

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к
защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр.
РАН
_____ А.М. Кривцов
«___» _____ 20__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА-ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ

по направлению подготовки

01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.04.03_01 «Механика деформируемого твердого тела»

Выполнил

студент гр. 5040103/00101

В.Д. Тур

Руководитель

д.ф.-м.н., проф. ВШТМиМФ

Е.А. Иванова

Консультант

по нормоконтролю

Санкт-Петербург – 2022

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«___» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту _____ Туру Всеволоду Денисовичу, группы 5040103/00101 _____
фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Движение тела-точки в центральном потенциальном поле
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 1.06.2022
3. Исходные данные по работе: Научные статьи по теме работы, форма кинетической энергии тела-точки, фундаментальные законы, определяющие соотношения центрального потенциального поля.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): _____
Аналитическое преобразование системы векторных уравнений к системе из двух скалярных
Нахождение решения системы векторных уравнений по решению системы из двух скалярных
уравнений в общем случае
Рассмотрение частного решения с постоянным квадратом количества
движения
Нахождение ограничений на начальные условия системы векторных уравнений, при которых
траектория формирует сплошной слой, близкий к сферическому
Аналитическое доказательство ограниченности модуля радиус-вектора, прохождения траектории
через полюса и монотонного возрастания полярного угла
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): Графики
пространственной траектории, годографов количества движения и собственного кинетического
момента, графики модуля радиус-вектора
6. Консультанты по работе: _____
7. Дата выдачи задания 13.05.2022
(дата)

Руководитель ВКР _____ Е.А. Иванова _____
(подпись) фамилия инициалы

Задание принял к исполнению 13.05.2022
(дата)

Студент _____ В.Д. Тур _____
(подпись) фамилия инициалы

РЕФЕРАТ

На 48 с., 11 рисунков, 0 таблиц, 5 приложений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ЭЙЛЕРОВА МЕХАНИКА, ТЕЛО-ТОЧКА, АТОМ ВОДОРОДА, ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Движение тела-точки в центральном потенциальном поле».

Данная работа посвящена исследованию траектории тела-точки в кулоновском поле притяжения. Задачи, которые решались в ходе исследования:

1. Численное моделирование при различных наборах параметров.
2. Преобразование исходной задачи в систему из двух скалярных уравнений.
3. Исследование частных случаев и нахождение ограничений на начальные условия.
4. Аналитическое исследование свойств траектории тела-точки.

В работе были найдены первые интегралы для тела-точки в кулоновском поле. С использованием первых интегралов исходная система уравнений была преобразована в систему из двух скалярных уравнений, удобную для аналитического исследования. В общем случае было показано, как по решению такой системы найти решение исходной системы уравнений. В частном случае постоянного количества движения было найдено условие прохождения траектории через полюса.

В результате были найдены ограничения на начальные условия, при которых траектория тела-точки формирует с течением времени сплошной слой, в линейном приближении являющийся сферическим. Также были найдены параметры, отвечающие за толщину и эллиптичность слоя. Было доказано, что при выполнении ограничений на начальные условия, траектория тела-точки всегда лежит между двух сфер конечного радиуса и имеет монотонно возрастающий полярный угол.

ABSTRACT

48 pages, 11 figures, 0 tables, 5 appendices

KEYWORDS: EULER MECHANICS, BODY-POINT, HYDROGEN ATOM, FIRST INTEGRALS OF MOTION.

The subject of the graduate qualification work is «Motion of a body-point in a central potential field».

The given work is devoted to the study of the trajectory of a body-point in the Coulomb field of attraction. The research set the following goals:

1. Numerical simulation for different sets of parameters.
2. Transformation of the original problem into a system of two scalar equations.
3. Study of particular cases and finding restrictions on the initial conditions.
4. Analytical study of the properties of the trajectory of a body-point.

The first integrals for a body-point in a Coulomb field were found in this work. Using the first integrals, the original system of equations was transformed into a system of two scalar equations, convenient for analytical research. In the general case, it was shown how, by solving such a system, to find a solution to the original system of equations. In the special case of a constant momentum, the condition for the passage of the trajectory through the poles was found.

As a result, restrictions were found on the initial conditions under which the trajectory of a body-point forms a continuous layer over time, which is spherical in the linear approximation. The parameters responsible for the thickness and ellipticity of the layer were also found. It was proved that when the restrictions on the initial conditions are met, the trajectory of the body-point always lies between two spheres of finite radius and has a monotonically increasing polar angle.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ ТЕЛА-ТОЧКИ | 8 |
| 1.1. Задание динамических структур | 8 |
| 1.2. Уравнения движения | 9 |
| ГЛАВА 2. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА-ТОЧКИ ВОКРУГ ЦЕНТРА ПРИТЯЖЕНИЯ..... | 11 |
| 2.1. Постановка задачи | 11 |
| 2.2. Преобразование задачи к двум скалярным уравнениям | 13 |
| 2.3. Нахождение решения исходной задачи..... | 15 |
| ГЛАВА 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ..... | 19 |
| 3.1. Частный случай постоянного модуля радиус-вектора..... | 19 |
| 3.2. Частный случай постоянного квадрата количества движения..... | 19 |
| 3.3. Частный случай постоянного квадрата количества движения с проходящей через полюса траекторией..... | 22 |
| ГЛАВА 4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО КВАДРАТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ | 26 |
| 4.1. Анализ поведения радиус-вектора | 26 |
| 4.2. Анализ поведения векторов количества движения и собственного кинетического момента..... | 31 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 36 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ..... | 38 |
| Приложение 1. Первые интегралы..... | 41 |
| Приложение 2. Нахождение радиус-вектора | 43 |
| Приложение 3. Нахождение количества движения..... | 45 |
| Приложение 4. Нахождение собственного кинетического момента | 46 |
| Приложение 5. Начальные условия | 47 |

ВВЕДЕНИЕ

При построении моделей кристаллических решеток, атомы вещества во многих случаях считают либо материальными точками, либо абсолютно твердыми телами. Взаимодействия между ближайшими соседями в кристаллической решетке моделируют пружинами, а взаимодействием с более дальними соседями чаще всего пренебрегают. В простейших случаях пружины являются линейно-упругими, а в более сложных — нелинейными, описываемыми, например, потенциалом Леннарда-Джонса. Подобные модели из сосредоточенных масс и пружинок структурно не тождественны настоящим кристаллическим решеткам, в которых атомы являются сложной системой из ядра и электронов, а основным взаимодействием выступает кулоновский закон. Но, тем не менее, такие модели очень успешно описывают самые разнообразные кристаллические решетки и решают основную задачу — позволяют выводить макропараметры материалов на основе их микропараметров.

Для описания электронов в составе атома также можно предложить модели материальной точки и абсолютно твердого тела. Безусловно, и атомы, и электроны тоже могут иметь сложную внутреннюю структуру, состоять из других частиц, но при моделировании этими свойствами можно пренебречь, основываясь на принципе абстракции. Но применение моделей материальной точки и абсолютно твердого тела для описания электрона в составе атома имеет проблему. В простейшем атоме, атоме водорода, согласно современным представлениям, электрон имеет некоторое пространственное (не плоское) распределение вокруг протона. При этом модели материальной точки и абсолютно твердого тела всегда будут иметь плоскую траекторию в центральном потенциальном поле притяжения. Уже этот факт говорит о неприменимости этих моделей для описания явлений на микроуровне.

На сегодняшний день модели квантовой механики являются классическими для описания явлений на микроуровне. Квантовая механика постулирует принцип неопределенности и работает не с моделями частиц, а с

волновыми функциями и операторами над ними. Волновая функция находится из решения уравнения Шредингера, а квадрат волновой функции представляет собой плотность вероятности обнаружить частицу в той или иной точке пространства. Тем самым, с точки зрения квантовой механики, электрон в атоме водорода не имеет детерминированного положения и траектории — есть только вероятность его обнаружения.

Основным состоянием электрона принято называть его состояние с наименьшей возможной энергией. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода не содержит угловой части, поэтому вероятностное распределение электрона полностью сферически симметрично. Одним из фундаментальных принципов классической механики является принцип детерминизма, который напрямую противоречит принципу неопределенности квантовой механики. Возникает вопрос: возможно ли построение чисто механической модели электрона в атоме водорода, дающей сходные результаты с квантово-механической моделью хотя бы для основного состояния? Можно ли для точечного объекта в центральном потенциальном поле получить траекторию, похожую на сферически симметричное распределение, без отказа от принципа детерминизма? Современная механика не ограничивается моделями материальной точки и абсолютно твердого тела. Так, для общих моделей эйлеровой механики не доказано, что ни одна из них не применима для описания поведения электрона в атоме. Поэтому вопрос о построении модели атома на основе эйлеровой механики остается открытым.

В работе [15] показано, что задача о движении электрона в постоянном магнитном поле и задача о движении свободной тело-точки имеют одинаковое решение. Модель тела-точки позволяет получить решение в виде винтовой линии, что соотносится с экспериментальными данными. Ни модель материальной точки, ни модель абсолютно твердого тела таких результатов дать не могут, поэтому модель тела-точки качественно от них отличается. В данной работе для описания основного состояния электрона в атоме водорода будет использована та же модель тела-точки, что и в работе [15]. Для этой

модели будет найдено частное решение уравнений движения, в котором траектория с течением времени образует сплошной сферический слой в линейном приближении.

ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ ТЕЛА-ТОЧКИ

В данном параграфе вводится модель тела-точки и определяются ее динамические структуры. Также для случая, в котором тело-точка является закрытым телом, приводится вид законов баланса.

1.1. Задание динамических структур

В эйлеровой механике задание формы кинетической энергии полностью определяет все динамические структуры тела-точки. Форма кинетической энергии тела-точки является обобщением формы кинетической энергии абсолютно твердого тела. В общем случае кинетическая энергия тела-точки имеет вид квадратичной формы

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где \mathbf{v} — это скорость трансляционного движения, $\boldsymbol{\omega}$ — это скорость спинорного движения, а \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{J} — это тензоры инерции второго ранга, которые зависят от поворотов. Без потери общности можно считать тензоры \mathbf{A} и \mathbf{J} симметричными.

Перекрестное слагаемое $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}$ в (1) соответствует взаимному влиянию трансляционных и спинорных движений друг на друга. Модели материальной точки и абсолютно твердого тела не имеют этого слагаемого в кинетической энергии, поэтому для них подобное взаимное влияние принципиально не возможно.

Согласно [16], количество движения \mathbf{K}_1 и собственный кинетический момент \mathbf{K}_2 тела-точки определяются как

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}}. \quad (3)$$

Кинетический момент тела-точки определяется как

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2, \quad (4)$$

где \mathbf{R}_Q — радиус-вектор опорной точки.

