

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
« ____ » _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с
микроструктурой

Выполнил

студент гр.5030103/90101

Ж. М. Махамбетали

Руководитель

доцент ВШФиМТ, к.ф. м.н.

К. П. Фролова

Санкт-Петербург 2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

**на выполнение выпускной квалификационной
работы**

студенту Махамбетали Жандосу Маратовичу, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Моделирование материалов с помощью реологических моделей.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): разработка расчетного инструмента для построения реологических моделей, программная реализация алгоритма, внедрение графического пользовательского интерфейса, сравнение результатов с аналитическим решением.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: М. А. Фомичева, инженер, ООО Корнинг, СНГ
7. Дата выдачи задания 27.02.2023

Руководитель ВКР: _____ К. П. Фролова, доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент: _____ Ж. М. Махамбетали

РЕФЕРАТ

На 37 с., 22 рисунков, 0 таблиц, 15 источников

МЕТОД РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ, ВЯЗКОУПРУГОСТЬ, ТЕРМОУПРУГОСТЬ, PYTHON

В данной работе рассматривается метод реологических моделей и разработка инженерного расчетного инструмента для автоматизации вычисления определяющих соотношений. В работе разработан метод символьного решения, описывающей вычисления на каждом этапе расчета. Для реализации разработанного алгоритма используется язык программирования Python версии 3.11.0 и инструменты разработки под ОС Windows от компании Microsoft. Произведена валидация решателя на существующие аналитические решения в научных статьях. Для взаимодействия с решателем разработан современный графический интерфейс, содержащий все необходимые настройки решателя и возможности отслеживания процесса решения задачи. Таким образом, разработанная в ходе работы программа представляет собой прототип расчетного ПО, которое может применяться для решения задач с помощью метода реологических моделей и при необходимости может быть расширено на более широкий класс задач.

THE ABSTRACT

37 Pages, 22 figures, 0 tables, 15 sources

RHEOLOGICAL MODEL METHOD, RHEOLOGICAL MODEL, STRUCTURES MODEL, VISCOELASTICITY, THERMOELASTICITY, PYTHON

The paper considers using method of rheological models and the development of an engineering calculation tool for assessing the susceptibility of relationships. The paper developed a symbolic method that describes the difficulties at each stage of the solution. To implement the development algorithm, the Python language version 3.11.0 and development tools for Windows OS from Microsoft are used. The solver was validated with solutions in scientific articles. To interact with solver there is the modern graphical interface, all the necessary solver settings, and the ability to track the solution are available. Thus, the developed program in the course of the work is a computational software prototype, in which problem solutions can be described by using the methods of rheological models and, if necessary, can be extended to wider class of problems.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ _____	5
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА _____	7
1.1. Описание метода реологических моделей _____	7
1.2. Модели метода _____	7
1.3. Правила комбинирования элементов _____	11
1.4. Синтез однотипных элементов _____	13
ГЛАВА 2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ _____	16
2.1. Постановка задачи _____	16
2.2. Исходные данные _____	17
2.3. Модульная структура программы _____	18
ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ _____	23
3.1. Аналитическое решение системы _____	23
3.2. Символьное решение системы и валидация _____	27
3.3. Исследование определяющего соотношения _____	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ _____	34
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ _____	35

ВВЕДЕНИЕ

В связи с быстрым развитием индустрии появляется необходимость более тщательно проверять качество и экономическую эффективность производимой продукции. Кроме анализа химического состава продукции, также важно учитывать другие свойства материала, которые могут оказывать влияние на процессы производства, например, на оборудование и машины для производства продовольствия. Для описания таких свойств используется понятие реологии, которое позволяет изучать текучесть и деформационные свойства реальных материалов на основе идеальных моделей Гука и Ньютона. Реология занимается процессами, связанными с течением различных материалов, такими как вязкие и пластичные, а также описывает релаксацию напряжений и другие свойства.

Поэтому эта тема остается актуальной, так как в настоящее время качество продукции и безопасность пищевых продуктов становятся все более важными вопросами, особенно в свете увеличивающейся мировой популяции и усиления конкуренции на рынке продуктов питания. В связи с этим, понимание реологии материалов используется для создания более эффективных методов производства продуктов питания, что может помочь обеспечить их более высокое качество, улучшить экономическую эффективность производства и повысить безопасность потребления пищевых продуктов. Метод реологической модели широко используется в различных областях, помимо пищевой промышленности, медицину, материаловедение и т. д. Он позволяет более точно определять реологические свойства материалов и улучшать их качество, а также предсказывать и контролировать процессы течения и деформации в различных условиях.

Можно отметить, что в области реологии также проводятся работы для автоматизации решения проблем, связанных с текучестью и деформационными свойствами материалов. Разработка новых алгоритмов и программных инструментов помогает более точно и быстро оценить

реологические свойства материалов, что может улучшить качество продукции и повысить производительность производства. Кроме того, автоматизация процессов анализа реологических данных может существенно сократить время и затраты на проведение исследований и экспериментов.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

1.1. Описание метода реологических моделей

Метод реологической модели — это математический метод, используемый для описания деформирования материалов, течения под нагрузкой. Суть метода заключается в том, что материалы представляются в виде определенной символической модели, которая описывает их реологические свойства. Например, для упругого материала такой моделью является пружина, иначе говоря модель Гука; для теплопроводящего элемента отвечает некий элемент, который не деформируется, но имеет температурный эффект на материал; в качестве вязкого элемента выступает демпфер — элемент Ньютона; для пластичного — материал Сен-Венана-Кулона. В зависимости от комбинации этих элементов реологические модели могут быть линейными или нелинейными, в зависимости от типа материала и условий эксперимента. Например, термоупругий материал можно описать как комбинацию термического и упругого материала. Метод реологической модели позволяет создавать новые определяющие соотношения — соотношения между деформациями и напряжениями, которые являются центральным понятием в механике сплошной среды [10].

1.2. Модели метода.

Каждый элемент в отдельности:

1. Термический элемент. Вектор теплового потока обычно задается законом Фурье. Напряжение зависит только от температуры T , но не от градиента температуры $grad(T)$.

$$\underline{h} = \chi \nabla T,$$

но стоит утвердить, что вектор теплового потока — это функция, зависящая не только от ∇T , но и от тензора напряжений Коши-Грина $\underline{\underline{C}}$.

$$\underline{h} = h(\nabla T, \underline{\underline{C}})$$

Однако если рассматривать малые деформации, то тензор напряжения будет мало отличаться от единичного тензора и не будет иметь существенного влияния на тензор деформаций. В случае больших деформации, например для термоупругой постановки (резина), при растягивании больше всего нас будет интересовать какие максимальные напряжения выдержит данный материал, а не какие тепловые потоки будут проходить через материал, после чего можно рассматривать материалы с чистыми свойствами, когда пренебрегаем влиянии напряжений $\underline{\underline{C}}$, чтобы избежать громоздких выводов, которые возрастут при учитывании всех моментов.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(T, \text{grad}(T))$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = p(T, \text{grad}(T))\underline{\underline{E}} - \text{шаровая часть}$$

$$\underline{h} - \chi \nabla T - \text{тепловой поток}$$

$$f = f(T) - \text{свободная энергия}$$

$$\eta = -\frac{df(T)}{dT} = \eta(T) - \text{энтропия}$$

Термопроводящий материал является недеформируемым, то есть отчётный радиус-вектор всегда совпадает с актуальным $\underline{r} = \underline{R}$. Соответственно никаких перемещений нет, а значит, градиент скорости является единичным тензором $\nabla v = \underline{\underline{E}}$ [4].

