

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д.ф.-м.н., чл-корр. РАН

_____ А. М. Кривцов

«__» _____ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕХАНИЧЕСКИ МОТИВИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

по направлению подготовки

01.03.03. «Механика и математическое моделирование»

по образовательной программе

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой

Выполнил

студент гр.5030103/00101

А.П. Никишин

Руководитель

профессор ВШМиПУ, д.т.н., профессор

Б.Е. Мельников

Консультант

ассистент ВШМиПУ

А.И. Грищенко

Санкт-Петербург

2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Никишину Андрею Павловичу, гр. 5030103/00101

1. Тема работы: Оценка эффективных характеристик полимерных композитных материалов с применением механически мотивированных нейронных сетей
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: Справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): вычисление эффективных свойств однонаправленного волокнистого композитного материала различными подходами: аналитическими методами, методом конечно-элементной гомогенизации, с применением нейросетевых технологий; сравнение и верификация результатов с экспериментальными данными.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: Грищенко А.И., ассистент ВШМиПУ
7. Дата выдачи задания 28.02.2024

Руководитель ВКР _____ Мельников Б.Е., профессор ВШМиПУ, д.т.н., профессор.

Задание принял к исполнению 28.02.2024

Студент _____ Никишин А.П.

РЕФЕРАТ

На 70 с., 43 рисунка, 8 таблиц, 0 приложений.

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА, ВОЛОКНИСТЫЕ
КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ, КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ,
ПУЛТРУЗИОННЫЕ ПРОФИЛИ, МЕТОД КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ
ГОМОГЕНИЗАЦИИ, ANSYS, APDL, PYTORCH, НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

В данной работе рассматривается задача нахождения эффективных свойств однонаправленных волокнистых композитных материалов с применением нейросетевых технологий. В первой главе представлены общие сведения о полимерных композитных материалах, включая информацию о химическом составе, структуре материалов, их механических свойствах, а также о технологическом процессе изготовления и областях применения. Во второй главе описываются основные аналитические методы, используемые для определения эффективных свойств материалов. Эти методы позволяют предсказывать и оценивать характеристики композитных материалов на основе их состава и структуры, а также исследуются влияния отдельных свойств материала на точность рассматриваемых подходов. Третья глава посвящена методу конечно-элементной гомогенизации, включая анализ влияния геометрии на эффективные свойства с применением конечно-элементных пакетов Ansys Material Designer и APDL. Четвертая глава описывает процесс построения нейронной сети для прогнозирования эффективных свойств композиционных материалов с помощью библиотеки PyTorch, используя данные о составе и структуре материалов, а также результаты аналитических методов и метода конечно-элементной гомогенизации из предыдущих глав. Кроме того, рассматриваются возможности улучшения прогнозирования свойств композитных материалов, учитывая информацию о их микроструктуре. Результатом работы является механически мотивированная нейронная сеть, которая позволяет моделировать поведение волокнистых композитных материалов.

THE ABSTRACT

Ha 70 pages, 43 pictures, 8 tables, 0 applications.

EFFICIENT ELASTIC PROPERTIES, FIBER-REINFORCED COMPOSITE MATERIALS, COMPOSITE MATERIALS, PULTRUDED PROFILES, FINITE ELEMENT HOMOGENIZATION METHOD, ANSYS, APDL, PYTORCH, NEURAL NETWORKS

This work considers the problem of finding the effective properties of unidirectional fibrous composite materials using neural network technologies. The first chapter presents general information about polymer composite materials, including information about their chemical composition, material structure, mechanical properties, as well as the manufacturing process and areas of application. The second chapter describes the main analytical methods used to determine the effective properties of materials. These methods allow predicting and evaluating the characteristics of composite materials based on their composition and structure, and also investigate the influences of individual material properties on the accuracy of the considered approaches. The third chapter is devoted to the method of finite element homogenization, including an analysis of the influence of geometry on effective properties using finite element packages Ansys Material Designer and APDL. The fourth chapter describes the process of building a neural network for predicting the effective properties of composite materials using the PyTorch library, using data on the composition and structure of materials, as well as the results of analytical methods and the method of finite element homogenization from previous chapters. In addition, the possibilities of improving the prediction of composite material properties, taking into account information about their microstructure, are considered. The result of the work is a mechanically motivated neural network that allows modeling the behavior of fibrous composite materials.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	8
1.1 Общие сведения о полимерных композитных материалах	8
1.2 Общие сведения о волокнистых композитных материалах	10
1.2.1 Структура волокнистого композиционного материала.....	10
1.2.2 Эффективные свойства композитного материала.....	11
1.3 Закон Гука для анизотропных упругих сред.....	12
1.4 Свойства композитных материалов	15
1.4.1 Преимущества однонаправленных волокнистых композитных материалов	15
1.4.2 Свойства связующего компонента композита	16
1.4.3 Свойства армирующего компонента композита.....	17
1.5 Процесс изготовления волокнистых композитных материалов	18
ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ.....	20
2.1 Аналитические подходы для нахождения эффективных свойств.....	20
2.1.1 Классическое правило смесей.....	20
2.1.2 Модель Халпина-Цая	20
2.1.3 Модель Чамиса	21
2.1.4 Модель Мори-Танака	21
2.2 Сравнение эффективных свойств, полученных аналитически с чис- ленными результатами в пакете Ansys.....	25
2.2.1 Формирование набора данных	25
2.2.2 Оценка модуля Юнга в продольном направлении и главного коэффициента Пуассона	25
2.2.3 Оценка модуля Юнга в поперечном направлении.....	27
2.2.4 Оценка модуля сдвига в продольном направлении	28
2.2.5 Заключение.....	30
ГЛАВА 3. МЕТОД КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ	31
3.1 Метод конечных элементов для решения задачи теории упругости ..	31
3.1.1 Мотивация	31

3.1.2	Дискретизация элементарного представительного объема.....	32
3.1.3	Запись напряжений и деформаций через перемещения	33
3.1.4	Вариационная задача теории упругости.....	34
3.2	Метод конечно-элементной гомогенизации.....	35
3.3	Нахождение эффективных свойств в модуле APDL	37
3.3.1	Постановка задачи	37
3.3.2	Создание сетки.....	37
3.3.3	Задание граничные условия	38
3.3.4	Формулы для вычисления эффективных свойств	42
3.3.5	Результаты	42
3.4	Нахождение свойств в модуле Ansys Material Designer.....	46
3.4.1	Постановка задачи	46
3.4.2	Создание сетки.....	46
3.4.3	Результаты	48
3.5	Сравнение конечно-элементных подходов.....	49
ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ		
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ		51
4.1	Введение в нейронные сети.....	51
4.1.1	Как устроена нейронная сеть	51
4.1.2	Нейронные сети в задачах механики	52
4.1.3	Построение нейронной сети с помощью библиотеки Pytorch	53
4.2	Наивная механическая нейронная сеть	54
4.2.1	Построение архитектуры нейронной сети.....	54
4.2.2	Результаты обучения нейронной сети	55
4.3	Механически мотивированная нейронная сеть	60
4.3.1	Построение архитектуры нейронной сети.....	60
4.3.2	Результаты обучения нейронной сети	61
4.4	Верификация результатов	65
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....		68
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ		69

ВВЕДЕНИЕ

Композитные материалы представляют собой уникальный класс материалов, образованных путем сочетания двух или более компонентов с различными механическими и геометрическими свойствами.

Одной из ключевых причин, почему композитные материалы вытеснили природные материалы, является получение нужных свойств путем объединения свойств – комбинацией нескольких материалов. Полученные таким образом композиты обладают выдающейся прочностью, жесткостью и устойчивостью к разрушению.

Изучение механических и прочностных характеристик композитных материалов является необходимым этапом в их разработке и применении. Понимание поведения материала под различными видами нагрузок, позволяет оптимизировать его структуру и создавать новые инновационные решения для разнообразных отраслей промышленности.

Предметом исследования данной работы являются **однонаправленные волокнистые композитные материалы**.

В последнее время наблюдается значительный рост спроса на композитные материалы, который опережает развитие методов их исследования. Существующие инженерные подходы к анализу композитов обеспечивают только приближенные результаты, тогда как аналитические методы применимы только к простым геометрическим структурам. Благодаря развитию вычислительной техники, в частности методов конечных элементов, стало возможным точно анализировать напряжения, которые возникают в различных композитах.

Актуальность:

Определение эффективных упругих свойств все еще остается одной из основных проблем в механике композитов. Актуальной задачей в конечно-элементном моделировании является разработка методов анализа эффективных характеристик армированных композитных материалов с периодической или хаотической структурой. Наибольшие трудности в разработке подходов по нахождению напряжений и деформаций вызывают композитные материалы с произвольным расположением волокон. Однако на текущий момент для исследования таких композитов наиболее эффективным подходом является *метод конечно-элементной гомогенизации*.

Задачи работы:

1. Изучить свойства отдельных компонентов однонаправленных волокнистых композитных материалов, включая их физические и механические характеристики.
2. Проанализировать существующие аналитические методы для нахождения эффективных характеристик композитных материалов и применить их.
3. Освоить модуль APDL и Ansys Material Designer для решения задач в рамках метода конечно-элементной гомогенизации.
4. Создать архитектуру нейронной сети, обучить ее на тренировочном наборе данных и оценить ее эффективность на валидационных данных.

Цели работы:

1. Вычислить эффективные свойства композитных материалов с использованием различных аналитических подходов и сравнить полученные результаты с данными, полученными методом конечных элементов.
2. Создать алгоритм для решения задачи метода конечно-элементной гомогенизации и реализовать его на языке APDL.
3. Разработать нейронную сеть для нахождения эффективных свойств композитов, основываясь на механические принципы.
4. Провести сравнение результатов, полученных с помощью нейронных сетей, метода конечно-элементной гомогенизации и аналитических подходов, с экспериментальными данными для подтверждения их эффективности и достоверности.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Общие сведения о полимерных композитных материалах

композитные материалы - это материалы, полученные путем объединения двух или более компонентов в одной системе, где каждый компонент сохраняет свои индивидуальные свойства. Особенностью композитов является возможность рассматривать их структуру и на микроуровне и на макроуровне.

Композиты часто рассматривают как соединение нескольких фаз, например, **матрица** может служить в качестве непрерывной фазы, а в свою очередь **волокно** будет являться прерывистой фазой и играет роль армирования.

Существуют различные классификации композитных материалов [8]:

- По структуре — геометрии (морфологии) и расположению компонентов (структурных составляющих);
- По области применения;
- По материалу матрицы и армирующим компонентам;
- По методу получения;
- По физико-химическим свойствам.

В данной главе наибольший интерес представляет последний способ классификации композитных материалов, то есть в соответствии с геометрией компонентов [8]:

1. Волокнистые композитные материалы — материалы, которые содержат волокна, включенные в матрицу. (рис.1.1);

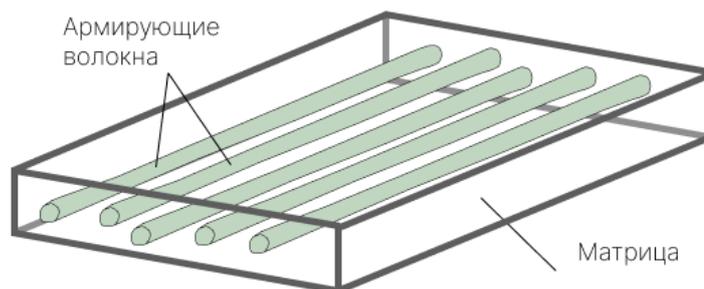


Рис. 1.1: Волокнистый композит

2. Слоистые (ламинированные) композитные материалы - материалы, которые состоят из слоев различных видов материалов, связывающих матрицей (рис.1.2). Биметаллы, например, относятся к слоистым композитам, они имеют в составе два разных металла с очень разными коэффициентами линейного расширения α -слой, β -слой. Ключевыми преимуществами слоистых композитных материалов являются высокая прочность и устойчивость к коррозии при небольшом весе, например, высокопрочный алюминий, покрытый коррозионным алюминиевым сплавом.

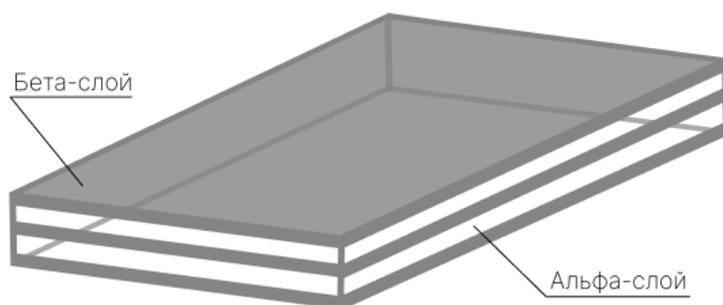


Рис. 1.2: Слоистый композит

3. Дисперсно-упрочненные композитные материалы представляют собой класс материалов, в которых частицы добавляются в матрицу для улучшения их механических свойств (рис.1.3). Дисперсные частицы могут быть различных типов, таких как оксиды, карбиды или нитриды, и добавляются в матрицу для усиления материала и повышения его прочности и жесткости. Особенностью этих композитов является распределение частиц в матрице в хаотическом порядке, что способствует более равномерному распределению нагрузки по всему объему изделия.

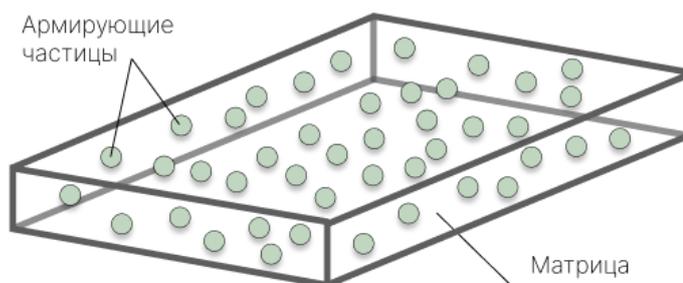


Рис. 1.3: Дисперсно-упрочненный композит

1.2. Общие сведения о волокнистых композитных материалах

1.2.1. Структура волокнистого композиционного материала

Однонаправленные волокнистые композитные материалы (ОВКМ) представляют собой структуры, в которых волокна укладываются параллельно между собой в одном направлении, образуя прочную и легкую основу. ОВКМ являются частным случаем рассмотренных выше волокнистых композитных материалов.

Однонаправленные волокнистые композиты (в иностранной литературе: UD-композиты) рассматриваются как трансверсально-изотропные материалы. Например, в качестве связующего может служить полимер, а в качестве армирующего компонента - углеволокно. На рис. 1.4 представлен элементарный представительный объем (ЭПО), включающий одну ячейку периодичности (ЯП). ЯП - такая структура, которая включает минимальный объем, содержащий информацию о материале. Ячейка периодичности состоит из матрицы (связующий компонент) и включения (армирующий компонент). В данной работе рассматривались связующий и армирующий компонент как изотропные материалы.

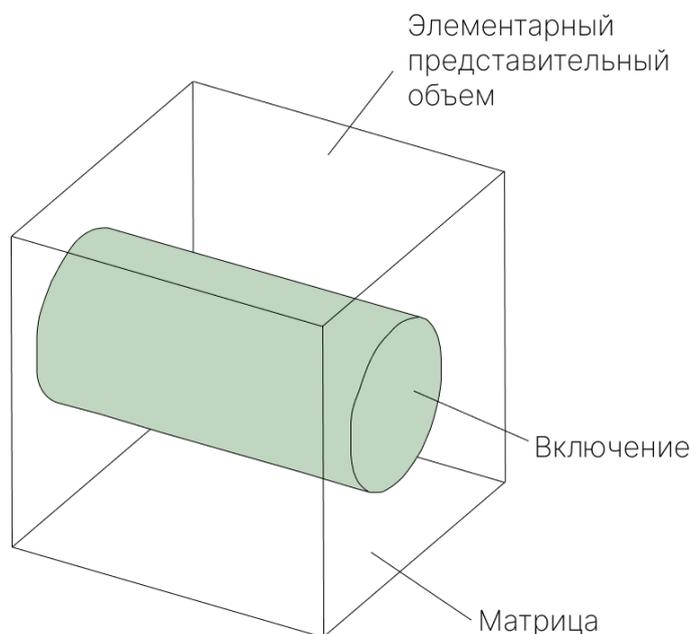


Рис. 1.4: ЭПО композитного материала

1.2.2. Эффективные свойства композитного материала

Эффективные свойства композитных материалов определяются различными факторами, включая свойства отдельных составляющих материалов, объемную долю или массовое содержание каждого компонента, а также расположение или распределение компонентов внутри композита.

Эффективные матрицы жесткости и податливости трансверсально-изотропного материала определяются пятью независимыми инженерными константами: модулями Юнга вдоль и поперек волокна E_{11} и E_{22} (1 – направление вдоль волокна, 2 – направление поперек волокна); модулями сдвига вдоль и поперек волокна G_{12} и G_{23} ; главным коэффициентом Пуассона ν_{12} . Коэффициент Пуассона ν_{23} связан с модулем сдвига G_{23} и модулем Юнга E_{22} зависимостью (1.1):

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + \nu_{23})} \quad (1.1)$$

Инженерные константы гомогенизированного материала зависят от характеристик упругих свойств армирующего и связующего компонентов. Помимо физических свойств составляющих материала, одной из ключевой характеристик ОВКМ является объемная доля волокна.

Объемная доля волокна в ОВКМ - это соотношение объема включения к общему объему материала. Она показывает, какая часть материала занимает волокном.

Изменение объемной доли может значительно влиять на механические и термические свойства, на устойчивость материала к воздействию окружающей среды. Также этот параметр может зависеть от способа производства и требований к конечному материалу.

Для нахождения эффективных свойств композитных материалов, необходимо рассматривать закон Гука для упругих сред. Теория упругости изучает поведение деформаций и напряжений в материалах при различных видах механических воздействиях. Получаемые эффективные свойства будут зависеть от процентного содержания и свойств каждого компонента, а также от их структуры и ориентации.

1.3. Закон Гука для анизотропных упругих сред

Закон Гука является фундаментальным законом механики, описывающим связь между напряжением и деформацией в упругих материалах. В случае анизотропных материалов, таких как кристаллы или **композиты**, которые имеют различные свойства в разных направлениях, тензор жесткости в законе Гука будет записываться в более сложной форме.

Анизотропные материалы обладают ортотропией или трансверсальной изотропией, что означает, что их механические свойства меняются в зависимости от направления нагрузки. Для описания поведения анизотропного материала в условиях малых деформаций, закон Гука может быть расширен с использованием тензоров напряжений и деформаций.

Рассмотрим закон Гука для анизотропных материалов (1.2). Введем ортонормированную систему координат e_1, e_2, e_3 , где e_1 - ось анизотропии (ось, направленная вдоль волокна):

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (1.2)$$

где S_{ijkl}, C_{ijkl} - константы податливости и жесткости, которых в самом общем случае 81.

Однако используя тот факт, что $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow S_{ijkl}, C_{ijkl}$ имеют уже 36 независимых компонент. Это значит, что тензор четвертого ранга обладает симметрией по первой и второй паре индексов $C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{jilk}$. Тогда согласно нотации Фойгта элементы тензора жесткости (податливости) могут быть записаны в виде матрицы 6×6 , используя следующую подстановку индексов:

$$11 \rightarrow 1; 22 \rightarrow 2; 33 \rightarrow 3; 23,32 \rightarrow 4; 13,31 \rightarrow 5; 12,21 \rightarrow 6. \quad (1.3)$$

Можно заметить еще симметрию самих тензоров податливости и жесткости: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \Rightarrow 21$ независимая компонента. Запишем в матричном обозначении закон Гука 1.4:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.4)$$

Тензор напряжений в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Тензор жесткости в орторонормированном базисе в матричном виде будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Связующие и армированные компоненты ОВКМ будем принимать в качестве изотропного материала, тогда упругие свойства будут определяться двумя постоянными (в данном примере: коэффициенты Ламе λ и μ). Матрица для тензора жесткости изотропного материала имеет вид (1.7):

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

где коэффициенты Ламе выражаются через модуль Юнга и коэффициент Пуассона следующими соотношениями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda + 2\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.8)$$

ОВКМ принимается трансверсально-изотропным материалом, и матрица для тензора жесткости принимает вид:

$$\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Тензор жесткости связан с тензором податливости соотношением (1.10). Как можно догадаться, обращение матрицы или тензора 6×6 является не тривиальной задачей и с точки зрения аналитики, и с точки зрения численного подхода.

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1} \quad (1.10)$$

Однако уже существуют формулы перехода от коэффициентов одной матрицы к другой [4]. Выражения, связывающие между элементами матрицы \mathbf{C} и \mathbf{S} записываются в виде (1.11). Причем данные соотношения также справедливы для любого трансверсально-изотропного материала, если в них заменить \mathbf{S} на \mathbf{C} и \mathbf{C} на \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{C_{22} + C_{23}}{C_r}, & S_{12} &= -\frac{C_{12}}{C_r}, \\ S_{22} &= 0.5 \left(\frac{C_{11}}{C_r} + \frac{1}{C_{22} - C_{23}} \right), & S_{23} &= 0.5 \left(\frac{C_{11}}{C_r} - \frac{1}{C_{22} - C_{23}} \right), \\ S_{44} &= \frac{1}{C_{44}}, & S_{55} &= \frac{1}{C_{55}}, & C_r &= C_{11}(C_{22} + C_{23}) - 2(C_{23})^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

С помощью выведенных формул, можем найти *эффективные свойства* однонаправленного волокнистого композитного материала. Эффективные свойства трансверсально-изотропного материала определяются из коэффициентов матрицы податливости следующим образом (1.12):

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{S_{11}}, & E_{22} &= \frac{1}{S_{22}}, \\ G_{12} &= \frac{1}{S_{55}}, & G_{23} &= \frac{1}{S_{44}}, & \nu_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.4. Свойства композитных материалов

1.4.1. Преимущества однонаправленных волокнистых композитных материалов

Существует большое количество различных однонаправленных волокнистых композитных материалов. Возникновение такого количества композитов связано с низкой долговечностью обычных конструкций. Эта проблема может быть успешно решена с использованием армирования обычных материалов. Существуют композитные материалы, усиленные стекловолокном (GFRP), углеволокном (CFRP), арамидными волокнами (AFRP), волокнами льна (FFRP), волокнами джута (JFRP) и другие. В частности, GFRP являются наиболее популярными из-за их относительно низкой стоимости и при этом высокими эксплуатационными характеристиками [17].