Все дальнейшие рассуждения будут проводиться для частного случая тела-точки, предложенного в работе [15] П.А. Жилина. В этой работе показано, что траекторией свободной тело-точки будет винтовая линия. В рассматриваемом частном случае тело-точка имеет кинетическую энергию вида

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + b \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} j \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (2), (3), количество движения и собственный кинетический момент тела-точки будут иметь вид

$$\mathbf{K}_1 = m \mathbf{v} + b \boldsymbol{\omega}, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_2 = b \mathbf{v} + j \boldsymbol{\omega}. \quad (7)$$

1.2. Уравнения движения

Эйлера механика постулирует выполнение трех фундаментальных законов.

1. Закон баланса количества движения

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{k}_1, \quad (8)$$

где \mathbf{K}_1 — количество движения, \mathbf{F} — внешняя сила, \mathbf{k}_1 — скорость подвода количества движения.

2. Закон баланса кинетического момента

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q = \mathbf{M}^Q + \mathbf{k}_2^Q, \quad (9)$$

где \mathbf{K}_2^Q — кинетический момент, \mathbf{M}^Q — внешний момент, \mathbf{k}_2^Q — скорость подвода кинетического момента, заданные относительно опорной точки Q .

3. Закон баланса энергии

$$\dot{E} = N + \tilde{Q}, \quad (10)$$

где E — полная энергия, N — мощность внешних воздействий механического характера, выражаемая через внешние силы и моменты, \tilde{Q} — скорость подвода энергии немеханического происхождения.

В данной работе моделируется только основное состояние электрона в атоме водорода. Любые процессы, связанные с переходом электрона в возбужденное состояние или взаимодействием с другими электронами, не исследуются. Электрон в основном состоянии является закрытым телом. Это означает, что подвод количества движения, кинетического момента и энергии являются нулевыми. В работе [16] показано, что в такой ситуации для тела-точки закон баланса энергии является следствием законов баланса количества движения и баланса кинетического момента. Тогда для тела-точки независимые законы баланса (8), (9) имеют вид

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{F}, \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q = \mathbf{M}^Q. \quad (12)$$

Внешний момент, действующий на тело-точку, определяется как

$$\mathbf{M}^Q = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F} + \mathbf{L}, \quad (13)$$

где \mathbf{L} — внешний момент, не выражаемый через силы.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА-ТОЧКИ ВОКРУГ ЦЕНТРА ПРИТЯЖЕНИЯ

В данном параграфе тело-точка с кинетической энергией вида (5) предложена в качестве модели основного состояния электрона в атоме водорода. Выведены уравнения движения тела-точки в кулоновском потенциальном поле и приведены примеры численного решения этих уравнений. Также уравнения движения в самом общем случае преобразованы к системе из двух скалярных уравнений, зная решение которой можно найти решение исходных уравнений движения. Такое преобразование удобно для дальнейшего аналитического исследования и позволяет перейти к рассмотрению частных случаев.

2.1. Постановка задачи

Так как ядро атома имеет массу много больше электрона, то достаточно рассмотреть взаимодействие тела-точки и неподвижного центра притяжения по закону Кулона. Выберем начало системы отсчета в притягивающем центре. Определяющие соотношения центрального потенциального поля имеют вид

$$\mathbf{F} = -q \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \quad (14)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

где $q > 0$.

Опроную точку Q , относительно которой рассматривается кинетический момент, выберем совпадающей с центром системы отсчета. Подставив (4), (13), (14), (15) в (11), (12), получим

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = -q \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{K}_1 + \dot{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Используя (6), (7), (16) и (17), нетрудно получить замкнутую систему уравнений движения, представленную в наиболее удобной для численного исследования форме,

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{mj-b^2} (j\mathbf{K}_1 - b\mathbf{K}_2) \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_1 = -q \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_2 = -\frac{b}{mj-b^2} \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2. \quad (20)$$

Поставим начальные условия

$$\mathbf{R}|_{t=0} = \mathbf{R}_0 \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_1|_{t=0} = \mathbf{K}_1^{(0)} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_2|_{t=0} = \mathbf{K}_2^{(0)}. \quad (23)$$

На Рис. 1, Рис. 2, Рис. 3 приведены траектории тела-точки, полученные в ходе численного решения системы (18), (19), (20) для различных значений параметров m , b , j , q и различных начальных условий (21), (22), (23). Результаты численного решения позволяют заключить, что в общем случае траектория тела-точки в центральном поле с кулоновским потенциалом принципиально трехмерна. Таким образом, используемая модель тела-точки лишена основного недостатка моделей материальной точки и абсолютно твердого тела.

Цель данной работы заключается в нахождении частного решения уравнений движения (18), (19), (20), в котором траектория тела-точки с течением времени образует сплошной сферический слой в линейном приближении. Под нахождением частного решения подразумевается нахождение ограничений на начальные условия \mathbf{R}_0 , $\mathbf{K}_1^{(0)}$, $\mathbf{K}_2^{(0)}$ и параметры m , b , j , q .

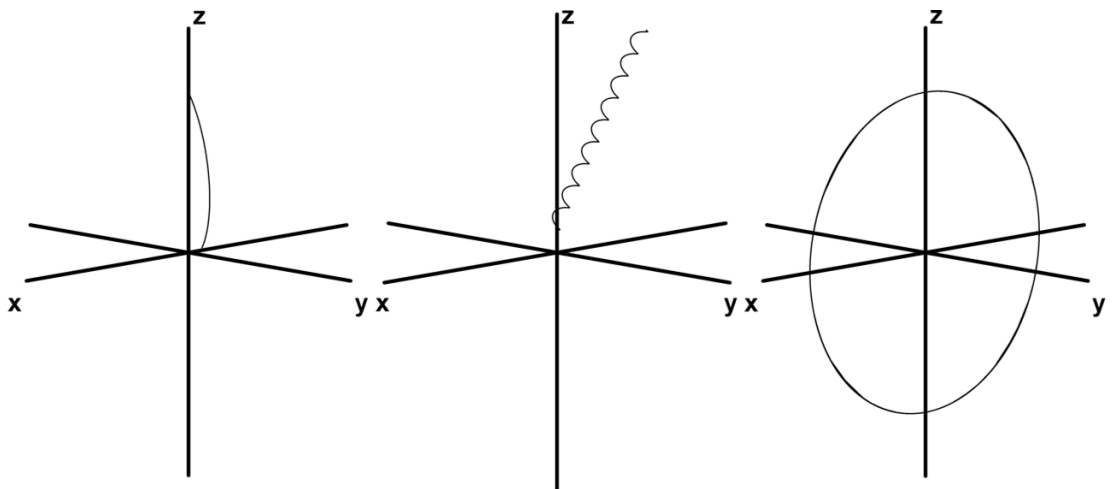


Рис. 1: "Вырожденные" траектории.

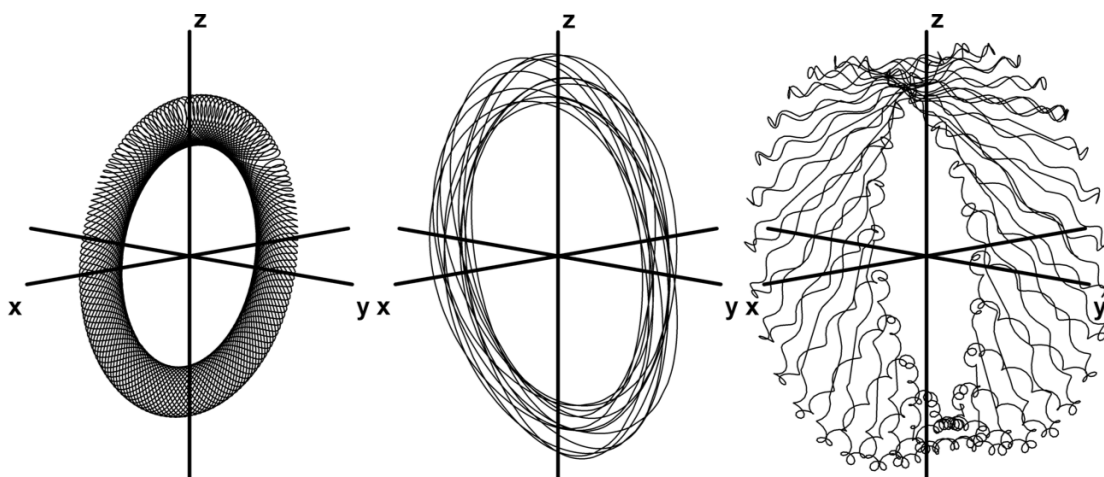


Рис. 2: "Периодические" траектории.

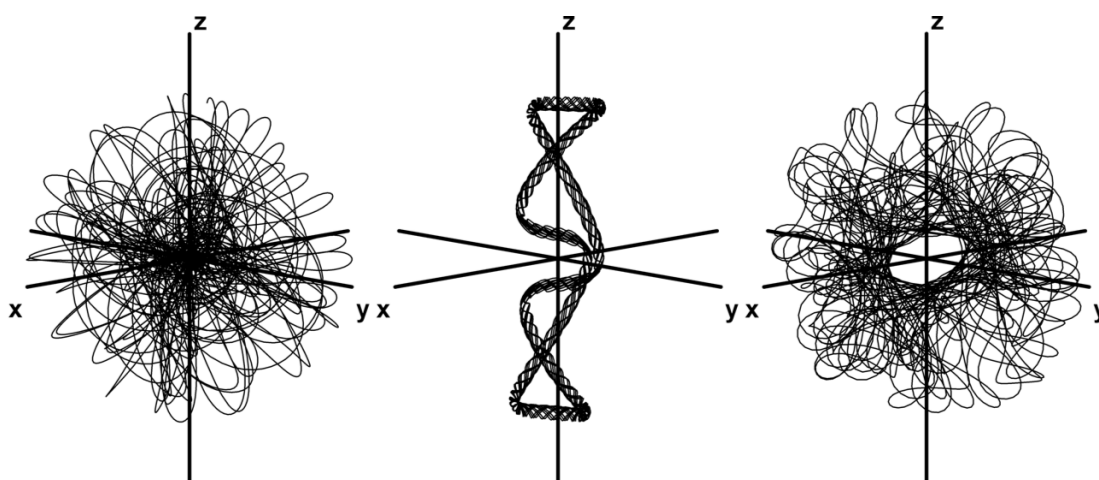


Рис. 3: "Произвольные" траектории.

2.2. Преобразование задачи к двум скалярным уравнениям

Система уравнений (18), (19), (20) является нелинейной. В этой системе не видны частные решения с понятной физической интерпретацией. Данный параграф посвящен аналитическому преобразованию системы (18), (19), (20) к системе из двух скалярных уравнений, в которой можно увидеть частные случаи, и по решению которой нетрудно найти решение исходной системы уравнений.

