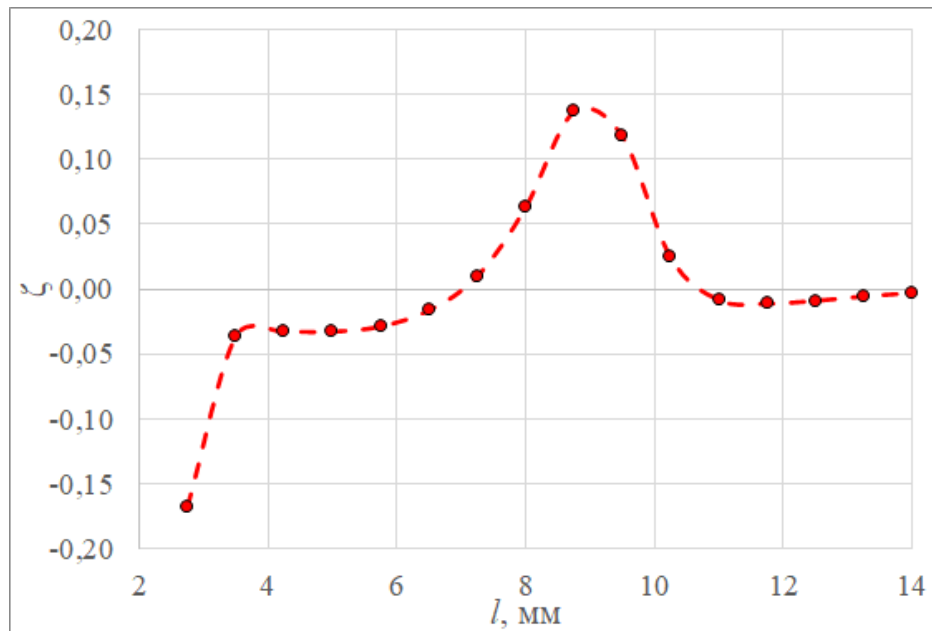


Рисунок 3.7 — Коэффициент смешанности мод  $\zeta = K_{II}/K_I$  вдоль линии распространения трещины.

## 3.2 Трехточечный изгиб

Задача о симметричном трехточечном изгибе широко применяется для определения трещиностойкости материалов, т.к. известно её аналитическое решение [4]. Различные модификации задачи о трехточечном изгибе часто применяются для исследования траекторий трещин в смешанной моде [24, 25, 52]. В данном разделе рассматривается задача о несимметричном трехточечном изгибе балки с трещиной, экспериментальное исследование которой приведено в работе [24].

### 3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается балка прямоугольного сечения с краевой трещиной в условиях трехточечного изгиба (ТРВ образец). Геометрия ТРВ образца приведена на рис. 3.8. Геометрические параметры образца приведены в табл. 3.3. Левая опора балки – шарнир, правая опора – подвижный шарнир (разрешены перемещения вдоль оси  $X$ ). Трещина расположена в середине балки, линия действия силы смещена относительно трещины на 20 мм. Образец выполнен из стеклообразного полимера РММА с упругими свойствами  $E = 2890$  МПа,  $\nu = 0,4$ . В работе будут рассмотрены два расчетных случая, отличающиеся сочетанием значений параметров  $a$  и  $b$ .

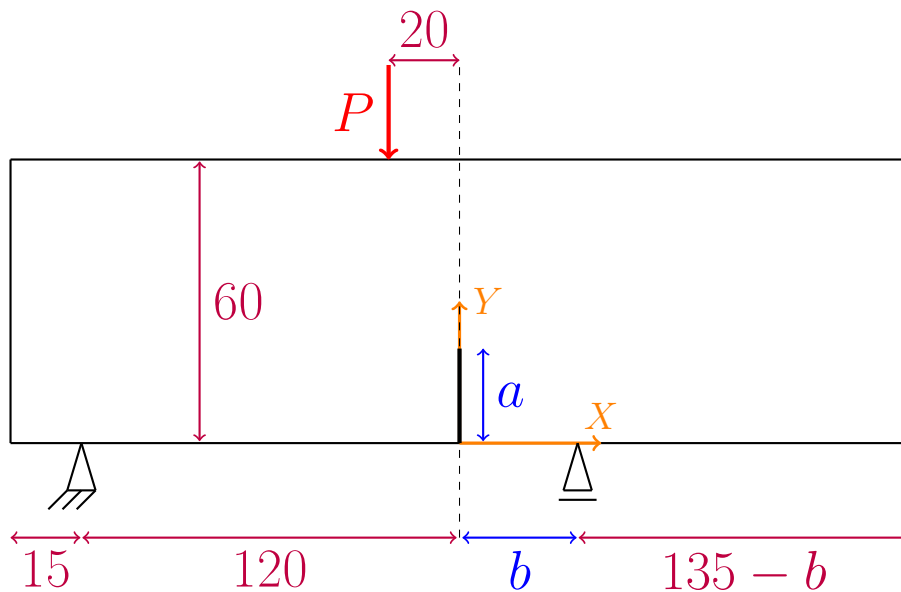


Рисунок 3.8 — Геометрия ТРВ образца (размеры в мм).

Геометрические параметры ТРВ образца

Расчетный случай	$a$ , мм	$b$ , мм
ТРВ 1	30	20
ТРВ 2	24	12

### 3.2.2 Конечно-элементная модель

Для упрощения построения сетки и последующего задания граничных условий, геометрия разделена на несколько областей, представленных на рис. 3.9. Трещина распространяется в области А1. Геометрия построена таким образом, чтобы начальная трещина располагалась вдоль оси X глобальной системы координат ANSYS. Все последующие результаты расчета приводятся в системе координат, изображенной на рис. 3.8.

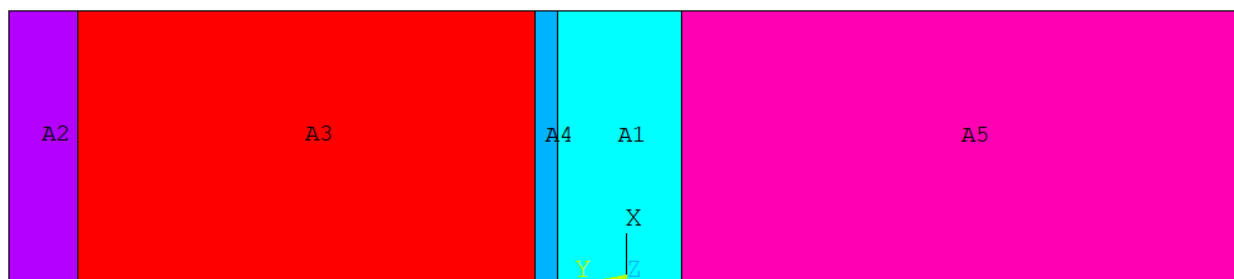


Рисунок 3.9 – Начальная геометрия ТРВ образца.

Сетка на всех областях, кроме А1, регулярная четырехугольная. Общий вид сетки представлен на рис. 3.10, на рис. 3.11 изображена сетка в центральной области и непосредственно вокруг вершины. Размер конечного элемента регулярной четырехугольной сетки 5 мм. Для построения сетки используется PLANE183 – двумерный квадратичный 8-ми (6-ти, если форма треугольная) конечный элемент. Формулировка плоской задачи – плоское деформированное состояние.

### 3.2.3 Влияние размера КЭ и инкремента на траекторию

Расчетные траектории трещины при различных размерах КЭ изображены на рис.3.12. Как можно видеть, расчетная траектория практически не зависит от размера конечного элемента.

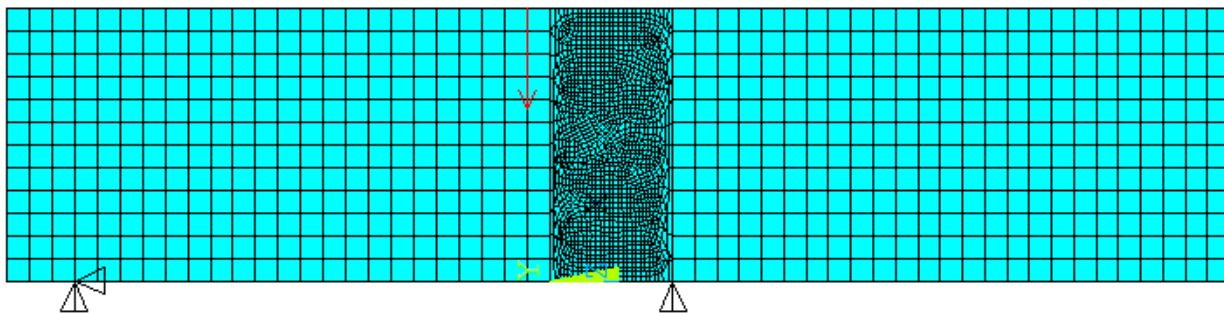


Рисунок 3.10 — Начальная конечно-элементная сетка ТРВ образца. Размер КЭ в центральной области – 1 мм, в остальных областях 5 мм.

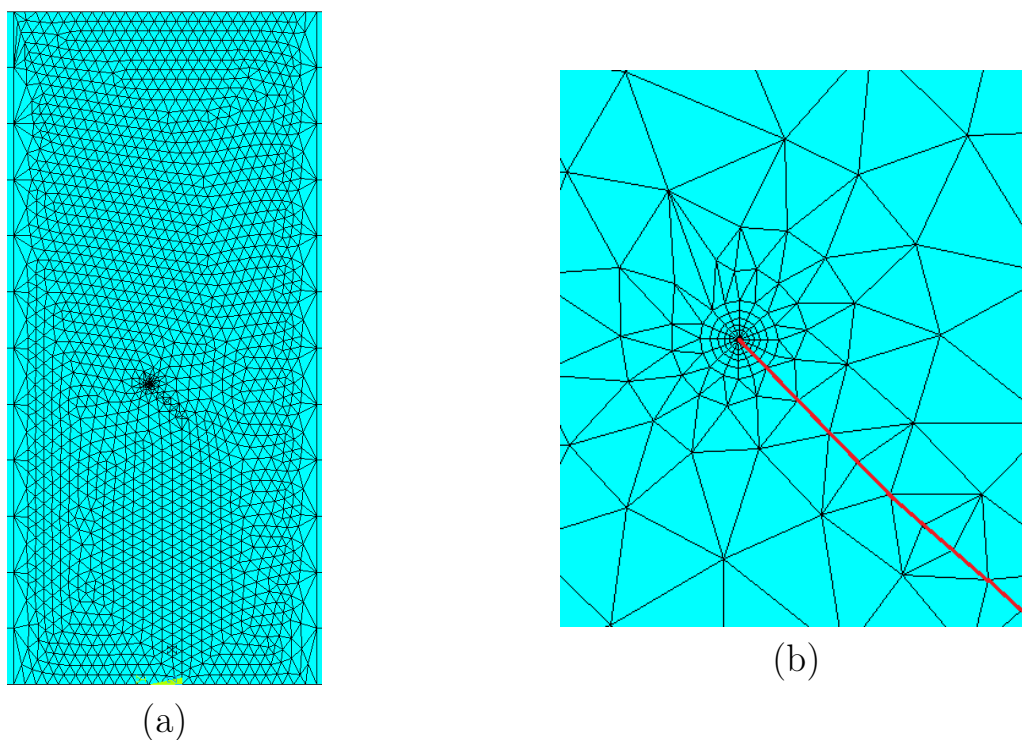


Рисунок 3.11 — Конечно-элементная сетка после нескольких итераций расчета траектории трещины. (а) – область перестроения полностью, (б) – сетка вблизи вершины трещины (линия трещины выделена красным). Размер КЭ 1 мм.