Схематический вид термического элемента:

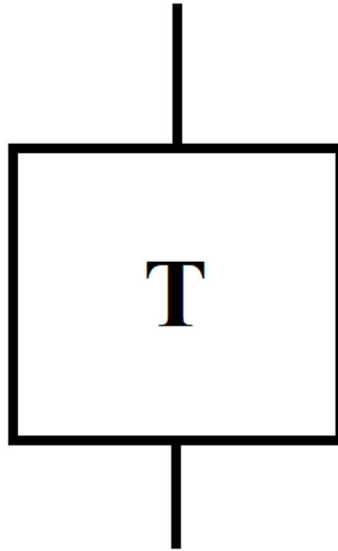


Рисунок 1а. Термический элемент

2. Упругий элемент. Рассматривается для начала линейный упругий материал. Тензор напряжений, поток, свободная энергия и энтропия будет выглядеть следующим образом:

$$\underline{\underline{\sigma}} = (m + kv)\underline{\underline{E}} + 2\mu\underline{\underline{e}}, \text{ где}$$

$$\underline{v} = tr(\underline{\underline{\varepsilon}}), \quad \underline{\underline{e}} = dev(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$\underline{h} = 0$$

$$f = mv + \frac{kv^2}{2} + \mu\underline{\underline{e}}:\underline{\underline{e}} + A(T)$$

$$\eta = -\frac{df}{dT} = \frac{dm}{dT}v - \frac{dk}{dT}\frac{v^2}{2} - \frac{d\mu}{dT}\underline{\underline{e}}:\underline{\underline{e}} + \frac{dA(T)}{dT}$$

Рассмотрим нелинейный упругий материал. Тензор напряжений будет следующим:

$$\underline{\underline{T}} = -\rho^2 \frac{df_0}{d\rho} \underline{\underline{E}} + 2\rho dev\left(\frac{df_*}{dI_1} \underline{\underline{\Lambda}}_B + 2 \frac{df_*}{dI_2} \underline{\underline{\Lambda}}_B^2\right)$$

I_1, I_2 - инварианты тензора формообразования

$\underline{\underline{\Lambda}}_B$ - тензор формообразования

Поток также будет нулевым ($\underline{h} = 0$), а свободная энергия и энтропия будут иметь такие выражения:

$f = f_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + f_*(I_1, I_2)$, где f_0 отвечает за изменение объема, а f_* связана с изменением формы

$$\eta = - \frac{df}{dT}$$

Схематический вид упругого элемента:



Рисунок 16. Упругий элемент

3. Вязкий элемент. Рассмотрим линейный вязкий материал. Тензор напряжений будет следующим:

$$\underline{\underline{T}} = k_v I_1 \underline{\underline{E}} + 2\mu_v \underline{\underline{d}}, \text{ где}$$

k_v – объемная вязкость, μ_v – сдвиговая вязкость

$$I_1 = \nabla \cdot v$$

$$\underline{\underline{d}} = dev((\nabla v)^s)$$

Поток, свободная энергия и энтропия в данном случае будут нулевыми.

$$\underline{h} = 0$$

$$f = 0$$

$$\eta = 0$$

Для несжимаемого вязкого материала ($\nabla \cdot v = 0$) тензор напряжения примет такой вид:

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{E}} + 2\mu_v \underline{\underline{d}}$$

В случае нелинейного вязкого материала:

$$\underline{\underline{T}} = A_0 \underline{\underline{E}} + A_1 \underline{\underline{D}} + A_2 \underline{\underline{D}}^2$$

$$A_k = A_k(T, I_1, I_2, I_3)$$

Схематический вид вязкого элемента:

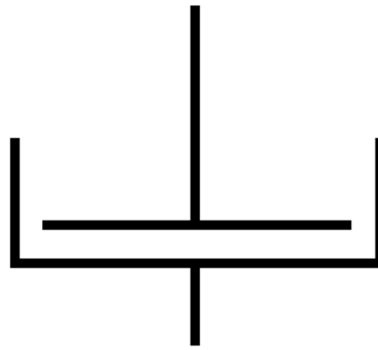


Рисунок 1в. Вязкий элемент

4. Пластический элемент. Не рассматривается.

1.3. Правила комбинирования элементов.

Рассмотрим варианты того, как можно комбинировать друг с другом рассмотренные элементы. Существует 2 основных типа таких соединений: последовательное и параллельное [5].

Рассмотрим два материала, у которых имеются:

- Напряжения $\sigma(t)$;
- Деформации $x(t)$;
- Тепловые потоки h ;
- Свободные энергии f ;
- Энтропия η .

1. Параллельное соединение. Если данную систему растягивать в обе стороны, то можно предположить, что удлинения будут одинаковые, а усилия будут складываться. В дальнейшем утверждается, что вместо удлинения будут рассматриваться тензора скоростей деформации $\underline{\underline{D}}$.

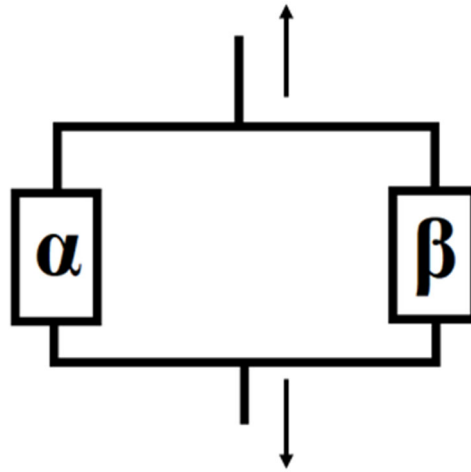


Рисунок 2а. Параллельное соединение элементов

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} + \underline{\underline{\sigma}}_{\beta}$$

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{\alpha} = \underline{\underline{D}}_{\beta}$$

2. Последовательное соединение. Аналогично предыдущему примеру, система растягивается в противоположные стороны и можно получить, что общее усилие системы будут равны, а удлинения складываются.

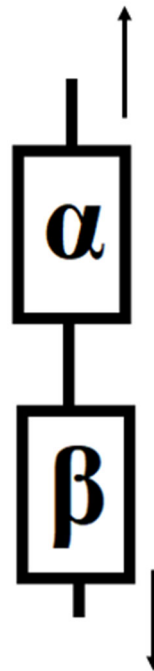


Рисунок 2б. Последовательное соединение элементов

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} = \underline{\underline{\sigma}}_{\beta}$$

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{\alpha} + \underline{\underline{D}}_{\beta}$$

Еще стоит отметить, что в обоих случаях потоки, свободные энергии и энтропия складываются.

$$\underline{h} = \underline{h}_\alpha + \underline{h}_\beta$$

$$f = f_\alpha + f_\beta$$

$$\eta = \eta_\alpha + \eta_\beta$$

Если исходные элементы удовлетворяют принципу материальной объективности, описывают изотропный материал и не противоречат второму закону термодинамики, тогда справедливы следующие теоремы:

1. Новые определяющие уравнения, полученные с использованием принципа реологических моделей, будут так же удовлетворять второму закону термодинамики.
2. Новые определяющие уравнения, полученные методом реологических моделей, удовлетворяют принципу материальной объективности.
3. Новые определяющие уравнения соответствуют некому изотропному материалу, если все определяющие уравнения, входящие в модель, представляют из себя определяющие уравнения изотропных материалов

1.4. Синтез однотипных элементов.