Наиболее компактная форма итоговых скалярных уравнений получена при использовании в качестве неизвестных $R = |\mathbf{R}|$ и \mathbf{K}_1^2 . Если модуль радиус-вектора для задачи с центральной симметрией является ожидаемой

скалярной характеристикой движения, то квадрат количества движения — характеристика неочевидная.

Методика преобразования системы (18), (19), (20) базируется на нахождении первых интегралов. Всего найдено пять скалярных первых интегралов из восьми возможных (подробности могут быть найдены в Приложении 1).

1. Полная энергия системы

$$\frac{j}{2b^2} \mathbf{K}_1^2 + \frac{1}{2q} \frac{mj-b^2}{b^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2))' + \frac{m}{2} \frac{mj-b^2}{b^2} (\dot{\mathbf{R}})^2 - \frac{mj}{b^2} \frac{q}{R} = E, \quad E = \text{const.} \quad (24)$$

2. Квадрат собственного кинетического момента

$$\frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2 + \frac{j}{q} \frac{mj-b^2}{b^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2))' + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (\dot{\mathbf{R}})^2 + 2j \frac{mj-b^2}{b^2} \frac{q}{R} = \mathbf{K}_2^2, \quad \mathbf{K}_2^2 = \text{const.} \quad (25)$$

3. Кинетический момент

$$\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^Q, \quad \mathbf{K}_2^Q = \text{const.} \quad (26)$$

Из (26) следует, что

$$\left(R^2 + \frac{j^2}{b^2}\right) \mathbf{K}_1^2 + \frac{j}{q} \frac{mj-b^2}{b^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2))' - \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (\dot{\mathbf{R}})^2 - \frac{1}{4q^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2))'^2 + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (R^2)'' = \mathbf{K}_2^{Q^2}, \quad \mathbf{K}_2^{Q^2} = \text{const.} \quad (27)$$

Используя (24), (25), (27), нетрудно получить искомую систему из двух скалярных уравнений

$$R^2 \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2))'^2 + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (R^2)'' - \frac{2jq(mj-b^2)}{b^2} \frac{1}{R} = \mathbf{K}_2^{Q^2} + \frac{b^2-2mj}{b^2} \mathbf{K}_2^2 - \frac{4j(b^2-mj)}{b^2} E \quad (28)$$

$$\frac{j}{m} \mathbf{K}_1^2 + \frac{mj-b^2}{mq} (R^3(\mathbf{K}_1^2))' = \mathbf{K}_2^2 - \frac{2(mj-b^2)}{m} E. \quad (29)$$

Таким образом, система (18), (19), (20) из девяти скалярных уравнений преобразована в систему (28), (29) из двух скалярных уравнений, в которой полную энергию, квадрат собственного кинетического момента и квадрат

кинетического момента нетрудно выразить через начальные условия (21), (22), (23)

$$E = \frac{1}{mj-b^2} \left(\frac{j}{2} \mathbf{K}_1^{(0)2} - b \mathbf{K}_1^{(0)} \cdot \mathbf{K}_2^{(0)} + \frac{m}{2} \mathbf{K}_2^{(0)2} \right) - \frac{q}{|\mathbf{R}_0|}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_2^2 = \mathbf{K}_2^{(0)2}, \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_2^Q = \left(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{K}_1^{(0)} + \mathbf{K}_2^{(0)} \right)^2. \quad (32)$$

Начальные условия системы (28), (29) также могут быть выражены через начальные условия исходной системы (21), (22), (23)

$$R|_{t=0} = |\mathbf{R}_0|, \quad (33)$$

$$\dot{R}|_{t=0} = \frac{j\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_1^{(0)} - b\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_2^{(0)}}{(mj-b^2)|\mathbf{R}_0|}, \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_1^2|_{t=0} = \mathbf{K}_1^{(0)2}, \quad (35)$$

$$(\mathbf{K}_1^2)'|_{t=0} = -2q \frac{\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_1^{(0)}}{|\mathbf{R}_0|^3}. \quad (36)$$

2.3. Нахождение решения исходной задачи

Если имеется решение системы (28), (29), то можно найти решение (18), (19), (20). Для этого введем декартову систему координат, образованную осями \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Поместим центр этой системы координат в начало системы отсчета, ось \mathbf{e}_z направим вдоль постоянного вектора \mathbf{K}_2^Q , ось \mathbf{e}_y направим ортогонально плоскости, образованной векторами \mathbf{K}_2^Q и \mathbf{R}_0 , а ось \mathbf{e}_x направим таким образом, чтобы орты \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z образовывали правую тройку.

В общем случае начальные условия задаются (21), (22), (23). Выбором системы координат можно задать три скалярных начальных условия

$$(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{K}_1^{(0)} + \mathbf{K}_2^{(0)}) \cdot \mathbf{e}_x = 0, \quad (37)$$

$$(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{K}_1^{(0)} + \mathbf{K}_2^{(0)}) \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad (38)$$

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{e}_y = 0. \quad (39)$$

Два скалярных начальных условия (37), (38) задаются тем, что орт \mathbf{e}_z направляется по вектору \mathbf{K}_2^Q . Одно скалярное начальное условие (39) задается тем, что орт \mathbf{e}_y направляется ортогонально плоскости, образованной векторами \mathbf{K}_2^Q и \mathbf{R}_0 .

Еще четыре скалярных начальных условия задаются при выборе начальных условий (33), (34), (35), (36) системы уравнений (28), (29). Два оставшихся скалярных начальных условия являются константами интегрирования и будут выражены через начальные условия (21), (22), (23) позднее.

Чтобы найти радиус-вектор тела-точки, зная решение системы (28), (29), представим \mathbf{R} в цилиндрической системе координат, где полярный угол φ отсчитывается от \mathbf{e}_x и в начальный момент времени равен нулю, так как \mathbf{R}_0 лежит в плоскости ортов \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_z ,

$$\mathbf{R} = R_z \mathbf{e}_z + \tilde{R} \mathbf{e}_r(\varphi), \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (40)$$

Домножив (40) скалярно на \mathbf{K}_2^Q и на $\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{K}_2^Q$, можно выразить R_z , \tilde{R} и $\dot{\varphi}$ через R и \mathbf{K}_1^2 (подробности могут быть найдены в Приложении 2)

$$R_z = -\frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\frac{1}{2q} \frac{j}{b} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot) + \frac{mj-b^2}{b} R\dot{R} \right), \quad (41)$$

$$\tilde{R} = \sqrt{R^2 - R_z^2}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{R}^2} \left\{ qR - \frac{1}{2q} R^2 (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot) + \frac{1}{2q} R\dot{R} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot) - \right. \\ & \left. - \frac{j}{2(mj-b^2)} \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q2} - \frac{1}{2q} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 \right) \right\}, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (43) \end{aligned}$$

Используя (40), (41), (42), направление орта \mathbf{e}_x можно представить в виде

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{R}_0 - R_z(0) \mathbf{e}_z}{\tilde{R}(0)}, \quad (44)$$

где

$$R_z(0) = \frac{\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_2^{(0)}}{|\mathbf{K}_2^Q|}, \quad (45)$$

$$\tilde{R}(0) = \sqrt{|\mathbf{R}_0|^2 - R_z(0)^2}. \quad (46)$$

Представим \mathbf{K}_1 в цилиндрической системе координат, где полярный угол θ отсчитывается от \mathbf{e}_x и в начальный момент времени не обязан быть равным нулю,

$$\mathbf{K}_1 = K_{1z} \mathbf{e}_z + \tilde{K}_1 \mathbf{e}_r(\theta), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (47)$$

Полярный угол θ , соответствующий \mathbf{K}_1 , отличен от введенного ранее полярного угла φ , соответствующего \mathbf{R} . Начальное значение угла θ нетрудно выразить через начальные условия

$$\cos\theta_0 = \frac{\mathbf{K}_1^{(0)} \cdot \mathbf{e}_x}{|\mathbf{K}_1^{(0)} - (\mathbf{K}_1^{(0)} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z|}. \quad (48)$$

Домножив (47) скалярно на \mathbf{K}_2^Q и на $\dot{\mathbf{K}}_1 \times \mathbf{K}_2^Q$, можно выразить K_{1z} , \tilde{K}_1 и $\dot{\theta}$ через R и \mathbf{K}_1^2 (подробности могут быть найдены в Приложении 3)

$$K_{1z} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 + \frac{1}{2q} \frac{mj-b^2}{b} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot) - \frac{mj-b^2}{b} \frac{q}{R} \right), \quad (49)$$

$$\tilde{K}_1 = \sqrt{\mathbf{K}_1^2 - K_{1z}^2}, \quad (50)$$

$$\dot{\theta} = \frac{q}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{K}_1^2 R^3} \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 + \mathbf{K}_2^{Q^2} - \mathbf{K}_2^2 \right), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (51)$$

Представим \mathbf{K}_2 в цилиндрической системе координат, где полярный угол α отсчитывается от \mathbf{e}_x и в начальный момент времени не обязан быть равным нулю,

$$\mathbf{K}_2 = K_{2z} \mathbf{e}_z + \tilde{K}_2 \mathbf{e}_r(\alpha), \quad \alpha|_{t=0} = \alpha_0. \quad (52)$$

Начальное значение угла α нетрудно выразить через начальные условия

$$\cos\alpha_0 = \frac{\mathbf{K}_2^{(0)} \cdot \mathbf{e}_x}{|\mathbf{K}_2^{(0)} - (\mathbf{K}_2^{(0)} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z|}. \quad (53)$$

Домножив (52) скалярно на \mathbf{K}_2^Q и на $\dot{\mathbf{K}}_2 \times \mathbf{K}_2^Q$, можно выразить K_{2z} , \tilde{K}_2 и $\dot{\alpha}$ через R и \mathbf{K}_1^2 (подробности могут быть найдены в Приложении 4)

$$K_{2z} = \frac{1}{2|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2 + \frac{1}{4q^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 - R^2 \mathbf{K}_1^2 \right), \quad (54)$$

$$\tilde{K}_2 = \sqrt{\mathbf{K}_2^2 - K_{2z}^2}, \quad (55)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{K}_2^2} \left\{ \left(-\frac{j}{mj-b^2} \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{2q} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot) \cdot + \frac{q}{R} \right) \right. \\ \left. \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2} (R^3(\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2} \right) \right\}, \quad \alpha|_{t=0} = \alpha_0. \quad (56)$$

Константы интегрирования θ_0 и α_0 являются оставшимися двумя скалярными начальными условиями. Таким образом, вместо решения (18), (19), (20) может решаться (28), (29).

ГЛАВА 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Система уравнений (28), (29) допускает два частных решения:

1. $R = \text{const}$,
2. $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$.