На рис. 3.13 можно видеть траектории трещины при разной величине инкремента. В данном случае зависимость также практически отсутствует. Для понимания масштабов погрешности, на графики нанесен вертикальный предел погрешностей 2%. При уменьшении инкремента траектория имеет тенденцию «подниматься», приближаясь к верхней границе экспериментального диапазона. Впрочем, данный подъем значительно меньше разброса в экспериментальных данных.

Принимая во внимание допускаемую погрешность и вычислительные затраты, для дальнейших расчетов принимается размер КЭ 3 мм и инкремент 0,5 мм (отношение инкремента к длине трещины 0,026).

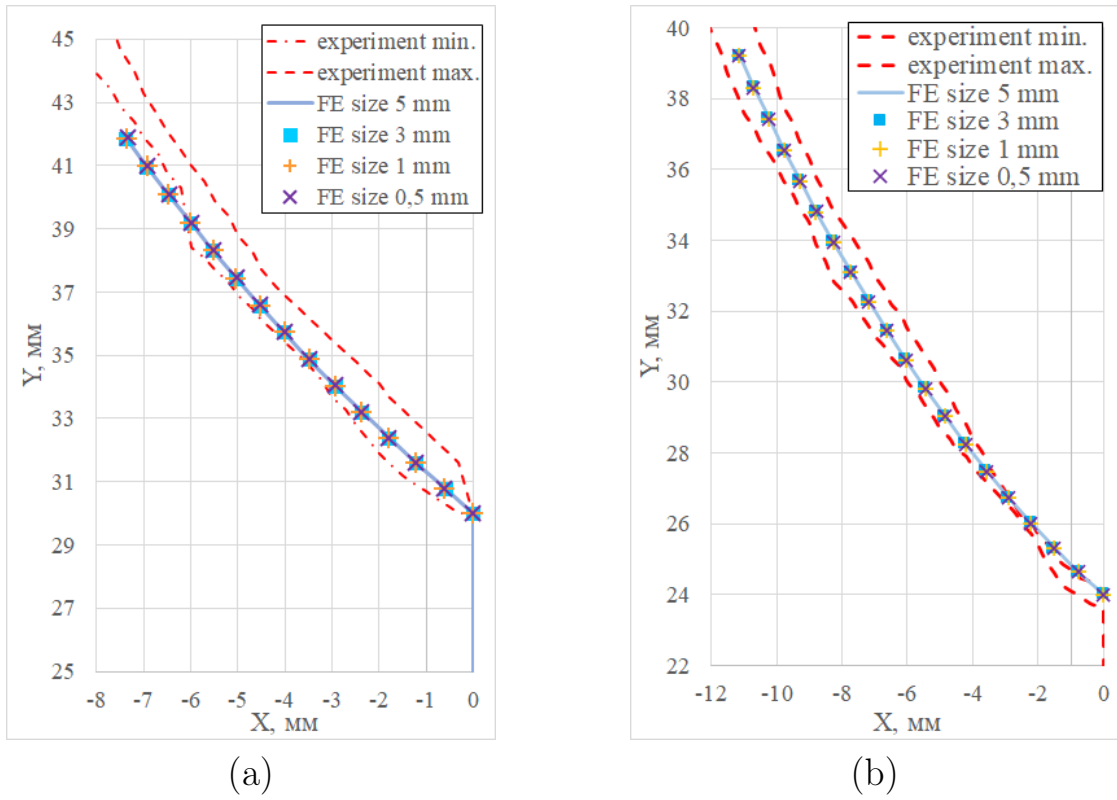


Рисунок 3.12 — Расчетная траектория ТРВ образца при различных размерах конечного элемента. (a) – ТРВ 1, (b) – ТРВ 2.

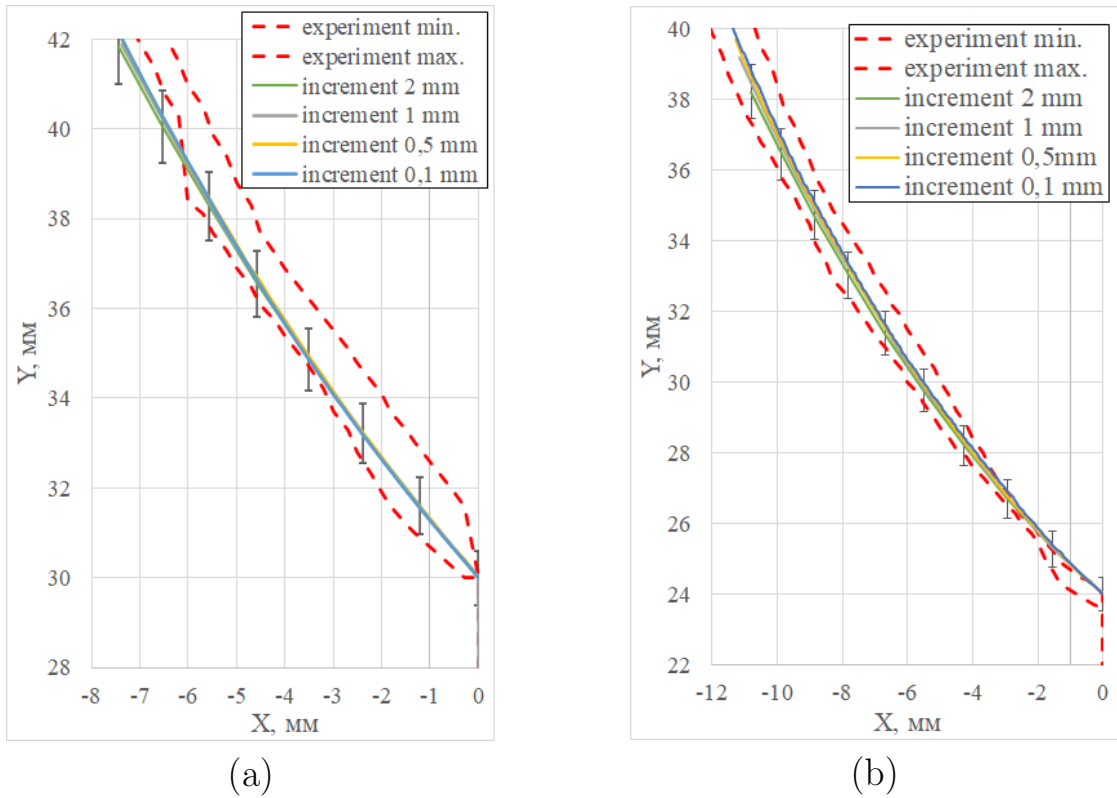


Рисунок 3.13 — Расчетная траектория ТРВ образца при различных величинах инкремента. (a) – ТРВ 1, (b) – ТРВ 2.

### 3.2.4 Валидация результатов расчета. Сравнение критериев

На рис. 3.14 представлены расчетные траектории трещин в образцах ТРВ 1 и ТРВ 2, полученные с помощью четырех критериев для расчета траектории трещин, перечисленных в главе I: максимальных окружных напряжений (MTS), минимума плотности энергии деформаций (MSED), максимума выделения энергии (MER) и максимума трехосности напряженного состояния (MTF). Все расчетные траектории лежат в пределах диапазона экспериментальных значений и практически не отличаются между собой.

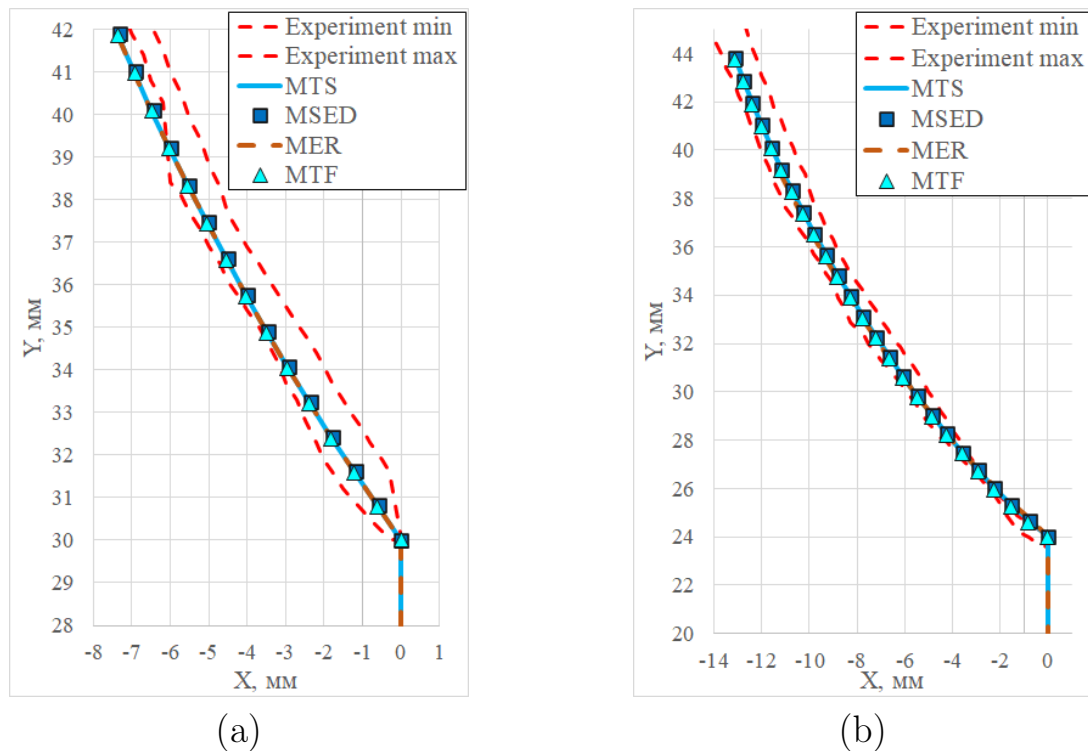


Рисунок 3.14 — Расчетная траектория ТРВ, полученная с использованием различных критериев. (a) – ТРВ 1, (b) – ТРВ 2.