При построении структурной модели и уравнений следует воспользоваться следующими выводами [2]:

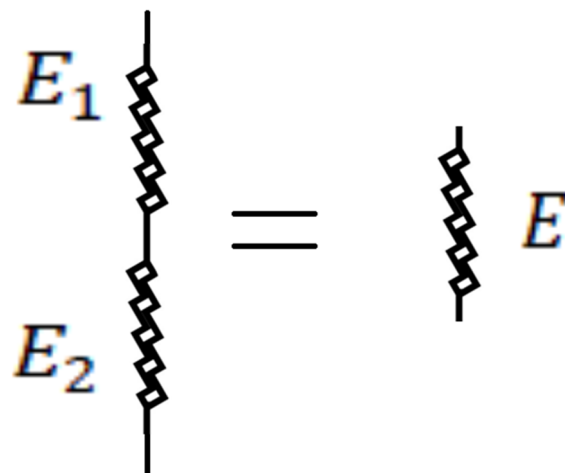


Рисунок 3а. Правила упрощения системы

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

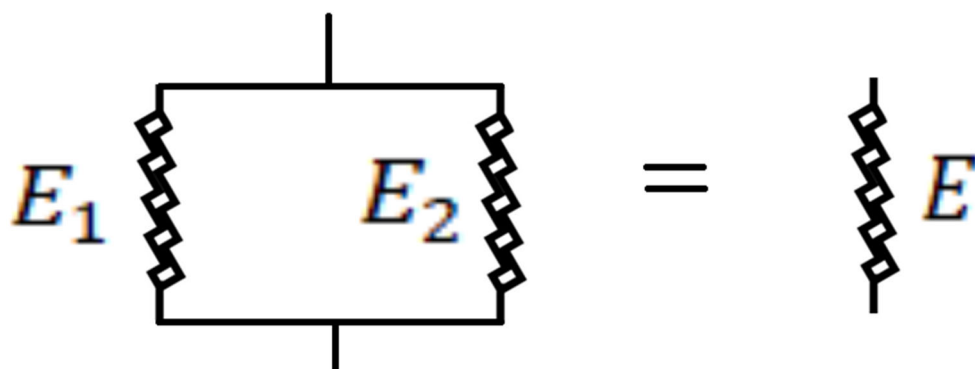


Рисунок 3б. Правило упрощения системы

$$E = E_1 + E_2$$

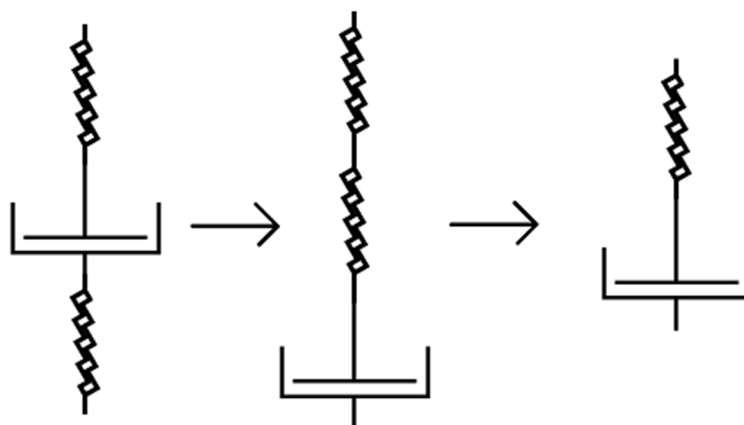


Рисунок 3в. Правило упрощения системы

Из данного наблюдения можно сделать следующие выводы:

1. Система, состоящая из упругих и вязких элементов, может быть приведена к обобщенной модели Максвелла. Эта модель представляет собой комбинацию упругого и вязкого поведения материала, которая может быть использована для анализа и предсказания его реологических характеристик.
2. Трехэлементные и четырехэлементные системы также могут быть упрощены. Однако, при анализе таких систем важно учитывать количество элементов, обозначенное как n , и определить, является ли n четным или нечетным.
3. Для нечетных значений n могут возникать остаточные деформации, которые не могут быть сразу же восстановлены. Однако, в этом случае отсутствует мгновенная упругость, то есть система не будет сразу же

возвращаться в исходное состояние после прекращения деформирующей силы.

4. В случае четных значений n наблюдается обратная ситуация: система обладает мгновенной упругостью, то есть она возвращается в исходное состояние сразу же после прекращения деформации, без остаточных деформаций.

Эти выводы позволяют лучше понять поведение системы в зависимости от количества элементов и типов реологических свойств, что может быть полезным при моделировании и анализе реологического поведения материалов и систем.

ГЛАВА 2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

2.1. Общая постановка задачи

Необходимо разработать расчетный инструмент на основе метода реологической модели, позволяющий проводить расчеты реологических характеристик материалов и решать следующие задачи:

1. **Определение реологических параметров материалов:** Инструмент должен предоставлять возможность определения основных реологических свойств материалов, таких как вязкость, упругость и другие. Пользователь должен иметь возможность вводить соответствующие данные и получать значения этих параметров для анализа и дальнейшего использования.
2. **Анализ реологического поведения:** Инструмент должен предоставлять функциональность для анализа реологического поведения материалов. Пользователь должен иметь возможность изучать изменение реологических характеристик в зависимости от различных факторов, таких как время, температура, нагрузка и другие параметры. Инструмент должен предоставлять графические и числовые результаты для облегчения анализа и интерпретации данных.
3. **Моделирование деформаций и напряжений:** Инструмент должен позволять моделировать деформации и напряжения в материалах с использованием реологической модели. Пользователь должен иметь возможность задавать различные условия деформации и нагрузки на материалы, а инструмент должен проводить расчеты и выводить результаты, отражающие распределение деформаций и напряжений.
4. **Проведение исследования влияния температуры на реологические параметры материала.**

Калькулятор должен быть оснащен графическим интерфейсом пользователя, который позволит вводить данные, отображать результаты расчетов и проводить визуализацию полученных данных.

2.2. Исходные данные

Для упрощения процесса освоения интерфейса было принято решение использовать маркированные списки, в которых можно указывать тип соединения элементов. В случае сложных систем, включающих вложенные подсистемы (как показано на рисунке 3), возникает необходимость использовать рекурсивные методы для обхода всех систем и элементов.

Такой подход позволяет организовать структурированный список, где каждый элемент может быть связан с другими элементами в зависимости от их типа соединения. Рекурсивные методы позволяют эффективно обрабатывать сложные системы, переходя от внешних подсистем к внутренним и обратно [7].

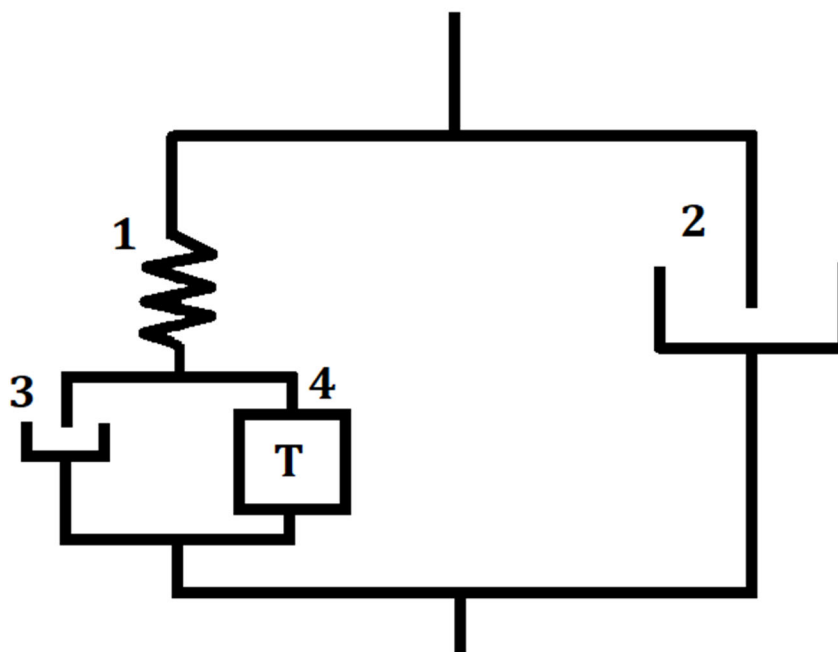


Рисунок 4. Пример системы с учетом вложенной подсистемы.

Рассматривая данную систему, можно рассудить, что для инициализации системы необходимы некоторые данные, получаемые от пользователя. Для создания тривиальной системы (без вложенных подсистем) нужны следующие данные:

1. Количество элементов;
2. Тип соединения этих элементов;
3. Возможность определения определяющее соотношение;
4. В зависимости от типа элементов определение реологических свойств.

Если в пункте 3 указать тип элемента как "иное", то это предоставляет возможность определить новую вложенную систему с собственными уникальными характеристиками, аналогично пунктам 1–4. Такой подход позволяет адаптировать инструмент для различных требований и потребностей пользователей, открывая возможность создания и исследования новых вложенных систем с уникальными характеристиками.