В данном параграфе проводится построение решения в этих частных случаях. Для частного случая $R = \text{const}$ показано, что траекторией является окружность. Для частного случая $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ показано, что задача нахождения траектории сводится к двум последовательным интегрированиям известных функций. Также для частного случая $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ показано, что начальные условия могут быть выбраны таким образом, что траектория будет заметать сплошной слой, ограниченный двумя сферами конечного радиуса.

3.1. Частный случай постоянного модуля радиус-вектора

Несложно показать, что если в системе (28), (29) положить $R = \text{const}$, то ее решением будет $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$. Подставив $R = \text{const}$, $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ в (41), получим, что радиус-вектор тела-точки всегда лежит в фиксированной плоскости, ортогональной вектору \mathbf{e}_z . Используя (41), (42), (43) нетрудно найти траекторию тела-точки

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_r(\varphi), \quad (57)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|_{R^2}} \left(qR - \frac{j}{2(mj-b^2)} (R^2\mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}) \right) t. \quad (58)$$

Траектория тела-точки представляет собой окружность, поэтому анализ частного случая $R = \text{const}$ не интересен в данной работе.

3.2. Частный случай постоянного квадрата количества движения

При $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ уравнение (28) принимает вид

$$R^2\mathbf{K}_1^2 + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (R^2) \cdot - \frac{2jq(mj-b^2)}{b^2} \frac{1}{R} = \mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2 - 2\frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2, \quad (59)$$

а из (29) следует, что

$$\mathbf{K}_1^2 = \frac{m}{j} \mathbf{K}_2^2 - \frac{2(mj-b^2)}{j} E. \quad (60)$$

Начальные условия (33), (34), (35), (36) принимают вид

$$R|_{t=0} = |\mathbf{R}_0|, \quad (61)$$

$$\dot{R}|_{t=0} = -\frac{b\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_2^{(0)}}{(mj-b^2)|\mathbf{R}_0|}. \quad (62)$$

Нетрудно показать, что (59) может быть проинтегрировано

$$\begin{aligned} R^4 \mathbf{K}_1^2 + 4 \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} R^2 (\dot{R})^2 - \frac{8jq(mj-b^2)}{b^2} R &= \\ &= 2 \left(\mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2 - 2 \frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2 \right) R^2 + C, \end{aligned} \quad (63)$$

где константа C может быть найдена из начальных условий

$$\begin{aligned} C &= |\mathbf{R}_0|^4 \mathbf{K}_1^2 + \frac{4}{b^2} \left(j\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_1^{(0)} - b\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_2^{(0)} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{8jq(mj-b^2)}{b^2} |\mathbf{R}_0| - 2 \left(\mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2 - 2 \frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2 \right) |\mathbf{R}_0|^2. \end{aligned} \quad (64)$$

В частном случае $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ формулы (41), (42), (43) принимают вид

$$R_z = -\frac{mj-b^2}{b|\mathbf{K}_2^Q|} R \dot{R}, \quad (65)$$

$$\tilde{R} = \sqrt{R^2 - R_z^2}, \quad (66)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q| R^2} \left(qR - \frac{j}{2(mj-b^2)} (R^2 \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}) \right), \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (67)$$

Формулы (49), (50), (51) принимают вид

$$K_{1z} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 - \frac{mj-b^2}{b} \frac{q}{R} \right), \quad (68)$$

$$\tilde{K}_1 = \sqrt{\mathbf{K}_1^2 - K_{1z}^2}, \quad (69)$$

$$\dot{\theta} = \frac{q}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{K}_1^2 R^3} \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^{Q^2} - \mathbf{K}_2^2 \right), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (70)$$

Формулы (54), (55), (56) принимают вид

$$K_{2z} = \frac{1}{2|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2 - R^2 \mathbf{K}_1^2 \right), \quad (71)$$

$$\tilde{K}_2 = \sqrt{\mathbf{K}_2^2 - K_{2z}^2}, \quad (72)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{K}_2^2} \left(-\frac{j}{mj-b^2} \mathbf{K}_1^2 + \frac{q}{R} \right) \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2} \right), \quad \alpha|_{t=0} = \alpha_0. \quad (73)$$

Частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ реализуется не при любых начальных условиях. Такое решение возможно только при выполнении дополнительных ограничений, которые являются следствиями $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$.

1. Умножим (19) скалярно на \mathbf{K}_1 , подставим $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$, получим

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1 = 0. \quad (74)$$

Выражение (74) будет верно в любой момент времени, в том числе и начальный,

$$\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{K}_1^{(0)} = 0. \quad (75)$$

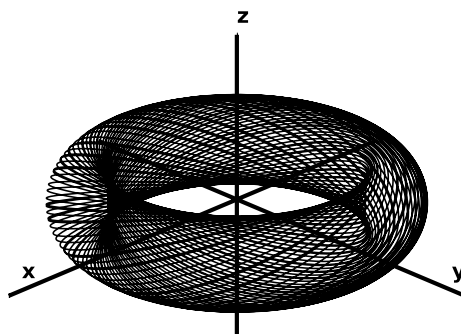
2. Умножим (19) скалярно на \mathbf{R} , подставим $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ и (18), получим

$$(j\mathbf{K}_1 - b\mathbf{K}_2) \cdot \mathbf{K}_1 = \frac{q(mj - b^2)}{|\mathbf{R}|}. \quad (76)$$

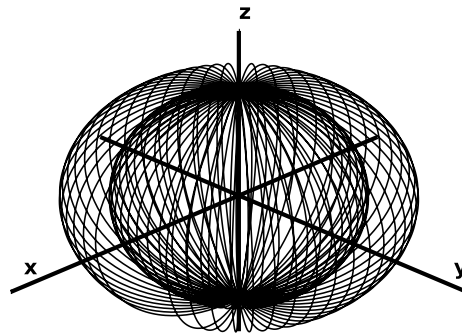
Выражение (76) будет верно в любой момент времени, в том числе и начальный,

$$(j\mathbf{K}_1^{(0)} - b\mathbf{K}_2^{(0)}) \cdot \mathbf{K}_1^{(0)} = \frac{q(mj - b^2)}{|\mathbf{R}_0|}. \quad (77)$$

При численном решении (18), (19), (20) с начальными условиями, выбранными с учетом выбора системы координат (37), (38), (39) и дополнительных ограничений (75), (77), можно получить траектории тела-точки, представленные на Рис. 4.



a)



б)

Рис. 4: Траектории в частном случае $K_1^2 = \text{const}$.

В частном случае $K_1^2 = \text{const}$ может быть решение, траектория которого не проходит через полюса и лежит внутри тора. Такое решение представлено на Рис. 4а и не исследуется в данной работе. Также в частном случае $K_1^2 = \text{const}$ может быть решение, представленное на Рис. 4б. В таком решении траектория тела-точки проходит через полюса и образует с течением времени сплошной слой, ограниченный двумя сферами. Далее речь пойдет о рассмотрении решения, в котором траектория проходит через полюса.

3.3. Частный случай постоянного квадрата количества движения с проходящей через полюса траекторией

Траектория тела-точки точки проходит через полюса, если в (65) R_z достигает R . Для анализа удобно возвести (65) в квадрат

$$R_z^2 = \frac{(mj-b^2)^2}{b^2 K_2^{Q^2}} (R\dot{R})^2. \quad (78)$$

Правая часть (65) содержит множитель $(R\dot{R})^2$, который нетрудно выразить из (63),

$$\frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (R\dot{R})^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-R^4 \mathbf{K}_1^2 + \frac{8jq(mj-b^2)}{b^2} R + 2 \left(\mathbf{K}_2^{Q^2} + \mathbf{K}_2^2 - 2 \frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2 \right) R^2 + C \right), \quad (79)$$

где C определяется (64).

Подставив (79) в (78) и приравняв R_z к R , можно получить алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно R

$$R^4 - 2 \left(\frac{\mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}}{\mathbf{K}_1^2} - 2 \frac{j^2}{b^2} \right) R^2 - \frac{8jq(mj-b^2)}{b^2 \mathbf{K}_1^2} R = \frac{C}{\mathbf{K}_1^2}. \quad (80)$$

При наличии вещественных положительных решений у уравнения (80) траектория тела-точки будет проходить через полюса. Нахождение соотношений между коэффициентами в (80), при которых (80) имеет вещественные положительные решения, является сложной задачей, поэтому используем альтернативный подход.

В частном случае $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ векторы \mathbf{R} , \mathbf{K}_1 и $\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^Q$ взаимно ортогональны, что видно из (26), (74). Это означает, что если \mathbf{R} направлен в полюс, то \mathbf{K}_1 и $\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^Q$ направлены в экватор, то есть их проекции на \mathbf{K}_2^Q нулевые. Для этих проекций нетрудно получить формулы

$$\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2^Q = \frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 - \frac{q(mj-b^2)}{bR}, \quad (81)$$

$$(\mathbf{K}_2^Q - \mathbf{K}_2) \cdot \mathbf{K}_2^Q = \frac{1}{2} (R^2 \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^{Q^2} - \mathbf{K}_2^2). \quad (82)$$

Приравнивая проекции в (81), (149) к нулю, получим

$$\mathbf{K}_1^2 = \frac{q(mj-b^2)}{jR_p}, \quad (83)$$

$$R_p^2 \mathbf{K}_1^2 = \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}, \quad (84)$$

где R_p — величина модуля радиус-вектора в полюсе

$$R_p = R|_{R_z=R}. \quad (85)$$

Уравнение (83) позволяет найти R_p через начальные условия, причем R_p единственно с точностью до знака, то есть траектория тела-точки имеет только два симметричных пересечения с осью z . Исключив R_p из системы (83), (84), получим уравнение

$$\frac{q^2(mj-b^2)^2}{j^2 \mathbf{K}_1^2} = \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}, \quad (86)$$

которое накладывает ограничение на начальные условия (21), (22), (23).