Сравнение результатов расчета по начальным углам отклонения приведено в табл. 3.4 и табл. 3.5. Как и в предыдущем эксперименте, коэффициент смешанности мод, несмотря на большое начальное значение, быстро выходит на значения, близкие к нулю. Причем скорость выхода коэффициента смешанности мод на малые значения составляет всего 1-2 итерации независимо от размера инкремента.



Таблица 3.4

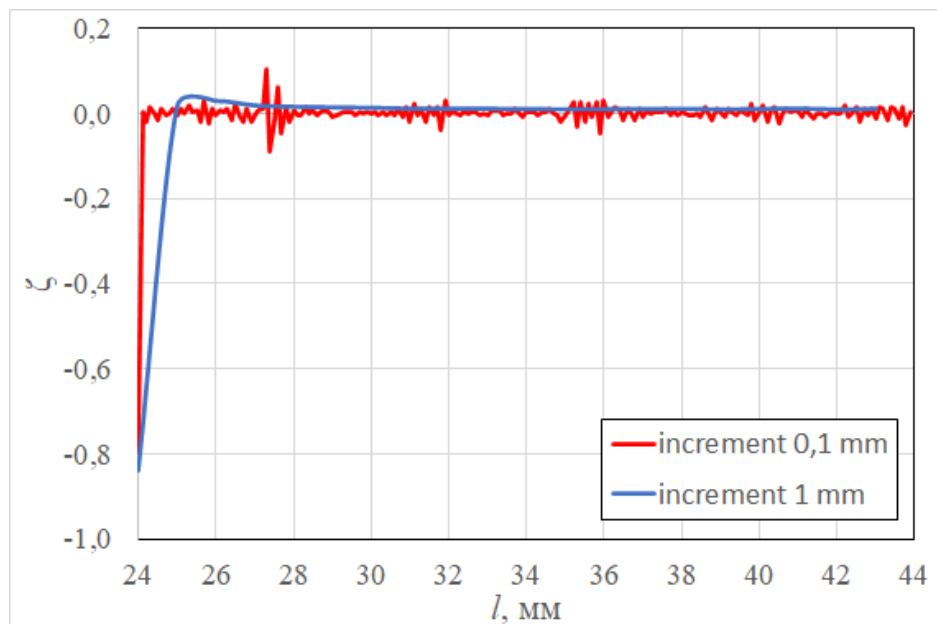
## Начальные углы отклонения, ТРВ 1

Критерий	эксперимент	MTS	MSED	MER	MTF
угол	33,7 – 79,4	37,08	34,40	36,04	37,99
отклонение от MTS, %	—	0	7,2	2,8	2,45

Таблица 3.5

## Начальные углы отклонения, ТРВ 2

Критерий	эксперимент	MTS	MSED	MER	MTF
угол	45,0 – 71,6	50,37	47,91	44,56	55,18
отклонение от MTS, %	—	0	4,9	11,5	9,5

Рисунок 3.15 — Коэффициент смешанности мод  $\zeta = K_{II}/K_I$  вдоль траектории трещины для ТРВ 2 при разных значениях инкремента.

### 3.3 Трехточечный изгиб балки с тремя отверстиями

Один из наиболее популярных экспериментов для тестирования траектории трещины в смешанной моде. Впервые описан в работе [13] и с тех пор пользуется неизменной популярностью [41, 37, 38, 28, 31].

#### 3.3.1 Постановка задачи

Геометрически данный эксперимент является классическим трехточечным изгибом, т.к. изгибающая сила приложена в середине образца и опоры равноудалены от нагрузки. Балка при этом ослаблена тремя отверстиями и трещиной начальной длины  $b$ , смещенной относительно линии действия силы на расстояние  $a$ . Геометрия образца представлена на рис. 3.17. Геометрические параметры образца:  $a = 152,4$  мм,  $b = 25,4$  мм. Материал аналогичен предыдущему эксперименту – полимер РММА (упругие свойства приведены в табл. 3.3).

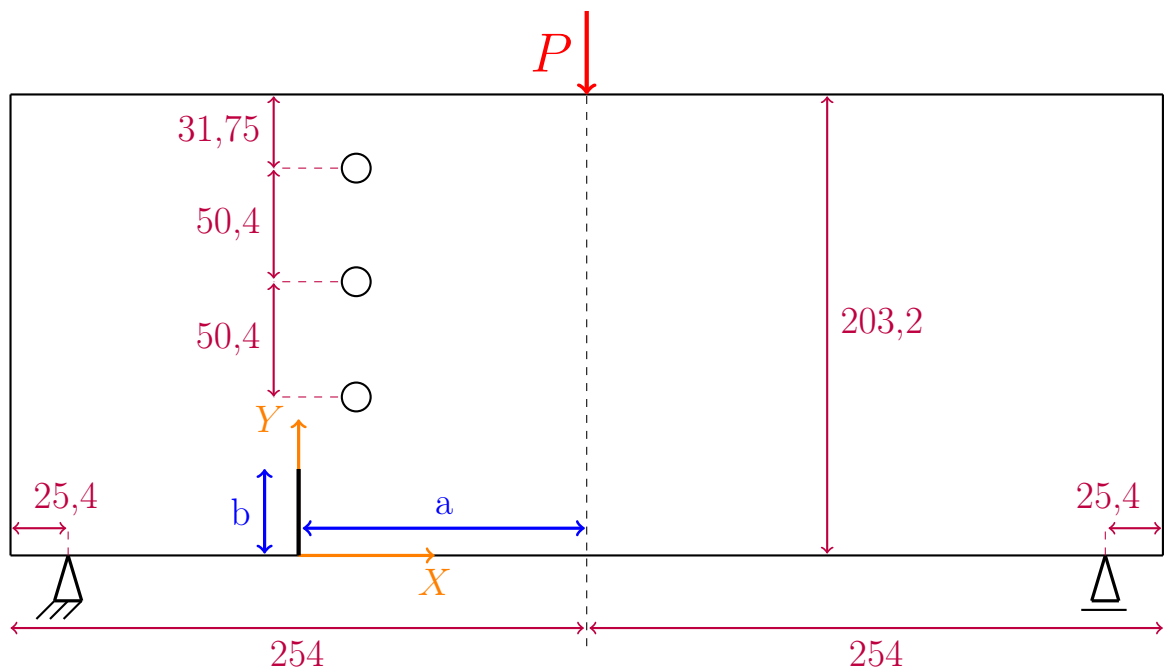


Рисунок 3.16 — Геометрия ТРВ образца с отверстиями.

### 3.3.2 Конечно-элементная модель

Для упрощения генерации сетки и корректной работы макроса геометрия разбита на области таким образом, чтобы в каждой точке, где приложены граничные условия, гарантированно располагался узел и область распространения трещины (в данном случае A13) была односвязной. Геометрия построена таким образом, чтобы начальная трещина была направлена вдоль оси X глобальной системы координат.

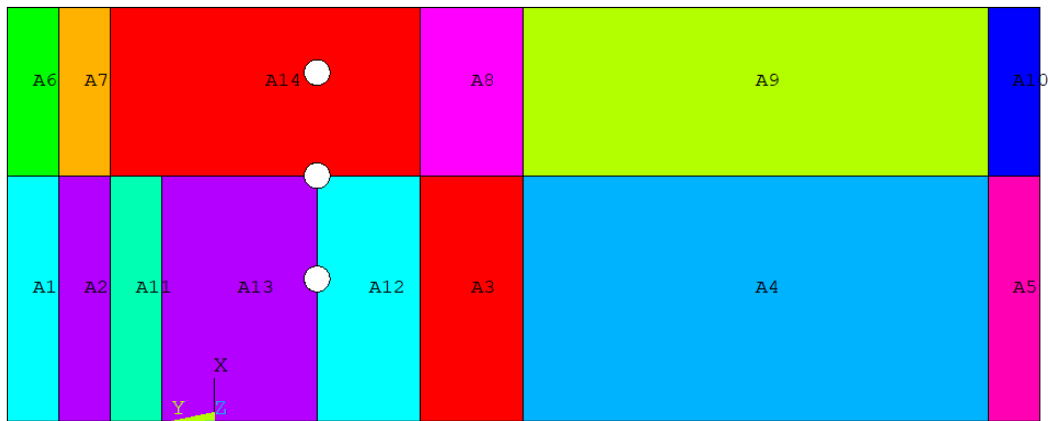


Рисунок 3.17 — Геометрия TPB образца с отверстиями.

На всех областях, кроме A13, сгенерирована регулярная четырехугольная сетка. Общий вид сетки представлен на рис. 3.18, на рис. 3.19 изображена сетка в области распространения трещины и крупный план сетки вблизи вершины. Размер конечного элемента регулярной сетки 5 мм. Для построения сетки используется PLANE183 – двумерный квадратичный 8-ми (6-ти, если форма треугольная) конечный элемент. Формулировка плоской задачи – плоское деформированное состояние.

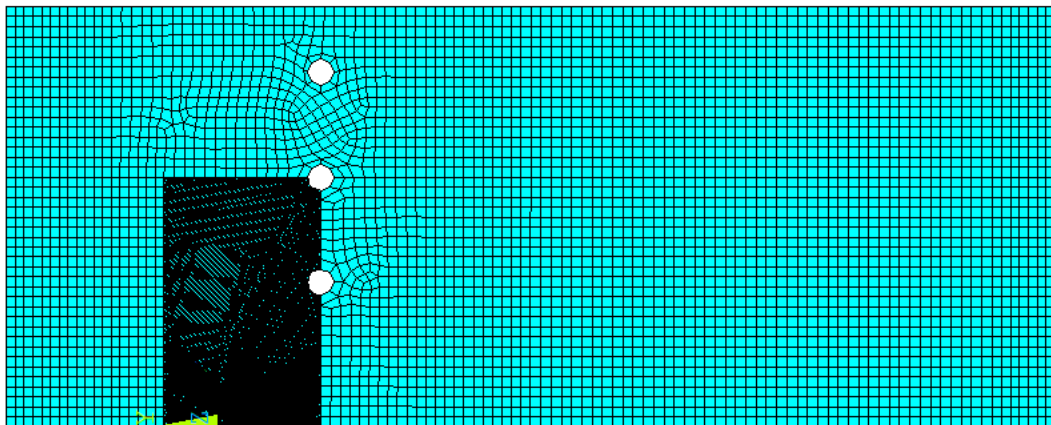


Рисунок 3.18 — Начальная конечно-элементная сетка TPB образца с отверстиями.