2.3. Модульная структура программы

После инициализации системы в результаты получается массив вложенных данных структуры, подчиняющаяся нескольким условиям [6]:

1. Параллельно соединенные элементы заполняются как одномерный массив, состоящий из элементов;
2. Последовательно соединенные элементы заполняются как двумерный массив, состоящий из массивов элементов.

На выходе для рисунка 3 получается массив следующей структуры:

```
[[["elastic"], [{"viscous", "thermal"}]], "viscous"]
```

Система 1. Структура, подаваемого массива

```
[[[" $\sigma_{00} = E_{00} \cdot x_{00}(t)$ "], [{" $\sigma_{010} = \eta_{010} \cdot \dot{x}_{010}(t)$ ", " $\sigma_{011} = f_{011}(T)$ "}]],  
" $\sigma_1 = \eta_1 \cdot \dot{x}_1(t)$ "]
```

Система 1а. Переписанная структура

Можно увидеть, что массив, состоящий из вязкого элемента и термического соединены параллельно, а затем общая система из этих двоих последовательно с упругим элементом, и вся эта подсистема параллельна с вязким элементом.

В дальнейшем работа будет произведена над этим массивом в качестве примера, преобразовывая его.

Требуется написать еще две функции:

1. Вычисление определяющего соотношения *параллельно* соединенных элементов: общее напряжение подсистемы определяется суммой напряжений всех её элементов, а общая деформация равна каждой из деформации всех её элементов.

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)$$
$$x(t) = x_i(t), i = 1..N$$

После поиска массива, удовлетворяющему условию заполнения параллельных элементов ($[\alpha, \beta]$) необходимо провести операции следующего вида:

- 1.1. Поиск и замена всех деформации через общую индексацию системы, так как в параллельном соединении все деформации равны, поэтому данная структура существенно не изменится.

$$[[["\sigma_{00} = E_{00} \cdot x_{00}(t)"], [{"\sigma_{010} = \eta_{010} \cdot \dot{x}_{01}(t)", "\sigma_{011} = f_{011}(T)"}]]],$$
$$["\sigma_1 = \eta_1 \cdot \dot{x}_1(t)"]$$

Система 1а. Структура, подаваемого массива

- 1.2. Подчинение закону о том, что общее напряжение равняется сумме всех напряжении, позволяет заменить индексацию и переписать этот массив как строку из суммы.

$$[[["\sigma_{00} = E_{00} \cdot x_{00}(t)"], [{"\sigma_{01} = \eta_{010} \cdot \dot{x}_{01}(t) + f_{011}(T)"}]]],$$
$$["\sigma_1 = \eta_1 \cdot \dot{x}_1(t)"]$$

Система 1б. Структура, подаваемого массива с учетом
параллельности элементов

2. Вычисление определяющего соотношения *последовательно* соединенных элементов: общее напряжение равняется каждому из напряжений элементов, а общая деформация определяется как сумма из деформации подсистемы:

$$\sigma(t) = \sigma_i(t), i = 1..N$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

После поиска массива, удовлетворяющему условию заполнения последовательных элементов ($[[\alpha], [\beta]]$) и проводив над массивом определенные действия, на выходе функция должна возвращать эту же систему, только с учетом последовательности элементов.

$$[[["\sigma_{00} = E_{00} \cdot x_{00}(t)", ["\sigma_{01} = \eta_{010} \cdot \dot{x}_{01}(t) + f_{011}(T)"]],
"\sigma_1 = \eta_1 \cdot \dot{x}_1(t)"]]$$

Система 1. Структура, подаваемого массива с учетом
параллельности элементов

- 2.1. После нахождения удовлетворяемого массива ($[[["\sigma_{00} = E_{00} \cdot x_{00}(t)", ["\sigma_{01} = \eta_{010} \cdot \dot{x}_{01}(t) + f_{011}(T)"]]]$), можно приступать к извлечению всех деформации из доступных определяющих соотношений:

$$[x_{00}(t), x_{01}(t)]$$

- 2.2. После чего согласно правилу комбинирования деформации, можно получить деформацию общей системы:

$$x_0(t) = x_{00}(t) + x_{01}(t)$$

- 2.3. Следующий шаг - замена деформации отдельных компонент через деформацию системы. Изучая систему 1, можно заметить, что вторая компонента обладает некоторыми удобствами, которые облегчают ее обработку.

$$x_{01}(t) = x_0(t) - x_{00}(t), \text{ где } x_{00}(t) = \frac{\sigma_{00}(t)}{E_{00}}$$

$$\sigma_{01}(t) = \eta_{010} \cdot \frac{d}{dt} \left(x_0(t) - \frac{\sigma_{00}(t)}{E_{00}} \right) + f_{011}(T) \rightarrow$$

→ [замена индексации на общую] →

$$\sigma_0(t) + \frac{\eta_{010}}{E_{00}} \dot{\sigma}_0(t) = \eta_{010} \cdot \dot{x}_0(t) + f_{011}(T)$$

2.4. После чего для удобства и адаптивности данного определяющего соотношения, необходимо решить линейное дифференциальное уравнение Бернулли относительно $\sigma_0(t)$.

$$\sigma_0(t) = \frac{E_{00}}{\eta_{010}} e^{-\frac{E_{00}}{\eta_{010}} t} \cdot \int_0^t e^{\frac{E_{00}}{\eta_{010}} t} (\eta_{010} x_0(t) + f_{011}(T)) dt$$

2.5. Результатом данной операции будет массив с учетом последовательных соединений:

$$[\text{"}\sigma_0(t) = \frac{E_{00}}{\eta_{010}} e^{-\frac{E_{00}}{\eta_{010}} t} \cdot \int_0^t e^{\frac{E_{00}}{\eta_{010}} t} (\eta_{010} x_0(t) + f_{011}(T)) dt\text{"}, \\ \text{"}\sigma_1 = \eta_1 \cdot \dot{x}_1(t)\text{"}]$$

Система 1. Структура, подаваемого массива с учетом последовательности элементов

После чего вызов функции для вычисления параллельных элементов позволяет получить обновленное определяющее соотношение системы 1, учитывающее все свойства реологических моделей и изменения, происходящие в системе.

$$\sigma(t) = g(t, x(t), \dot{x}(t), \dots)$$

$$\sigma(t) = \frac{E_{00}}{\eta_{010}} e^{-\frac{E_{00}}{\eta_{010}} t} \cdot \int_0^t e^{\frac{E_{00}}{\eta_{010}} t} (\eta_{010} x(t) + f_{011}(T)) dt + \eta_1 \cdot \dot{x}(t)$$

После инициализации системы и вычисления нового определяющего соотношения пользователю предоставляется возможность проанализировать данное уравнение. Пользователь может выбрать способ нагрузки на систему, такой как нулевая скорость деформации ($\dot{x}(t) = 0$), постоянная нагрузка

$(\sigma(t) = \sigma_0)$, и так далее. Затем пользователь получает новые формулы, соответствующие выбранному типу нагрузки, а также визуализацию соответствующих зависимостей.:

1. $\sigma(t)$ – распределение напряжения по времени;
2. $x(t)$ – распределение деформации по времени;
3. $\sigma(x(t))$ – зависимость напряжения от деформации.

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для анализа устойчивости программного обеспечения было решено протестировать для 10 элементов. Далее будет проведено сравнение решения с результатом, полученным аналитическим путем. Сравнение этих решений позволит оценить степень согласованности между ними и выявить возможные расхождения.