Таким образом, выбор системы координат (37), (38), (39) задает три скалярных начальных условия. Частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ реализуется при выполнении двух скалярных начальных условий (75), (77). Траектория тела-точки проходит через полюса при выполнении одного скалярного начального условия (86). В начальных условиях исходной системы уравнений остается три независимых скалярных начальных условия. В качестве таких трех независимых скалярных величин выберем:

1. модуль радиус-вектора в начальный момент времени R_0

$$R_0 = |\mathbf{R}_0|, \quad (87)$$

2. угол γ_0 между ортом \mathbf{e}_z и направлением \mathbf{R}_0

$$\cos\gamma_0 = \mathbf{e}_z \cdot \frac{\mathbf{R}_0}{R_0}, \quad (88)$$

3. модуль радиус-вектора в полюсе R_p

$$R_p = \frac{q(mj-b^2)}{j\mathbf{K}_1^{(0)2}}. \quad (89)$$

Частное решение $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$, в котором траектория проходит через полюса, реализуется, когда R_0 , γ_0 и R_p задаются, а правые части (21), (22), (23) вычисляются по формулам (подробности могут быть найдены в Приложении 5)

$$\mathbf{R}_0 = R_0(\sin\gamma_0\mathbf{e}_x + \cos\gamma_0\mathbf{e}_z), \quad (90)$$

$$\mathbf{K}_1^{(0)} = \frac{K_1}{R_a} \left(-\frac{j}{b} \cos\gamma_0 \mathbf{e}_x + \frac{R_0+R_p}{2} \mathbf{e}_y + \frac{j}{b} \sin\gamma_0 \mathbf{e}_z \right), \quad (91)$$

$$\mathbf{K}_2^{(0)} = K_2^Q \mathbf{e}_z - \mathbf{R}_0 \times \mathbf{K}_1^{(0)}, \quad (92)$$

где введены обозначения

$$K_2^Q = K_1 \left| \frac{R_0-R_p}{\sin\gamma_0} \right| \frac{R_a}{R_0}, \quad (93)$$

$$R_a = \sqrt{\frac{j^2}{b^2} + \frac{(R_0+R_p)^2}{4}}, \quad (94)$$

$$K_1 = \sqrt{\frac{q(mj-b^2)}{jR_p}}. \quad (95)$$

Таким образом, при рассмотрении частного решения $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$, в котором траектория проходит через полюса, можно решать либо исходные уравнения (18), (19), (20), где начальные условия задаются по формулам (90), (91), (92), либо можно решать (59), где начальные условия задаются по формулам (61), (62), а все остальные величины вычисляются по формулам (65) — (73), и где \mathbf{R}_0 , $\mathbf{K}_1^{(0)}$, $\mathbf{K}_2^{(0)}$ задаются по формулам (90), (91), (92). Для численного исследования лучше подходит (18), (19), (20), а для аналитического исследования — (59).

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО КВАДРАТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В данном параграфе показано, что при выборе начальных условий по формулам (90), (91), (92) траектория тела-точки лежит между двух сфер конечного радиуса, периодически проходит через полюса и имеет монотонно возрастающий полярный угол. Также сформулировано ограничение, при выполнении которого траектория тела-точки в линейном приближении образует сплошной сферический слой.

4.1. Анализ поведения радиус-вектора

Модуль радиус-вектора можно найти из решения (63). Для нахождения экстремальных значений модуля радиус-вектора, положим в (63) \dot{R} равным нулю, получим алгебраическое уравнение четвертого порядка

$$R^4 - 2 \left(\frac{\kappa_2^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1^2} - 2 \frac{j^2}{b^2} \right) R^2 - \frac{8jq(mj-b^2)}{b^2 \kappa_1^2} R = \frac{C}{\kappa_1^2}, \quad (96)$$

где константа C определяется (64). Обозначим через R_{min} и R_{max} положительные вещественные решения (96). Величина модуля радиус-вектора будет лежать в ограниченном диапазоне

$$0 < R_{min} \leq R \leq R_{max} < \infty. \quad (97)$$

Из (66) следует, что экстремальные значения R достигаются в плоскости экватора. Поэтому величина срединной линии в плоскости экватора

$$R_{mid} = \frac{R_{min} + R_{max}}{2}. \quad (98)$$

Для того, чтобы траектория тела-точки заметала сферический слой необходимо, чтобы величина срединной линии на экваторе, равная R_{mid} , совпадала с величиной срединной линии в полюсе, равной R_p . Анализируя (96), нетрудно показать, что такое возможно только в случае

$$R_{min} = R_{max} = R_p, \quad (99)$$

что означает переход к частному случаю $R = \text{const}$, и вырождение траектории в окуржность. По этой причине при пространственном движении

траектория тела-точки замечает эллиптический слой, а не сферический. При этом разница полуосей эллипсоида $R_{mid} - R_p$ может быть малой величиной как относительно $R_{max} - R_{min}$, так и относительно R_{min} , что можно увидеть на примере численного расчета, представленного на Рис. 5.

Так как экстремальные значения R достигаются в плоскости экватора, то и максимальная толщина эллиптического слоя достигается там же. Величины R_{min} , R_{max} являются точными границами диапазона изменения R , но они выражаются достаточно сложными формулами. Можно дать ограничение снизу на R_{min} и ограничение сверху на R_{max} более простыми формулами. Из (81) следует, что

$$|\mathbf{K}_1| |\mathbf{K}_2^Q| \cos \beta = \frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 - \frac{q(mj-b^2)}{bR}, \quad (100)$$

где β — угол между вектором количества движения и вектором кинетического момента. Так как квадрат количества движения — постоянная величина, а косинус угла ограничен, то, используя (83), нетрудно получить приближенные оценки на диапазон изменения модуля радиус-вектора

$$R_1 \leq R_{min} \leq R \leq R_{max} \leq R_2, \quad (101)$$

где

$$R_{1,2} = \frac{R_p}{1 \pm \frac{b|\mathbf{K}_2^Q|}{j|\mathbf{K}_1|}}. \quad (102)$$

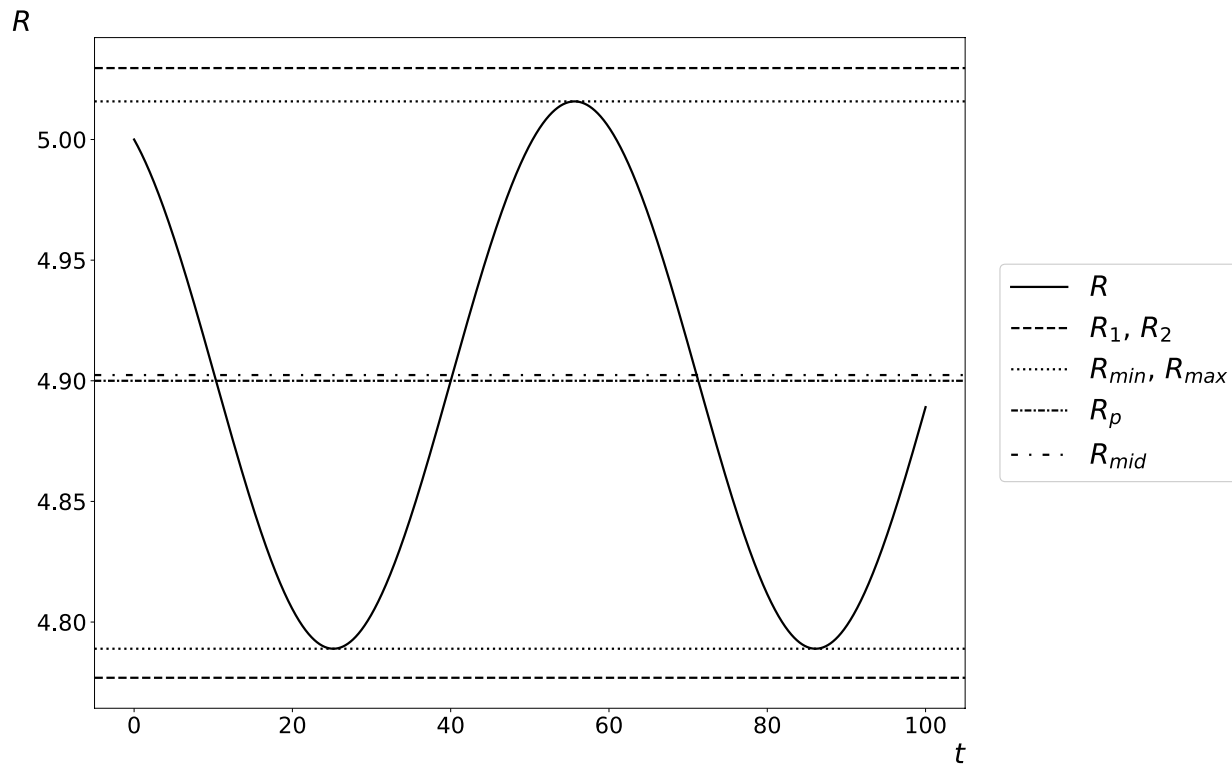


Рис. 5: Пример численного решения. Модуль радиус-вектора в частном случае $K_1^2 = \text{const}$.

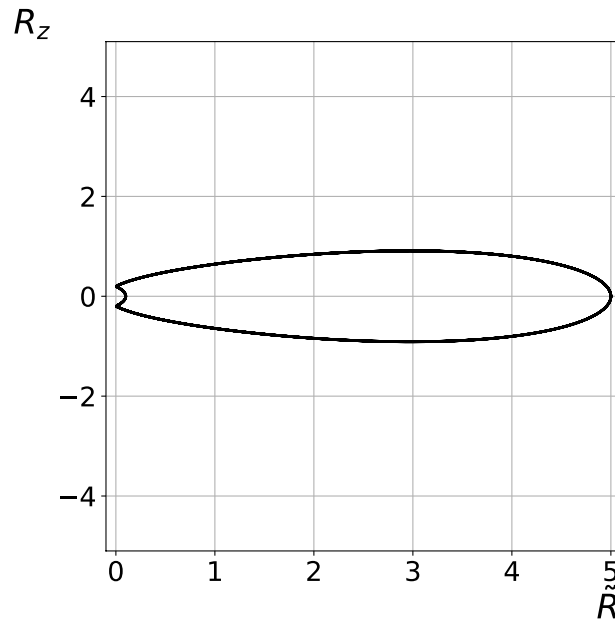
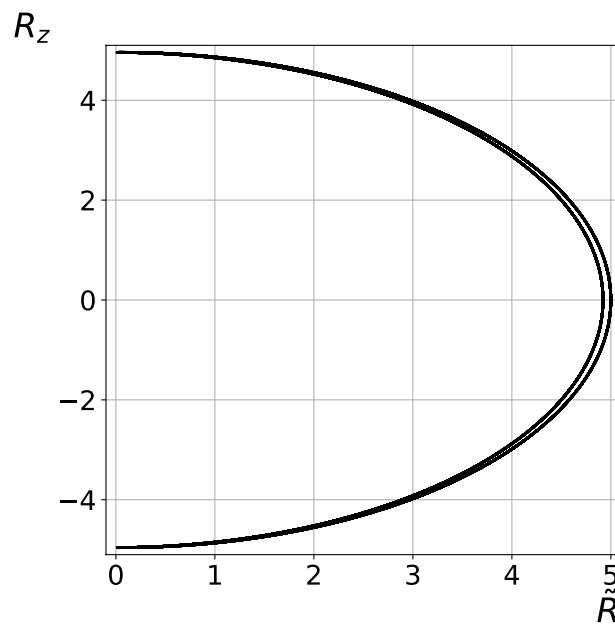
Приближенные оценки (102) позволяют легко оценить максимальную толщину эллиптического слоя. Для того, чтобы слой был тонким достаточно, чтобы

$$S = \frac{b |K_2^Q|}{j |K_1|} \ll 1. \quad (103)$$

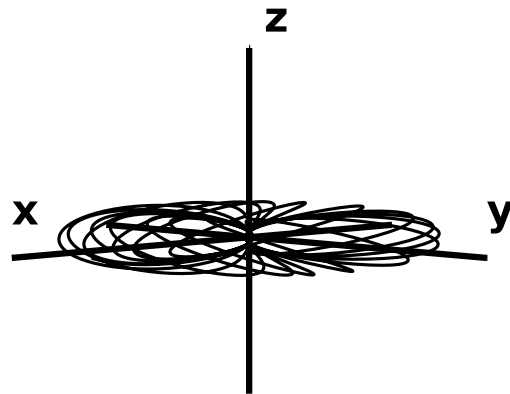
Используя формулы (93), (94), (95), можно представить (103) в виде

$$S = \left| \frac{R_0 - R_p}{R_0 \sin \gamma_0} \right| \sqrt{1 + \frac{b^2 (R_0 + R_p)^2}{j^2 \cdot 4}} \ll 1, \quad (104)$$