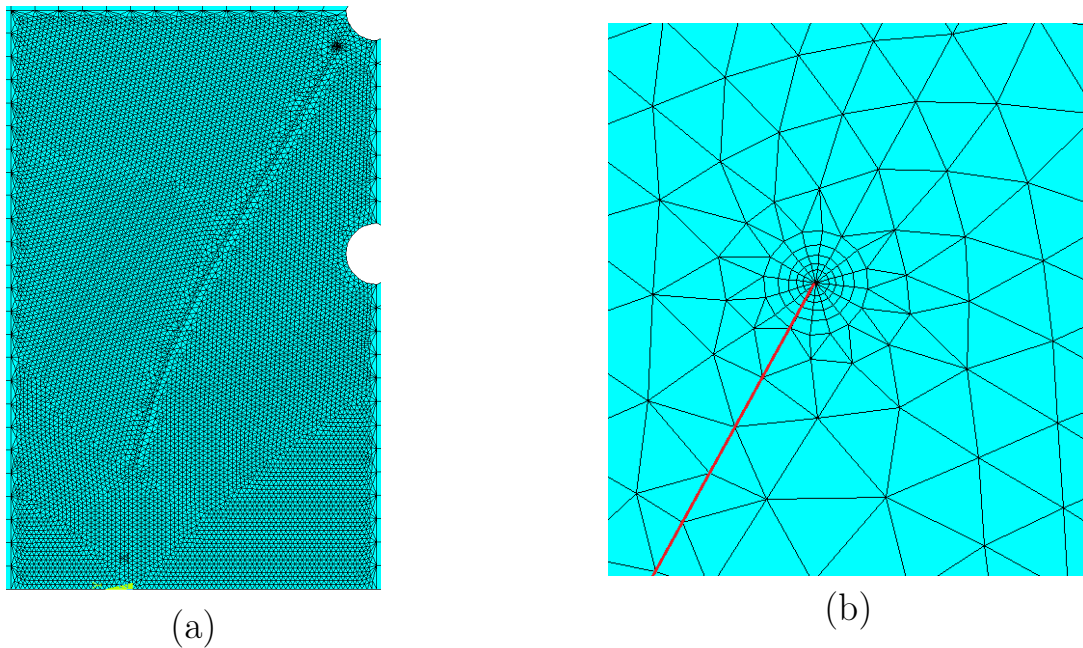


Рисунок 3.19 — Конечная конечно-элементная сетка ТРВ образца с отверстиями. (а) – область распространения полностью, (b) – сетка вблизи вершины трещины (линия трещины выделена красным). Размер КЭ 1 мм.

### 3.3.3 Влияние размера КЭ и инкремента на траекторию

Расчетные траектории трещины, полученные с помощью критерия максимальных окружных напряжений, для различных размеров КЭ при инкременте 2 мм изображены на рис. 3.20 (а). Как можно видеть, расчетная траектория не зависит от размера конечного элемента. На рис. 3.20 (b) изображены траектории трещины при разной величине инкремента при размере КЭ 3 мм. В данном случае зависимость также практически отсутствует. Для дальнейших расчетов принимается размер конечного элемента 5 мм и инкремент 5 мм (отношение инкремента к длине трещины 0,05).

### 3.3.4 Валидация результатов расчета. Сравнение критериев

На рис. 3.21 (а) представлены расчетные траектории, полученные с помощью четырех критериев для расчета траектории трещины: максимальных окружных напряжений (MTS), минимума плотности энергии деформаций (MSED), максимума выделения энергии (MER) и максимума трехосности напряженного состояния (MTF). Расчетные траектории трещин хорошо согласуются с экспериментальной кривой и практически не отличаются между собой. Как и во всех предыдущих случаях, хорошее совпадение результатов обеспечивается тем, что коэффициент смешанности мод (см.

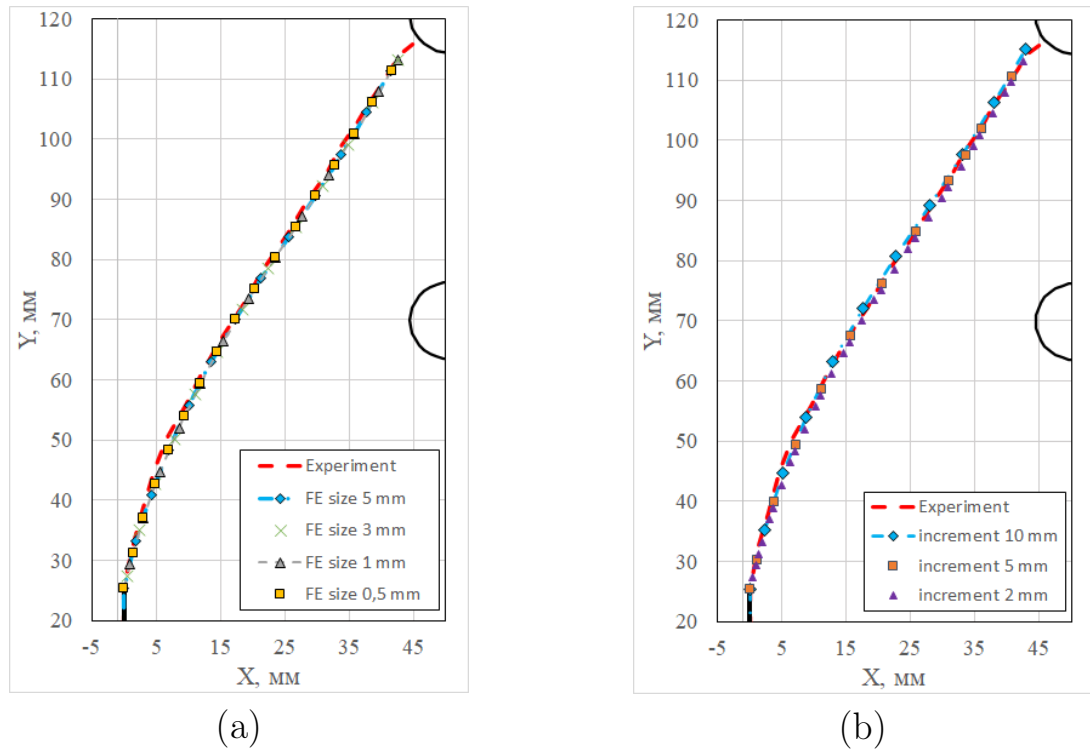


Рисунок 3.20 — Расчетная траектория трещины в балке с отверстиями при различных величинах КЭ и инкремента. (а) – Разные размеры КЭ при инкременте 2 мм, (б) – Разные инкременты при размере КЭ 3 мм.

рис. 3.21 (b)) на всех итерациях, кроме первой, близок к нулю. Сравнение критериев по начальным углам отклонения приведено в табл. 3.6. Можно отметить, что в данном расчете наблюдается наилучшее совпадение критериев, т.к. начальное значение коэффициента смешанности мод в данном случае наименьшее.

Таблица 3.6

Начальные углы отклонения, балка с отверстиями					
Критерий	эксперимент	MTS	MSED	MER	MTF
угол	12,7	12,99	12,92	12,99	12,99
отклонение от эксперимента, %	—	2,3	1,7	2,3	2,3

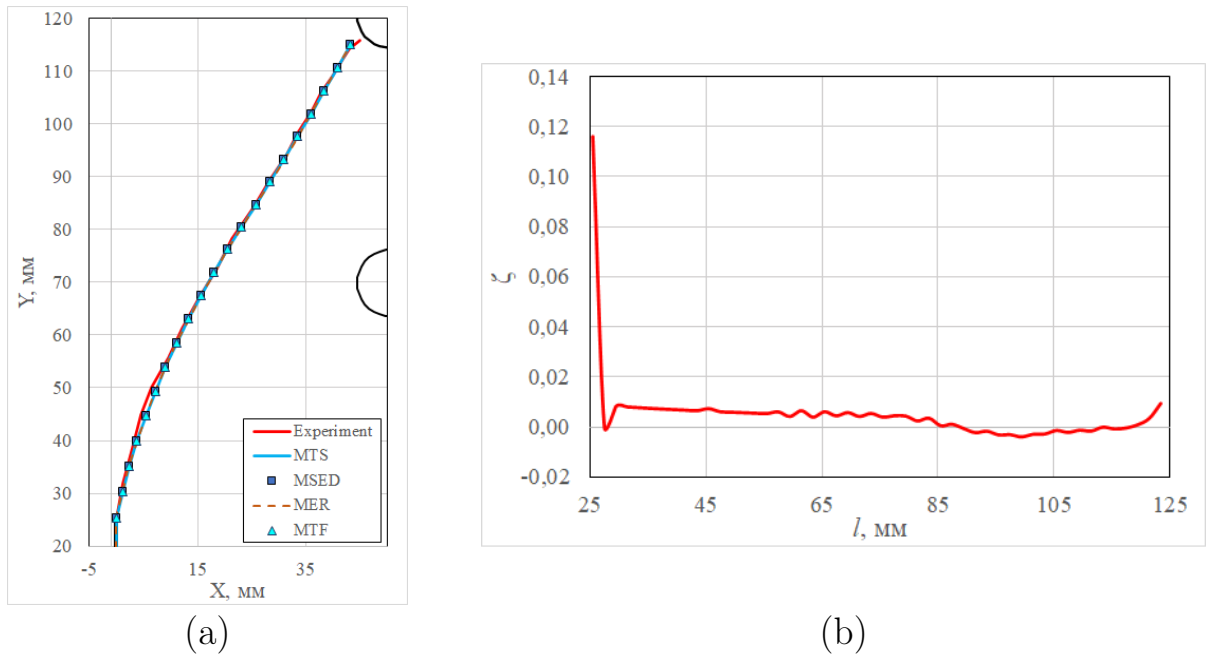


Рисунок 3.21 — Результаты расчета траектории трещины для ТРВ образца с отверстиями. (а) – расчетная траектория трещины, полученная разными критериями, (б) – коэффициент смешанности мод  $\zeta = K_{II}/K_I$  вдоль траектории трещины.

### 3.4 Диагональное растяжение CTS образца

Одним из широко используемых типов образцов для испытаний на многоцикловую усталость в смешанной моде является CTS образец (рис. 3.22). Данный тип образцов был предложен Рихардом [43] и с тех пор широко применяется для усталостных испытаний в смешанной моде [45, 15, 20, 47]. Конструкция образца и дополнительная оснастка позволяет проводить нагружение образца под различными углами (как правило, с шагом 15 градусов).