3.1. Аналитическое решение системы

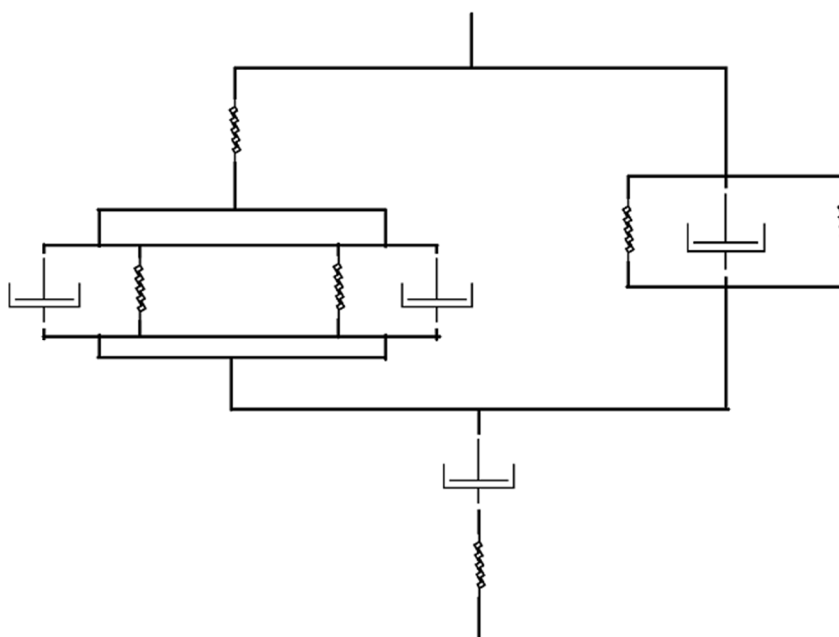


Рисунок 4. Система состоящий из 10 элементов

Для упрощения решения задачи можно присвоить порядковые номера каждому элементу системы и разделить ее на несколько подсистем. Это позволяет структурировать систему и рассматривать ее составляющие отдельно, что упрощает анализ и решение задачи.

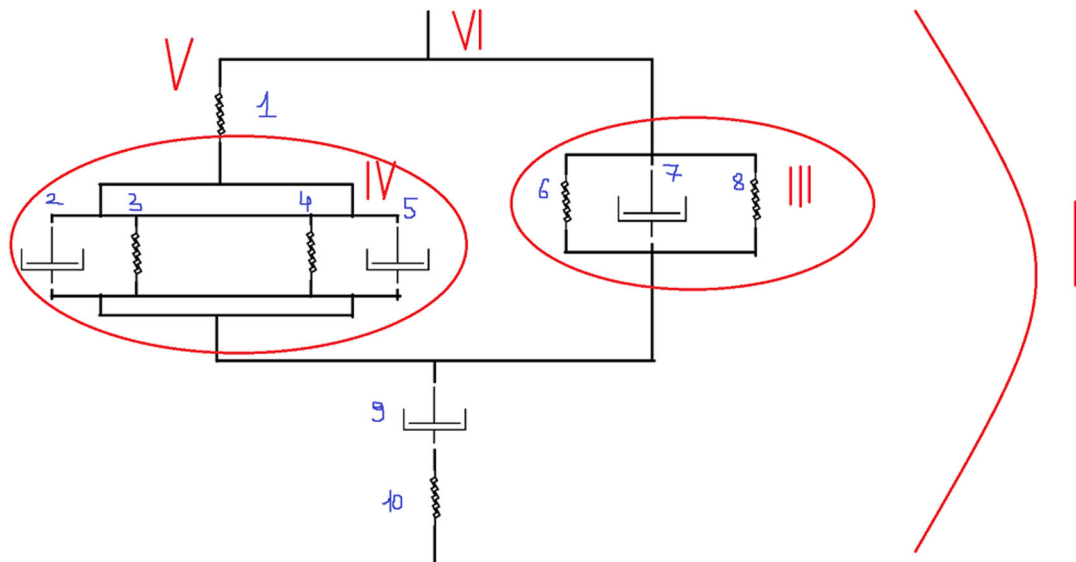


Рисунок 4а. Заполненная система порядковыми номерами

Для ускорения решения задачи, было принято решение, заменить все имеющиеся коэффициенты на 1.

$$\supset E_i = 1 \text{ Па}, \eta_i = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Шаги действия для решения системы:

Вычислить:

1. Параллельно соединенные элементы в системе IV (2, 3, 4, 5), III (6,7,8);

$$\begin{cases}
 \sigma_2 = \eta_2 \dot{x}_2(t) \\
 \sigma_3 = E_3 x_3(t) \\
 \sigma_4 = E_4 x_4(t) \\
 \sigma_5 = \eta_5 \dot{x}_5(t) \\
 \sigma_{IV}(t) = \sum_{n=2}^5 \sigma_n(t) \\
 x_{IV}(t) = x_n(t), n = \overline{2,5} \\
 \rightarrow \underline{\sigma_{IV}(t) = 2x_{IV}(t) + 2\dot{x}_{IV}(t)}
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \sigma_6 = E_6 x_6(t) \\
 \sigma_7 = \eta_7 \dot{x}_7(t) \\
 \sigma_8 = E_7 x_8(t) \\
 \sigma_{III}(t) = \sum_{n=6}^8 \sigma_n(t) \\
 x_{III}(t) = x_n(t), n = \overline{6,8} \\
 \rightarrow \underline{\sigma_{III}(t) = 2x_{III}(t) + \dot{x}_{III}(t)}
 \end{cases}$$

2. Последовательно соединенные в системе V (1, IV);

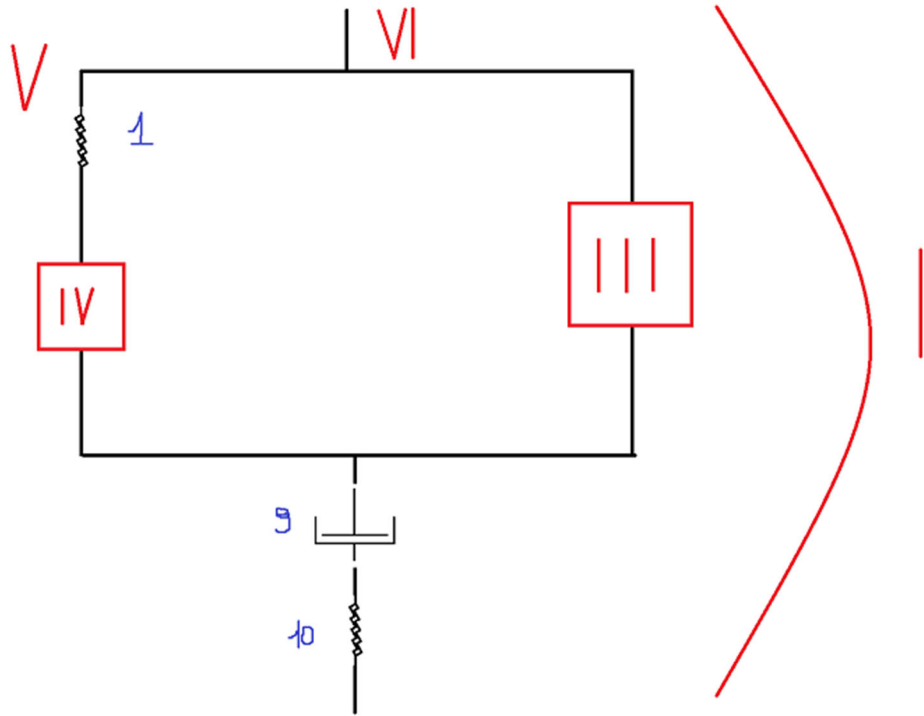


Рисунок 4б. Обобщенная система.

$$\begin{cases}
 \sigma_1(t) = E_1 x_1(t) \\
 \sigma_{IV}(t) = x_{IV}(t) + x_{IV}(t) + \dot{x}_{IV}(t) + \dot{x}_{IV}(t) \rightarrow \\
 \sigma_V = \sigma_1(t) = \sigma_{IV}(t) \\
 x_V = x_1(t) + x_{IV}(t)
 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{\sigma_V(t) = -e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}t} (x_V(t) + \dot{x}_V(t)) dt}$$

3. Параллельно соединенные в системе VI (V, III);