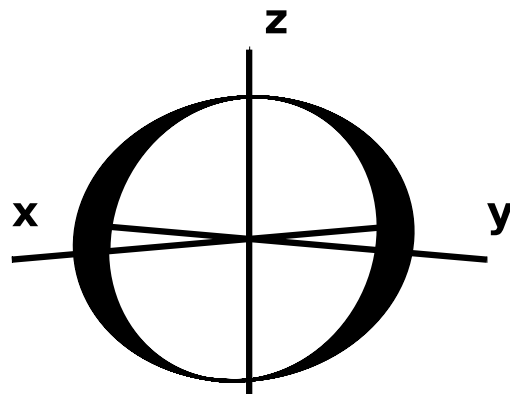
который накладывает ограничения на выбор R_0 , γ_0 и R_p . На Рис. 6 представлен пример численного расчета для различных значений параметра S . Для наглядности траектория тела-точки представлена в координатах \tilde{R} и R_z .

а) $S = 0.99$ б) $S = 0.01$ Рис. 6: Траектория в координатах \tilde{R} и R_z

На Рис. 7 представлены соответствующие Рис. 6 трехмерные траектории.



a) $S = 0.99$



б) $S = 0.01$

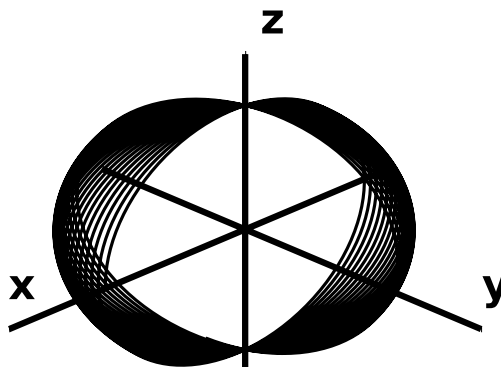
Рис. 7: Траектория тела-точки

Используя (83), (84) нетрудно преобразовать (67) к виду

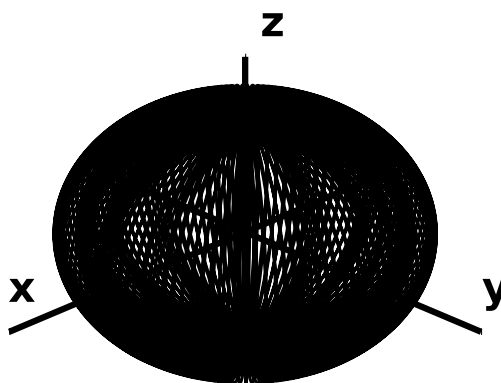
$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{|K_2^Q| \bar{R}^2} \frac{q}{2R_p} (R - R_p)^2, \quad \varphi|_{t=0} = 0. \quad (105)$$

В (105) при любых R производная полярного угла является знакопостоянной, поэтому полярный угол будет монотонно возрастать. Поэтому с течением времени траектория тела-точки полностью заметет

сплошной слой вдоль полярного угла. На Рис. 8 представлен пример численного расчета для различных значений промежутков времени $[0, t_{max}]$.



а) $t_{max} = 100$



б) $t_{max} = 500$

Рис. 8: Заметание сплошного слоя с течением времени

4.2. Анализ поведения векторов количества движения и собственного кинетического момента

В отличие от производной полярного угла φ , соответствующего \mathbf{R} , производные полярных углов θ и α , соответствующие \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 , не являются знакопостоянными. Подставим (83) в (70), (73), получим

$$\dot{\theta} = \frac{q\mathbf{K}_1^2(R+R_p)}{|\mathbf{K}_2^Q|\bar{K}_1^2R^3}(R - R_p), \quad (106)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{q\mathbf{K}_1^2(R^2+R_p^2)}{|\mathbf{K}_2^Q|\bar{K}_2^2RR_p}(R - R_p). \quad (107)$$

Так как R_p находится между экстремальными значениями модуля радиус-вектора, то величина $R - R_p$ является знакопеременной. Кроме величины $R - R_p$ правые части (106), (107) не содержат других знакопеременных величин, поэтому $\dot{\theta}$ и $\dot{\alpha}$ также знакопеременны.

На Рис. 9, Рис. 10, Рис. 11 представлен пример численного расчета для набора значений параметров $m = 1$, $j = 1$, $b = 0.7$, $q = 1$, $R_0 = 5$, $R_p = 4.5$, $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$. Поведение ветров на Рис. 9, Рис. 10, Рис. 11 представляет собой характерную для рассматриваемого частного решения ситуацию. Несмотря на то, что величины $\dot{\theta}$ и $\dot{\alpha}$ являются знакопеременными, векторы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 все равно заматают сплошные полосы по полярному углу. Это объясняется тем, что один знаков величины $R - R_p$ превалирует над другим по времени.

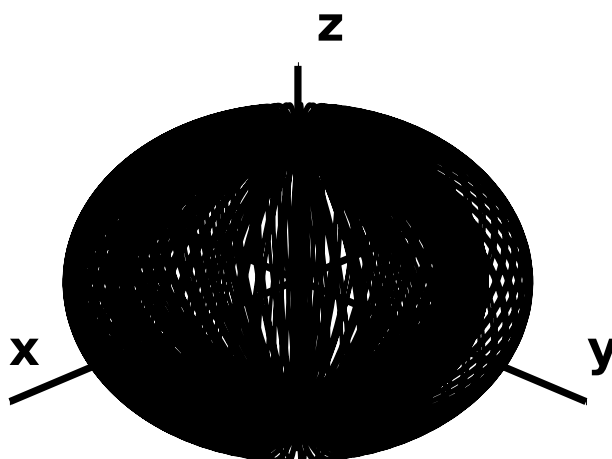


Рис. 9: Радиус-вектор \mathbf{R}

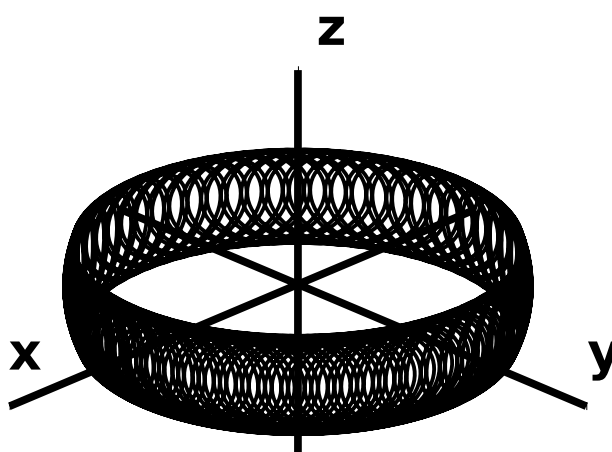


Рис. 10: Количество движения \mathbf{K}_1

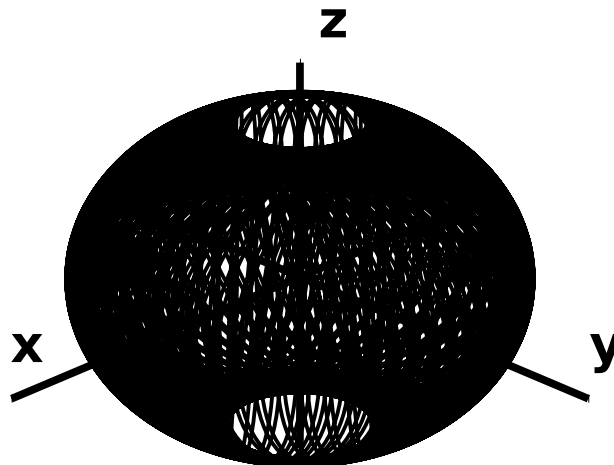


Рис. 11: Собственный кинетический момент \mathbf{K}_2

Также, в отличие от годографа вектора \mathbf{R} , годографы векторов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 не проходят через полюса. Подставим (83), (84), (93) в (68), (71), получим

$$K_{1z} = \frac{\sqrt{jq(mj-b^2)R_p}}{b} \left| \frac{\sin\gamma_0}{R_0-R_p} \right| \frac{R_0}{R_a} \left(\frac{1}{R_p} - \frac{1}{R} \right), \quad (108)$$

$$K_{2z} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q(mj-b^2)}{jR_p}} \left| \frac{\sin\gamma_0}{R_0-R_p} \right| \frac{R_0}{R_a} \left(2 \frac{(R_0-R_p)^2}{\sin\gamma_0^2} \frac{R_a^2}{R_0^2} + R_p^2 - R^2 \right). \quad (109)$$

Формулы точных границ диапазона изменения модуля радиус-вектора R_{min} , R_{max} слишком сложные для подстановки в (108), (109), а приближенные оценки R_1 , R_2 слишком грубые, чтобы показать, что годографы векторов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 не проходят через полюса.

Используем альтернативный подход и докажем от противного. Предположим, что \mathbf{K}_1 направлен в полюс, тогда векторы $\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^Q$ и \mathbf{R} направлены в экватор. То, что вектор $\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^Q$ направлен в экватор, приводит к тому, что величина модуля радиус-вектора равна R_p . С другой стороны, то, что вектор \mathbf{R} направлен в экватор, приводит к тому, что величина модуля

радиус-вектора равна либо R_{min} , либо R_{max} . Но так как рассматривается случай $R \neq const$, то R_p не равен ни R_{min} , ни R_{max} — приходим к противоречию. Значит, предположение о том, что \mathbf{K}_1 направлен в полюс, было неверно. Аналогично можно показать, что годограф \mathbf{K}_2 не проходит через полюс.