Рассмотрим преимущества и недостатки ОБКМ на примере композита, армированного углеволокном. Эффективные характеристики ОБКМ определяются соотношением трех параметров:

1. Прочностью связи волокно-матрица;
2. Прочностью волокон;
3. Прочностью и жесткостью матрицы;

GFRP обладают несколькими преимуществами по сравнению с другими армированными компонентами. Во-первых, они обладают высокой стойкостью к коррозии, что делает их отличной альтернативой стальному армированию в коррозионной среде. Во-вторых, благодаря армированию углеволокном, данные композитные материалы обладают высокой прочностью на растяжение, что делает их идеальным выбором для сопротивления на растяжении в тяговой зоне железобетонных конструкций. В-третьих, они легкие и имеют низкую электропроводность.

Если говорить о недостатках, GFRP стержни имеют некоторые ограничения. Например, они обладают низкой прочностью на сжатие и модулем упругости при сжатии. Из-за этого GFRP чаще всего не используются для сопротивления на сжатие в железобетонных конструкциях. Большое количество исследователей заинтересованы детальным изучением механических и физических свойств стекловолокна [17].

1.4.2. Свойства связующего компонента композита

ОВКМ также классифицируют по природе матрицы композита, выделяют композиты на основе полимеров (пластиков); металлов и их сплавов; керамики; углерода [8]. Прочность и жесткость являются определяющими при нагрузках в направлениях, отличных от направления армирующих элементов композита, поэтому механические свойства связующего компонента должны обеспечивать стабильную работу всего композита при эксплуатации. В таблице 1.1 приведены свойства материалов, которые чаще всего используются в качестве связующего компонента при производстве ОВКМ.

Material	Плотность	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона
PBT	1,21-1,38	1,8-2,5	0,32-0,36
PA 6	1,10-1,12	2,8-2,9	0,30-0,35
PA 66	1,06-1,12	2,8-3,9	0,30-0,32
PA 12	1,01-1,03	0,5-1,9	0,30-0,35
PP	0,89-0,92	1,0-2,0	0,27-0,30
PEEK	1,29-1,34	3,1-8,3	0,27-0,30
PEKK	1,27-1,31	3,8-4,0	0,30-0,35
PET	1,30-1,38	2,5-4,0	0,30-0,35
PEI	1,26-1,79	2,7-6,4	0,30-0,36
PES	1,36-1,58	2,4-8,6	0,32-0,38
PMAA	1,17-1,26	2,8-3,4	0,32-0,35
PPS	1,35-1,43	3,4-4,3	0,32-0,36
PLA	1,18-1,26	0,5-3,5	0,26-0,30
HDPE	0,95-0,97	0,7-1,4	0,35-0,40
LDPE	0,92-0,93	0,1-0,4	0,38-0,42
PE	0,92-0,93	0,2-0,3	0,38-0,42
PC	1,18-1,22	2,4-2,5	0,30-0,35
PU	1,15-1,25	0,1-0,7	0,27-0,30

Таблица 1.1: Полимеры, используемые в качестве матрицы в композитных материалах [15]

Также помимо основных свойства при выборе материала учитывают переменные напряжения, действующие на композит и температуру при эксплуатации. Поэтому при выборе составляющих компонентов должна учитываться

их теплостойкость, поскольку высокая температура может снижать все характеристики композита.

К технологическим параметрам композита относятся все процессы получения изделия из него. Это процесс размещения волокон в матрице без касания между ними, прочные действия на границе «волокно—матрица» (хорошая адгезия) и т.д. Поэтому материал матрицы должен иметь следующие свойства: хорошая смачиваемость, возможность получения полуфабрикатов для получения изделий из них, хорошее соединение ее фаз при формовании композита, низкие параметры температуры и давления при обработке образцов и т.п.

При эксплуатации композиционных материалов экстремальные значения напряжений реализуются на границе раздела «волокно—матрица». Это, в свою очередь, определяется адгезией на границе раздела компонентов композита. Значит, адгезия должна оставаться в требуемых пределах при эксплуатации композита в параметрах, для которых изделия из него рассчитаны [10].

1.4.3. Свойства армирующего компонента композита

Композиты могут быть однонаправленными, с измельченными волокнами или ориентированными во многих направлениях. В данной работе мы занимаемся рассмотрением однонаправленных композитных материалов. Волокнистые композиты могут содержать различные армирующие волокна и матрицы. Волокна могут быть из стекла, углерода, стали, бериллия, бора или нитевидных монокристаллов, с диаметром от микрона до десятков микрон и длиной от микрона до непрерывных. Эти материалы обладают высокой прочностью, модулем упругости и низкой плотностью.

Например, углеволокна с каждым годом становятся все более распространенными за счет своих преимуществ перед традиционными сплавами, такими как снижение массы, повышение прочности и жесткости. В них часто используются полимерные матрицы, такие как эпоксидные, фенолформальдегидные и полиамидные, а сами углеродные волокна и нитевидные кристаллы различных соединений выступают в качестве упрочнителей.

Полимерные композитные материалы давно успешно применяются в авиационной и автомобильной промышленности. Сегодня же они находят свое применение в гражданском строительстве, где для улучшения эксплуатационных характеристик конструкций используется внешнее армирование. Например, для

усиления бетонных колонн применяют манжеты с волокнами для повышения прочности и пластичности, а также для повышения стойкости к изгибу и сдвигу. В гражданском строительстве обычно используются три типа волокон: стеклянные, арамидные и углеродные. Физические и механические свойства этих волокон могут различаться не только между типами, но и внутри одного типа. В таблице 1.2 приведены механические свойства армирующих компонентов, которые чаще всего используются при производстве ОВКМ.

Материал	Плотность	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона
Glass fibers	2.46-2.54	70-90	0,2-0,3
Carbon fibers	1.94-2.15	230-725	0,2-0,3
Flax fibers	1.5	50	0,2-0,3
Jute fibers	1.3	26,5	0,2-0,3
Hemp fibers	1.45	64	0,25-0,35
Graphite	1.9	3,3	0,28-0,3
Aramid fibers	1.45	125	0,25-0,35

Таблица 1.2: Волокна, используемые в качестве армирования в композитных материалах [15]

Однако основная проблема в производстве однонаправленных композитов заключается в обеспечении хорошего пропитывания армирующих волокон матрицей. Например, вязкость термопластичных полимеров значительно выше, чем у термореактивных, что затрудняет процесс. Далее рассмотрим процесс технологического производства ОВКМ.

1.5. Процесс изготовления волокнистых композитных материалов

Свойства матрицы определяют технологические параметры процесса получения композита и его эксплуатационные характеристики: плотность, удельную прочность, рабочую температуру, сопротивление усталостному разрушению и воздействию агрессивных сред. Получается, что оказываются важными не только свойства отдельных компонентов композита, но и технологический процесс производства.

Существуют различные способы изготовления композитных материалов, например формование в автоклаве, формование под давлением, прессование, волоконное намотывание и пултрузия. Технологический процесс *пултрузии* заключается в

протягивании волокон, пропитанных полимерным связующим через систему фильер, что позволяет получать однонаправленные высоконаполненные композиционные детали с постоянной поперечной структурой (Рис. 1.5).

Полученные таким образом композитные материалы обладают высокими эксплуатационными характеристиками и при этом низкой плотностью. Преимущества пултрузии перед другими производственными процессами композитов - высокая скорость производства до 5 м/мин, более высокая эффективность и низкие затраты производства, а также возможность производства профилей практически неограниченной длины. Существуют композиты на основе термопластиков и термореактивных матриц.

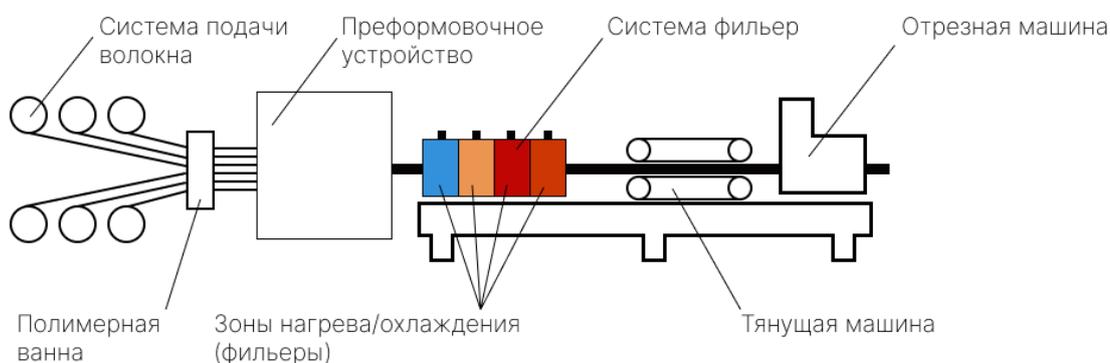


Рис. 1.5: Схематичное представление технологического процесса пултрузии

Термореактивные материалы - это немодифицирующиеся полимеры, получаемые в ходе химической реакции (полимеризации) между смолой и отвердителем, в то время как термопластичные композиты могут изменять свое состояние и плавиться при нагревании. Армирующие волокна пропитываются горячим термопластичным полимером, после чего деталь охлаждается и становится готовой к использованию. Термопластичные композиты, в отличие от термореактивных, обладают повышенной ударной прочностью, быстрее изготавливаются, имеют более высокие рабочие температуры, могут быть сварены, оказывают меньшее воздействие на окружающую среду и могут быть переработаны; их источники имеют практически неограниченный срок годности [15].

Пултрузионные профили из термопластиков находят применение в различных отраслях, таких как автомобильное и авиационное производство, аэрокосмическая и гражданская инженерия, энергетические системы, восстановление стареющих структур, морские приложения, нефтегазовая промышленность, элементы электромагнитной защиты, трубы и стержни.

ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Аналитические подходы для нахождения эффективных свойств

2.1.1. Классическое правило смесей

Первые модели Фойгта (Voigt) [19] и Рейсса (Reuss)[18], использованные для оценки свойств композитов, используют идею построения простейших реологических моделей. Модель Фойгта основана на предположении, что в элементарном представительном объеме композита действуют постоянные деформации, в то время как модель Рейсса основана на предположении о постоянстве напряжений. Если не учитывать структуру композита, то значения упругих модулей, полученные с использованием этих моделей, образуют так называемую ”вилку Фойгта-Рейсса”. Верхнее значение вычисляется по модели Фойгта, а нижнее - по модели Рейсса.

Для повышения точности определения характеристик упругих свойств ОВКМ предлагается использовать модель Фойгта (2.1) для расчета модуля Юнга E_{11} в направлении волокон и поперечного коэффициента Пуассона ν_{12} , а модель Рейсса (2.2) — для определения модуля Юнга E_{22} перпендикулярного направлению волокон, и сдвигового модуля G_{12} через свойства отдельных компонент.

$$E_{11} = V_f E^f + V_m E^m, \quad \nu_{12} = V_f \nu^f + V_m \nu^m \quad (2.1)$$

$$E_{22} = \frac{E^f E^m}{V_f E^m + V_m E^f}, \quad G_{12} = \frac{G^f G^m}{V_f G^m + V_m G^f} \quad (2.2)$$

где E^m - модуль Юнга связующего компонента (матрицы), E^f - модуль Юнга армирующего компонента (волокна), V^f - объемная доля волокна.

2.1.2. Модель Халпина-Цая

Модель Халпина-Цая [9] одна из модификаций расчета модуля Юнга и модуля сдвига E_{22} и G_{12} :

$$E_{22} = E^m \left(\frac{1 + V_f \zeta^e \eta^e}{1 - V_f \eta^e} \right), \quad G_{12} = G^m \left(\frac{1 + V_f \zeta^g \eta^g}{1 - V_f \eta^g} \right) \quad (2.3)$$

Корректирующие коэффициенты находятся по формуле:

$$\eta^e = \left(\frac{\frac{E^f}{E^m} - 1}{\frac{E^f}{E^m} + \zeta^e} \right), \quad \eta^g = \left(\frac{\frac{G^f}{G^m} - 1}{\frac{G^f}{G^m} + \zeta^g} \right), \quad \zeta^e = 1, \quad \zeta^g = 2. \quad (2.4)$$

2.1.3. Модель Чамиса

Модель Чамиса [11] является наиболее часто используемой и считается самой точной моделью, применяемой для определения характеристик упругих свойств композитов. В этой модели константы E_{11} и ν_{12} определяются так же, как в классическом правиле смесей (2.1), в то время как для других модулей c_f заменяется его квадратным корнем:

$$E_{22} = \frac{E^m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E^m}{E^f}\right)}, \quad G_{12} = \frac{G^m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G^m}{G^f}\right)} \quad (2.5)$$

2.1.4. Модель Мори-Танака

Модель Мори-Танака [16] используется для расчета свойств композитных материалов с эллипсоидальным включением как частная задача Эшелби. В качестве материалов включения и матрицы будут рассматриваться также материалы с изотропными свойствами.

В работах Эшелби-Мори-Танака установлено, что под действием однородных деформаций средние деформации $\bar{\epsilon}$ также однородны и связаны с деформацией на удаленной границе следующим образом [5]:

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{C}_m, \mathbf{C}_f) \cdot \bar{\epsilon}, \quad (2.6)$$

$$\Lambda(\mathbf{C}_m, \mathbf{C}_f) = [\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m)]^{-1}, \quad (2.7)$$

где \mathbf{A} - тензор Хилла для бесконечного кругового цилиндра, представимый в \mathbf{P} -базисе, в котором в качестве единичного вектора взят орт оси цилиндра.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\mu} \left[(1 - \xi)\mathbf{P}^2 + (2 - \xi)(\mathbf{P}^1 - 0.5\mathbf{P}^2) + 2\mathbf{P}^5 \right] \quad (2.8)$$

Средние напряжения, возникающие в материале находятся как сумма напряжений возникающих в материалах по отдельности на объемную долю во-

локна (2.9). Деформации находятся по аналогии со средними напряжениями.

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &= \sum V_i \boldsymbol{\sigma}_i = V_m \boldsymbol{\sigma}_m + V_f \boldsymbol{\sigma}_f = \\ &= V_f \mathbf{C}_f \cdot \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \cdot (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m))^{-1} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m + V_m \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зная зависимость напряжений от деформаций:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.10)$$

где $\hat{\mathbf{C}}$ - тензор эффективных упругих свойств 4-ого ранга.

Модель Мори-Танака, построенная на тензоре концентрации деформации, определяют макроскопическую жесткость композита следующим образом:

$$\hat{\mathbf{C}} = [V_f \mathbf{C}_f \cdot \cdot \boldsymbol{\Lambda} + V_m \mathbf{C}_m] \cdot \cdot [V_f \boldsymbol{\Lambda} + V_m \mathbf{E}^1] \quad (2.11)$$

Для представления тензоров четвертого ранга удобно использовать специальные тензорные базисы, образованные единичным тензором и единичными векторами.

Для решения задачи Эшелби-Мори-Танака рассмотрим два таких базиса: \mathbf{E} -базис (2.12) и \mathbf{P} -базис (2.13) [2]. В \mathbf{P} -базисе, вместо единичного тензора используется проектор $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}$ векторов на плоскость, ортогональную единичному вектору \mathbf{n} . Далее будет совершен переход от тензоров к матрице, запишем \mathbf{P} -базис через ортонормированную тройку векторов.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 &= \mathbf{I}, & \mathbf{E}^2 &= \mathbf{E}\mathbf{E}, & \mathbf{E}^3 &= \mathbf{E}\mathbf{n}\mathbf{n}, \\ \mathbf{E}^4 &= \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{E}, & \mathbf{E}^5 &= (\mathbf{n}\mathbf{E}\mathbf{n})^S, & \mathbf{E}^6 &= \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 &= \boldsymbol{\Theta}, & \mathbf{P}^2 &= \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}, & \mathbf{P}^3 &= \boldsymbol{\theta}\mathbf{n}\mathbf{n}, \\ \mathbf{P}^4 &= \mathbf{n}\mathbf{n}\boldsymbol{\theta}, & \mathbf{P}^5 &= (\mathbf{n}\boldsymbol{\theta}\mathbf{n})^S, & \mathbf{P}^6 &= \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha), & \mathbf{P}^2 &= \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\beta, & \mathbf{P}^3 &= \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{n}\mathbf{n} \\ \mathbf{P}^4 &= \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, & \mathbf{P}^5 &= \frac{1}{4}(\mathbf{n}\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{n}), & \mathbf{P}^6 &= \mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\alpha, \beta = 2, 3$, а \mathbf{n} - ось изотропии.

Тензоры жесткости обычно записывают используя \mathbf{E} -базис, однако в дан-

ной задаче удобнее использовать \mathbf{P} -базис из-за цилиндрической симметрии задачи. С учетом 2.15, получим изотропный тензор жесткости, который используется для описания свойств матрицы и включения 2.16.

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \lambda \mathbf{E}^2 + 2\mu \mathbf{E}^1 \\ \mathbf{E}^1 &= \mathbf{P}^1 + 2\mathbf{P}^5 + \mathbf{P}^6, \quad \mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^2 + \mathbf{P}^3 + \mathbf{P}^4 + \mathbf{P}^6 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{C} = 2\mu \mathbf{P}^1 + \lambda \mathbf{P}^2 + \lambda \mathbf{P}^3 + \lambda \mathbf{P}^4 + 4\mu \mathbf{P}^5 + (\lambda + 2\mu) \mathbf{P}^6 \quad (2.16)$$

Рассмотрим произвольный тензор четвертого ранга в \mathbf{P} -базисе:

$$\mathbf{D} = d_1 \mathbf{P}^1 + d_2 \mathbf{P}^2 + d_3 \mathbf{P}^3 + d_4 \mathbf{P}^4 + d_5 \mathbf{P}^5 + d_6 \mathbf{P}^6 \quad (2.17)$$

Используя замены индексов согласно нотации Фойгта (1.3) и представление тензора \mathbf{P} -базисе 2.14, запишем тензор в матричном виде:

$$\mathbf{D} \sim \begin{pmatrix} d_6 & d_3 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ d_4 & d_1 + d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_4 & d_2 & d_1 + d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25d_5 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Рассмотрим правило двойного скалярного перемножения тензоров четвертого ранга в \mathbf{P} -базисе [2], тогда компоненты тензора $\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \cdot \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} d_1 &= \tilde{b}_1 b_1, & d_2 &= \tilde{b}_1 b_2 + \tilde{b}_2 b_1 + 2\tilde{b}_2 b_2 + \tilde{b}_3 b_4, \\ d_3 &= \tilde{b}_1 b_3 + 2\tilde{b}_2 b_3 + \tilde{b}_3 b_6, & d_4 &= \tilde{b}_4 b_1 + 2\tilde{b}_4 b_2 + \tilde{b}_6 b_4 \\ d_5 &= \frac{1}{2} \tilde{b}_5 b_5, & d_6 &= 2\tilde{b}_4 b_3 + \tilde{b}_6 b_6 \end{aligned} \quad (2.19)$$

С учетом введенных выше обозначений и правил, выполнив преобразования путем символьных вычислений, можно получить матричное выражение для тензора Мори-Танака $\mathbf{\Lambda}$:

$$\mathbf{\Lambda} \sim \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{66} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

где ненулевые элементы, после серии преобразований можно записать с помощью формул (2.21-2.26)

$$\Lambda_{11} = \frac{E^m}{E^f} \left[1 + \frac{\nu^m(\nu^m - \nu^f)}{(1 + \nu^m)(1 - \nu^m)} \right], \quad (2.21)$$

$$\Lambda_{12} = \frac{E^m (\nu^m(1 - \nu^f) - 2\nu^f) + E^f \nu^m}{2E^f(1 + \nu^m)(1 - \nu^m)}, \quad \Lambda_{21} = \frac{E^m(\nu^m - \nu^f)}{2E^f(1 + \nu^m)(1 - \nu^m)}, \quad (2.22)$$

$$\Lambda_{22} = \frac{E^m (\nu^f + 4\nu^f \nu^m - 3) + (\nu^m + 1)(4\nu^m - 5)}{8E^f(1 + \nu^m)(\nu^m - 1)} = \Lambda_{33}, \quad (2.23)$$

$$\Lambda_{32} = \frac{E^m (3\nu^f + 4\nu^f \nu^m - 1) + (\nu^m + 1)(1 - 4\nu^m)}{8E^f(1 + \nu^m)(\nu^m - 1)} = \Lambda_{23}, \quad (2.24)$$

$$\Lambda_{44} = \frac{G^m}{G^f} \frac{1}{4(1 - \nu^m)} + \frac{(3 - 4\nu^m)}{4(1 - \nu^m)}, \quad \Lambda_{55} = \frac{G^m + G^f}{2G^f} = \Lambda_{66} \quad (2.25)$$

$$\Lambda_r = \Lambda_{11}(\Lambda_{22} + \Lambda_{32}) - 2\Lambda_{12}^2, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{13}, \quad \Lambda_{21} = \Lambda_{31}, \quad (2.26)$$