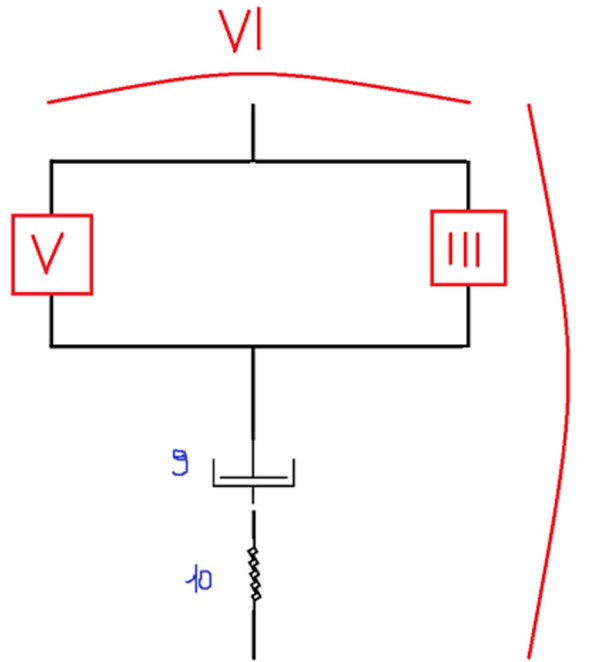


Рисунок 4в. Обобщенная система.

$$\begin{cases}
 \sigma_V(t) = -e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}t} (x_V(t) + \dot{x}_V(t)) dt \\
 \sigma_{III}(t) = 2x_{III}(t) + \dot{x}_{III}(t) \\
 \sigma_{VI}(t) = \sigma_V(t) + \sigma_{III}(t) \\
 x_{VI}(t) = x_V(t) = x_{III}(t)
 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{VI}(t) = -e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}t} (x_{VI}(t) + \dot{x}_{VI}(t)) dt + 2x_{VI}(t) + \dot{x}_{VI}(t)$$

4. Последовательно соединенные всю систему I (VI, 9, 10).

$$\begin{cases}
 \sigma_{VI}(t) = -e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}t} (x_{VI}(t) + \dot{x}_{VI}(t)) dt + 2x_{VI}(t) + \dot{x}_{VI}(t) \\
 \sigma_9(t) = \eta_9 \dot{x}_9(t) \\
 \sigma_{10}(t) = x_{10}(t) \\
 \sigma_I(t) = \sigma_{VI}(t) = \sigma_9(t) = \sigma_{10}(t) \\
 x_I(t) = x_{VI}(t) + x_9(t) + x_{10}(t)
 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \sigma_I(t) = & -e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t e^{-\frac{3}{2}t} \left(x_I(t) + \dot{x}_I(t) - \int_0^t \sigma_I(t) dt - 2\sigma_I(t) - \dot{\sigma}_I(t) \right) dt \\
 & + 2 \left(x_I(t) + \dot{x}_I(t) - \int_0^t \sigma_I(t) dt - 2\sigma_I(t) - \dot{\sigma}_I(t) \right)
 \end{aligned}$$

После получения результатов можно приступить к сравнению полученной из расчетного инструмента:

3.2. Символьное решение системы

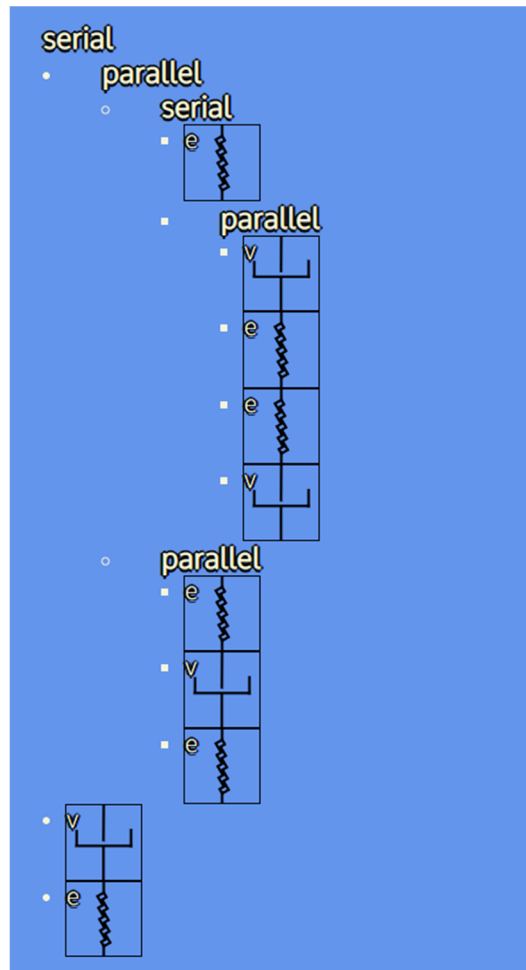


Рисунок 5. Заполненная система

После считывания системы появляется массив на окне для утверждения и все параметры упругости и вязкости в рабочем окне (workspace).

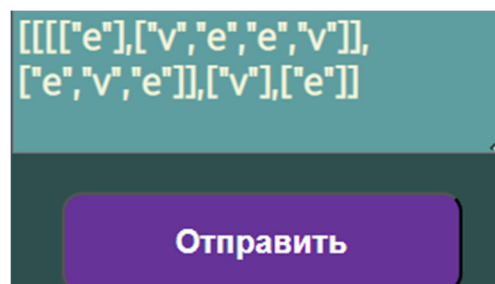


Рисунок 6. Заполненная система в массивах

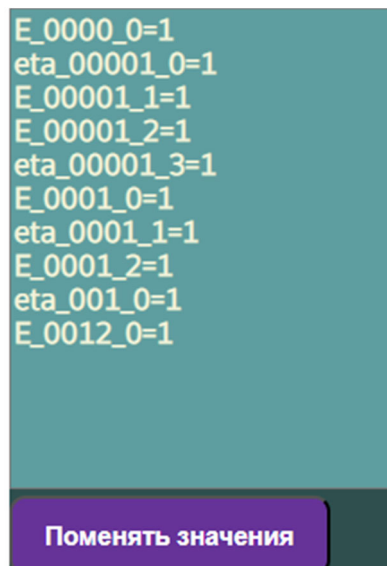


Рисунок 7. Рабочее окно

После всех операции получили следующее определяющее соотношение системы:

$$\sigma(t) = -3\sigma(t) + 2x(t) - \frac{d}{dt}\sigma(t) + \frac{d}{dt}x(t) - 2 \int \sigma(t) dt + e^{-\frac{3t}{2}} \int \left(-\sigma(t) + x(t) + \frac{d}{dt} \left(-\sigma(t) + x(t) - \int \sigma(t) dt \right) - \int \sigma(t) dt \right) e^{\frac{3t}{2}} dt$$

3.3. Исследование определяющего соотношения.

Для проведения исследования определяющего соотношения необходимо задать нагрузку, исследуемый временной интервал и при необходимости учесть начальные условия.

Под заданием нагрузки подразумевается определение величины и формы приложенной нагрузки на систему. Нагрузка может быть постоянной, изменяться во времени или иметь сложную функциональную зависимость. Это важно учесть, так как нагрузка будет влиять на поведение системы и определяющее соотношение.