На Рис. 9, Рис. 10, Рис. 11 представлен пример численного расчета, на котором годографы векторов \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 не проходят через полюса. При этом если годограф \mathbf{K}_2 подходит довольно близко к полюсам, то годограф \mathbf{K}_1 расположен вблизи экватора. Несимметричность замечаемых векторами \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 полюс относительно плоскости, образованной векторами \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y также объясняется тем, что один знаков величины $R - R_p$ превалирует над другим по времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для модели тела-точки было найдено частное решение уравнений движения, в котором траектория с течением времени образует сплошной сферический слой в линейном приближении. Без рассмотрения линейного приближения, траектория тела-точки образует сплошной слой с конечной толщиной. При этом подобный слой является полым внутри: траектория лежит только на его поверхности. С точки зрения срединной линии этот слой также всегда является эллиптическим, а не сферическим. Более того, заметаемый слой имеет четко выраженные неподвижные полюса. Такие результаты не соответствуют решению уравнения Шредингера для основного состояния атома водорода, в котором в волновой функции присутствует только радиальная часть. С другой стороны, следует понимать, что квантовая механика на самом деле является линейной наукой, так как все эрмитовы операторы, соответствующие физическим величинам, являются линейными. Еще одним признаком линейности квантовой механики является фундаментальный для нее принцип суперпозиции. По этой причине, сравнение с квантовой механикой может производиться только для линеаризованных моделей.

В квантовой механике постулируется принцип Паули, согласно которому в атоме не может присутствовать несколько электронов с одинаковым набором квантовых чисел – главного квантового числа, орбитального квантового числа, магнитного квантового числа и квантового числа проекции спина. Для основного состояния электрона в атоме водорода орбитальное и магнитное квантовые числа равны нулю. При этом квантовое число проекции спина по модулю равно $\frac{1}{2}$. Возникает вопрос – на какую ось проецируется вектор спина, если распределение электрона абсолютно сферически симметрично? Используемая в работе модель тела-точки в центральном потенциальном поле не претендует на применимость к явлениям микромира, но дает интересный результат – неподвижной осью является

вектор кинетического момента. Именно относительно вектора кинетического момента траектория тела-точки и формирует полюса.

Некоторые вопросы также может вызвать использование нетипичной модели тела-точки, являющейся обобщением модели абсолютно твердого тела. Основанием для введения подобной модели является то, что материальная точка, имеющая из параметров только массу, не может иметь сложных форм движения, которые могли бы смоделировать пространственное движение электрона рядом с ядром атома. Более сложные формы движения могут возникнуть только в том случае, если количество параметров модели будет увеличено. Модель абсолютно твердого тела имеет больше параметров, чем модель материальной точки, но не имеет механизма переноса энергии с трансляционных степеней свободы на спиновые, что, видимо, очень существенно для явлений в микромире. Именно механизм взаимного влияния трансляционных и спиновых движений приводит к такому разнообразию форм движения тела-точки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М.А. Классическая механика. — Издание 2-е, переработанное. — М.: Наука, 1980. — 367 с.
2. Архимед. Сочинения/ О равновесии плоских фигур// Пер., вступительная статья и комментарии И.Н. Веселовского/ Пер. арабских текстов Б.А. Розенфельда. — М.: Физматгиз, 1962. — 640 с. — С. 234.
3. Барановский В.И. Квантовая механика и квантовая химия: учебное пособие / В.И. Барановский, под ред. С.В. Макарова. — СПб.: Лань, 2019. — 428 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 630 с. — С. 363—375.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — ИЛ, 1954. — 216 с.
6. Бодовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. — М.: Наука, 1984. — 136 с.
7. Бор Н. Избранные научные труды (статьи 1909–1925). — М.: Наука, 1970. — 970 с.
8. Борн М. Атомная физика, 2-е изд. — М.: Мир, 1967. — 493 с.
9. Григорьян А.Т. Механика от античности до наших дней. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
10. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости// Глава II, §1, Основные понятия теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
11. Демидович Б.П. Численные методы анализа. 3-е изд./ Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
12. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. — М.: Наука, 1985. — 379 с.
13. Дирак П. Принципы квантовой механики / П. Дирак. — М.: Наука, 1979. — 480 с.

14. Евклид. Начала./пер. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского под ред. М.Я. Выгодского, И.Н. Веселовского. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. — 446 с.
15. Жилин П.А. Теоретическая механика: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. — 147 с.
16. Жилин П.А. Динамика твердого тела: учеб. пособие / П.А. Жилин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 560 с.
17. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. I. / Ж. Лагранж; ОНТИ. — М.; Л., 1938. — 348 с.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика/ Т. III. Квантовая механика. — М.: Наука, 1989. — 752 с.
19. Мах Э. Механика (историко–критический очерк ее развития) / Э. Мах. — СПб.: Общественная польза, 1909. — 448 с.
20. Метод Рунге-Кутты решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная математика/ Сост.: В.В. Демченко. — М.: МФТИ, 2004. — 20 с.
21. Милантьев В.П. История возникновения квантовой механики и развитие представлений об атоме. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017. — 246 с.
22. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон. // Собрание трудов А. Н. Крылова. Т. VII. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. — 152 с.
23. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная математика/ А.М. Денисов, А.В. Разгулин. — М.: МГУ, 2009. — 122 с.
24. Парселл Э. Берклевский курс физики. Том 2. Электричество и магнетизм / Э. Парселл. — М.: Наука, 1971. — 444 с.
25. Планк М. Избранные труды / М. Планк. — М.: Наука, 1975. — 788 с.

26. Сафронов В.П. Пособие по физике в 3-х частях. Часть третья. Оптика. Атом. Ядро / Ростов н/Д., 2005. — 65 с.

27. Сивухин Д.В. Общий курс физики/ Т. V. Атомная и ядерная физика. Часть 1: Атомная физика.// § 13. Спектр водорода. — М.: Наука, 1986. — 416 с. — С. 68.

Приложение 1. Первые интегралы

Формулы для произведения радиус-вектора и количества

движения

Умножим (19) скалярно на \mathbf{K}_1 и выделим полный дифференциал

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1 = -\frac{1}{2q} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot). \quad (110)$$

Умножим (19) скалярно на \mathbf{R}

$$\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{K}}_1 = -\frac{q}{|\mathbf{R}|}. \quad (111)$$

Подставим (110) и (111) в тождество

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{K}_1 = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1) \cdot - \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{K}}_1, \quad (112)$$

получим

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{K}_1 = -\frac{1}{2q} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) \cdot + \frac{q}{|\mathbf{R}|}. \quad (113)$$

Подставим (110) в тождество

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)^2 = \mathbf{R}^2 \mathbf{K}_1^2 - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1)^2, \quad (114)$$

получим

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)^2 = \mathbf{R}^2 \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2. \quad (115)$$

Выражение для квадрата собственного кинетического момента

Умножим (17) скалярно на \mathbf{K}_2 , подставим (18) и выделим полный дифференциал

$$(\mathbf{K}_2^2) \cdot = 0. \quad (116)$$

Из (18) выразим \mathbf{K}_2

$$\mathbf{K}_2 = \frac{j}{b} \mathbf{K}_1 - \frac{mj-b^2}{b} \dot{\mathbf{R}}. \quad (117)$$

Возведем (117) в квадрат

$$\mathbf{K}_2^2 = \frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2 - \frac{2j(mj-b^2)}{b^2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{K}_1 + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} \dot{\mathbf{R}}^2. \quad (118)$$

Подставим (113) в (118)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^2 = & \frac{j^2}{b^2} \mathbf{K}_1^2 + \frac{j}{q} \frac{mj-b^2}{b^2} (R^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) \cdot + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (\dot{\mathbf{R}})^2 + \\ & + 2j \frac{mj-b^2}{b^2} \frac{q}{|\mathbf{R}|}, \end{aligned} \quad (119)$$

Выражение для квадрата кинетического момента

Возведем (26) в квадрат

$$\mathbf{K}_2^{Q^2} = (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)^2 + 2\mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1) + \mathbf{K}_2^2. \quad (120)$$

Подставим (117) в $\mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)$

$$\mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1) = -\frac{mj-b^2}{b} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{K}_1 \times \dot{\mathbf{R}}). \quad (121)$$

Подставим (18), (20) в $\mathbf{K}_1 \times \dot{\mathbf{R}}$

$$\mathbf{K}_1 \times \dot{\mathbf{R}} = -\frac{mj-b^2}{b} \ddot{\mathbf{R}} + \frac{j}{b} \dot{\mathbf{K}}_1. \quad (122)$$

Подставим (122), (19) в (121)

$$\mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1) = \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} \mathbf{R} \cdot \ddot{\mathbf{R}} + \frac{jq(mj-b^2)}{b^2} \frac{1}{|\mathbf{R}|}. \quad (123)$$

Подставим (115), (119), (123) в (120)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^{Q^2} = & \left(\mathbf{R}^2 + \frac{j^2}{b^2} \right) \mathbf{K}_1^2 + \frac{j}{q} \frac{mj-b^2}{b^2} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot \dot{\cdot}) - \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (\dot{\mathbf{R}})^2 - \\ & - \frac{1}{4q^2} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot \dot{\cdot})^2 + \frac{(mj-b^2)^2}{b^2} (\mathbf{R}^2) \cdot \cdot \end{aligned} \quad (124)$$

Выражение для полной энергии

По определению полная энергия системы

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + b \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} j \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{q}{|\mathbf{R}|}. \quad (125)$$

Из (6), (7) выразим $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{b} (\mathbf{K}_1 - m\dot{\mathbf{R}}). \quad (126)$$

Подставим (126) в (125)

$$E = \frac{j}{2b^2} \mathbf{K}_1^2 - \frac{mj-b^2}{b^2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{K}_1 + \frac{m(mj-b^2)}{2b^2} \dot{\mathbf{R}}^2 - \frac{q}{|\mathbf{R}|}. \quad (127)$$

Подставим (113) в (127)

$$\begin{aligned} E = & \frac{j}{2b^2} \mathbf{K}_1^2 + \frac{1}{2q} \frac{mj-b^2}{b^2} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot \dot{\cdot}) + \frac{m}{2} \frac{mj-b^2}{b^2} (\dot{\mathbf{R}})^2 - \\ & - \frac{mj}{b^2} \frac{q}{|\mathbf{R}|}. \end{aligned} \quad (128)$$

Приложение 2. Нахождение радиус-вектора

Формулы для компонент радиус-вектора в общем случае

Домножим (40) скалярно на $\frac{\mathbf{K}_2^Q}{|\mathbf{K}_2^Q|}$

$$R_z = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_2^Q. \quad (129)$$

Подставим (26) в (129)

$$R_z = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_2. \quad (130)$$

Подставим (117) в (130)

$$R_z = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \mathbf{R} \cdot \left(\frac{j}{b} \mathbf{K}_1 - \frac{mj-b^2}{b} \dot{\mathbf{R}} \right). \quad (131)$$