Зная компоненты тензора Мори-Танака, теперь можем получить эффективные свойства (2.27-2.29). Получившиеся выражения совпадают с результатами [14].

$$E_{11} = \frac{V_f^2 + V_m^2 \Lambda_r + V_f V_m (\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{32})}{V_f V_m \left[2\Lambda_{21}(S_{12}^m - S_{12}^f) + (\Lambda_{22} + \Lambda_{32})S_{11}^f + \Lambda_{11}S_{11}^m \right] + \Lambda_r S_{11}^m V_m^2 + S_{11}^f V_f^2} \quad (2.27)$$

$$E_{22} = \frac{V_f^2 + V_m^2 \Lambda_r + V_f V_m [\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{32}] [V_f + V_m (\Lambda_{22} - \Lambda_{32})]}{\Lambda_{22}(b_1 + b_2)V_m + \Lambda_{12}(b_3 + b_4)V_m + b_5(\Lambda_{11}V_m + V_f) + \Lambda_{22}^2 S_{11}^m V_m^2 (\Lambda_{11}V_m + V_f)} \quad (2.28)$$

$$\nu_{12} = \frac{V_f^2 S_{12}^f - V_m^2 S_{12}^m + V_m V_f \left[2\Lambda_{12}(S_{11}^f - S_{11}^m) + (\Lambda_{22} + \Lambda_{32})S_{12}^m - \Lambda_{11}S_{12}^f \right]}{V_f V_m \left[2\Lambda_{21}(S_{12}^m - S_{12}^f) + (\Lambda_{22} + \Lambda_{32})S_{11}^f + \Lambda_{11}S_{11}^m \right] + \Lambda_r S_{11}^m V_m^2 + S_{11}^f V_f^2} \quad (2.29)$$

$$G_{12} = \frac{G^f G^m (V_f + V_m \Lambda_{66})}{V_f G^m + V_m \Lambda_{66} G^f}, \quad G_{23} = \frac{G^f G^m (V_f + V_m \Lambda_{44})}{V_f G^m + V_m \Lambda_{44} G^f} \quad (2.30)$$

где принятые обозначения находятся по формулам 2.31, а компоненты тензора податливостей через изотропные свойства матрицы и включения (2.32).

$$\begin{aligned} b_1 &= V_f V_m \left[\Lambda_{12}(S_{12}^m - S_{12}^f) + \Lambda_{11}(S_{11}^m + S_{11}^f) \right], \\ b_2 &= V_f^2 (S_{11}^m + S_{11}^f) - 2V_m^2 \Lambda_{12} \Lambda_{21} S_{11}^m, \\ b_3 &= V_m \Lambda_{21} \left[2V_m \Lambda_{32} S_{11}^m - V_f (S_{11}^f - S_{12}^f + S_{11}^m + S_{12}^m) \right], \\ b_4 &= V_f (S_{12}^m - S_{12}^f) (V_f - V_m \Lambda_{32}), \\ b_5 &= V_f V_m \Lambda_{32} (S_{12}^m - S_{12}^f) - V_m^2 S_{11}^m \Lambda_{32}^2 + V_f^2 S_{11}^f \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$S_{11}^f = \frac{1}{E^f}, \quad S_{11}^m = \frac{1}{E^m}, \quad S_{12}^f = -\frac{\nu^f}{E^f}, \quad S_{12}^m = -\frac{\nu^m}{E^m} \quad (2.32)$$

2.2. Сравнение эффективных свойств, полученных аналитически с численными результатами в пакете Ansys

2.2.1. Формирование набора данных

В рамках исследования был сформирован набор данных, основанный на материалах, традиционно используемых в производстве однонаправленных волокнистых композитных материалов. В качестве основы для данных были выбраны материалы, указанные в таблицах 1.1 и 1.2. Для каждого типа связующего материала был подобран соответствующий армирующий компонент, что позволило сформировать 4000 уникальных комбинаций с различной объемной долей волокон $V_f \in [0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6]$.

Анализ эффективных механических свойств полученных композитов проводился с использованием конечно-элементного пакета Ansys Material Designer. Особый интерес представляло изучение влияния соотношения модулей упругости волокон и матрицы на общие свойства композита. В большинстве случаев модуль упругости волокон значительно превышает модуль упругости матрицы, что выражается в соотношении $\frac{E^f}{E^m} \gg 1$. Однако, в рамках данного исследования особый интерес вызывают композиты, для которых это соотношение приближается к единице $\frac{E^f}{E^m} \approx 1$ или даже меньше единицы $\frac{E^f}{E^m} < 1$, так как они могут демонстрировать нестандартные и потенциально полезные механические характеристики.

Для более глубокого понимания взаимосвязи между структурой и свойствами композитов необходимо определить влияние свойств отдельных компонент и объемной доли волокна. Тогда можно определить оптимальные аналитические оценки для тех или иных материалов. Это дало бы возможность в дальнейшем не только точно оценить эффективные свойства материалов, но использовать полученные знания для оптимизации составов с целью достижения желаемых характеристик.

2.2.2. Оценка модуля Юнга в продольном направлении и главного коэффициента Пуассона

Рассмотрим оценку механических свойств однонаправленных волокнистых композитов с использованием различных аналитических моделей. Основное внимание здесь уделено сравнению модуля Юнга и коэффициента Пуас-

сона, полученных по правилу смесей и методу Мори-Танака, с результатами, полученными методом конечно-элементной гомогенизации.

Выбранная структура однонаправленного композитного материала совпадает с реологической моделью, состоящей из параллельно соединенных упругих элементов. Данное предположение позволяет использовать формулу Фойгта для оценки модуля Юнга в продольном направлении и коэффициента Пуассона для ОВКМ, обеспечивая высокую точность получаемых эффективных характеристик.

При оценке продольного модуля Юнга влияние соотношения модулей упругости волокон и матрицы оказывается незначительным. Максимальная средняя относительная ошибка для классического правила смесей составила приблизительно 0.015%, в то время как по методу Мори-Танака — около 0.07% (см. Рис 2.1). Относительная погрешность определяется путём сравнения результатов, полученных одной из аналитических формул, с данными, полученными при помощи конечно-элементного анализа.

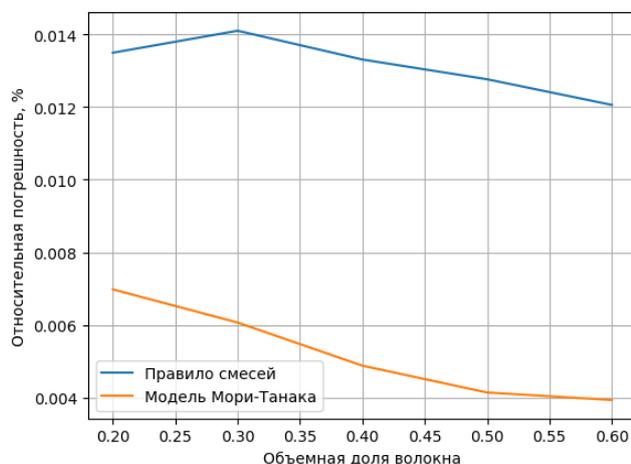


Рис. 2.1: График зависимости усредненной относительной ошибки продольного модуля Юнга E_{11} от доли включения V_f

В случае с модулем Юнга в продольном направлении *модель Мори-Танака* демонстрирует несколько лучшие результаты, чем правило смесей. В то же время для расчета коэффициента Пуассона классическое правило смесей оказывается более точным. По данным исследования, правило смесей адекватно описывает материалы, где жесткость связующего компонента сопоставима или выше жесткости волокон. Относительная ошибка составляет приблизительно 0.2% для материалов с равной жесткостью компонентов и возрастает до 3% для композитов с более жесткими волокнами. С увеличением объемной доли волокон

ошибка в оценке коэффициента Пуассона также увеличивается для обеих аналитических моделей (см. Рис 2.2).

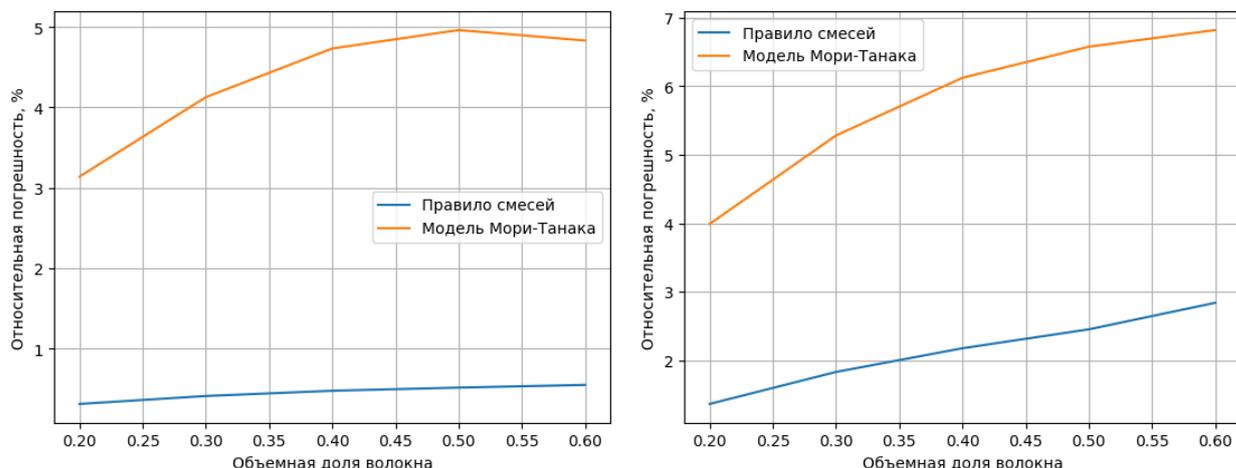


Рис. 2.2: График зависимости усредненной относительной ошибки главного коэффициента Пуассона ν_{12} от доли включения V_f

2.2.3. Оценка модуля Юнга в поперечном направлении

В данном разделе рассматривается оценка модуля Юнга в поперечном направлении для ОВКМ. Анализируется точность найденных свойств с помощью аналитических подходов: правило смесей, модель Халпина-Цая, метод Мори-Танака и модель Чамиса.

Правило смесей, основанное на представлении о последовательном соединении упругих элементов, теряет свою точность при описании поперечных свойств однонаправленных композитов. Эффективность этой модели снижается с увеличением объемной доли волокон, особенно когда волокна обладают высокой жесткостью.

Модель Халпина-Цая показывает лучшие результаты для материалов, где жесткость связующего компонента сопоставима или меньше жесткости волокон. Однако с увеличением жесткости и объемной доли волокон точность модели уменьшается, что указывает на необходимость корректировки модели при высоких значениях данных параметров.

Для материалов с высокой жесткостью волокон наиболее точные результаты демонстрируют *метод Мори-Танака и модель Чамиса*. Эти подходы обеспечивают наименьшую ошибку в оценке поперечного модуля Юнга, особенно при высоких объемных долях. Ошибка варьируется в диапазоне от 10% до 20%, что делает эти методы предпочтительными для моделирования механиче-

ских свойств композитов. На графиках представлены зависимости относительной ошибки от доли волокна при различных свойствах матрицы и включения (Рис 2.3, Рис 2.4).

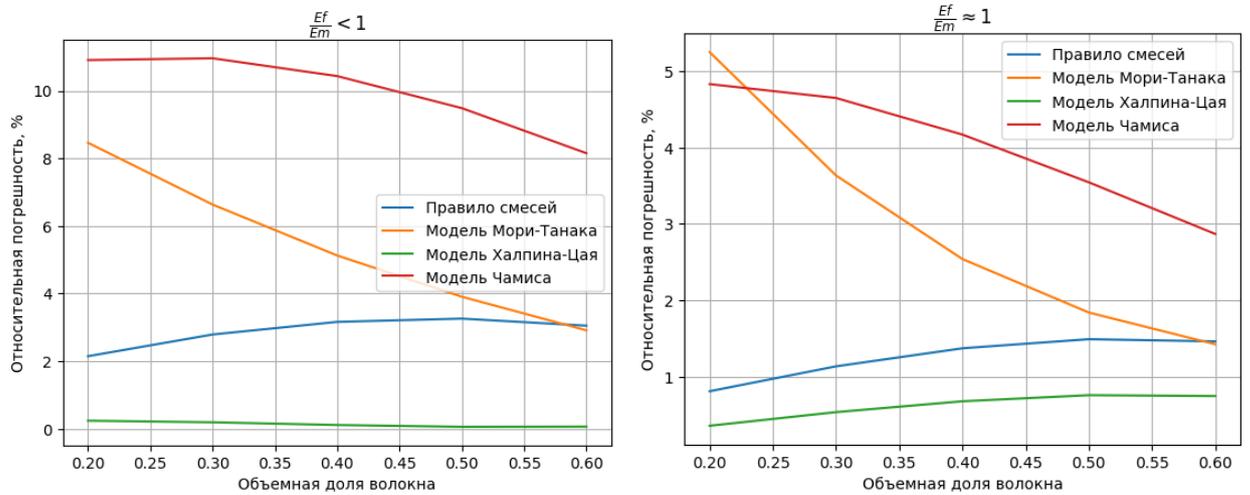


Рис. 2.3: График зависимости усредненной относительной ошибки модуля Юнга в поперечном направлении E_{22} от доли включения V_f

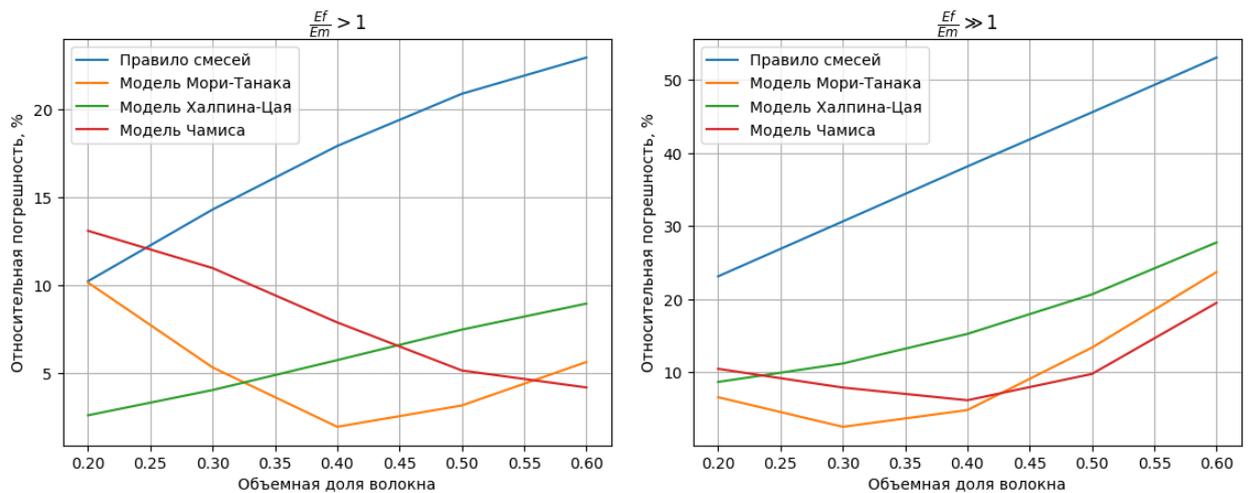


Рис. 2.4: График зависимости усредненной относительной ошибки модуля Юнга в поперечном направлении E_{22} от доли включения V_f

2.2.4. Оценка модуля сдвига в продольном направлении

Правило смесей и модель Халпина-Цая хорошо описывают композитные материалы с мягкими волокнами, однако при увеличении жесткости волокон и объемной доли включений наблюдается увеличение относительной ошибки. Для правила смесей ошибка увеличивается сначала квадратично, а затем линейно. Модель Халпина-Цая также показывает тенденцию к увеличению ошибки,

но её зависимость является нелинейной, что требует дополнительного анализа при применении этой модели к материалам с высокой жесткостью волокон.

Как и в случае с поперечным модулем Юнга *метод Мори-Танака и модель Чамиса* представляют собой наиболее точные подходы для оценки модуля сдвига в продольном направлении в материалах с жесткими волокнами. Относительная ошибка для обоих методов уменьшается относительно объемной доли волокна. В свою очередь метод Мори-Танака демонстрирует минимальные значения ошибок на всех исследуемых уровнях объемных долей: при минимальной доле ошибка составляет приблизительно 15%, а при максимальной — менее 1% (Рис 2.5, Рис 2.6)..

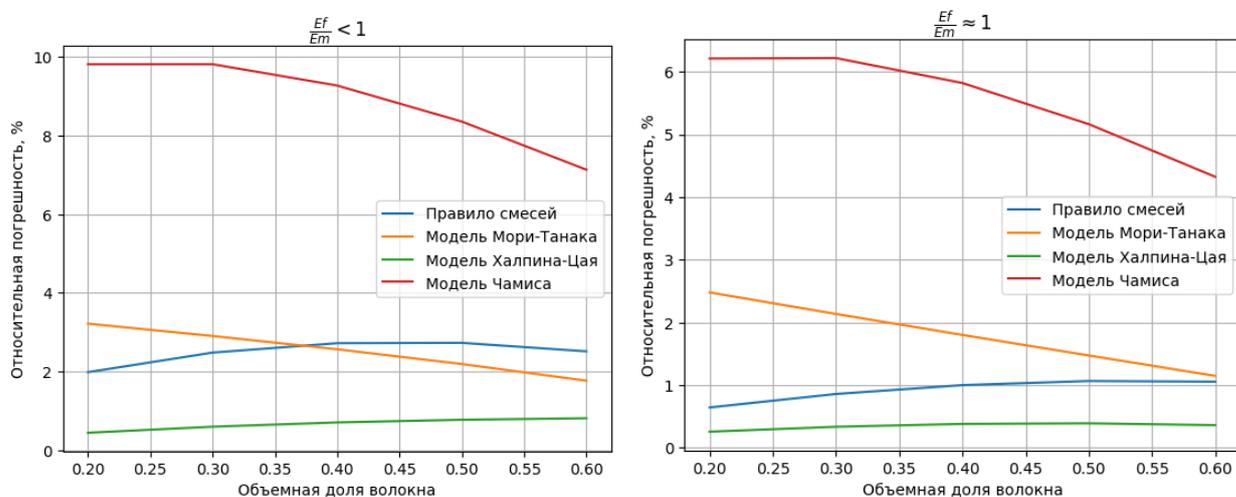


Рис. 2.5: График зависимости усредненной относительной ошибки модуля сдвига G_{12} от доли включения V_f

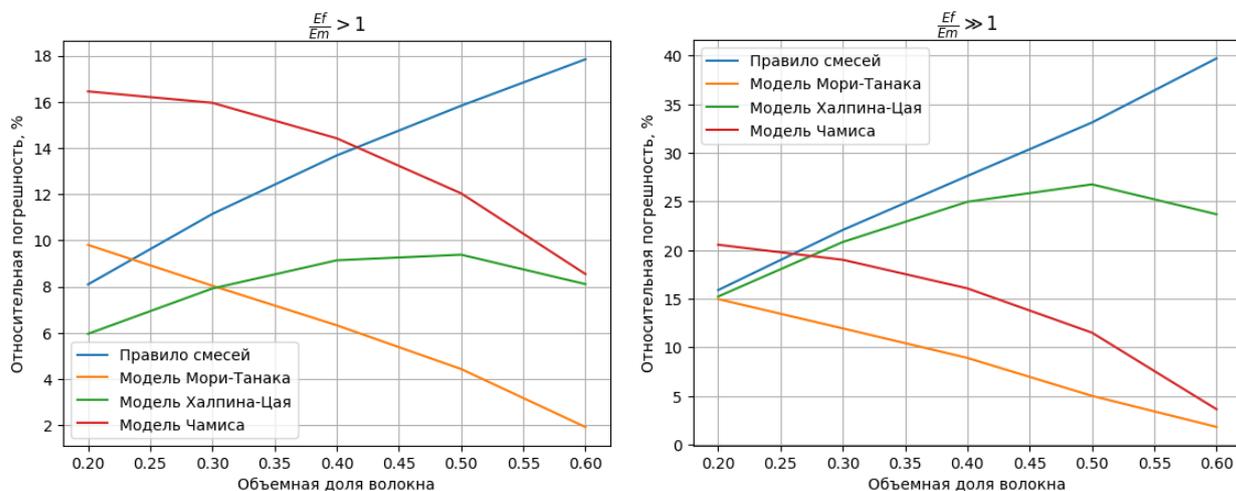


Рис. 2.6: График зависимости усредненной относительной ошибки модуля сдвига G_{12} от доли включения V_f

2.2.5. Заключение

Исследование показывает, что выбор модели для оценки механических свойств однонаправленных волонокистых композитных материалов должен учитывать специфику материала, жесткость волокон, так и объемную долю волокон в материале. Модели Мори-Танака и Чамиса являются наиболее подходящими для анализа композитов с высокой жесткостью волокон, в то время как модель Халпина-Цая может быть эффективной для материалов с меньшей жесткостью волокон. Правило смесей, хотя и менее точно, может использоваться для предварительных оценок в условиях низкой объемной доли волокон. Можно сделать вывод, что каждый метод свои преимущества в зависимости от рассматриваемых параметров и условий применения материала.

ГЛАВА 3. МЕТОД КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ

3.1. Метод конечных элементов для решения задачи теории упругости

3.1.1. Мотивация

Метод конечных элементов (МКЭ) предоставляет возможность получать решения с высокой точностью для широкого спектра практических задач механики деформируемого твердого тела и конструкций, включая расчёт общекорпусных вооружений и средств механизации. Основная концепция МКЭ состоит в построении дискретных конечных элементов моделей области и непрерывной функции.