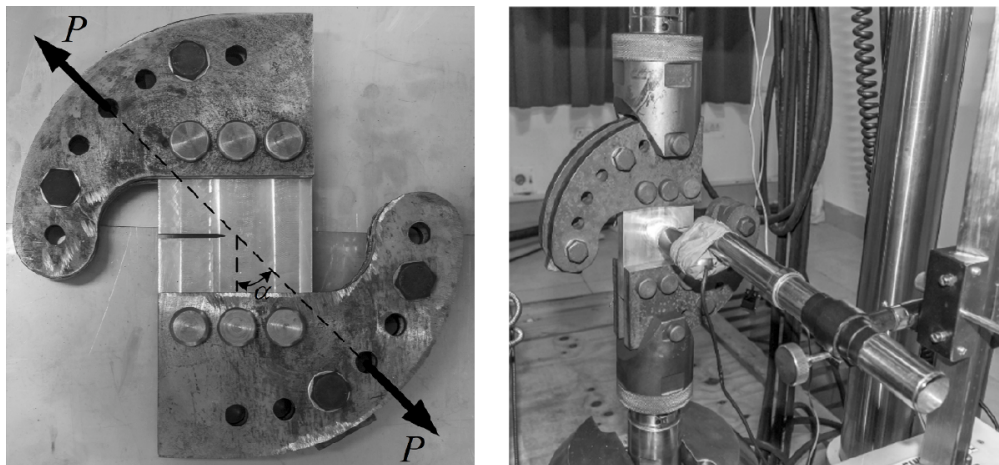


Рисунок 3.22 — Компактные образцы для испытаний на многоцикловую усталость (изображение из работы [47])

### 3.4.1 Описание эксперимента

В данной работе будет рассмотрен эксперимент [47] по растяжению CTS образца силой, приложенной под углами 30, 45 и 60 градусов. Образец с оснасткой в составе испытательного стенда представлен на рис. 3.22. Материал образца – алюминий 6061-T6, упругие свойства материала приведены в табл. 3.7.

Для определения параметров закона Пэриса используются компактные образцы толщиной  $t = 22$  мм, шириной  $W = 60$  мм и остальными размерами, подобранными в соответствии со стандартом ASTM E647-15e1 [55]. Испытания проводятся в моде I при следующих условиях нагружения: максимальная нагрузка  $P_{max} = 14$  кН; коэффициент асимметрии цикла  $R = 0,1$ ; частота нагружения  $f = 10$  Гц.

При данных условиях нагружения получены параметры закона Пэриса, приведенные в табл. 3.7. Стоит отметить, что величина параметра  $C$  приведена при учете, что КИН измеряется в МПа $\sqrt{м}$ .

Таблица 3.7

Упругие модули и параметры закона Пэриса для алюминия 6061-T6

$E$ , МПа	$\nu$	$C$ , мм/цикл	$m$
68000	0,33	$4,3378 \times 10^{-7}$	2,6183

После идентификации параметров закона Пэриса<sup>1</sup>, производится нагружение CTS образцов при следующих условиях:

- длина начальной трещины (ресгаск)  $a_0 = 5$  мм;
- максимальная нагрузка  $P_{max} = 16$  кН;
- коэффициент ассиметрии цикла  $R = 0,1$ ;
- частота нагружения  $f = 10$  Гц.

Нагружение проводится до полного разрушения образца.

<sup>1</sup>при этом, конечно, предполагается, что параметры закона Пэриса для чистой моды I и смешанной моды одинаковы

### 3.4.2 Геометрия образца для численного расчета

Для моделирования данного эксперимента подготовлена расчетная геометрия CTS образца (рис. 3.23), геометрические параметры которой соответствуют экспериментальному образцу и приведены в табл. 3.8.

При моделировании растяжения CTS образца существует несколько способов задания эквивалентных граничных условий (например в [45] и [47]). Из различных вариантов выбран наиболее численно устойчивый – распределение нагрузки по трем верхним отверстиям и частичной фиксации трех нижних отверстий, как это показано на рис. 3.23. Распределение усилия  $P$  по отверстиям производится в соответствии со следующими соотношениями:

$$P_1 = P \left( \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{b}{c} \sin \alpha \right), \quad (3.1)$$

$$P_2 = P \sin \alpha, \quad (3.2)$$

$$P_3 = P \left( \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{b}{c} \sin \alpha \right). \quad (3.3)$$

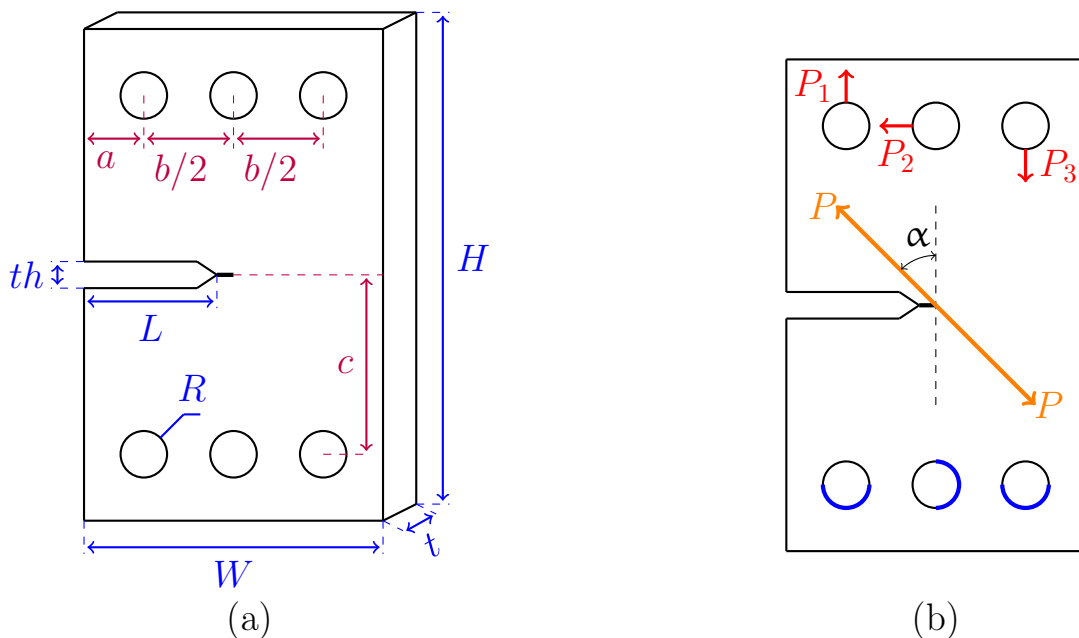


Рисунок 3.23 — Схема CTS образца. (а) – геометрические параметры CTS образца, (б) – граничные условия, эквивалентные растяжению диагональной силой.



Таблица 3.8

геометрические параметры CTS образца (размеры в мм)

<i>W</i>	<i>H</i>	<i>R</i>	<i>L</i>	<i>t</i>	<i>th</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
90	148	7	40	15	3	18	54	54

### 3.4.3 Конечно-элементная модель

По заданным в табл. 3.8 была построена расчетная геометрия, изображенная на рис. 3.24 (а), состоящая из двух областей – области распространения трещины А1 и внешней области А2. Наличие экспериментальных данных о траектории трещины позволило уменьшить размеры области А1 и оптимизировать её форму.

В области А2 построена сетка с доминирующими четырехугольными элементами. Характерный размер элемента в данной области составляет 2 мм. Общий вид сетки представлен на рис. 3.24 (б), на рис. 3.25 можно увидеть сетку в области распространения трещины и увеличенное изображение сетки вблизи вершины трещины. Характерный размер элемента в области распространения на данных изображениях составляет 0,3 мм. Для построения сетки используется PLANE183 – двумерный квадратичный 8-ми узловой конечный элемент. Формулировка плоской задачи – обобщенное плоское напряженное состояние с заданной толщиной.

### 3.4.4 Влияние размера КЭ на расчетную траекторию

В отличие от предыдущих расчетов, в которых оценивалось влияние размера КЭ и инкремента на траекторию трещины, при расчете усталостной трещины необходимо учитывать расчетное количество циклов, которое получается при заданном инкременте. Как будет показано ниже, зависимость количества циклов от инкремента достаточно сильная, в то время как на траекторию инкремент практически не влияет. Поэтому при расчете усталостного разрушения влияние параметров будет оцениваться следующим образом: влияние размера конечного элемента – на расчетную траекторию; влияние величины инкремента – на расчетное количество циклов.

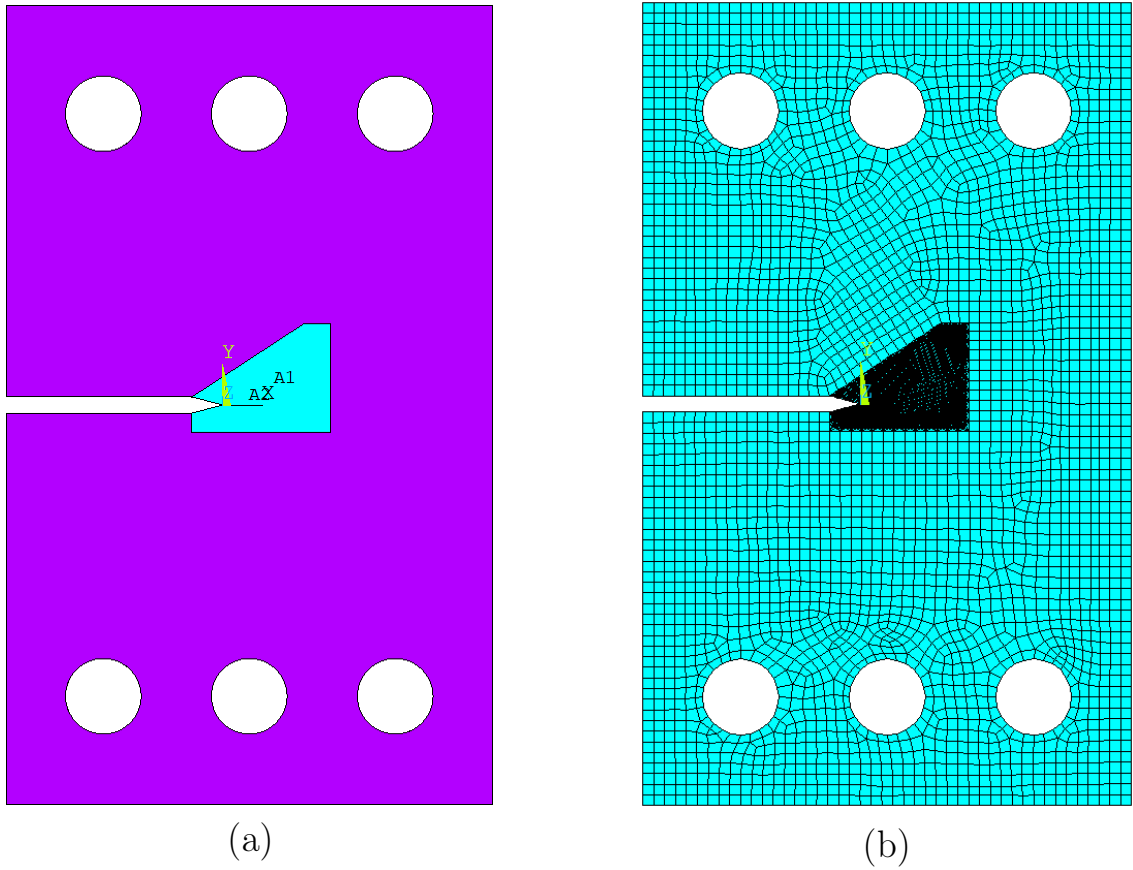


Рисунок 3.24 — Расчетная модель CTS образца. (a) — начальная геометрия, (b) — конечно-элементная сетка.

