

На правах рукописи

Антимонов Михаил Александрович

**ПОСТРОЕНИЕ НИЖНИХ ОЦЕНОК ЭНЕРГИИ
ДВУХФАЗНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ**

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2011

Работа выполнена в лаборатории математических методов механики материалов Учреждения Российской Академии наук Института проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Фрейдин Александр Борисович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Волков Александр Евгеньевич

кандидат физико-математических наук
Гаврилов Сергей Николаевич

Ведущая организация: ФГОУ ВПО “Южный федеральный
университет”, г. Ростов-на-Дону

Защита состоится 15 декабря 2011 года в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 002.075.01 при Институте проблем машиноведения РАН по адресу: 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61.

С диссертацией можно ознакомиться в ОНТИ Института проблем машиноведения РАН.

Автореферат разослан 15 ноября 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.075.01
доктор технических наук, профессор

В.В. Дубаренко

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Работа посвящена развитию моделей для описания фазовых превращений при деформировании твердых тел. Рассмотрен упругий материал, который может находиться в двух фазовых состояниях, различающихся модулями упругости и собственной деформацией превращения. Для случая изотропных фаз на основе нижних оценок свободной энергии в пространстве внешних деформаций построены предельные поверхности превращения, то есть определены все деформации, при которых на заданных путях деформирования впервые становится возможным фазовое превращение. Найдены двухфазные структуры, соответствующие различным областям предельной поверхности превращения.

Актуальность темы обусловлена следующими обстоятельствами. Изучение фазовых превращений при деформировании твердых тел связано с исследованиями взаимосвязи структуры материала и его деформационно-прочностных свойств. Характерной особенностью этих исследований является комплексность: исследования ведутся на стыке механики, физики твердого тела и материаловедения. Следствиями мартенситных фазовых превращений являются сверхупругость (псевдопластичность), эффект памяти формы, трансформационное упрочнение керамических материалов в результате мартенситного превращения частиц под действием напряжений, индуцированных трещинами. В целом исследования фазовых превращений при деформировании ориентированы на использование и создание материалов, в том числе композитных, заданным и нетривиальным образом реагирующих на внешние термомеханические воздействия. При этом речь может идти не только о создании элементов конструкций, выполняющих специфические функции, но и собственно “материале как машине”¹.

При описании фазовых превращений, вызванных деформационными воздействиями, основными являются следующие вопросы: при каких деформациях начинается фазовое превращение и как материал переходит из одного фазового состояния в другое. Можно выделить два подхода к описанию фазовых превращений с позиций механики деформированного твердого тела. Первый подход основан на разработке феноменологических моделей, полученных в результате введения дополнительных параметров, характеризующих особенности микроструктуры в среднем, и формулировки определяющих соотношений для этих параметров (см., работы А.Е. Волкова, В.А. Лихачева, В.Г.

¹K. Bhattacharya, R.D. James. The material is the machine // Science. 2005. Vol. 307. P. 53–54.

Малинина, А.А. Мовчана, А.И. Разова, Д. Лагоудаса, К. Лекслена, Э. Патора, К. Танаки и др.). Второй подход исходит из явного рассмотрения межфазных границ с учетом условий термодинамического равновесия на межфазных границах или кинетики границ и включает детальное описание возникающих под напряжением двухфазных структур (см. работы Л. Бердичевского, Е.Н. Вильчевской, С.Н. Гаврилова, М.А. Гринфельда, М.А. Гузева, В.А. Еремеева, Л.М. Зубова, В.И. Кондаурова, Н.Ф. Морозова, Л.В. Никитина, В.Г. Осмоловского, Л.М. Трускиновского, А.Л. Ройтбурда, А.Б. Фрейдина, А.Г. Хачатуряна, Л.Л. Шариповой Р. Абейаратне, Дж. Болла, К. Баттачарьи, М. Гёртина, Р.Д. Джеймса, Дж. Ноулса, Г. Пэри, М. Питтери, Дж. Эриксона и др.).

Данная работа выполнена в русле второго подхода. Решаются задачи, связанные с описанием возникновения новой фазы. Исследуется задача описания цилиндрических областей новой фазы. Используется полуобратный метод, когда форма термодинамически равновесной области предсказывается, затем находятся ее геометрические параметры и условия существования. В пространстве внешних деформаций для областей новой фазы, имеющих различную форму, а именно, форму эллипсоидов, цилиндров и слоев, строятся поверхности их возникновения, после чего строится огибающая этих поверхностей.

Для ответа на вопрос о возможности начала фазового превращения, то есть возникновения областей новой фазы до достижения этой огибающей поверхности, в работе строятся нижние оценки свободной энергии двухфазных материалов. Используются подходы, которые в механике композитных материалов развивались для нахождения оптимальных композитов, то есть таких композитов, которые при заданных объемных долях компонент и заданных средних деформациях или напряжениях запасают минимальную или максимальную энергию и, следовательно, являются композитами минимальной или максимальной жесткости (см. работы Л.В. Гибянского, Ю. Грабовского, В.В. Жикова, К.А. Лурье, Г.А. Серегина, А.В. Черкаева, К. Баттачарии, Р.В. Кона, Р. Липтона, Г.В. Милтона, Л. Тартара, З. Хашина, А. Штрикмана и др.).