МКЭ позволяет заменить сложную область на совокупность простых конечных элементов, что упрощает анализ и решение задач. При этом реальная область тела заменяется на приближенно-эквивалентную с большим, но конечным числом степеней свободы. Такой вариационный подход обеспечивает высокую точность и строгость решений для различных задач механики композитов, включая расчёт особо важных элементов конструкций.

Метод конечных элементов является мощным инструментом для решения задач в области инженерии и физики благодаря своей способности адаптироваться к сложным геометрическим и материальным неоднородностям. Одной из ключевых мотиваций к использованию МКЭ является его гибкость в моделировании различных типов материалов и структур, что особенно важно в современных инженерных задачах, где часто встречаются композитные материалы и сложные многослойные конструкции.

Кроме того, МКЭ позволяет проводить анализ в условиях, когда аналитическое решение невозможно или крайне сложно. Это особенно актуально для задач, связанных с нелинейными свойствами материалов, где поведение объекта под нагрузкой не подчиняется простым линейным законам. Метод конечных элементов способен учитывать такие нелинейности, как пластическая деформация, контактные задачи и предел прочности материалов.

3.1.2. Дискретизация элементарного представительного объема

При построении конечно-элементной модели область V аппроксимируется конечным числом непересекающихся подобластей, называемых конечными элементами и имеющих общие узловые точки.

В качестве конечного элемента для решения трехмерной задачи будем использовать линейный тетраэдр с четырьмя узлами в вершинах. В данном трехмерном случае поле перемещений может быть выражено в каждом элементе как функция узловых перемещений (3.3) на функции формы конечных элементов (3.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x &= N_i^x u_i^x + N_j^x u_j^x + N_k^x u_k^x + N_s^x u_s^x \\ u_y &= N_i^y u_i^y + N_j^y u_j^y + N_k^y u_k^y + N_s^y u_s^y \\ u_z &= N_i^z u_i^z + N_j^z u_j^z + N_k^z u_k^z + N_s^z u_s^z \end{aligned} \quad (3.1)$$

Выразим глобальный вектор перемещений через локальный вектор перемещений (3.3) и функции форм конечных элементов (3.4) в матричном виде:

$$U = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = [N] \{u^e\} [N] \quad (3.2)$$

$$\{u^e\}^T = \left\{ u_i^x \quad u_i^y \quad u_i^z \quad u_j^x \quad u_j^y \quad u_j^z \quad u_k^x \quad u_k^y \quad u_k^z \quad u_s^x \quad u_s^y \quad u_s^z \right\} \quad (3.3)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_s & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_s & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_s \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Для того чтобы избежать необходимости пересчитывать все формулы для каждого конечного элемента, мы можем использовать изопараметрическую систему координат. В этой системе координат мы можем записать функции форм для каждого элемента 3.5.

$$N_i = 1 - \eta - \xi - \zeta, \quad N_j = \eta, \quad N_k = \xi, \quad N_s = \zeta \quad (3.5)$$

3.1.3. Запись напряжений и деформаций через перемещения

Рассмотрим связь между деформациями и перемещениями. В механике деформируемого тела, связь между деформацией и перемещением может быть описана с помощью градиента перемещения (3.6, 3.7).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (3.6)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3.7)$$

Если переписать выражение в общем матричном виде (3.8), то градиент перемещения представляет собой матрицу $[B]$, которая связывает изменение положения точки в деформированном состоянии с ее исходным положением в недеформированном состоянии (3.9). Этот градиент определяется производными перемещений по координатам и позволяет нам выразить деформацию в терминах перемещений.

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u^e\} \quad (3.8)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial y} & \frac{\partial N_s}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial z} & \frac{\partial N_s}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_s}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Матрица Якоби (3.10) в методе конечных элементов используется для описания отображения между локальными и глобальными координатами в задачах теории упругости. Она представляет собой матрицу, которая связывает произ-

водные локальных координат с производными глобальных координат.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} & \frac{\partial N_s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} & \frac{\partial N_s}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_k}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_s}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_s & y_s & z_s \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Запишем связь напряжений и перемещений с учетом выражения для деформаций:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{u^e\} \quad (3.11)$$

3.1.4. Вариационная задача теории упругости

Алгоритм метода конечных элементов основан на минимизации функционала потенциальной энергии, что позволяет найти приближенное решение уравнений упругости.

Функционал потенциальной энергии в МКЭ определяется как разность между потенциальной энергией деформаций и потенциальной энергией внешних сил:

$$\Pi = \Lambda - \Omega, \quad (3.12)$$

где Λ обозначает потенциальную энергию деформаций, а Ω — сумму потенциальных энергий внешних сил, включая сосредоточенные силы Ω_c , поверхностные силы Ω_l и объемные силы Ω_V .

Внутренняя энергия Λ выражается через интеграл по объему элемента:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \{u^e\}^T [B]^T [D] [B] dV u^e \quad (3.13)$$

где $\{u^e\}$ — вектор перемещений узлов элемента, $[B]$ — матрица градиентов формы, $[D]$ — матрица упругих констант.

Принцип минимизации потенциальной энергии математически записывается по формуле 3.14. Из условия минимума, мы получаем систему линейных уравнений (3.15)

$$\frac{d\Pi}{d\{u^e\}} = 0 \quad (3.14)$$

$$\int_{\Delta V} [B]^T [D] [B] dV \{u^e\} = \{f^e\} \quad (3.15)$$

Матрица жесткости элемента $[k^e]$ определяется (3.16) и представляет собой ключевой компонент в формировании глобальной системы уравнений МКЭ.

$$[k^e] = \int_{\Delta V} [B]^T [D] [B] dV \quad (3.16)$$

Глобальная система уравнений строится путем ассемблирования локальных матриц жесткости и нагрузок всех элементов:

$$[K] = \sum_e [k^e]; \quad \{F\} = \sum_e \{f^e\} \quad (3.17)$$

Основное уравнение МКЭ для задачи теории упругости тогда принимает вид:

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (3.18)$$

где $\{U\}$ — глобальный вектор перемещений узлов, $\{F\}$ — глобальный вектор внешних нагрузок.

3.2. Метод конечно-элементной гомогенизации

Метод конечно-элементной гомогенизации — это численный подход, используемый для анализа материалов с комплексной микроструктурой. Основная идея метода заключается в том, чтобы усреднить микроскопические свойства материала для получения его эффективных макроскопических свойств (3.19). Это позволяет упростить расчеты и сделать их более управляемыми на макроуровне, сохраняя при этом точность в описании поведения материала. Цель вычислительной гомогенизации состоит в том, чтобы создать виртуальную модель гетерогенного материала, эффективные (или макроскопические) свойства которого могут быть оценены численно.

Можно сформулировать определения для гомогенизованного и гетерогенного материала следующим образом. **Гомогенизированный материал** — это материал, в котором удалось добиться однородного распределения свойств на макроскопическом уровне, несмотря на возможное наличие микроскопиче-

ских неоднородностей. **Гетерогенный материал** — это материал, состоящий из различных компонентов, которые могут значительно отличаться по своим физическим или химическим свойствам, они характеризуются наличием различных фаз, включений или пор, которые влияют на их макроскопические свойства.

Эффективные свойства гомогенизированного материала принимаются соответствующими трансверсально изотропному упругому материалу, для которого закон Гука может быть записан в виде:

$$\bar{\varepsilon} = \hat{C} \cdot \bar{\sigma} \quad (3.19)$$

где $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\hat{V}} \int_{\hat{V}} \varepsilon dV$ – тензор деформации, $\bar{\sigma} = \frac{1}{\hat{V}} \int_{\hat{V}} \sigma dV$ – тензор напряжений, \hat{C} – эффективный тензор упругих податливостей 4 ранга, \hat{V} - ЭПО. Данным величинам соответствует гомогенизированный материал.

Также одним из основных понятий гомогенизации и, более конкретно, вычислительной гомогенизации является элементарный представительный объем. ЭПО в задаче конечно-элементной гомогенизации – это объем, в котором описана микроструктура, т.е. предполагается, что известна геометрия различных фаз и локальные свойства материала. Кроме того, ЭПО должен содержать достаточно информации, чтобы можно было рассчитать эффективные свойства только на основе этого объема.

Как будет показано в дальнейшем, для одного размера ЭПО и для одной реализации микроструктуры рассчитанные эффективные свойства зависят от типа граничных условий, применяемых к границе ЭПО. Затем, для сходящихся свойств по отношению к числу стохастических реализаций, размер ЭПО может быть определен как наименьший размер, для которого эффективные свойства сходятся по отношению к его размеру [3].

Одним из преимуществ использования гомогенизации является то, что можно избежать явного описания всех неоднородностей в материале на структурном уровне. Это может привести к существенной экономии времени и затрат на экспериментальные испытания и производство. И, несмотря на то, что были предложены аналитические оценки гомогенизированных свойств композитов, вычислительная гомогенизация призвана обеспечить более широкую основу для прогнозирования эффективных свойств материалов с меньшими ограничениями на морфологию микроструктуры и локальные явления.

3.3. Нахождение эффективных свойств в модуле APDL

3.3.1. Постановка задачи

Для определения эффективных свойств и их зависимости от выбранного элементарного представительного объема однонаправленного волокнистого композитного материала с использованием пакета конечно-элементного моделирования APDL, нужны выполнить следующие шаги:

- Задать различные типы граничных условий: кинематические, силовые и периодические граничные условия;
- Провести моделирование для каждого типа граничных условий для различного ЭПО;
- Проанализировать полученные результаты, такие как распределение напряжений и деформаций, для каждого типа граничных условий;
- Сравнить полученные результаты и выявить влияние типа граничных условий на результаты гомогенизации.

3.3.2. Создание сетки

Для начала была создана геометрия однонаправленного композитного материала (3.9). Этот шаг включает определение свойств материала, задание ключевых опций и значений координат для узлов, а также определение системы координат. Далее создаются соединения между узлами и задание атрибутов для элементов.

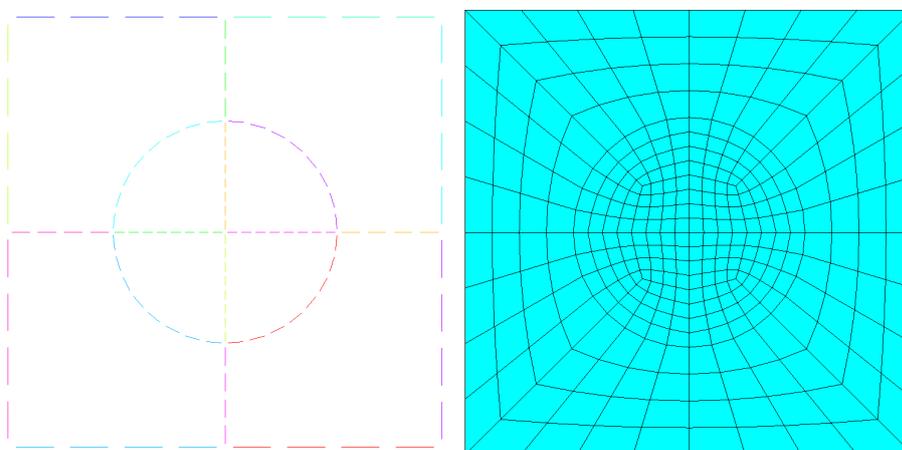


Рис. 3.1: Геометрия и сетка ЭПО

Создание сетки включает в себя: генерацию узлов и элементов. Ниже представлен фрагмент кода, демонстрирующий создание геометрии и сетки для ОБКМ:

```

1 AL,1:3,18:20,17:19
2 AL,4,17,20
3 AL,1:3,5:7,9:13:2,10:14:2,6:8
4 AL,4,8,15,16,5
5 ASEL,,,1,4
6 AATT,2,,1,0,
7 ASEL,ALL
8 AMESH,1:4
9 AMAP,5:7,2:4,6:10:2,3:5,8:12:2
10 AMAP,8,5,12,2,6
11 AGEN,N,ALL,,A,,0
12 AGEN,N,ALL,,A,,0
13 ET,2,SOLID186
14 EXTOPT,ATTR,1,0,0
15 REAL,_Z4
16 ESYS,0

```

3.3.3. Задание граничные условия

Рассматривается задача определения эффективных упругих свойств методом конечно-элементной гомогенизации, в рамках которой решаются краевые задачи теории упругости применительно к элементарному представительному объему. Рассматриваются варианты кинематических (3.20) и силовых (3.21) граничных условий (ГУ), а также условия периодичности (3.22):

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{r} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{S_\sigma} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \quad (3.21)$$

$$\mathbf{u}|_{S_{u_1}} = \mathbf{u}|_{S_{u_2}} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.22)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ и $\boldsymbol{\sigma}^*$ – заданные постоянные симметричные тензоры, соответствующие различным состояниям (осевые растяжения и сдвиги).

Силовые граничные условия. Задание силовых граничных условий: устанавливается тип анализа как статический, выбираются все элементы и узлы, применяются давление к выбранным узлам.

```

1 /SOLU
2 LSCLEAR,ALL
3 ANTYPE,STATIC
4 Allsel,all
5 *GET,AR20,NODE,0,MXLOC,X
6 *GET,AR21,NODE,0,MNLOC,X
7 *GET,AR22,NODE,0,MXLOC,Y
8 *GET,AR23,NODE,0,MNLOC,Y
9 NSEL,S,LOC,X,AR20
10 SF,ALL,PRES,-1*1e+2
11 NSEL,S,LOC,X,AR21
12 D,ALL,UX
13 NSEL,S,LOC,Y,AR23
14 D,ALL,UY
15 Allsel,all

```

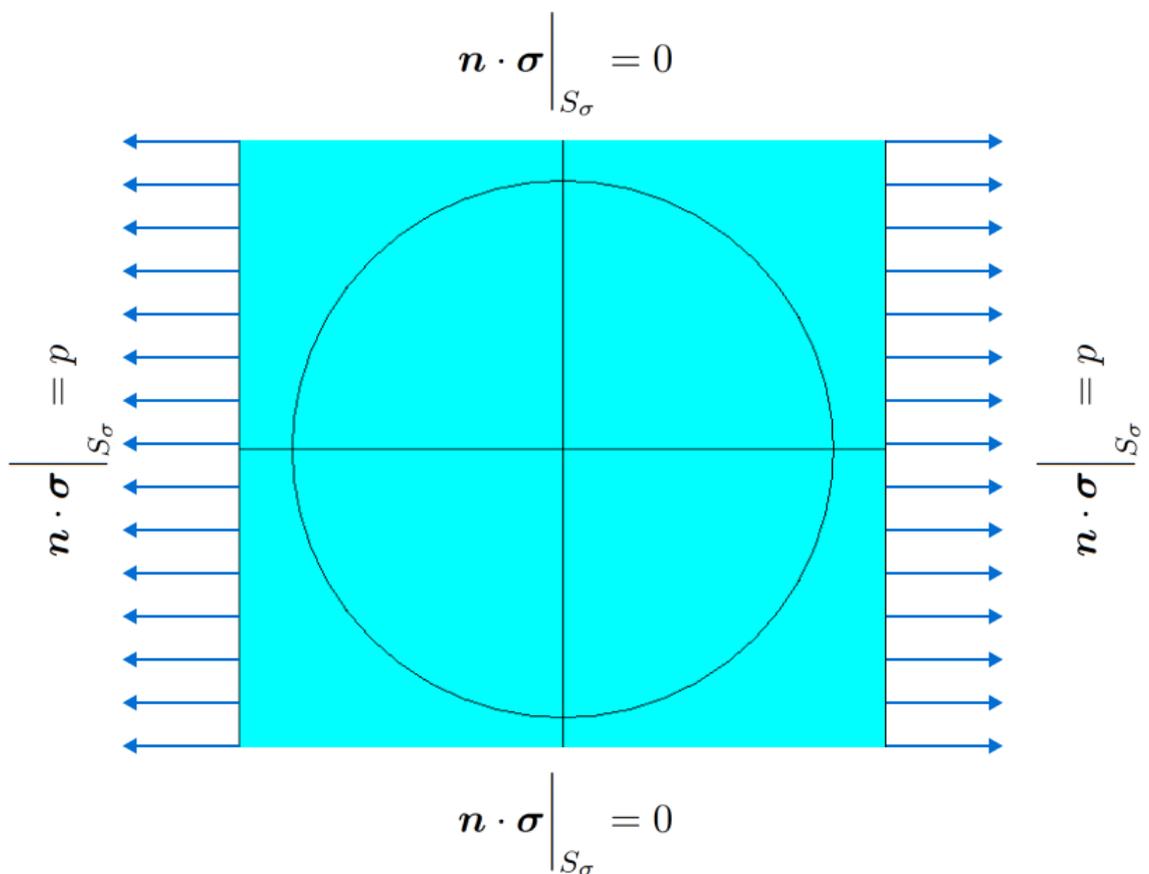


Рис. 3.2: Создание геометрии APDL

Кинематические граничные условия. Задание кинематических граничных условий: устанавливается тип анализа как статический, выбираются все элементы и узлы, применяются перемещение к выбранным узлам.

```

1 /SOLU
2 ANTYPE,STATIC
3 *GET,AR20,NODE,0,MXLOC,X
4 *GET,AR21,NODE,0,MNLOC,X
5 *GET,AR22,NODE,0,MXLOC,Y
6 *GET,AR23,NODE,0,MNLOC,Y
7 NSEL,S,LOC,X,AR20
8 D,ALL,,0.01,, , ,UX
9 NSEL,S,LOC,X,AR21
10 D,ALL,UX
11 NSEL,S,LOC,Y,AR23
12 D,ALL,UY
13 Allsel,all

```

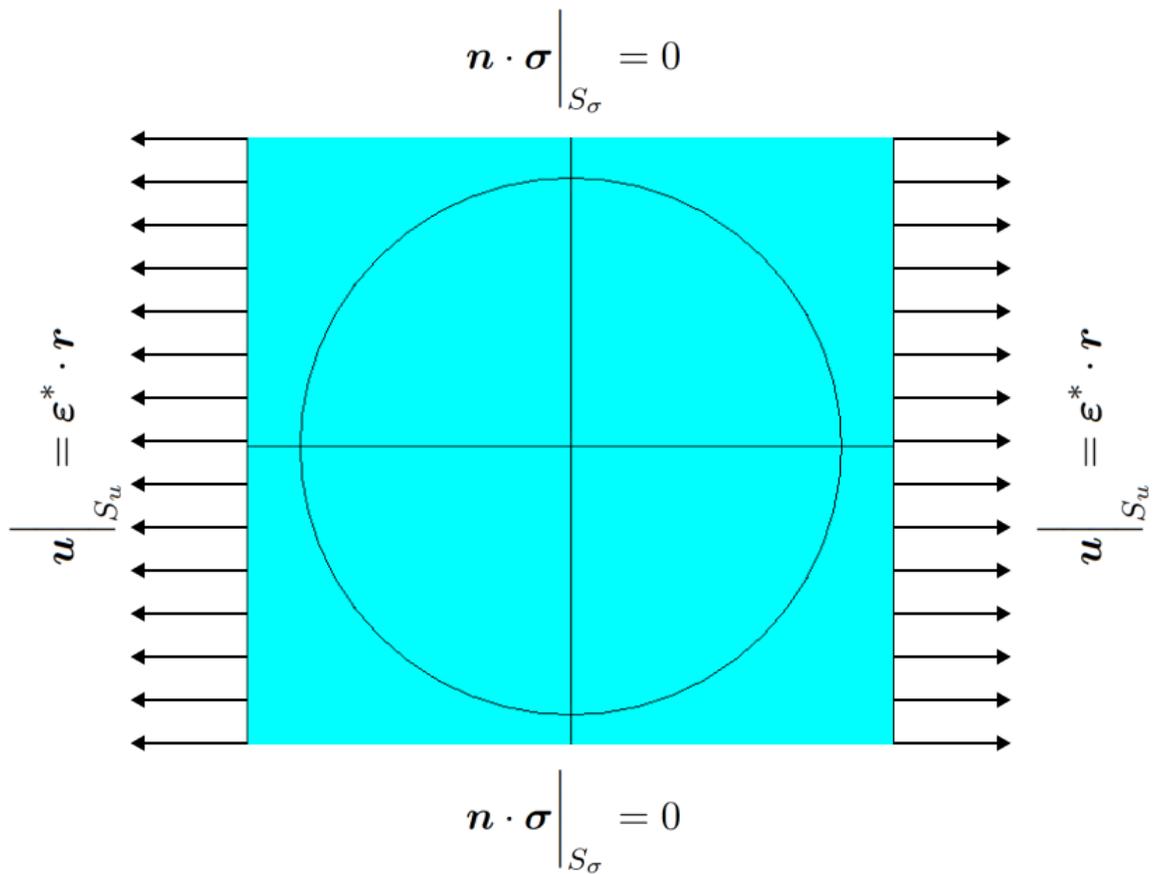


Рис. 3.3: Создание геометрии APDL

Периодические граничные условия. Для установка граничных условий периодичности необходимо выполнить следующие шаги:

1. Установить тип анализа как статический с помощью команды *SET;
2. Используя команду *GET, извлечь максимальные и минимальные координаты X и Y для всех узлов в модели;
3. С помощью команды *DIM определить массивы для хранения выбранных узлов и их соответствующих перемещений.

Для выбора узлов на основе их координаты X нужно использовать команду *NSEL,S,LOC,X. Затем используется цикл *DO для итерации по выбранным узлам и сохранения их координаты X и значений перемещений в массиве CPSetX. Аналогичные действия проводятся и в направлении Y.

Завершается код командой D, которая выводит значения перемещений для конкретного узла, определенного по координатам AR20, AR22 и AR24. Выводимые перемещения будут отображены в направлениях X, Y и Z.