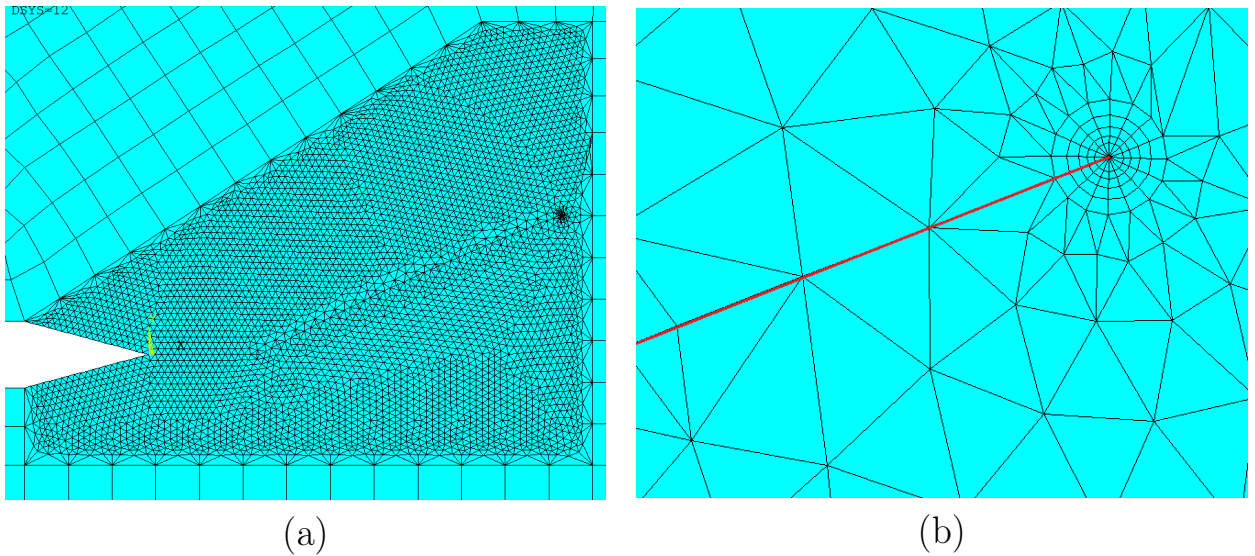


Рисунок 3.25 — Конечно-элементная сетка CTS образца в конце расчета. (a) — область распространения трещины, (b) — сетка вокруг трещины крупным планом (линия трещины выделена красным).

На рис. 3.26 показаны расчетные траектории трещины для нагрузки под углом 30 градусов при различных размерах конечного элемента. Как можно видеть, размер КЭ на результат практически не влияет.

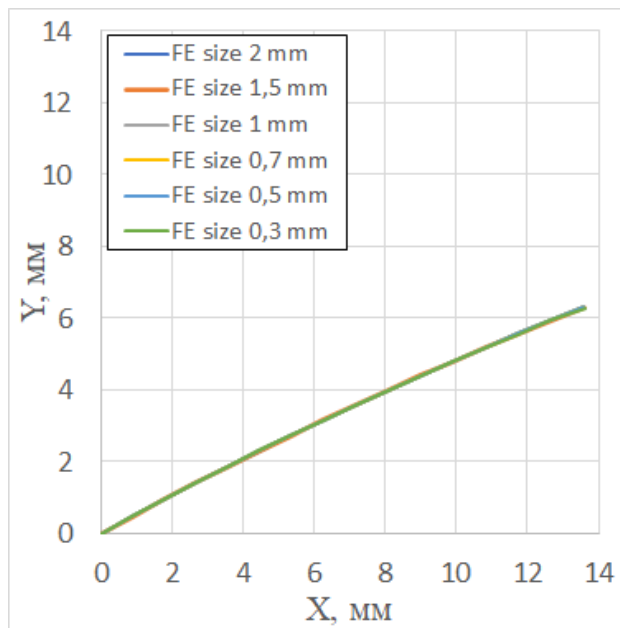


Рисунок 3.26 — Расчетные траектории трещины в CTS образце при нагрузке под углом 30 градусов при различных размерах конечного элемента.

### 3.4.5 Влияние инкремента на расчетное количество циклов

Расчетное количество циклов при заданной длине трещины вычисляется по формуле (1.84), где  $\Delta K_{eq}$  определяется по закону Ирвина (1.85). Оптимальный инкремент выбирается следующим образом – для заданного угла нагрузки строится кинетическая диаграмма усталостного разрушения при различных величинах инкремента. Оптимальным считается такой инкремент, при котором расчетная кривая оказывается наиболее близкой к экспериментальной.

На рис. 3.27 показаны кривые зависимости длины трещины от количества циклов для углов нагрузки 30, 45 и 60 градусов. На экспериментальные точки нанесен горизонтальный предел погрешности 5%. Сплошной кривой на каждом графике выделен результат, полученный при оптимальном инкременте. Для 30 градусов – 0,05 мм, для 45 градусов – 1,5 мм, для 60 градусов 0,5 мм. Отношение инкремента к длине трещины составляет 0,003 для 30 градусов, 0,1 для 45 градусов и 0,03 для 60 градусов.

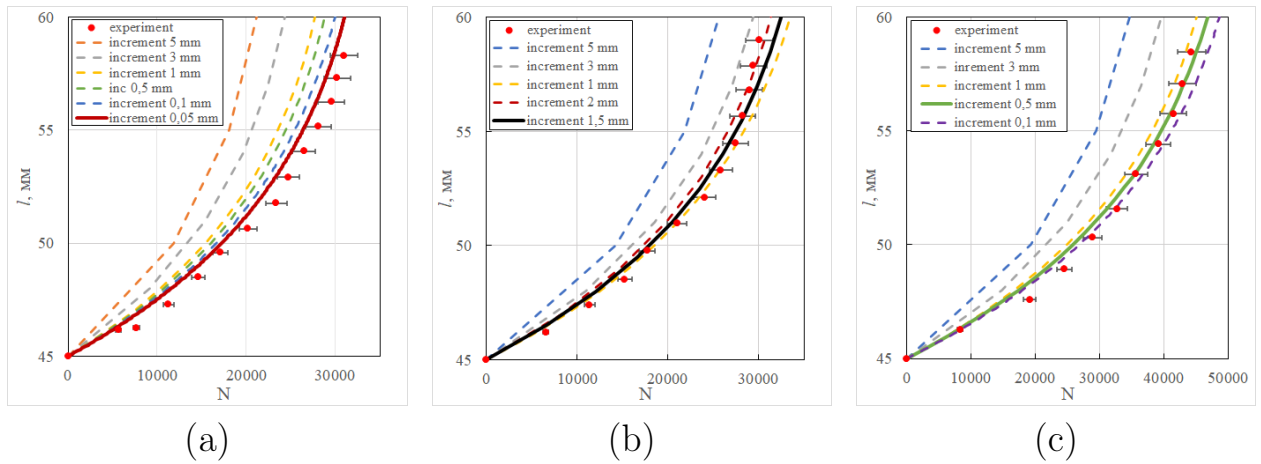


Рисунок 3.27 — Сходимость расчетного количества циклов по инкременту при разных углах нагрузки: (a) – 30 градусов, (b) – 45 градусов, (c) – 60 градусов.

### 3.4.6 Валидация результатов расчета траектории трещины, сравнение критериев

На рис. 3.28 (a) приведено сравнение расчетных и экспериментальных траекторий усталостной трещины при углах нагрузки  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Результаты, полученные для  $30^\circ$  и  $60^\circ$  хорошо сходятся с экспериментальными данными, для  $45^\circ$  наблюдается небольшое расхождение результатов в пределах 5% диапазона.

На рис. 3.28 (b) приведено сравнение траекторий, полученных с помощью различных критериев расчета траектории распространения трещины для угла нагрузки  $45^\circ$ . Как и во всех предыдущих расчетах, рассчитанные по различным критериям траектории трещин практически идентичны.