$$\sigma(t) = \sigma_0 = 1$$

$$t = [0,5]$$

$$\varepsilon(0) = 0$$

При таких условиях уравнение деформации примет следующий вид:

$$x(t) = t + \frac{29}{24} - \frac{29}{24} \cdot e^{-8 \cdot \frac{t}{5}}$$

$\sigma(t)$

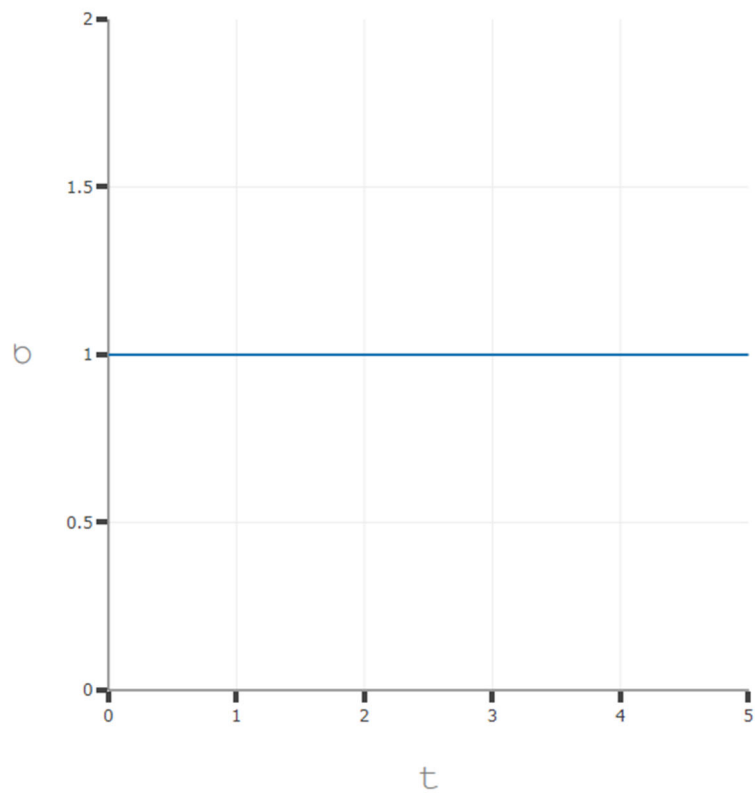


Рисунок 8а. График распределения $\sigma(t)$

$\varepsilon(t)$

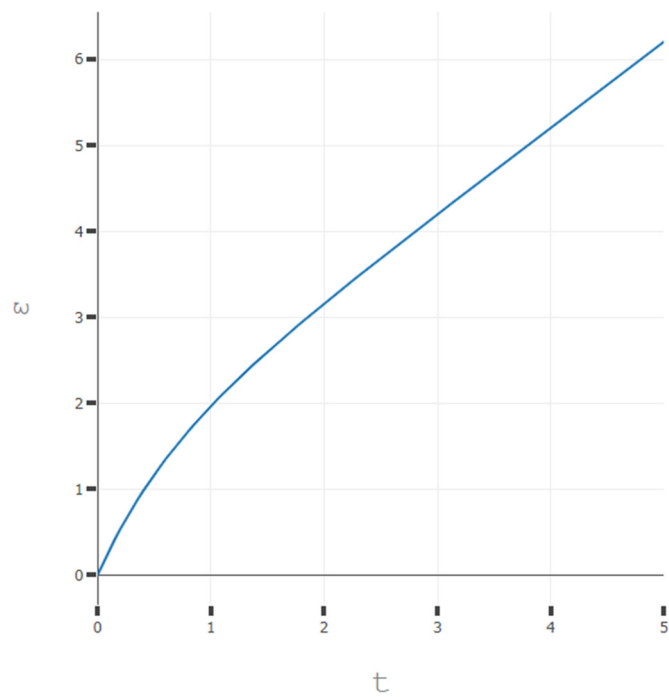


Рисунок 8б. График распределения $x(t)$

Из представленного графика можно сделать следующие наблюдения: начальное условие и рассматриваемый временной интервал соответствуют заданным параметрам. При постоянной нагрузке $\sigma(t) = 1$ система подвергается деформации. Важно отметить, что с увеличением времени наблюдается приближение распределения деформации к линейному виду. Это означает, что при достаточно больших значениях времени система проявляет свойства линейного поведения, где деформация пропорциональна приложенной нагрузке.

Так как было задано напряжение как константа, становится очевидным, что график зависимости напряжения от деформации также выходит на ту же константу (рис. 8в).

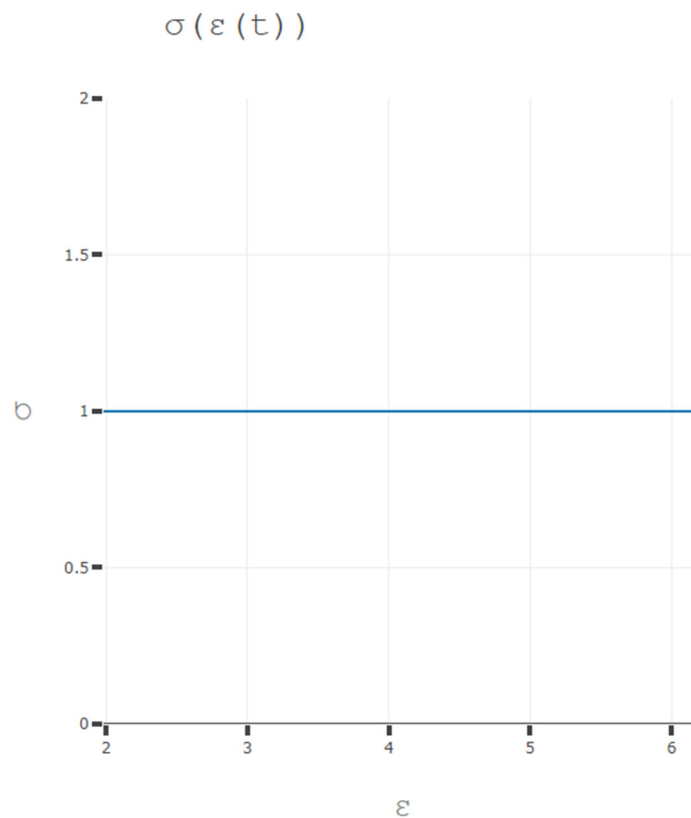


Рисунок 8в. График зависимости напряжения от деформации

Также можно исследовать другой тип нагрузки, когда известно распределение деформации:

$$\exists \varepsilon = const = 1$$

$$t = [0,5]$$

$$\sigma(0) = -1$$

То уравнение для $\sigma(t)$ примет следующий вид:

$$\sigma(t) = \left(-2\sqrt{5\pi} \cdot e^{-\frac{121}{45}} \cdot \frac{\operatorname{Erfi}\left(11 \cdot \frac{\sqrt{5}}{15}\right)}{5} + 1 \right) \cdot e^{4 \cdot t \cdot \frac{-3 \cdot t - 11}{15}} + 2 \cdot \sqrt{5\pi} \cdot e^{-4 \cdot t \cdot \frac{2}{5} - 44 \cdot \frac{t}{15} - \frac{121}{45}} \cdot \frac{\operatorname{Erfi}\left(\sqrt{5} \cdot \frac{6 \cdot t + 11}{15}\right)}{5}, \text{ где}$$

$$\operatorname{Erfi}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-z^2} dz$$