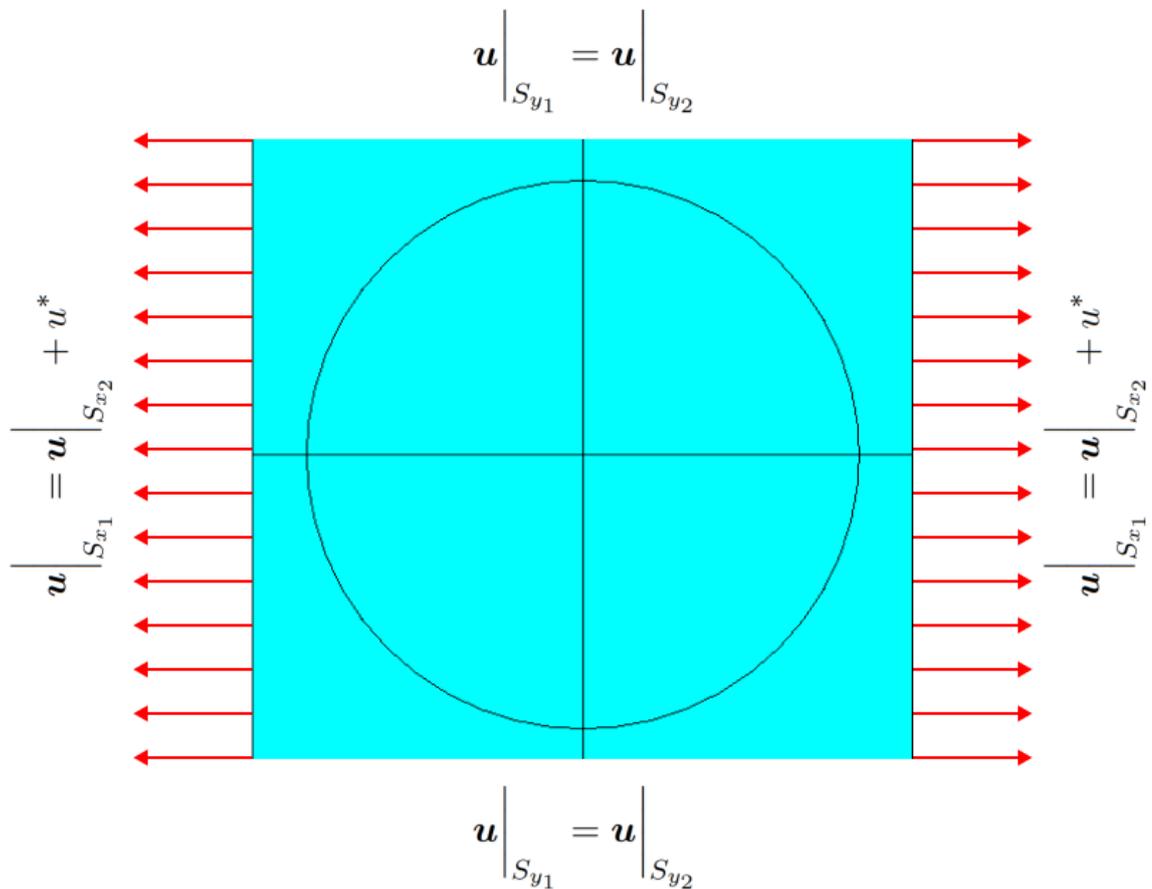


Рис. 3.4: Создание геометрии APDL

3.3.4. Формулы для вычисления эффективных свойств

Запускается постпроцессорный блок, устанавливается последний временной шаг для анализа, создается таблица для вычисления среднего значения для элементарного представительного объема гетерогенного материала. Пример кода для обработки финальных результатов:

```
1 ETABLE,av_elem,EPEL,X
2 ETABLE,vol_elem,VOLU,
3 SMULT,weighted_elem,av_elem,vol_elem,1,1,
4 SSUM
5 *get,total_weighted_elem,ssum,,item,weighted_elem
6 *get,total_vol,ssum,,item,vol_elem
7 AVERAGE_output = total_weighted_elem/total_vol
```

С помощью вычисленных напряжений и деформаций можно вычислить эффективные свойства. Например, главный коэффициент Пуассона и модуль Юнга в поперечном направлении можно определить по формулам:

$$\bar{\nu}_{12} = \frac{\bar{\epsilon}_x \bar{\sigma}_y - \bar{\epsilon}_y \bar{\sigma}_x}{\bar{\epsilon}_x (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x) + \bar{\epsilon}_y (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_y)}; \quad (3.23)$$

$$\bar{E}_{22} = \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\epsilon}_x} - \bar{\nu}_{12} \frac{\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z}{\bar{\epsilon}_x} \quad (3.24)$$

3.3.5. Результаты

С помощью блока postprocessing в APDL Product Launcher получим распределения напряжений и деформаций для данного композитного материала. Рассмотрим структуру с 4 ячейками периодичности.

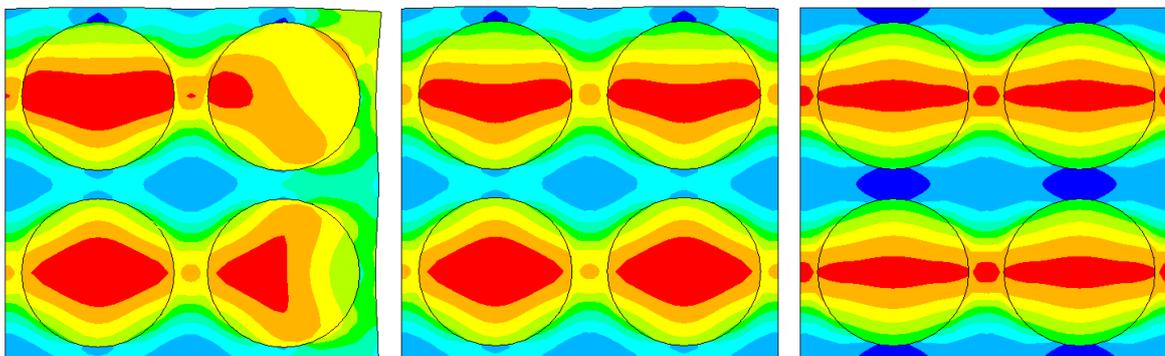


Рис. 3.5: Поля распределений напряжений по Мизесу для силовых / кинематических / периодических граничных условий

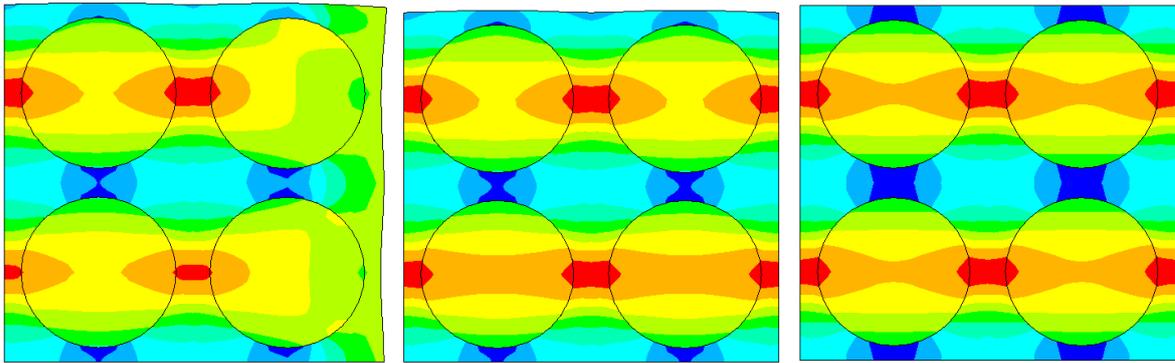


Рис. 3.6: Поля распределений напряжений σ_x для силовых / кинематических / периодических граничных условий

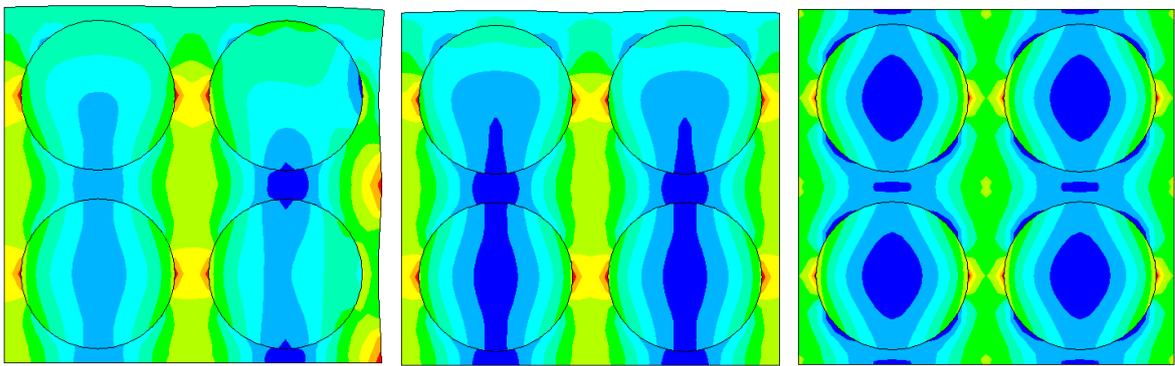


Рис. 3.7: Поля распределений напряжений σ_y для силовых / кинематических / периодических граничных условий

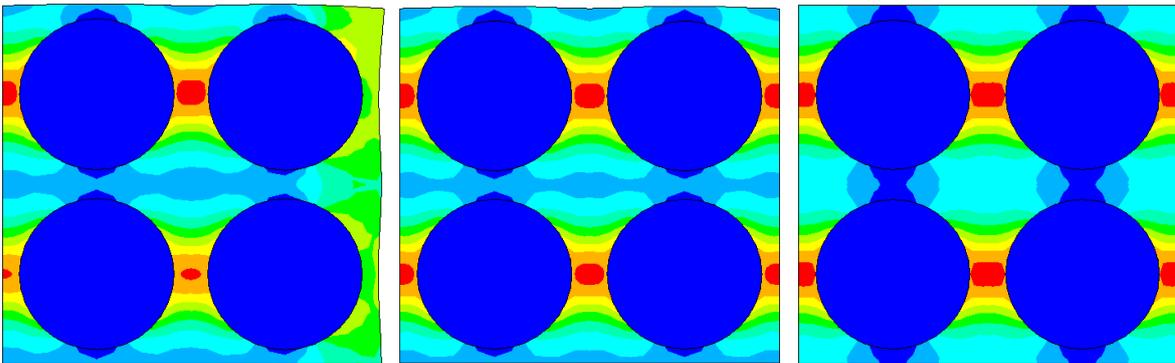


Рис. 3.8: Поля распределений деформаций ϵ_x для силовых / кинематических / периодических граничных условий

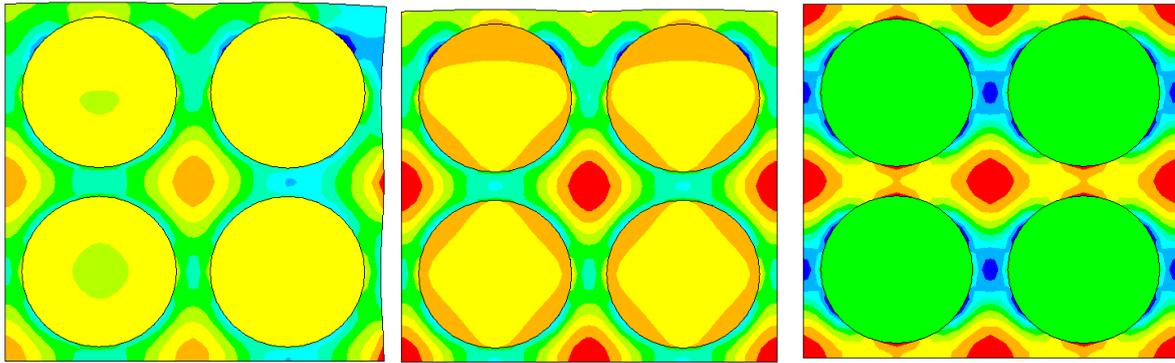


Рис. 3.9: Поля распределений деформаций ε_y для силовых / кинематических / периодических граничных условий

В случае силовых и кинематических ГУ ясно прослеживается влияние границ ЭПО на его напряженно-деформированное состояние (НДС), что приводит к необходимости рассмотрения ЭПО с бóльшим количеством ячеек периодичности. В случае условий периодичности **краевых эффектов не наблюдается**.

В работе [1] представлены результаты сравнительного анализа использования всех трёх типов ГУ для определения эффективных упругих характеристик. В данной работе был посчитан модуль Юнга в поперечном направлении E_{22} с использованием APDL, и полученные результаты качественно совпадают с [1] (рис. 3.11, 3.10).

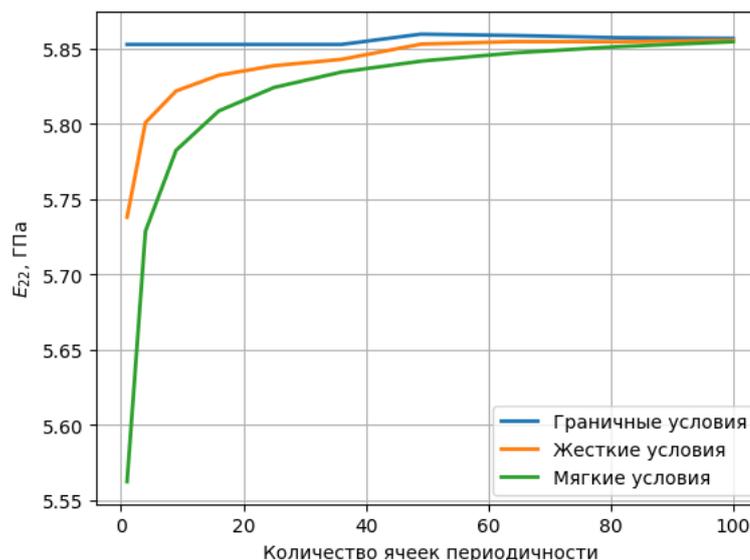


Рис. 3.10: График сходимости решения эффективного модуля Юнга E_{22} с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 19 > 1$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.21$ [20] с увеличением количества ячеек периодичности для различных типов граничных условий

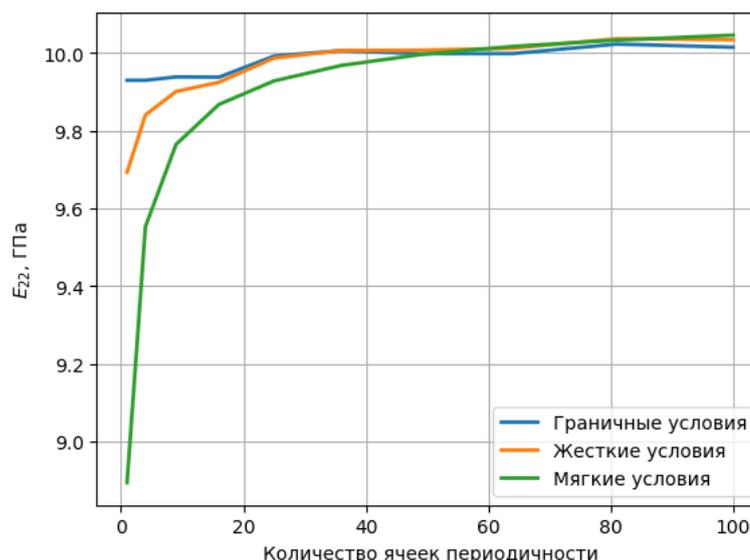


Рис. 3.11: График сходимости решения эффективного модуля Юнга E_{22} с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 10.4 > 1$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.55$ [21] с увеличением количества ячеек периодичности для различных типов граничных условий

Использование периодических граничных условий даёт более точные значения эффективных характеристик, причём достаточно использовать только одну ЯП. Также в результате проведенных исследований [7] было установлено:

- Эффективные упругие характеристики напрямую зависят от количества ячеек периодичности для кинематических и силовых ГУ;
- В случае использования гранических условий периодичности, не прослеживается влияния границ ЭПО на НДС;
- В случае, когда жёсткость волокон больше жёсткости матрицы $\frac{E^f}{E^m} > 1$, практическая сходимость тем медленнее, чем меньше объёмная концентрация волокон.

Таким образом, было установлено, что при использовании условий периодичности, удовлетворительная (статистически существенная) точность достигается уже при использовании ЭПО, включающих одну ячейку периодичности. Тогда как при использовании ГУ для перемещений и напряжений в целях исключения краевого эффекта необходимо рассмотрение большого числа ячеек периодичности. Аналогичный результат получен в книге [3].

3.4. Нахождение свойств в модуле Ansys Material Designer

3.4.1. Постановка задачи

Определим влияние геометрических соотношений и выбор ЭПО на эффективные свойства с помощью пакета конечно-элементного моделирования Ansys внутри модуля Material Designer. Для данного исследования необходимо выполнить следующие пункты:

- Построить ЭПО композитного материала, определить его эффективные свойства;
- Провести моделирование для различных геометрических соотношений (длина и диаметр включения) ОВКМ;
- Выявить влияние выбора ЭПО на результаты гомогенизации.

3.4.2. Создание сетки

Для исследования свойств волокнистого однонаправленного композита в пакете конечно-элементного моделирования ANSYS была построена 3D модель ЭПО. Для создания геометрии, нужно выбрать тип геометрии (**Square** / **Diamond** / **Hexagonal**), объемную долю волокна, диаметр и длину волокна, количество ячеек периодичности.

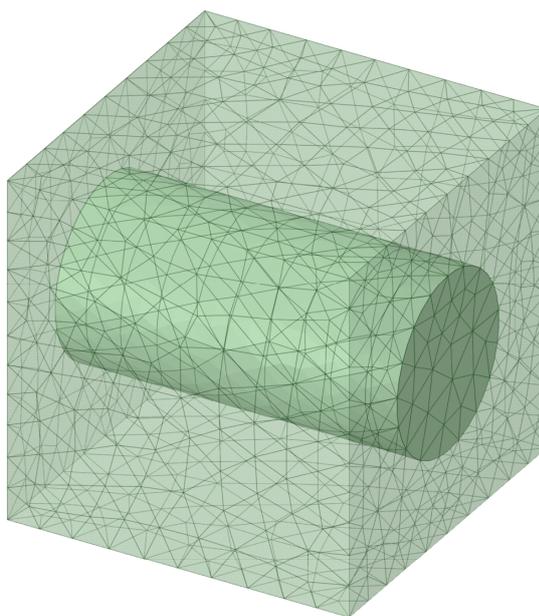


Рис. 3.12: Геометрия ЭПО Ansys MD

В разделе построение сетки, необходимо выбрать параметры построения сетки: (*Adapt towards edges*, *Use Block Meshing*, *Use Conformal Meshing*, *Use Periodic Meshing*). В данной работе используется конформная периодическая сетка.

Параметр «*Adapt towards edges*» при построении сетки в Ansys позволяет контролировать, как сетка будет подстраиваться к границам объектов в модели.

Параметры «*Use Block Meshing*» и «*Use Conformal Meshing*» отвечают за способ построения сетки. Рассмотрим подробнее способы построение блочной и конформной сетки, сравним два данных подхода:

Блочная сетка	Конформная сетка
Блоки или ячейки используются для разбиения геометрии. Блоки могут быть прямоугольными или кубическими в трехмерном пространстве.	Конформная сетка следует геометрии объекта и тесно прилегает к его поверхности.
После разбиения на блоки, внутри каждого блока генерируется сетка, состоящая из узлов и элементов.	Конформная сетка позволяет более точно моделировать сложные геометрии.
Каждый блок в блочной сетке может иметь свою собственную структуру сетки, что позволяет гибко управлять качеством сетки в разных областях геометрии.	Начальная конформная сетка генерируется с использованием простых элементов, таких как треугольники или четырехугольники. Затем происходит адаптивная рефинировка сетки, включающая добавление или удаление узлов и элементов.

Параметр «*Use Periodic Meshing*» в Ansys позволяет создавать периодическую сетку для моделирования систем с периодическими граничными условиями. Данный параметр необходимо включить для лучшей сходимости решения при использовании одной ячейки периодичности.

3.4.3. Результаты

В результате исследования были построены графики зависимости отклонения для эффективных свойств от диаметра и длины волокна соответственно (3.13). Отклонение эффективных свойств вычисляется относительно значений, посчитанных для единичного диаметра и длины волокна.