Подставим (110) в (131)

$$R_z = -\frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\frac{1}{2q} \frac{j}{b} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) + \frac{mj-b^2}{b} R \dot{R} \right). \quad (132)$$

Тогда из (40) плоская часть вектора \mathbf{R}

$$\tilde{R} = \sqrt{R^2 - R_z^2}. \quad (133)$$

Формула для производной полярного угла радиус-вектора в общем случае

Домножим (40) скалярно на $\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{K}_2^Q$ и упростим

$$\dot{\phi} \tilde{R}^2 |\mathbf{K}_2^Q| = \mathbf{R} \cdot (\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{K}_2^Q). \quad (134)$$

Подставим (26), (117) в (134)

$$\dot{\phi} \tilde{R}^2 |\mathbf{K}_2^Q| = \mathbf{R} \cdot \left(\dot{\mathbf{R}} \times \left(\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \frac{j}{b} \mathbf{K}_1 - \frac{mj-b^2}{b} \dot{\mathbf{R}} \right) \right). \quad (135)$$

Подставим (110), (113) в (135)

$$\dot{\phi} \tilde{R}^2 |\mathbf{K}_2^Q| = qR - \frac{1}{2q} R^2 (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) + \frac{1}{2q} R \dot{R} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) - \frac{j}{b} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{K}_1 \times \dot{\mathbf{R}}). \quad (136)$$

Выразим $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{K}_1 \times \dot{\mathbf{R}})$ из (117), (120)

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{K}_1 \times \dot{\mathbf{R}}) = \frac{b}{2(mj-b^2)} \left((\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q2} \right). \quad (137)$$

Подставим (137), (114), (110) в (136) и выразим $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{R}^2} \left\{ qR - \frac{1}{2q} R^2 (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) \cdot + \frac{1}{2q} R \dot{R} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) - \right. \\ & \left. \frac{j}{2(mj-b^2)} \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2} - \frac{1}{2q} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (138)$$

Приложение 3. Нахождение количества движения

Формулы для компонент количества движения в общем случае

Домножим (47) скалярно на $\frac{\mathbf{K}_2^Q}{|\mathbf{K}_2^Q|}$

$$K_{1z} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} (\mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)). \quad (139)$$

Подставим (117) в (139)

$$K_{1z} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\mathbf{K}_1 \cdot \left(\frac{j}{b} \mathbf{K}_1 - \frac{mj-b^2}{b} \dot{\mathbf{R}} \right) \right). \quad (140)$$

Подставим (113) в (140)

$$K_{1z} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 + \frac{1}{2q} \frac{mj-b^2}{b} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) - \frac{mj-b^2}{b} \frac{q}{|\mathbf{R}|} \right). \quad (141)$$

Тогда из (47) плоская часть вектора \mathbf{K}_1

$$\tilde{K}_1 = \sqrt{\mathbf{K}_1^2 - K_{1z}^2}. \quad (142)$$

Формула для производной полярного угла количества движения в общем случае

Домножим (47) скалярно на $\dot{\mathbf{K}}_1 \times \mathbf{K}_2^Q$ и упростим

$$\dot{\theta} \tilde{K}_1^2 |\mathbf{K}_2^Q| = \mathbf{K}_1 \cdot (\dot{\mathbf{K}}_1 \times \mathbf{K}_2^Q). \quad (143)$$

Подставим (26), (19) в (143)

$$\dot{\theta} \tilde{K}_1^2 |\mathbf{K}_2^Q| = \mathbf{K}_1 \cdot \left(-q \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \right). \quad (144)$$

Из (144) нетрудно получить

$$\dot{\theta} \tilde{K}_1^2 |\mathbf{K}_2^Q| = \frac{q}{|\mathbf{R}|^3} (\mathbf{R}^2 \mathbf{K}_1^2 - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1)^2 + \mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)). \quad (145)$$

Подставим (114) в (120) и выразим $\mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)$

$$\mathbf{K}_2 \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1) = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{R}^2 \mathbf{K}_1^2 + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1)^2 + \mathbf{K}_2^Q{}^2 - \mathbf{K}_2^2 \right). \quad (146)$$

Подставим (146), (110) в (145) и выразим $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{q}{2|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{K}_1^2 |\mathbf{R}|^3} \left(\mathbf{R}^2 \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 + \mathbf{K}_2^Q{}^2 - \mathbf{K}_2^2 \right). \quad (147)$$

Приложение 4. Нахождение собственного кинетического момента
Формулы для компонент собственного кинетического момента в
общем случае

Домножим (52) скалярно на $\frac{\mathbf{K}_2^Q}{|\mathbf{K}_2^Q|}$

$$K_{2z} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q|} (\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_2^Q). \quad (148)$$

Возведем обе части (26) в квадрат и выразим $\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_2^Q$

$$\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_2^Q = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_2^{Q2} + \mathbf{K}_2^2 - (\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)^2). \quad (149)$$

Подставим (149), (115) в (148)

$$K_{2z} = \frac{1}{2|\mathbf{K}_2^Q|} \left(\mathbf{K}_2^{Q2} + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{R}^2 \mathbf{K}_1^2 + \frac{1}{4q^2} (|\mathbf{R}|^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 \right). \quad (150)$$

Тогда из (52) плоская часть вектора \mathbf{K}_2

$$\tilde{K}_2 = \sqrt{\mathbf{K}_2^2 - K_{2z}^2}. \quad (151)$$

Формула для производной полярного угла собственного
кинетического момента в общем случае

Домножим (52) скалярно на $\dot{\mathbf{K}}_2 \times \mathbf{K}_2^Q$ и упростим

$$\dot{\alpha} \tilde{K}_2^2 |\mathbf{K}_2^Q| = \mathbf{K}_2 \cdot (\dot{\mathbf{K}}_2 \times \mathbf{K}_2^Q). \quad (152)$$

Подставим (20), (26) в (152)

$$\dot{\alpha} \tilde{K}_2^2 |\mathbf{K}_2^Q| = -\frac{b}{mj-b^2} (\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2) (\mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_2^Q). \quad (153)$$

Подставим (117), (149) в (153)

$$\dot{\alpha} \tilde{K}_2^2 |\mathbf{K}_2^Q| = -\frac{b}{2(mj-b^2)} \left(\frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 - \frac{mj-b^2}{b} \mathbf{K}_1 \cdot \dot{\mathbf{R}} \right) ((\mathbf{R} \times \mathbf{K}_1)^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^2). \quad (154)$$

Подставим (115), (113) в (154) и выразим $\dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{|\mathbf{K}_2^Q| \tilde{K}_2^2} \left\{ \left(-\frac{j}{mj-b^2} \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{2q} (R^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot) + \frac{q}{R} \right) \left(R^2 \mathbf{K}_1^2 - \frac{1}{4q^2} (R^3 (\mathbf{K}_1^2) \cdot)^2 + \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q2} \right) \right\}. \quad (155)$$

Приложение 5. Начальные условия

Формулы для начальных условий в частном случае

Подставим $\mathbf{K}_1^2 = \text{const}$ в (110)

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}_1 = 0. \quad (156)$$

Подставим (26), (117) в $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2^Q$

$$\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2^Q = \frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 - \frac{q(mj-b^2)}{bR}. \quad (157)$$

Подставим (26) в $\mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{K}_2^Q \times \mathbf{R})$

$$\mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{K}_2^Q \times \mathbf{R}) = \mathbf{K}_2^Q \cdot (\mathbf{K}_2^Q - \mathbf{K}_2). \quad (158)$$

Подставим $R = R_p$ в (81), (149)

$$\frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 = \frac{q(mj-b^2)}{bR_p}, \quad (159)$$

$$R_p^2 \mathbf{K}_1^2 = \mathbf{K}_2^2 - \mathbf{K}_2^{Q^2}. \quad (160)$$

Подставим (159), (160) в (157), (158)

$$\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2^Q = \frac{j}{b} \mathbf{K}_1^2 \frac{R-R_p}{R}, \quad (161)$$

$$\mathbf{K}_1 \cdot (\mathbf{K}_2^Q \times \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{K}_1^2 (R^2 - R_p^2). \quad (162)$$

Подставим (90) в (161), (162), рассмотрим начальный момент времени и отнормируем векторы

$$\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{j |\mathbf{K}_1|}{b |\mathbf{K}_2^Q|} \frac{R_0 - R_p}{R_0}, \quad (163)$$

$$\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{K}_1|}{|\mathbf{K}_2^Q|} \frac{R_0^2 - R_p^2}{R_0 \sin \gamma_0}, \quad (164)$$

где введен орт количества движения в начальный момент времени

$$\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} = \frac{\mathbf{K}_1^{(0)}}{|\mathbf{K}_1^{(0)}|}. \quad (165)$$

Подставим (90) в (156), получим

$$\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_x = -\frac{\cos \gamma_0}{\sin \gamma_0} (\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_z). \quad (166)$$

Представим $\mathbf{K}_1^{(0)}$ в виде

$$\mathbf{K}_1^{(0)} = |\mathbf{K}_1| \left((\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_{K_1^{(0)}} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \right). \quad (167)$$

Подставим (163), (164), (166) в (167)

$$\mathbf{K}_1^{(0)} = \frac{\mathbf{K}_1^2}{|\mathbf{K}_2^Q|} \frac{R_0 - R_p}{R_0 \sin \gamma_0} \left(-\frac{j}{b} \cos \gamma_0 \mathbf{e}_x + \frac{R_0 + R_p}{2} \mathbf{e}_y + \frac{j}{b} \sin \gamma_0 \mathbf{e}_z \right). \quad (168)$$

Так как $\mathbf{K}_1^{(0)2} = \mathbf{K}_1^2$ представим (168) в виде

$$\mathbf{K}_1^{(0)} = \frac{|\mathbf{K}_1|}{R_a} \left(-\frac{j}{b} \cos \gamma_0 \mathbf{e}_x + \frac{R_0 + R_p}{2} \mathbf{e}_y + \frac{j}{b} \sin \gamma_0 \mathbf{e}_z \right), \quad (169)$$

где введено обозначение

$$R_a = \sqrt{\frac{j^2}{b^2} + \frac{(R_0 + R_p)^2}{4}}. \quad (170)$$

Сравнив (168), (169), получим

$$|\mathbf{K}_2^Q| = |\mathbf{K}_1| \left| \frac{R_0 - R_p}{\sin \gamma_0} \right| \frac{R_a}{R_0}. \quad (171)$$

Из (159) выразим $|\mathbf{K}_1|$

$$|\mathbf{K}_1| = \sqrt{\frac{q(mj - b^2)}{jR_p}}. \quad (172)$$