$\varepsilon(t)$

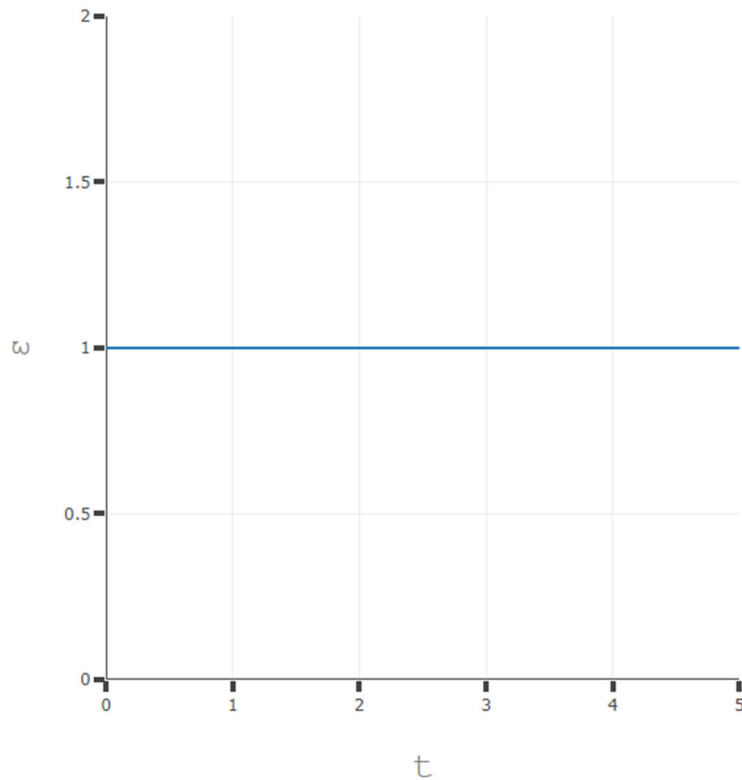


Рисунок 9а. График распределения $\varepsilon(t)$

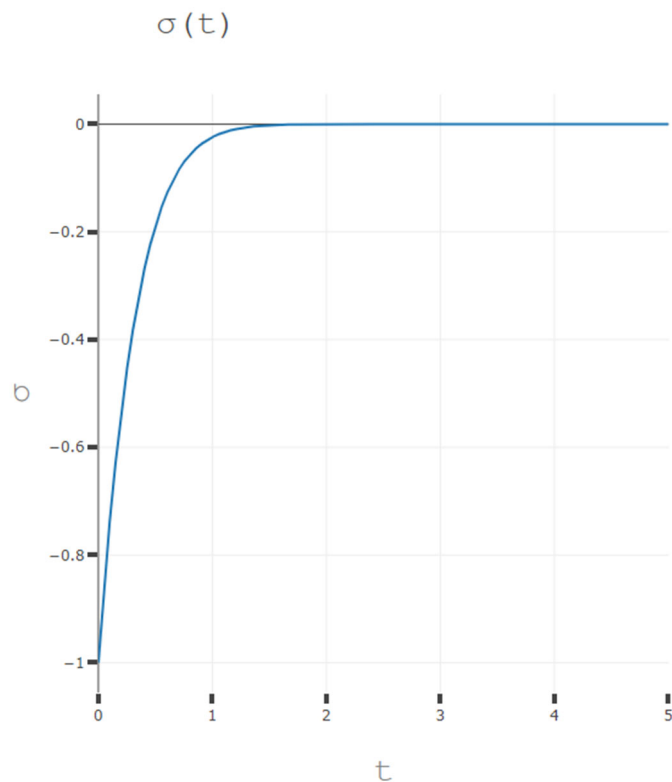


Рисунок 9б. График распределения $\sigma(t)$

По графику видно, что заданное начальное условие и исследуемое время выполняется. Помимо этого, наблюдается, что при постоянной деформации $\varepsilon(t) = 1$, будет наблюдаться напряжение, которое постепенно устремляется к нулю.

Так как деформация была задана как константа, нетрудно догадаться, что зависимость напряжения от деформации будет вертикальной прямой.

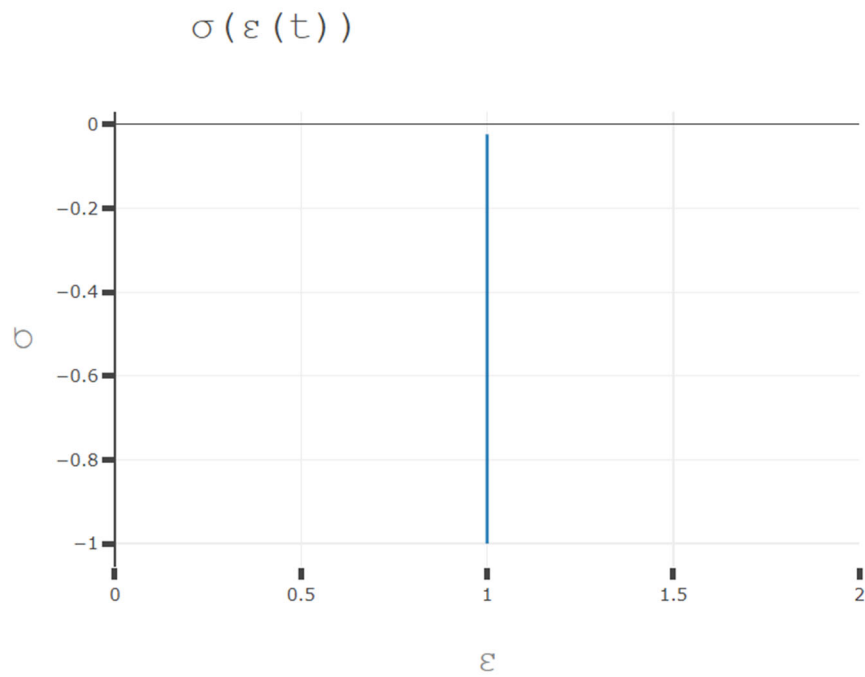


Рисунок 9в. График зависимости напряжения от деформации

После получения результатов можно сделать следующие выводы:

- Разработана программа для построения новых определяющих соотношении.
- Программа устойчива для многомерной системы.
- Был написан интерфейс для взаимодействия с пользователем.
- Полученные результаты совпали с аналитическим решением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был исследован метод реологических моделей, который является эффективным инструментом для анализа поведения материалов под воздействием механических нагрузок. В ходе исследования были подробно рассмотрены основные элементы, такие как пружины, демпферы и элементы запаздывания, а также способы их комбинирования для описания сложных реологических свойств материалов.

Для автоматизации вычислительного процесса определения соотношений системы по методу реологических моделей была разработана программа на языке Python. Для реализации символьных вычислений в программе был использован пакет SymPy. Это позволило проводить точные символьные вычисления, что обеспечивает более надежные и точные результаты анализа.

Дополнительно был создан удобный интерфейс на языке JavaScript, который позволяет взаимодействовать с программой, задавать функции напряжений или деформаций и получать результаты анализа в наглядном виде. Графики, полученные в результате анализа, предоставляют важную визуальную информацию о поведении материалов при различных условиях нагружения.

Было проведено сравнение аналитических результатов и результатов, полученных символьно. Это сравнение позволило оценить точность и эффективность разработанного метода и подтвердить его применимость для анализа реологических свойств материалов.

В целом, данная работа представляет собой значимый вклад в область исследования реологии материалов и предлагает эффективный инструмент для анализа и моделирования их поведения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. — М.: Мир, 1978. — 312 с
2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1986. – 512 с.
3. Ершов Н. М., Практическое введение в решение дифференциальных уравнений в Python, Санкт-Петербург: Издательство ДМК-Пресс.
4. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. Санкт-Петербург: Издательство Политехнического Университета, 2012
5. Зальцгендер Э. А., Ковалев Я. Н., Шульман З. П. Реофизика конгломератных материалов. Минск: Наука и техника, 1978. – 240 с.
6. Кериевски Дж., Рефакторинг с использованием шаблонов. Москва: Издательство Диалектика, 2019, 151–228 с.
7. Малкин А. Я., Исаев А. И. Реология: концепции, методы, приложения. Санкт-Петербург: Издательство Профессия. 2007, 163–280 с.
8. Пальмов В. А. Нелинейная механика деформируемых тел. Санкт-Петербург: Издательство Политехнического Университета, 2014. 345–389.
9. Рейнер М. Реология; пер. с англ Н. И. Малинина. – М.: Наука, 1965. – 223 с.
10. Симпсон К., Асинхронная обработка и оптимизация, Санкт-Петербург: Издательство Питер, 2022 г, -352 с.
11. Хантер П Т., Инглиш Б. Многопоточный JavaScript. Издательство O`Reilly, ДМК-Пресс, 2022. – 188 с.
12. Богомоллов В. А., Богомоллов С. А., Жданюк В. К. Универсальный метод составления линейных вязкоупругих структурных моделей //Журнал Автомобильный транспорт, вып. 28, 2011. – 7 с.
13. Косой В. Д., Малышев В. Д. Инженерная реология, 2005. – 250 с.
14. Мухин Н. М., Бурындин В. Г. Определение реологических и физико-механических свойств полимерных материалов. Екатеринбург: Издательство Редакционно-издательский отдел УГЛТУ, 2011. – 33 с.

15. Реология / Сост.: Н. Л. Моргунова // ФБГОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2018. – 43 с.
16. Шульман З. П. Реофизика конгломератных материалов / З. П. Шульман, Я. Н. Ковалев, Э. А. Зальцгендер. – Минск: Наука и техника, 1978. – 240 с.