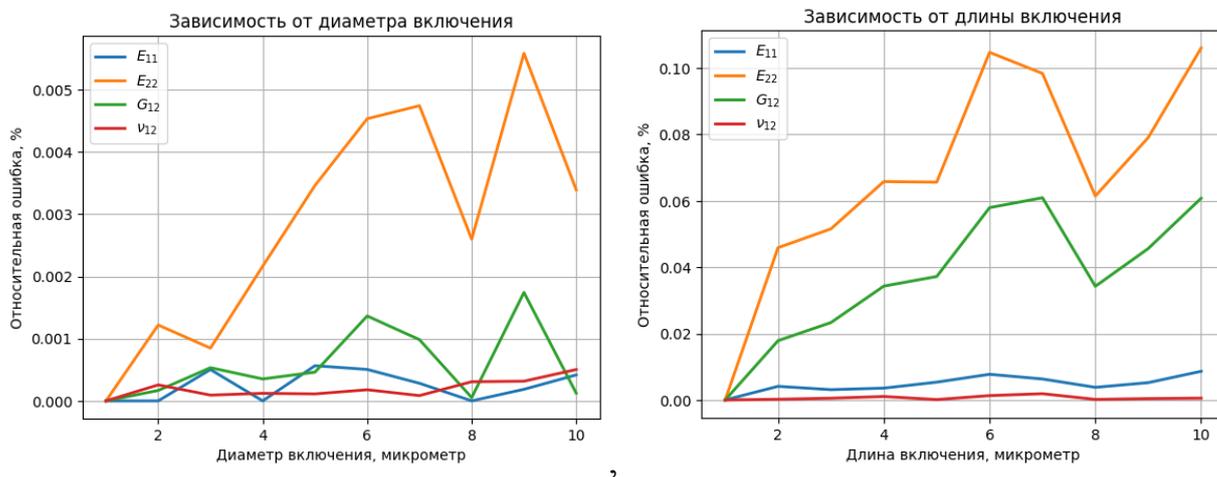


Рис. 3.13: Зависимость относительной погрешности для эффективных свойств материала от диаметра и длины волокна

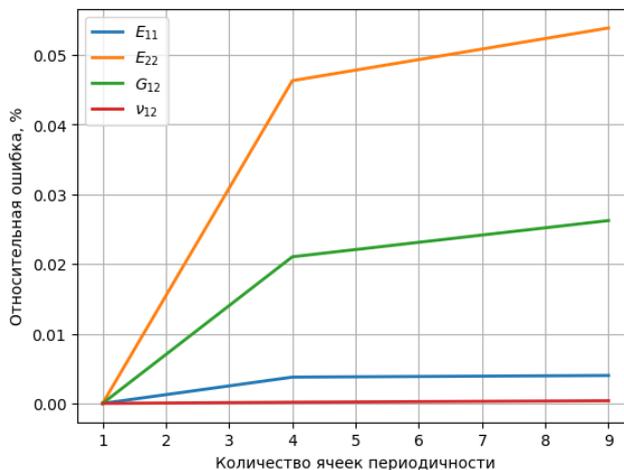


Рис. 3.14: Зависимость относительной погрешности для эффективных свойств материала от количества ячеек периодичности

В результате проведенных исследования, согласно построенным графикам, можно сделать выводы:

- Геометрия материала, включая длину, диаметр волокна и количество ячеек периодичности не оказывает значительное влияние на его эффективные свойства. Эксперимент показал, что изменение этих параметров материала приводит к максимальному отклонению в 0.1%;

- Большая погрешность получилась в эксперименте с изменением длины материала. Это может быть связано с тем, что более длинные материалы могут обладать большей прочностью, но могут быть менее упругими;
- Количество ячеек периодичности в материале при граничных условиях периодичности также как в эксперименте с использованием APDL не влияет на НДС композитного материала, поэтому эффективные свойства не изменяются при увеличении количества ЯП.

3.5. Сравнение конечно-элементных подходов

Для оценки схожести результатов численных решений, полученных с помощью Ansys и APDL был проведен анализ практической сходимости значений эффективных модулей упругости при увеличении числа ячеек периодичности.

В качестве экспериментальных данных рассматривались композитные материалы, усиленные стекловолокном (GFRP), их свойства представлены в таблице:

Материал	E^f , ГПа	ν^f	E^m , ГПа	ν^m	V_f	E^f / E^m
GFRP [20]	72	0.3	3.79	0.36	0.21	19.0
GFRP [21]	36.4	0.3	3.5	0.3	0.55	10.4

Таблица 3.1: Свойства отдельных компонент композитных материалов

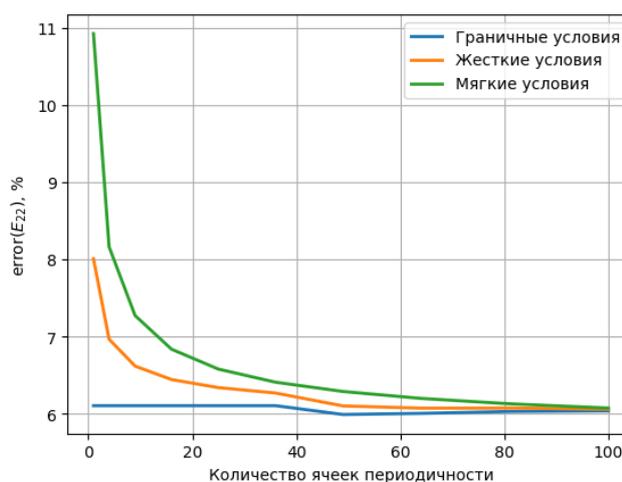


Рис. 3.15: График зависимости относительной ошибки для модуля Юнга E_{22} с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 19$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.21$ [20] полученного с помощью APDL и Ansys

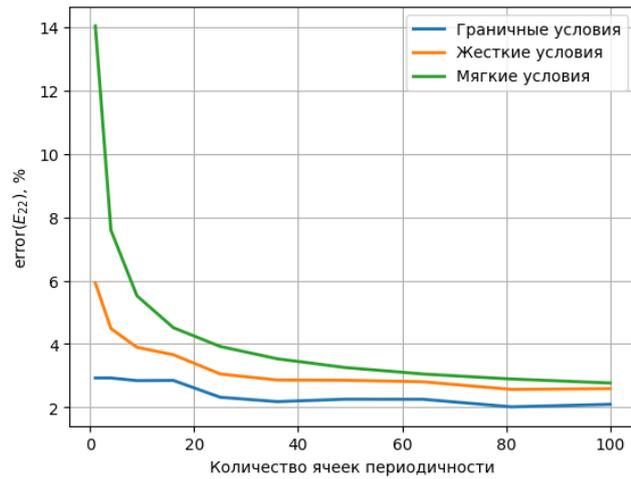


Рис. 3.16: График зависимости относительной ошибки для модуля Юнга E_{22} с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 10.4$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.55$ [21] полученного с помощью APDL и Ansys

Погрешность вычисляется относительно значений, полученных при различных видах граничных условий в APDL для модуля Юнга в поперечном направлении, и значением, вычисленным в Ansys для периодической конформной сетки и одной ЯП. Для визуализации результатов построены графики сходимости для композитных материалов, усиленных стекловолокном (3.16, 3.15).

Согласно приведенным графикам можно сделать выводы:

1. С помощью двух подходов с применением конечно-элементных моделей (Ansys и APDL) с периодическими граничными условиями получили схожие результаты для модуля Юнга в поперечном направлении E_{22} ;
2. В случае задания кинематических или силовых граничных условий необходимо использовать в целях исключения краевого эффекта необходимо рассмотрение большого числа ячеек периодичности. Скорость сходимости тем больше, чем больше объемная доля волокна.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ

4.1. Введение в нейронные сети

4.1.1. Как устроена нейронная сеть

Нейронные сети – это методы вычислений, вдохновленные структурой и функционированием мозга. Они состоят из элементов, называемых искусственными нейронами, которые соединены в сложную сеть. Каждый нейрон получает сигналы от других нейронов, обрабатывает их и передает дальше, что позволяет системе анализировать и обрабатывать данные.

Основной принцип работы нейронных сетей заключается в их способности к обучению и адаптации. В процессе обучения сеть корректирует веса связей между нейронами, что позволяет ей лучше анализировать входные данные и делать предсказания или распознавать образы. Нейроны в сети организованы в слои: входной слой принимает данные, выходной слой формирует результат, а между ними могут быть один или несколько скрытых слоев, которые дополнительно обрабатывают информацию.

Примеры использования нейронных сетей варьируются от автоматизации вождения и распознавания образов до медицинской диагностики и решения частных физических задач.

Важной особенностью нейронных сетей является их способность к параллельной обработке информации, что делает их особенно эффективными для работы с большими объемами данных в реальном времени. Также они могут компенсировать ошибки и продолжать функционировать даже при частичном повреждении сети, что делает их устойчивыми к сбоям [12].

Таким образом, нейронные сети представляют собой мощный инструмент для анализа и обработки данных, способный адаптироваться и обучаться, что делает его незаменимым во многих современных технологических и исследовательских приложениях.

4.1.2. Нейронные сети в задачах механики

Благодаря способности нейронных сетей к обучению и адаптации, им находят применение в самых разных областях, где требуется анализ сложных данных, например, в задачах механики композитов. Мотивацией использовать нейронные сети заключается в сложности разработки новых материалов. Разработка включает в себя синтез, производство и испытания для сертификации. Этот процесс является длительным и дорогостоящим и обычно предполагает лишь процедуру “проб и ошибок”, а не четкую методологию оптимизации. Возможность знать наперед свойства получаемых композитных материалов, основываясь только на физических и геометрических свойствах отдельных составляющих материалов, дает огромный скачок в развитие механики композитов.

Например, в статье [13] описана новая архитектура машинного обучения, названная конститутивными искусственными нейронными сетями (CANNs), которая позволяет эффективно моделировать поведение материалов, основываясь на данных о деформациях и напряжениях.

Сети CANN могут использоваться для работы с данными, полученными из различных источников, включая данные о микроструктуре материалов или об условиях их обработки. Это позволяет не только анализировать поведение уже известных материалов, но и предсказывать свойства новых материалов, для которых еще нет экспериментальных данных. Такая возможность особенно ценна при проектировании новых материалов с помощью компьютерного моделирования.

Принцип работы CANN заключается в том, что сеть обучается представлять связь между механическим напряжением и деформацией, используя предоставленные тренировочные данные. Важной особенностью CANN является их способность интегрировать значительное количество теоретических знаний из теории материалов, что уменьшает количество данных, необходимых для обучения, и повышает общую эффективность моделирования.

Таким образом, применение нейронных сетей в механике материалов открывает новые возможности для ускорения научного прогресса в разработке новых материалов и улучшения процессов их производства.

4.1.3. Построение нейронной сети с помощью библиотеки Pytorch

Рассмотрим функцию для обучения нейронных сетей с использованием библиотеки PyTorch. PyTorch является одной из ведущих библиотек для машинного обучения, предоставляющей мощные инструменты для создания и тренировки нейронных сетей.

PyTorch предоставляет интуитивно понятные абстракции и классы, такие как Tensor, Module (для создания архитектур сетей), и DataLoader (для удобной работы с данными), что делает процесс обучения нейронных сетей эффективным и доступным. Основные шаги в обучении нейронной сети с использованием библиотеки PyTorch включают:

1. *Подготовка данных:* данный шаг включает загрузку данных, разделение их на обучающую и валидационную выборки, а также преобразование данных в формат Tensor.
2. *Определение модели:* выбирается архитектура нейронной сети, используя классы и функции из библиотеки PyTorch. Существует возможность определить различные слои, функции активации и другие параметры модели.
3. *Определение функции потерь и оптимизатора:* для обучения модели необходимо выбрать функцию потерь, которая будет использоваться для оценки ошибки модели, и оптимизатор, который будет использоваться для обновления весов модели на каждой итерации обучения. PyTorch предоставляет различные функции потерь и оптимизаторы для выбора.
4. *Цикл обучения:* в этом шаге выполняется цикл обучения, который состоит из нескольких итераций. На каждой итерации передаются входные данные модели, вычисляются предсказания и функция потерь, обновляются веса модели с помощью оптимизатора. Данный цикл обучения продолжается до достижения заданного количества эпох или до достижения определенного критерия остановки.
5. *Оценка модели:* одновременно с циклом обучения, на валидационной выборке оценивается производительность модели. Данный этап позволяет оценивать сходимость и точность модели, ее способность обобщать на новые данные.

4.2. Наивная механическая нейронная сеть

4.2.1. Построение архитектуры нейронной сети

Для построения нейронной сети используем оценки, полученные по модифицированному правилу смесей. Согласно оценкам Фойгта, упругие элементы соединены параллельно, а по оценкам Рейса — последовательно. Введем следующую модификацию классического правила смеси:

$$E_{voigt} = V_f E^f + V_m E^m, \quad E_{reuss} = \frac{E^f E^m}{V_f E^m + V_m E^f} \quad (4.1)$$

$$G_{voigt} = V_f G^f + V_m G^m, \quad G_{reuss} = \frac{G^f G^m}{V_f G^m + V_m G^f} \quad (4.2)$$

$$\nu_{voigt} = V_f \nu^f + V_m \nu^m, \quad \nu_{reuss} = \frac{\nu^f \nu^m}{V_f \nu^m + V_m \nu^f} \quad (4.3)$$

На входе нейронной сети располагаются два нейрона, на выходе — эффективное свойство материала. В результате формируется пять отдельных моделей нейронных сетей.

Для ускорения сходимости при работе с модулем Юнга и модулем сдвига входные и выходные параметры нормализуются соответствующими значениями модуля Юнга или модуля сдвига волокна, чтобы значения параметров находились в диапазоне от 0 до 1. Кроме того, для получения взвешенной суммы входных сигналов функция смещения (bias) отключается. Эти изменения позволяют повысить точность предсказательной модели. Таким образом, формируется архитектура наивной механической нейронной сети (4.1, 4.2).

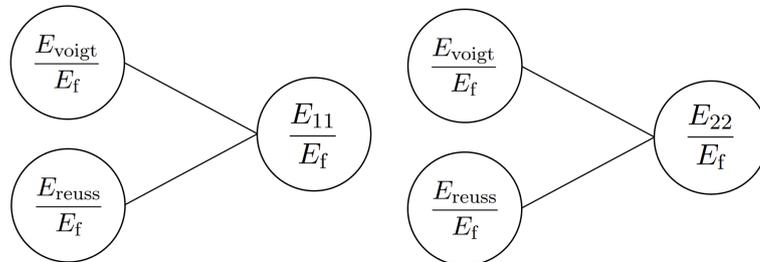


Рис. 4.1: Архитектура для модуля Юнга в продольном и поперечном направлении

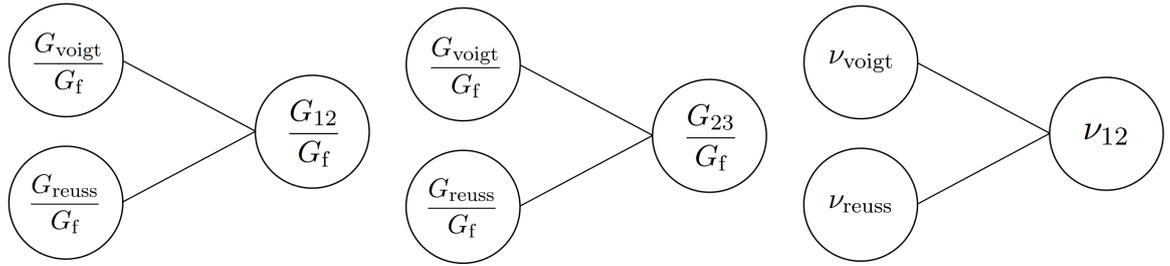


Рис. 4.2: Архитектура для модуля сдвига в продольном и поперечном направлении и главного коэффициента Пуассона

4.2.2. Результаты обучения нейронной сети

Задача определения эффективных свойств материала была сведена к вычислению коэффициентов (весов модели) α_i, β_i . Эти коэффициенты определяются на основе модифицированного правила смесей (4.1-4.3), включающего параметры $E_{voigt}, E_{reuss}, G_{voigt}, G_{reuss}, \nu_{voigt}, \nu_{reuss}$.

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \alpha_1 E_{voigt} + \beta_1 E_{reuss}, & E_{22} &= \alpha_2 E_{voigt} + \beta_2 E_{reuss} \\
 G_{12} &= \alpha_3 G_{voigt} + \beta_3 G_{reuss}, & G_{23} &= \alpha_4 G_{voigt} + \beta_4 G_{reuss} \\
 \nu_{12} &= \alpha_5 \nu_{voigt} + \beta_5 \nu_{reuss}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Классическое правило смесей (2.1, 2.2) позволяет предварительно оценить часть коэффициентов α_i, β_i . После проведения 500 циклов обучения нейронной сети были получены следующие результаты, представленные в таблице ниже:

Метод	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	α_4	β_4	α_5	β_5
Правило смеси	1	0	0	1	0	1	-	-	0	1
Нейронная сеть	1	0	0.03	1.02	0.04	1.02	0.009	1.01	0.667	0.323

Таблица 4.1: Сводная таблица коэффициентов в правиле смесей и весов в нейронной сети

Анализ результатов показывает, что нейронная сеть успешно адаптировала веса модели, коррелирующие с аналитическим подходом. Это демонстрирует, что использование нейронных сетей позволяет разрабатывать модификации аналитических формул, улучшающие точность определения эффективных свойств материалов.

Важным аспектом исследования является также анализ зависимости коэффициентов α_i, β_i от объемной доли волокон V_f , результаты которого представлены на рисунках (Рис. 4.3-4.5).

Этот подход не только уточняет уже известные данные, но и открывает новые возможности для прогнозирования свойств композиционных материалов на основе их состава и структуры.

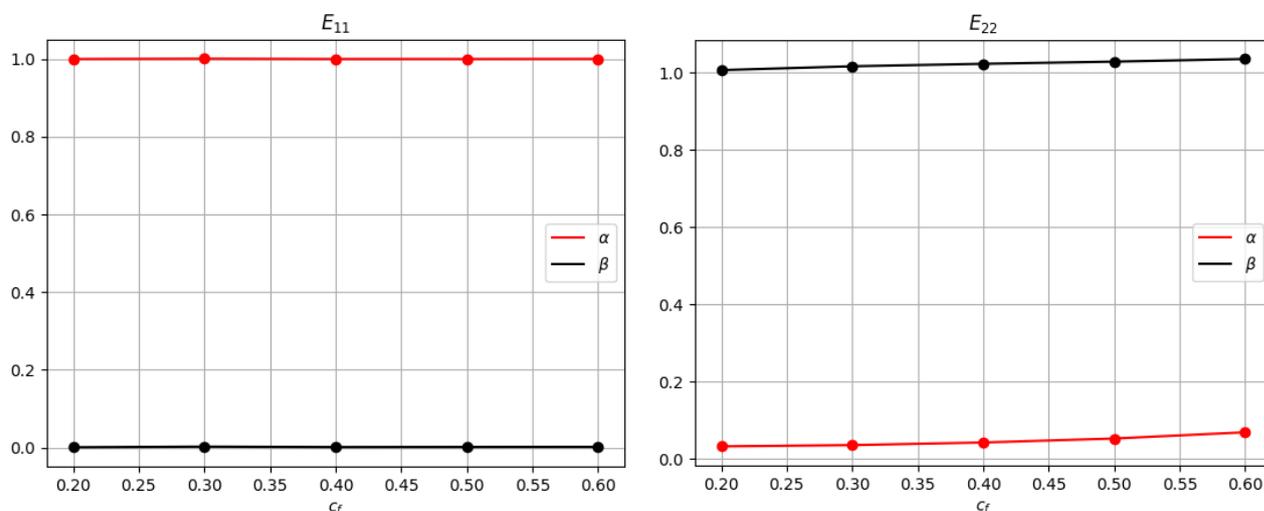


Рис. 4.3: График зависимости веса модели от объемной доли волокна для модуля Юнга в продольном и поперечном направлении

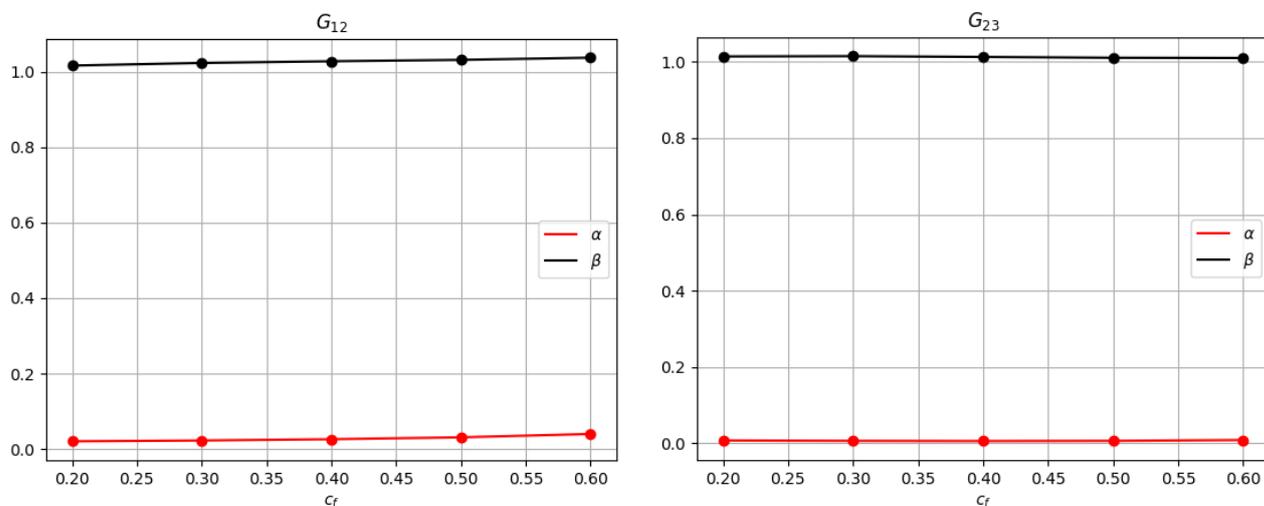


Рис. 4.4: График зависимости веса модели от объемной доли волокна для модуля сдвига в продольном и поперечном направлении

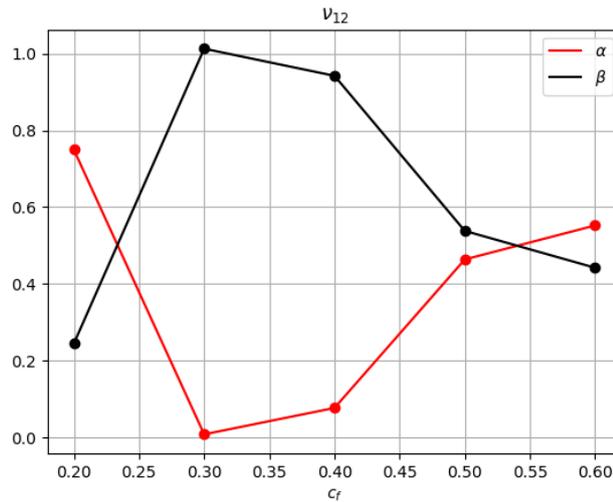


Рис. 4.5: График зависимости веса модели от объемной доли волокна для главного коэффициента Пуассона

Для того чтобы определить эффективность выбранной нейронной сети и корректность данного подхода необходимо определить точность для механических свойств композитного материала. В рамках обучения моделей на валидационной части выборки были посчитаны относительная ошибка предсказанного и реального значений.