### 3.4.7 Валидация результатов расчета усталостной кривой при различных выражениях $\Delta K_{eq}$

На рис. 3.29, 3.30 и 3.31 приведены  $a-N$  кривые, рассчитанные с использованием следующих моделей  $\Delta K_{eq}$  – Ирвина (1.85), Рихарда (1.86), Танаки (1.87) и Демира (1.89). Так же, для сравнения, в качестве меры используется  $\Delta K_I$ . Все перечисленные модели, кроме модели Демира, дают практически идентичные кривые. Совпадение кривых, как и в случае с расчетными траекториями при монотонном нагружении, объясняется пренебрежимо малой смешанностью мод. Сопоставив выражения для  $\Delta K_{eq}$ , можно заметить, что при  $\Delta K_{II} \rightarrow 0$  все они, кроме модели Демира, стре-

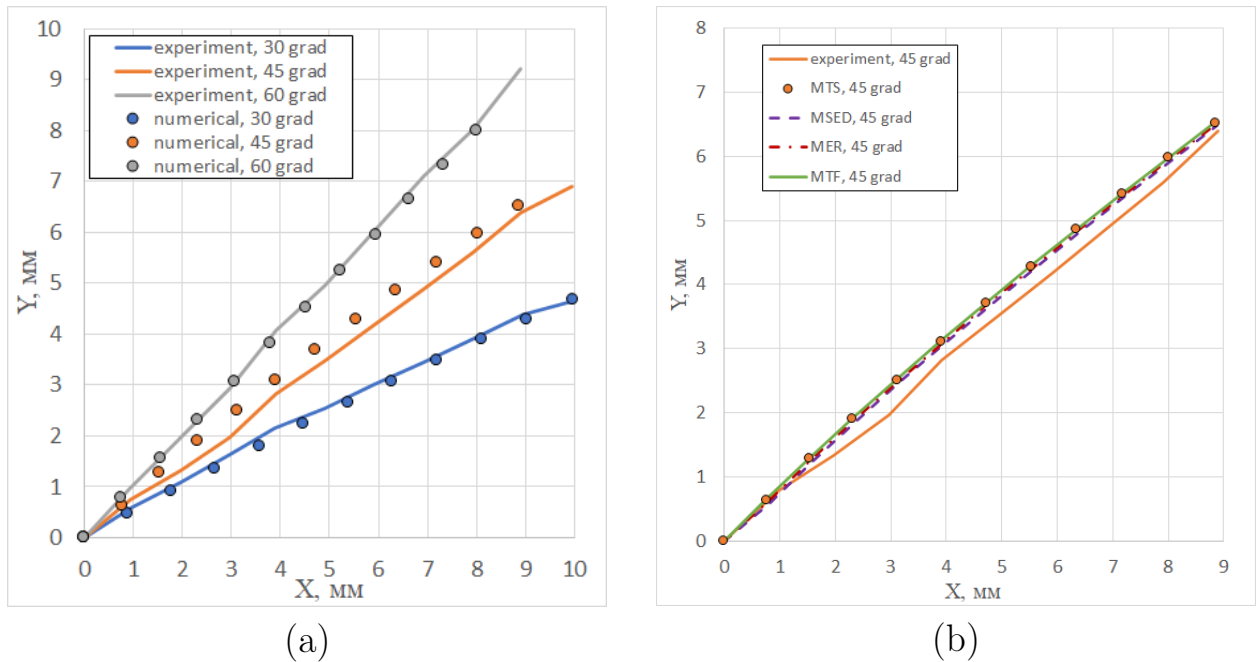


Рисунок 3.28 — Результаты расчета траектории усталостной трещины. (а) – траектории, рассчитанные по критерию максимальных окружных напряжений, при углах нагрузки 30°, 45° и 60°; (б) – сравнение расчетных траекторий, полученных различными критериями, для угла нагрузки 45°.

мятся к одному и тому же предельному значению

$$\lim_{\Delta K_{II} \rightarrow 0} \Delta K_{eq} = \Delta K_I, \quad (3.4)$$

в то время как модель Демира имеет другое предельное значение

$$\lim_{\Delta K_{II} \rightarrow 0} \Delta K_{eq}^{\text{Demir}} = \sqrt[4]{1,0519} \Delta K_I, \quad (3.5)$$

что, конечно, не является физически осмысленным результатом.

Расчетное количество циклов, вычисленное с помощью различных выражений для  $\Delta K_{eq}$ , приведено в табл. 3.9. В каждом расчетном случае (кроме расчета при нагрузке 30° по уравнению Демира), расчетное количество циклов отлично согласуется с экспериментальным. Для 30° все критерии дают консервативную оценку количества циклов, для 45° и 60° наоборот, неконсервативную. При этом погрешность, совершенно неожиданно, падает с увеличением угла нагрузки. Отдельно отметим, что уравнение Демира для  $\Delta K_{eq}$ , в силу своего физически некорректного определения, в каждом расчетном случае дает консервативную оценку, что весьма удобно с точки зрения практического использования.

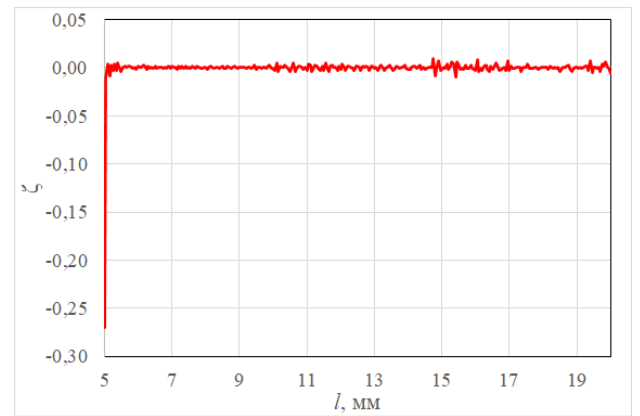
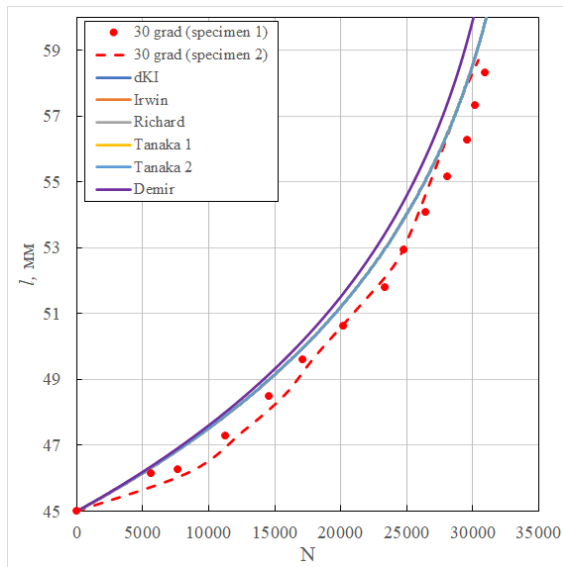


Рисунок 3.29 — Результаты расчета усталости при нагрузке под углом 30 градусов. (а) – кинетическая диаграмма усталостного разрушения, полученная с помощью различных мер  $\Delta K_{eq}$ , (б) – коэффициент смешанности мод  $\zeta = K_{II}/K_I$  вдоль траектории.

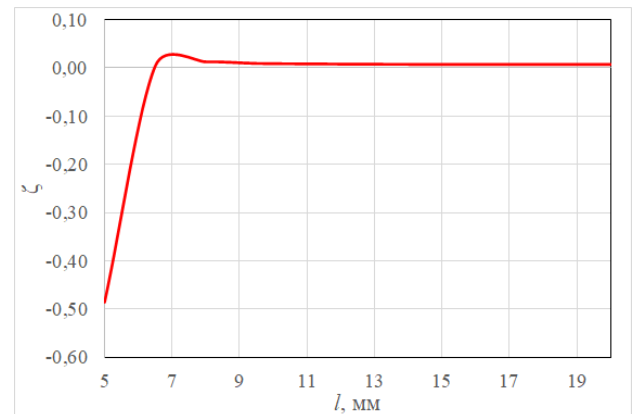
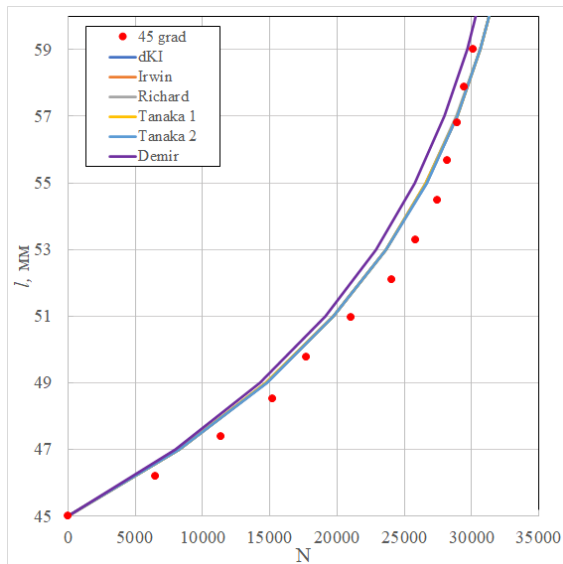


Рисунок 3.30 — Результаты расчета усталости при нагрузке под углом 45 градусов. (а) – кинетическая диаграмма усталостного разрушения, полученная с помощью различных мер  $\Delta K_{eq}$ , (б) – коэффициент смешанности мод  $\zeta = K_{II}/K_I$  вдоль траектории.

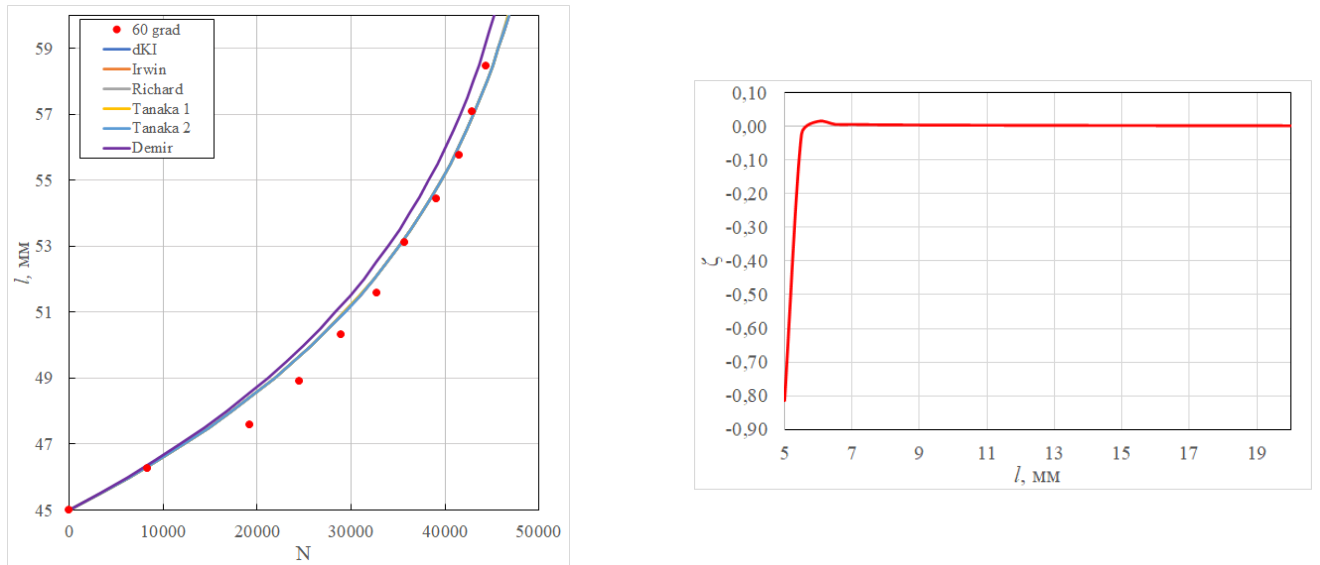


Рисунок 3.31 — Результаты расчета усталости при нагрузке под углом 60 градусов. (а) – кинетическая диаграмма усталостного разрушения, полученная с помощью различных мер  $\Delta K_{eq}$ , (б) – коэффициент смешанности мод  $\zeta = K_{II}/K_I$  вдоль траектории.