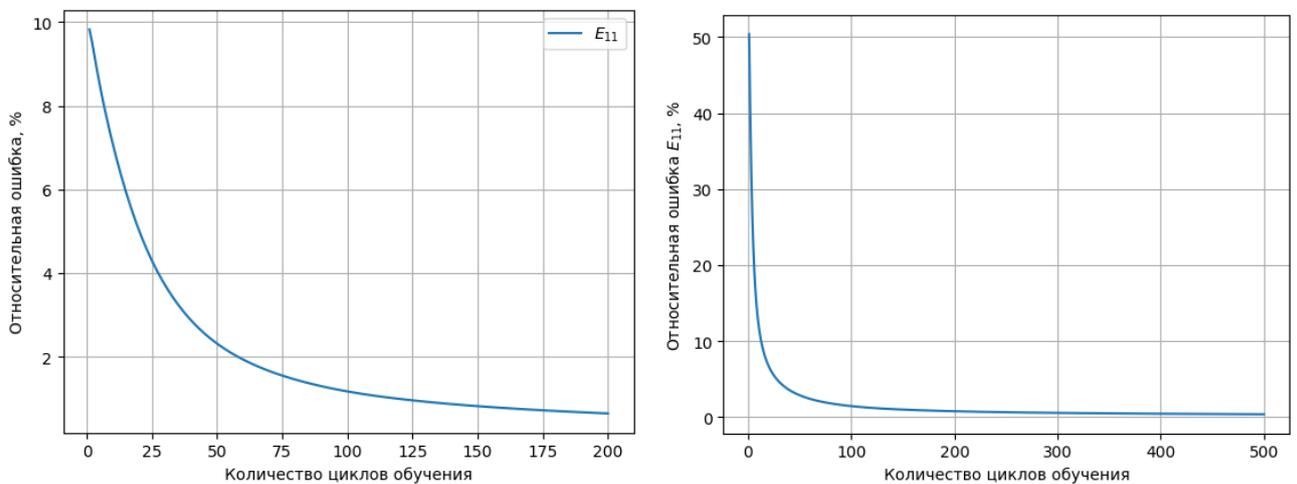


Рис. 4.6: График зависимости относительной ошибки от количества циклов обучения для модуля Юнга E_{11}

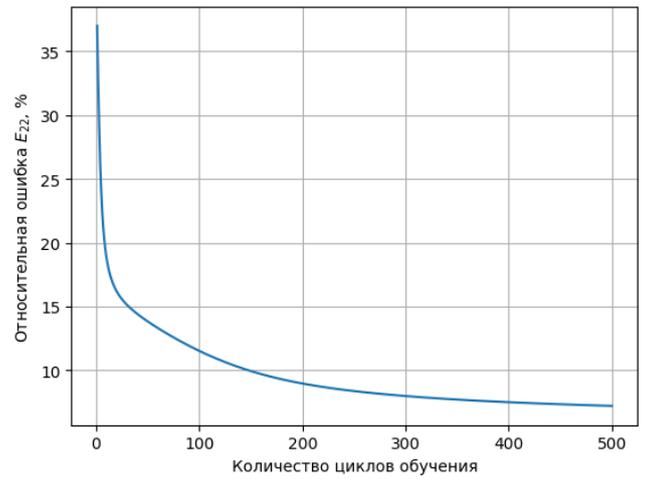
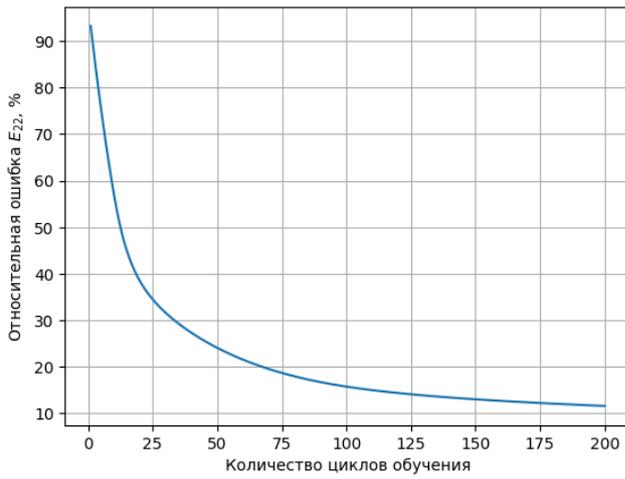


Рис. 4.7: График зависимости относительной ошибки от количества циклов обучения для модуля Юнга E_{22}

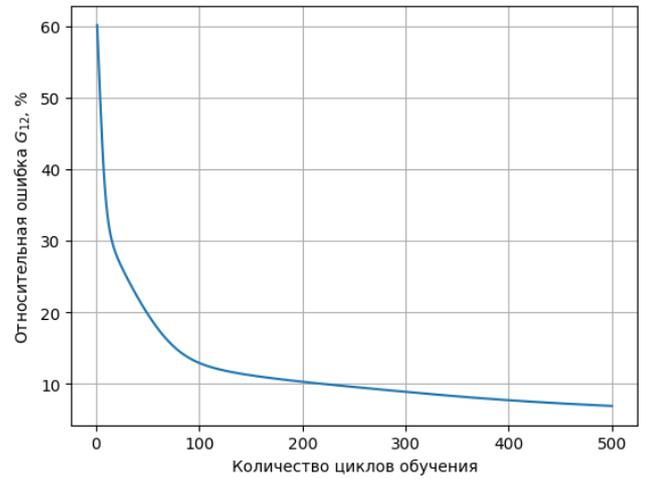
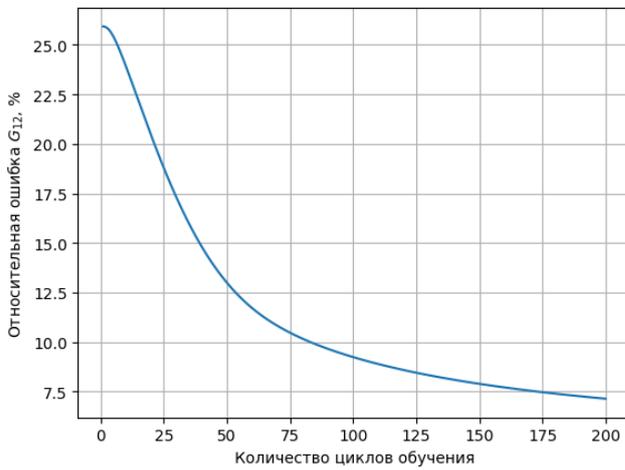


Рис. 4.8: График зависимости относительной ошибки от количества циклов обучения для модуля сдвига G_{12}

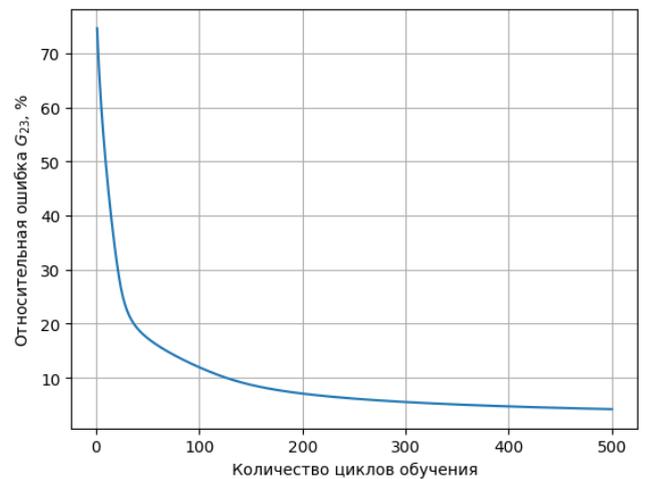
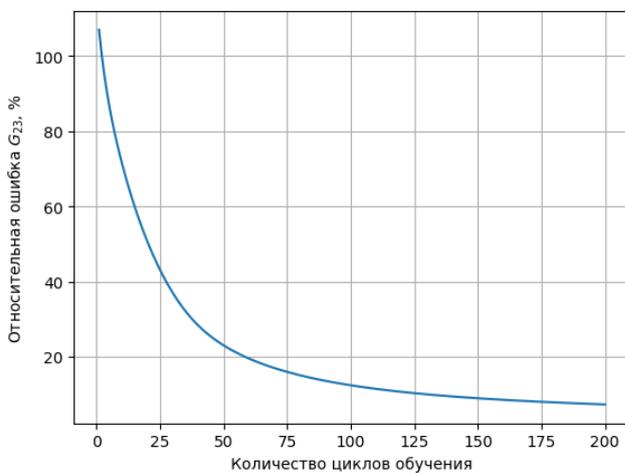


Рис. 4.9: График зависимости относительной ошибки от количества циклов обучения для модуля сдвига G_{23}

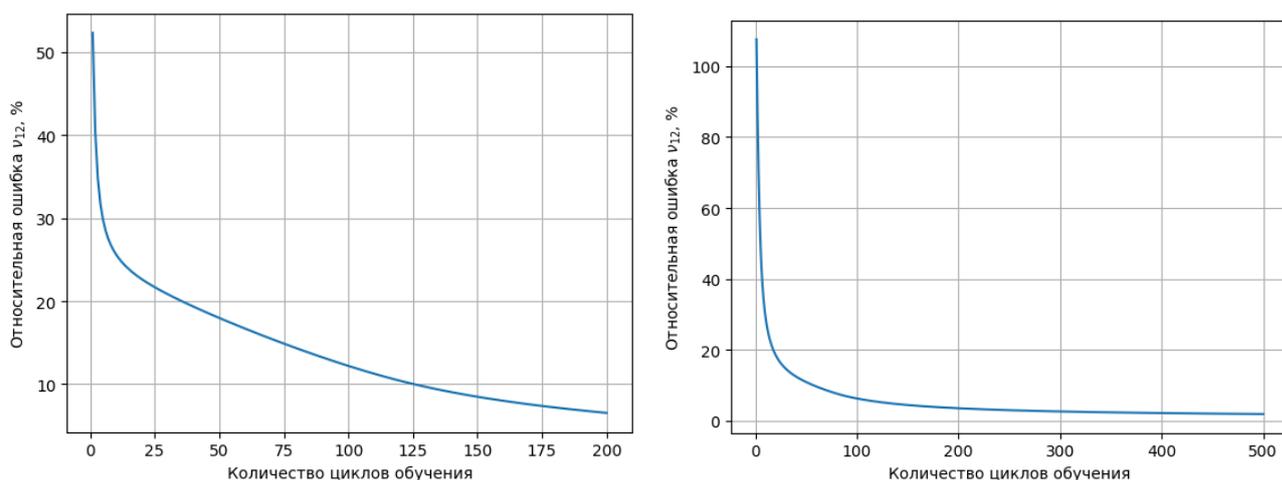


Рис. 4.10: График зависимости относительной ошибки от количества циклов обучения для главного коэффициента Пуассона ν_{12}

Анализируя графики (4.6-4.10) можно сделать следующие выводы:

1. Для 500 циклов обучения, для модулей упругости E_{11} и коэффициента Пуассона ν_{12} , ошибка стремится к нулю к концу обучения, что указывает на высокую адаптивность модели в отношении этих параметров.
2. Для модуля упругости E_{22} , а также сдвиговых модулей G_{12} и G_{23} , ошибка остаётся в пределах 5 – 10% в конце обучения. Данная точность является предельной для выбранной модели и данных.
3. Увеличение количества циклов обучения приводит к улучшению точности предсказаний для всех рассмотренных эффективных свойств, подтверждая необходимость более длительного обучения для достижения оптимальных результатов.

Важно отметить, что выбор архитектуры нейронной сети может существенно влиять на ее эффективность и точность. Выбор конкретной архитектуры зависит от специфики задачи и доступных данных. В случае задачи нахождения эффективных свойств для композитных материалов, ключевым фактором является структура композитного материала. Оптимальная архитектура должна учитывать как геометрию, так и физические свойства компонентов КМ для достижения максимальной точности в предсказаниях. Для ее повышения была проведена серия экспериментов с различными архитектурами нейронных сетей и вариациями обучающих данных [6]. Однако данный подход не позволил учесть более глубокое понимание взаимосвязей между структурными особенностями композитных материалов и их эффективными свойствами.

4.3. Механически мотивированная нейронная сеть

4.3.1. Построение архитектуры нейронной сети

В отличие от наивной механической нейронной сети, где рассматривалась запись классического правила смеси в компонентном виде, рассмотрим вариант тензорного представления для эффективного тензора жесткости. Данный подход будет учитывать взаимодействие между компонентами композитного материала.

$$C_{effective} = A \cdot \cdot C_{voigt} \cdot \cdot A + B \cdot \cdot C_{reuss} \cdot \cdot B \quad (4.5)$$

где A , B представляют собой тензоры четвертого порядка, которые содержат коэффициенты для описания механических свойств компонентов композита.

Аналитическое или численное нахождение компонент тензоров A и B является сложной задачей из-за высокой степени нелинейности и многообразия взаимодействий внутри материала.

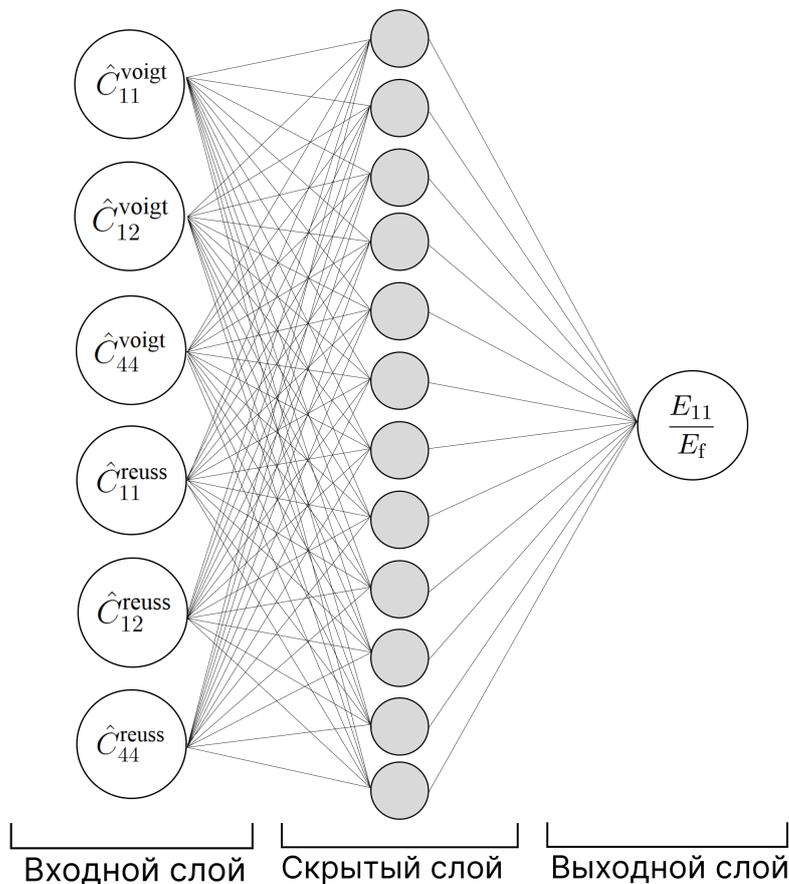


Рис. 4.11: Архитектура полносвязной нейронной сети с одним скрытым слоем для модуля Юнга в продольном направлении E_{11}

Для упрощения модели можно использовать тензорные записи C_{voigt} и C_{reuss} , которые представляют собой изотропные модели с тремя различными коэффициентами, два из которых независимы.

Выбор данной архитектуры нейронной сети (Рис. 4.11) оправдывается тем, что она способна обрабатывать данные о структуре и свойствах композитных материалов, предоставляя более глубокое понимание взаимосвязей между структурой и функциональными характеристиками.

Коэффициенты тензоров жесткости по моделям Фойгта и Рейса могут быть выражены через соответствующие формулы, которые учитывают как геометрические, так и физические характеристики компонентов композита. Эти формулы помогают в расчетах и проектировании материалов с заданными свойствами:

$$\hat{C}_{11}^{voigt} = V_f + V_m \frac{(\lambda^m + 2G^m)}{(\lambda_f + 2G^f)} \quad (4.6)$$

$$\hat{C}_{12}^{voigt} = V_f + V_m \frac{\lambda^m}{\lambda_f} \quad (4.7)$$

$$\hat{C}_{44}^{voigt} = V_f + V_m \frac{G^m}{G^f} \quad (4.8)$$

$$\hat{C}_{11}^{reuss} = \frac{S_{11} + S_{12}}{S_{11}^2 + S_{11}S_{12} - 2S_{12}^2} \quad (4.9)$$

$$\hat{C}_{12}^{reuss} = -\frac{S_{12}}{S_{11}^2 + S_{11}S_{12} - 2S_{12}^2} \quad (4.10)$$

$$\hat{C}_{44}^{reuss} = \frac{1}{S_{44}} \quad (4.11)$$

$$S_{11} = V_f + V_m \frac{E^f}{E^m}, \quad S_{12} = -V_f \nu^f - V_m \frac{\nu^m E^f}{E^m}, \quad S_{44} = V_f + V_m \frac{G^f}{G^m} \quad (4.12)$$

4.3.2. Результаты обучения нейронной сети

В рамках проведенного исследования была обучена нейронная сеть, используя различные функции активации: ReLU, LeakyReLU и ELU. Функции активации играют ключевую роль в определении точности и скорости обучения нейронных сетей. ReLU, как наиболее часто используемая функция активации, обеспечивает быструю сходимость и эффективное обучение. LeakyReLU и ELU, в свою очередь, предлагают решения для проблемы затухающих гради-

ентов, что особенно важно в глубоких сетях с большим количеством слоев.

Эксперимент также включал вариации количества нейронов в скрытом слое, а именно 16, 32, 64 и 128. Количество скрытых слоев влияет на способность сети извлекать и обрабатывать признаки на разных уровнях абстракции. Исследование показало, что увеличение количества слоев может значительно улучшить точность модели, однако это также ведет к увеличению сложности обучения и риска переобучения.

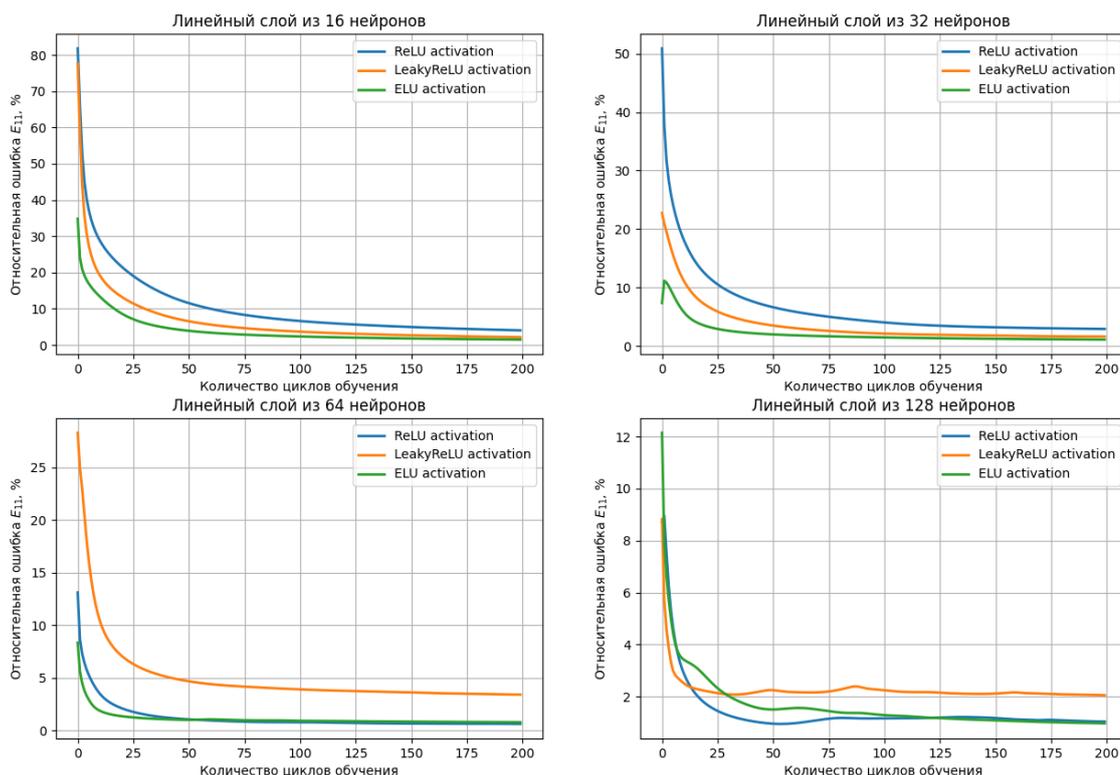


Рис. 4.12: График относительной ошибки для модуля Юнга в продольном направлении E_{11}

Количество циклов обучения (эпох) является важным параметром, поэтому дополнительно проводились эксперименты для определения оптимального их количества. Поскольку недостаточное количество эпох может привести к недообучению модели, в то время как избыточное увеличивает риск переобучения. В данном исследовании использование 200 циклов позволило достичь оптимального баланса между обучением и обобщающей способностью модели.

Также были исследованы архитектуры сетей с одним, двумя и тремя скрытыми слоями для определения оптимальной глубины модели. Для демонстрации результатов были представлены графики относительной ошибки для конфигурации с одним скрытым слоем, показывающие точность нейронной сети

при различных настройках:

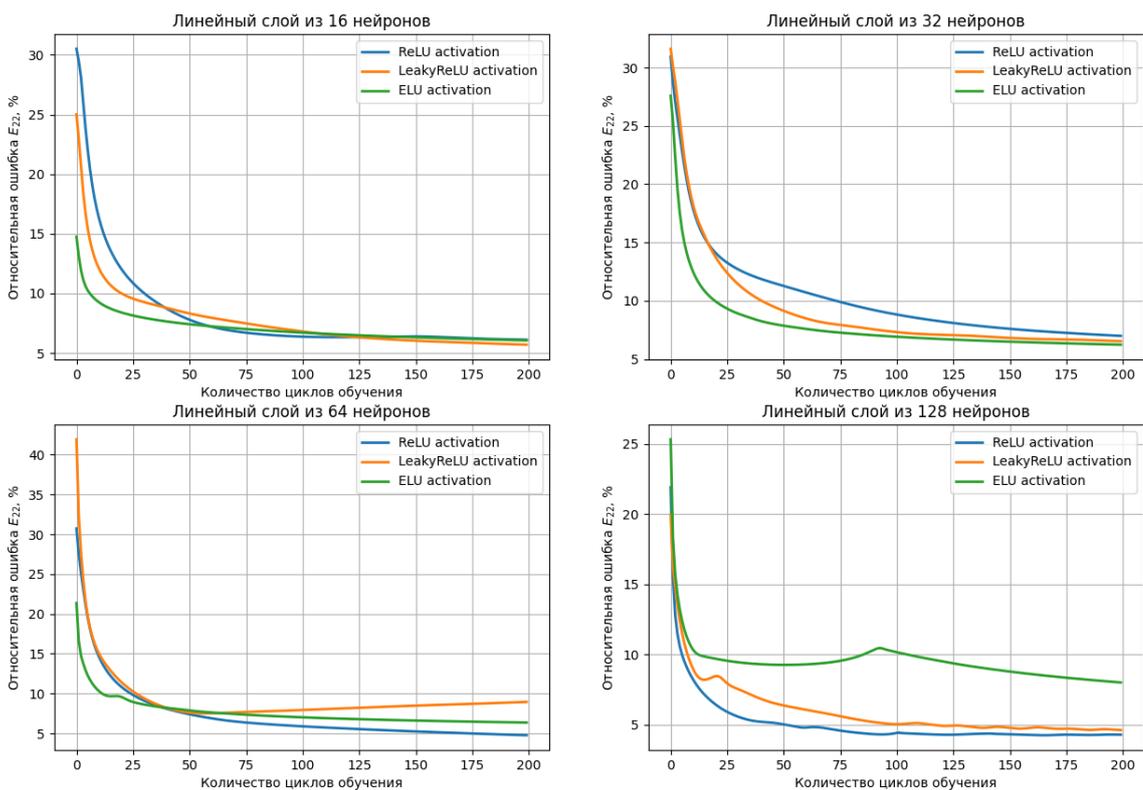


Рис. 4.13: График относительной ошибки для модуля Юнга в поперечном направлении E_{22}

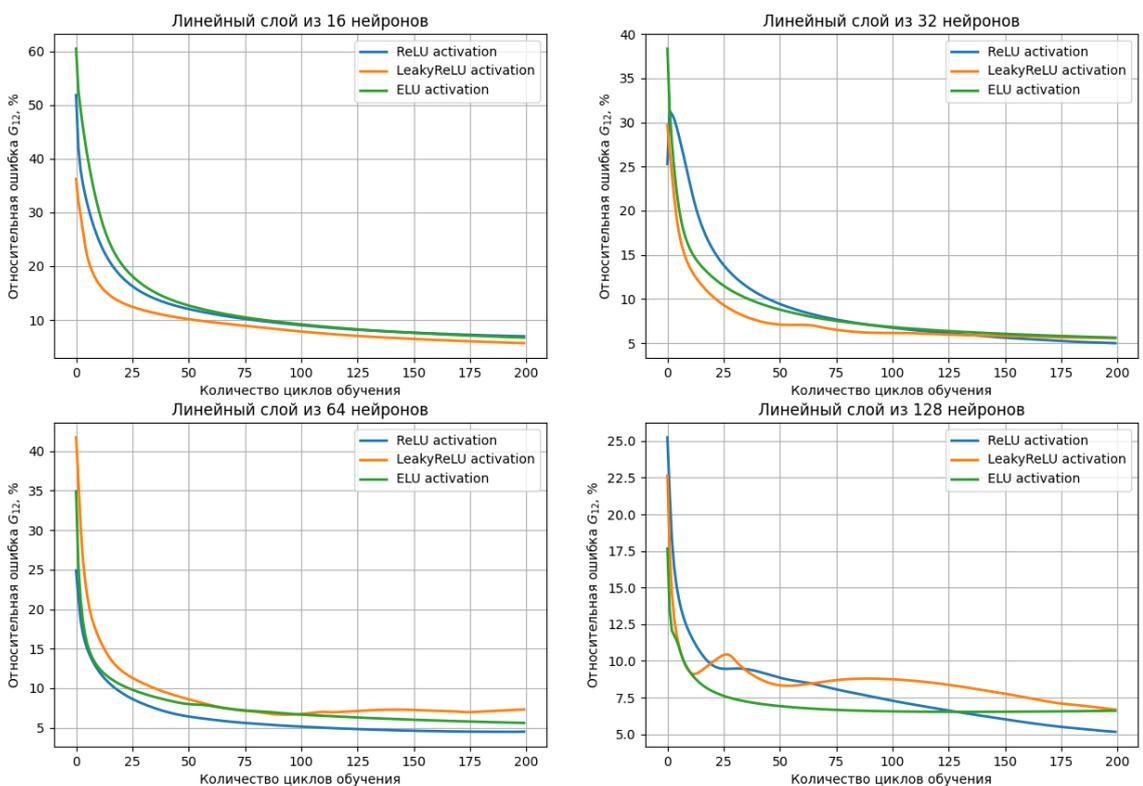


Рис. 4.14: График относительной ошибки для модуля сдвига в продольном направлении G_{12}

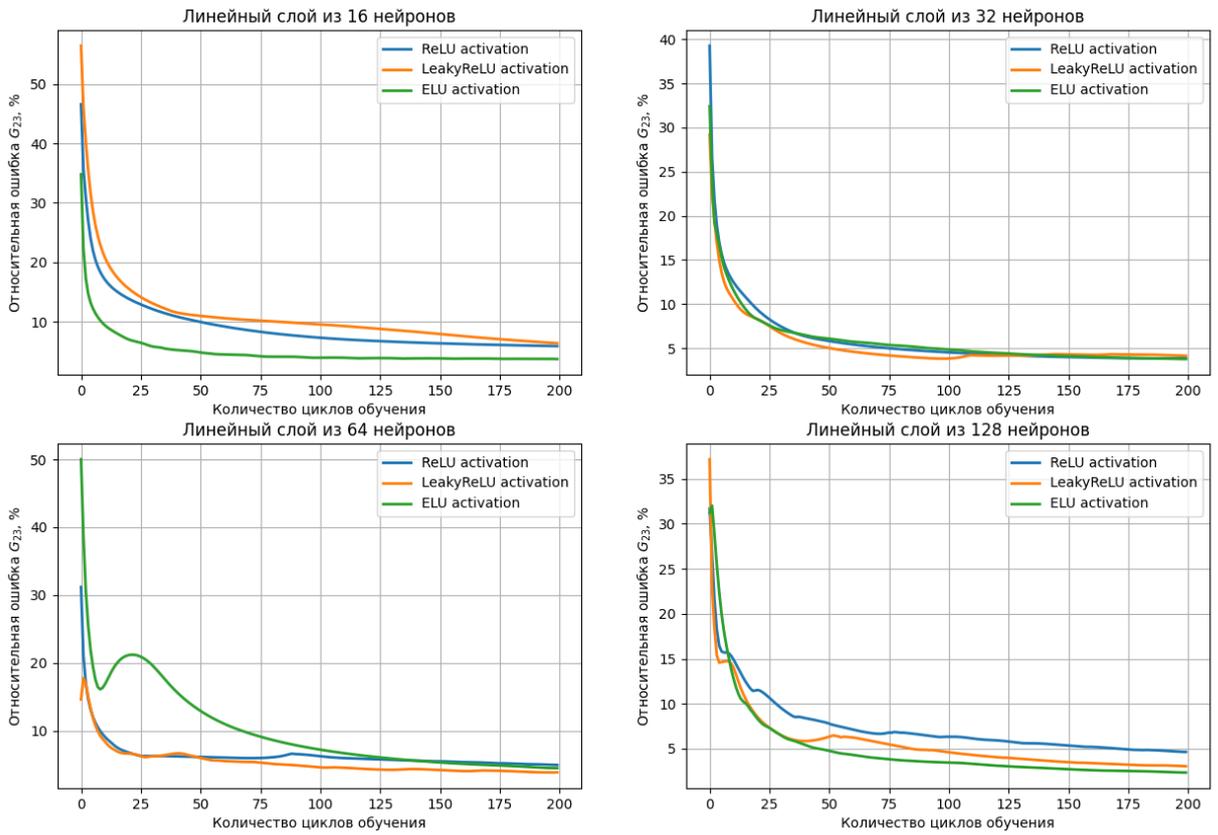


Рис. 4.15: График относительной ошибки для модуля сдвига в поперечном направлении G_{23}

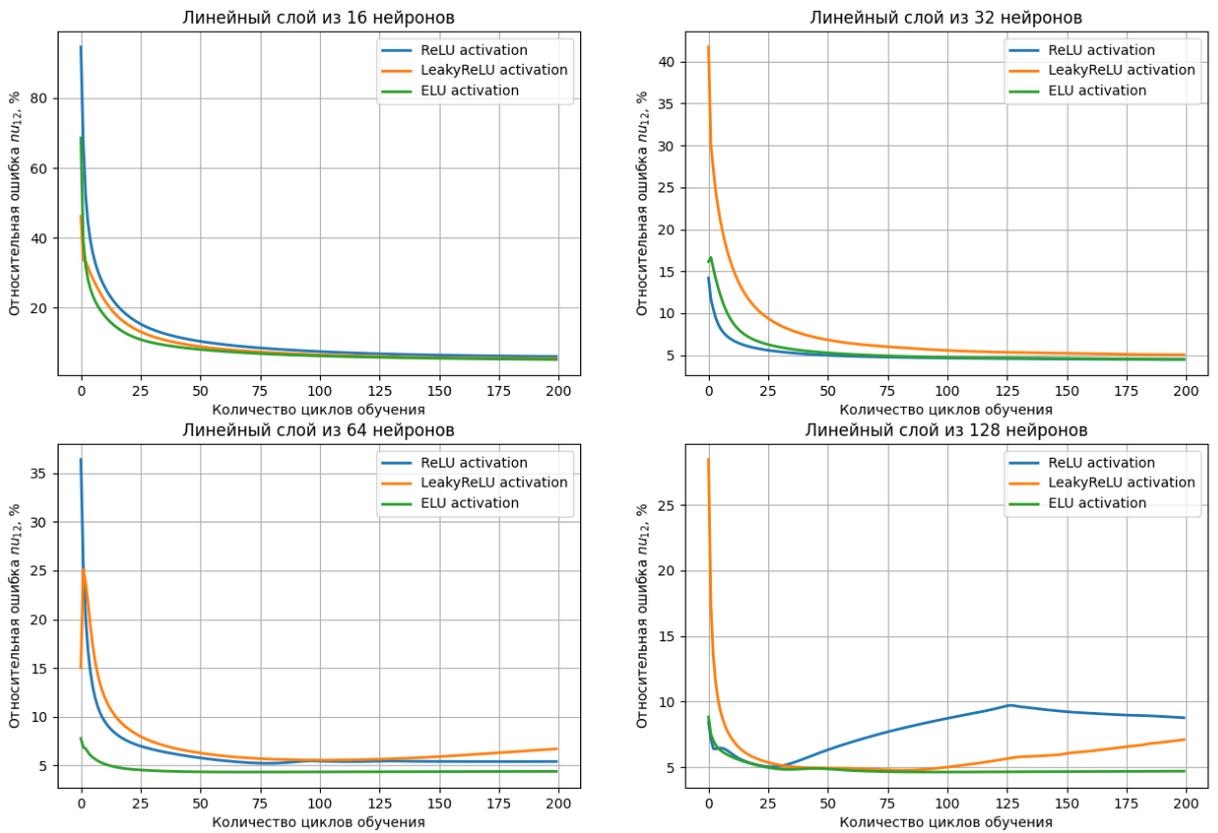


Рис. 4.16: График относительной ошибки для главного коэффициента Пуассона ν_{12}

На основе проведенных экспериментов (Рис. 4.12-4.16) можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение количества нейронов привело к значительному улучшению точности для эффективных характеристик G_{12} , G_{23} , ν_{12} . Однако, в случае модуля Юнга в продольном направлении при большом количестве нейронов наблюдалось снижение точности и скорости сходимости.
2. С увеличением количества нейронов скорость сходимости увеличивалась для всех рассмотренных эффективных характеристик.
3. В данной задаче выбранные функции активации показали схожую точность и скорость сходимости для всех эффективных свойств.
4. Применение данного подхода позволило улучшить результаты для модуля Юнга в поперечном направлении и модулей сдвига по сравнению с результатами, полученными с использованием наивной механической нейронной сети.
5. Несмотря на выбор гиперпараметров модели в зависимости от конкретных требований и характеристик задачи, при моделировании данной задачи большее значение имеет выбор входных данных.

4.4. Верификация результатов

В рамках проведенного исследования были анализированы различные методы аналитической оценки, применён метод конечных элементов и разработаны несколько моделей искусственных нейронных сетей. Для подтверждения достоверности результатов проведена их верификация путем сравнения с экспериментальными данными, опубликованными в источниках [20], [21]. Ниже представлены таблицы, в которых демонстрируются эффективные свойства материалов и их относительные ошибки по сравнению с экспериментально полученными значениями эффективных свойств.

Модель	E_{11} , ГПа	E_{22} , ГПа	G_{12} , ГПа
Эксперимент	18.000	6.000	2.000
Ansys	18.116	6.021	2.047
Правило смесей	18.114	7.269	2.259
Правило Халпина-Цая	18.114	6.444	2.318
Правило Чамиса	18.114	6.697	2.467
Метод Мори-Танака	18.113	6.5189	3.315
Наивная механическая НС	18.114	6.036	2.051
Механическая НС	18.115	6.031	2.049

Таблица 4.2: Сводная таблица эффективных свойств для материала с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 19$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.21$ [20]

Модель	E_{11} , ГПа	E_{22} , ГПа	G_{12} , ГПа
Эксперимент	21.600	10.100	3.800
Ansys	21.605	10.219	3.937
Правило смесей	21.604	13.231	4.923
Правило Халпина-Цая	21.604	10.890	4.233
Правило Чамиса	21.604	10.615	4.083
Метод Мори-Танака	21.604	10.616	3.841
Наивная механическая НС	21.601	10.622	3.955
Механическая НС	21.602	10.213	3.880

Таблица 4.3: Сводная таблица эффективных свойств для материала с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 10.4$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.55$ [21]

Модель	E_{11} , %	E_{22} , %	G_{12} , %
Ansys	0.6484	0.3347	2.3642
Правило смесей	0.6339	21.1456	12.9752
Правило Халпина-Цая	0.6339	7.3924	15.9220
Правило Чамиса	0.6339	11.6286	23.3518
Метод Мори-Танака	0.6319	8.6491	15.7655
Наивная механическая НС	0.6337	0.6021	2.5315
Механическая НС	0.6412	0.5128	2.4377

Таблица 4.4: Сводная таблица относительных ошибок эффективных свойств для материала с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 19$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.21$ [20]

Модель	$E_{11}, \%$	$E_{22}, \%$	$G_{12}, \%$
Ansys	0.0239	1.2727	3.6146
Правило смесей	0.0231	31.0906	29.5562
Правило Халпина-Цая	0.0231	7.8318	11.4200
Правило Чамиса	0.0231	5.1093	7.4498
Метод Мори-Танака	0.0231	5.1176	1.0927
Наивная механическая НС	0.0081	5.1694	4.0769
Механическая НС	0.0133	1.1255	2.1271

Таблица 4.5: Сводная таблица относительных ошибок эффективных свойств для материала с относительной жёсткостью $\frac{E^f}{E^m} = 10.4$ и объемной концентрацией волокон $V_f = 0.55$ [21]

Анализируя полученные результаты из представленных таблиц, можно сформулировать следующие уточненные и дополненные выводы:

1. Структурные особенности однонаправленного волокнистого композитного материала обеспечивают высокую точность определения модуля Юнга в продольном направлении. Для всех рассмотренных методик, ошибка не превышает 1%.
2. Среди аналитических методов наилучшие результаты показывает метод **Мори-Танака**, который, тем не менее, уступает по точности методу конечно-элементной гомогенизации. Это указывает на возможные ограничения аналитических подходов в условиях сложной структуры материалов и подтверждает необходимость использовать альтернативные способы анализа.
3. Метод конечно-элементной гомогенизации и **нейронные сети** демонстрируют наивысшую точность в определении экспериментальных свойств материала. Это делает их предпочтительными инструментами для исследования и разработки новых композитных материалов. Применение нейронных сетей расширяет возможности их применения в рамках задачи моделирования композитных материалов с заданными оптимальными свойствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были успешно решены поставленные задачи и цели, удалось разработать инструменты для анализа однонаправленных волокнистых композитных материалов. Были проанализированы аналитические подходы и рассчитаны эффективные свойства с помощью конечно-элементных пакетов. Была создана и обучена механически мотивированная нейронная сеть, для которой была проведена верификация результатов с экспериментальными данными.

Результаты прогнозирования эффективных свойств однонаправленного волокнистого композитного материала, полученные с помощью нейронной сети, сопоставимы с методом конечно-элементной гомогенизации. Данный подход позволяет существенно сократить время, необходимое для моделирования композитных материалов перед производством, чтобы достичь нужных заданных свойств.

С учетом полученных результатов, можно сделать вывод, что применение нейронных сетей в задачах механики, в частности, в моделировании механического поведения материалов, является перспективным направлением современных исследований. Это подтверждается не только теоретическими расчетами, но и практическими экспериментами, открывающие новые возможности для оптимизации процессов проектирования и производства в различных отраслях промышленности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов Д. А., Гомогенизация и гетерогенизация однонаправленных упругих волокнистых композитов // ГОУВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2009. – 195с.
2. Фрейдин А. Б., Задача Эшелби : учеб. пособие // СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. — 148 с.
3. Yvonnet J., Computational Homogenization of Heterogeneous Materials with Finite Elements // SpringerLink, 2019. — 258 с.
4. Зарубин В.С., Сергеева Е.С., Трансверсально изотропный стержень, моделирующий упругие характеристики однослойной углеродной нанотрубки // Математика и математическое моделирование, 2019. – 15–26 с.
5. Муйземнек А.Ю., Иванова Т.Н., Карташова Е.Д., Сопоставление результатов экспериментального и расчетного определения эффективных характеристики упругих свойств полимерных слоистых композитов из угле- и стеклотканей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2021. – 88–105 с.
6. Никишин А.П., Прогнозирование эффективных свойств однонаправленных композитных материалов с помощью однослойной нейронной сети // Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2024. – 74 с.
7. Никишин А.П., Грищенко А.И., Прогнозирование механических свойств пултрузионных профилей на основе метода КЭ гомегенизации // СПб.: Сборник материалов Всероссийской научной конференции, 2023. – 192 с.
8. Рогов В.А., Шкарупа М.И., Классификация композиционных материалов и их роль в современном машиностроении // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования, 2012. – 41–49 с.
9. Affdl J. C., Halpin.c., Kardos J. L., The Halpin-Tsai equations: a review // Polymer Engineering & Science, 1976. – 344–352 с.
10. Al-Obaidi A.M., Leonovich S.N., Comparative Study of Fiber Glass Reinforced Polymer and Carbon Fiber Reinforced Polymer on Cube and Cylinder // Наука и техника, 2023. – 42–47 с.
11. Chamis C., Mechanics of composite materials: past, present, and future // Composites Technology and Research, 1989. – 42–47 с.
12. Dastres R., Soori M., Artificial neural network systems // International Journal

- of Imaging and Robotics (IJIR), 2021. – 13–25 c.
13. Linka K., Constitutive artificial neural networks: A fast and general approach to predictive data-driven constitutive modeling by deep learning // Journal of Computational Physics, 2021. – 429 c.
 14. Liu L., Huang Z., A Note on mori-tanaka's method // International Acta Mech. Solida Sin., 2014. – 234–244 c.
 15. Minchenkov K., Vedernikov A., Safonov A., Akhatov I., Thermoplastic pultrusion: A review // Polymers, 2021. – 180 c.
 16. Mori Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta metallurgica, 1973. – 571–574 c.
 17. Phan D. N., Ngoc A. V., Strength of concrete columns reinforced with Glass fiber reinforced polymer // Magazine of Civil Engineering, 2021. – 108 c.
 18. Reuß A., Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1929. – 49–58 c.
 19. Voigt W., Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // Annalen der physik, 1889. – 573–587 c.
 20. Wang H.W., Zhou H.W., Gui L.L., Ji H.W., Zhang X.C., Analysis of effect of fiber orientation on Young's modulus for unidirectional fiber reinforced composites // Composites part B: engineering, 2014. – 733–739 c.
 21. Zhang S., Caprani C., Mechanical properties of pultruded GFRP at intermediate strain rates // Composite Structures, 2021. – 278 c.