Таблица 3.9

Расчетное количество циклов, вычисленное по различным выражениям  $\Delta K_{eq}$

	experiment	$\Delta K_I$	Irwin	Richard	Tanaka 1	Tanaka 2	Demir
N (30°)	30436,30958	29529	29529	29528	29529	29529	28567
err (30°), %	—	3,80	3,80	3,81	3,80	3,80	6,94
N (45°)	30095	30667	30662	30654	30657	30667	29663
err (45°), %	—	-1,90	-1,88	-1,86	-1,87	-1,90	1,44
N (60°)	44340	44451	44447	44440	44442	44451	44298
err (60°), %	—	-0,25	-0,25	-0,22	-0,23	-0,25	0,09

## Заключение

В работе рассмотрены общие вопросы термодинамики роста трещин, энергетические и силовые критерии распространения трещин в условиях смешанных мод разрушения, а также их приложения при решении двумерных задач линейной механики разрушения для прогнозирования траектории роста трещин.

Разработан макрос на языке APDL, позволяющий моделировать распространение трещины в двумерной постановке при монотонном и циклическом нагружении на основе пользовательских критериев для расчета траектории и числа циклов усталостного роста.

Решены четыре модельные задачи: растяжение плоскости с отверстием, трехточечный изгиб ТРВ образца, трехточечный изгиб балки с тремя отверстиями и нагружение СТС образца силой, приложенной под углом. Сравнение расчетных траекторий с экспериментальными данными и расчетами других авторов показало адекватность полученных результатов. В расчетах на циклическое растяжение в смешанной моде получено количество циклов роста усталостной трещины, величина которого также имеет малую, не более 5%, погрешность.

Для каждой из перечисленных задач траектория определялась с помощью четырех критериев для расчета траектории трещины: максимальных окружных напряжений, минимума плотности энергии деформаций, максимума выделения энергии и максимума параметра трехосности напряженного состояния.

Анализ расчетных траекторий, полученных с помощью перечисленных критериев, показал, что выбор критерия для расчета траектории трещины не оказывает влияния на траекторию. Вне зависимости от смешанности мод начальной трещины, после небольшого приращения длины (порядка 1-2 итераций) трещина отклоняется таким образом, чтобы оказаться в режиме нормального растяжения (мода I). Наличие дополнительных концентраторов напряжений, искривляющих траекторию трещины, также не влияет на совпадения траекторий, полученных различными критериями.

Разработанные подходы и ПО может быть использовано для расчетов прочности и долговечности ответственных элементов объектов энергетического оборудования, авиационной и автомобильной техники.



## Список использованных источников

1. Валиев Р.З., Александров И. В. Наноструктурные материалы, полученные интенсивной пластической деформацией — М.: Логос, 2000. — 272 с.
2. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / Перевод с англ. под ред. Ю. А. Чизмадзева — М.: Мир, 1973. — 280 с.
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения — М.: Наука, 1974. — 312 с.
4. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений — М.: Мир, 1990. — 448 с.
5. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений — М.: Мир, 1990. — 1016 с.
6. Пальмов В.А. Нелинейная механика деформируемых тел. — СПб.: издательство Политехнического университета, 2014. — 793 с.
7. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. / 2-е изд. — М.: Наука, 1985. — 504 с.
8. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — К.: Наукова думка, 1981. — 324 с.
9. Хеллан К. Введение в механику разрушения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 364 с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
11. Irwin G.R. Fracture mechanics, in the book of structural mechanics — NY, USA: Pergamon Press New York, 1958.
12. Atkinson C., Eshelby J.D. The flow of energy into the tip of a moving crack / Int. J. Fracture Mechanics, V.4, №1, 1968. p. 3-18.

13. Bittencourt T.N., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R., Sousa J.L. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 55, №2, 1996. p. 321-334.
14. Bobylev S.V., Sheinerman A.G. Crack bridging in ceramic-based nanocomposites reinforced with hybrid graphene/alumina nanofibers / *Materials Physics and Mechanics*, V. 51(3), 2023. p. 1-8.
15. Borrego L.P., Antunes F.V., Costa J.M., Ferreira J.M. Mixed-mode fatigue crack growth behaviour in aluminium alloy / *International Journal of Fatigue*, V. 28, 2006. p. 618-626.
16. Bouchard P.O., Bay F., Chastel Y., Tovenia I. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique / *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 189, 2000. p. 723-742.
17. Budiansky B., Rice J.R. Conversation laws and energy-release rates / *Journal of Applied Mechanics*, V. 40, 1973. p. 201-203.
18. Collado F.J. Reynolds transport theorem for a two-phase flow / *Applied Physics Letters*, V.90, №2, 2007. 024101.
19. Demir O., Ayhan A.O., Iriç S. A new specimen for mixed mode-I/II fracture tests: Modeling, experiments and criteria development / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 178, 2017. p. 457-476.
20. Demir O., Ayhan A.O., Iriç S., Lekesiz H. Evaluation of mixed mode-I/II criteria for fatigue crack propagation using experiments and modeling / *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 31(7), 2018. p. 1525-1534.
21. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear / *Journal of Basic Engineering*, 1963. p. 519-525.
22. Eshelby J.D. The force on an elastic singularity / *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, V. 244, №877, 1951. p. 87-112.
23. Eshelby J.D. The elastic energy-momentum tensor / *Journal of Elasticity*, V. 5, №3-4, 1975. p. 321-335.

24. Galvez J.C., Elices M., Guinea G.V., Planas J. Crack trajectories under mixed mode and non-proportional loading / *International Journal of Fracture*, V. 81, 1996. p. 171-193.
25. Galvez J.C., Elices M., Guinea G.V., Planas J. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading / *International Journal of Fracture*, V. 94, 1998. p. 267-284.
26. Gontarz J., Podgórski J. Comparison of Various Criteria Determining the Direction of Crack Propagation Using the UDMGINI User Procedure Implemented in Abaqus / *Materials*, V. 14, №12, 2021.
27. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids / *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A221, 1920. p. 163-198.
28. Guo Y., Li Q. Material configurational forces applied to mixed mode crack propagation / *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V. 89, 2017. p.147-157.
29. Gurtin M.E. Podio-Guidugli P. Configurational forces and a constitutive theory for crack propagation that allows for kinking and curving / *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, V. 46, №8, 1998. p. 1343-1378.
30. Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J. Strain energy release rate for a crack under combined Mode I and Mode II / *Fracture Analysis*, ASTM STP 560, 1974. p. 2-28.
31. Huynh H.D., Nguyen M.N., Cusatis G., Tanaka S., Bui T.Q. A polygonal XFEM with new numerical integration for linear elastic fracture mechanics / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 213, 2019. p. 241-263.
32. Irwin G.R. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate / *Journal of Applied mechanics*, V.24, 1957. p. 361-364.
33. Knowles J.K., Sternberg E. On a class of conservation laws on linearized and finite elastostatics / *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, V. 44, №3, 1972. p. 187-211.

34. Kong X.M., Schlüter N., Dahl W. Effect of triaxial stress on mixed-mode fracture / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 52(2), 1995. p. 379-388.
35. Lardner R.W. A dislocation model for fatigue crack growth in metals / *A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, V. 17(145), 1968. p. 71-82.
36. McMeeking R.M., Evans A.G. Mechanics of Transformation-Toughening in Brittle Materials / *Journal of the American Ceramic Society*, V. 65, 1982. p. 242-246.
37. Mesgarnejad A., Bourdin B., Khonsari M.M. Validation simulations for the variational approach to fracture / *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V.290, 2015. p.420-437.
38. Ooi E.T., Man H., Natarajan S., Song C. Adaptation of quadtree meshes in the scaled boundary finite element method for crack propagation modelling / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 144, 2015. p. 101-117.
39. Orowan E. Fundamentals of brittle behaviour of metals / In: *Fatigue and Fracture of Metals*. New York: Wiley, 1952. p. 139-167.
40. Paris P., Erdogan F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws / *Journal of Basic Engineering*, V. 85(4), 1963.p. 528-533.
41. Phongthanapanich S., Dechaumphai P. Adaptive Delaunay triangulation with object-oriented programming for crack propagation analysis / *Finite Elements in Analysis and Design*, V. 40, 2004. p. 1753-1771.
42. Rashid M.M. The arbitrary local mesh replacement method: An alternative to remeshing for crack propagation analysis / *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 154, 1998. p. 133-150.
43. Richard H.A., Benitz K.A. loading device for the creation of mixed mode in fracture mechanics / *International Journal of Fracture*, V. 22, 1983. p. 55-58.
44. Richard H.A., Buchholz F.-G., Kullmer G., Schölmann M. 2D- and 3D-Mixed mode fracture criteria / *Key Engineering Materials*, V. 251-252, 2003. p. 251-260.

45. Richard H.A., Sander M. Finite element analysis of fatigue crack growth with interspersed mode I and mixed mode overloads / *International Journal of Fatigue*, V. 27, 2005. p. 905-913.
46. Richard H.A., Schramm B., Schirmeisen N.-H. Cracks on Mixed Mode loading – Theories, experiments, simulations / *International Journal of Fatigue*, V. 62, 2014. p. 93-103.
47. Sajith S., Murthy K.S.R.K., Robi P.S. Experimental and numerical investigation of mixed mode fatigue crack growth models in aluminum 6061-T6 / *International Journal of Fatigue*, V. 130, 2020, 105285.
48. Sih G.C. Some basic problems in fracture mechanics and new concepts / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 5, 1973. p. 365-377.
49. Sukumar N., Prévost J.-H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: Computer implementation / *International Journal of Solids and Structures*, V. 40, 2003. p. 7513-7537.
50. Tanaka K. Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 6(3), 1974. p. 499-507.
51. Tirosh J. Incipient fracture angle, fracture loci and critical stress for mixed mode loading / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 9(3), 1977. p. 607-616.
52. Wu J.-Y. Robust numerical implementation of non-standard phase-field damage models for failure in solids / *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 340, 2018. p. 767-797.
53. Yu H., Kuna M. Interaction integral method for computation of crack parameters K-T-A review / *Engineering Fracture Mechanics*, V. 249, 2021. 107722.
54. Weertman J. Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane. / *International Journal of Fracture Mechanics*, V. 2, 1966. p. 460-467.
55. ASTM E647-15e1. Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates; 2013.