В настоящей работе при произвольных средних деформациях впервые строится достижимая нижняя оценка энергии двухфазного композита, образованного изотропными фазами с произвольными упругими модулями при произвольных объемных долях фаз. Затем в результате дополнительной минимизации оценки по отношению к объемной доле новой фазы при объемной доле, стремящейся к нулю, строятся предельные поверхности прямого и обратного фазовых превращений. Эти поверхности образованы всеми внеш-

ними деформациями, при которых двухфазное состояние материала впервые может иметь энергию, меньшую, чем энергия одного из однофазных состояний. Предъявляются микроструктуры (так называемые слои первого, второго и третьего рангов), соответствующие этим деформациям. В завершение рассмотрения предельные поверхности и микроструктуры сравниваются с формой и поверхностями возникновения областей новой фазы, полученными полуобратным методом.

Основной целью диссертационной работы являются нахождение достижимых нижних оценок энергии двухфазных композитных материалов и построение в пространстве деформаций предельных поверхностей фазовых превращений.

Задачи работы.

1. Исследование условий существования и определение геометрических характеристик термодинамически равновесных областей новой фазы, имеющих форму эллиптических цилиндров.
2. Исследование устойчивости равновесных цилиндрических межфазных границ.
3. Построение достижимых нижних оценок свободной энергии двухфазных композитных материалов, образованных изотропными фазами с произвольными модулями упругости, при заданных объемных долях фаз и произвольных средних деформациях.
4. Построение в пространстве деформаций предельных поверхностей фазовых превращений для материалов, допускающих фазовое превращение, и исследование двухфазных структур, соответствующих предельным поверхностям превращения.

Научную новизну диссертации представляют следующие положения, выносимые на защиту:

1. Впервые проведено полное исследование задачи о термодинамически равновесных цилиндрических областях новой фазы в упругом материале, претерпевающей при деформировании фазовое превращение. Найденны геометрические характеристики равновесных цилиндрических областей в зависимости от внешнего поля и в пространстве деформаций построены поверхности их возникновения. Исследована устойчивость равновесных цилиндрических межфазных границ по отношению к возмущениям формы границы в зависимости от параметров материала, внешних деформаций и типа возмущений.

2. Для произвольных деформированных состояний впервые построены достижимые нижние оценки энергии двухфазных композитных материалов, состоящих из изотропных фаз с заданными объемными долями и произвольными упругими модулями.
3. Развита и реализована процедура построения в пространстве деформаций предельных поверхностей прямого и обратного фазовых превращений в случае изотропных фаз. Определены двухфазные микроструктуры, соответствующие предельным поверхностям превращения.

Научно-практическая значимость. Построение предельных поверхностей превращения дает возможность прогнозировать начало фазового превращения в зависимости от траектории деформирования и описать влияние вида деформированного состояния на геометрию зарождающихся двухфазных структур при прямом и обратном превращениях.

Нахождение достижимой нижней оценки энергии упругого материала означает определение микроструктуры композитного материала, который при заданной внешней деформации имеет наименьшую жесткость. Этот результат полезен при проектировании конструктивных элементов, чувствительных к виду деформированного состояния.

Предложенный сценарий рассмотрения фазовых переходов может быть использован для дальнейшего развития теории, учитывающей анизотропию фаз и поверхностное натяжение, а полученные аналитические решения могут рассматриваться как тестовые при развитии численных процедур описания фазовых превращений в упругих телах.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой постановкой математических задач, применением математически обоснованных методов решения, использованием в численных процедурах надежных алгоритмов и программ, совпадением численных результатов с полученными для частных случаев аналитическими результатами.

Апробация работы. Основные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на Всероссийских школах-конференциях молодых ученых “Математическое моделирование в естественных науках” (Пермь, 2005-2007), XXXIII международной молодежной научной конференции “Тагаринские чтения” (Москва, 2007), международной школе-конференции “Advanced Problems in Mechanics” (Санкт-Петербург, 2006-2011), международной школе-конференции молодых ученых “Механика 2009” (Агавнадзор, Армения, 2009), Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2011), Всероссийской

конференции “Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела” (Пермь, 2008).

Полностью результаты диссертации обсуждались на семинарах ИПМаш РАН, кафедры “Теоретическая механика” СПбГУ и лаборатории прочности материалов СПбГУ.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 6 печатных работ, из них 3 в изданиях, рекомендованных ВАК России, и 13 тезисов конференций.

Личное участие автора в работах, написанных в соавторстве, состоит в получении аналитических решений поставленных задач и их исследовании.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 110 страницах машинописного текста, содержит 22 рисунка, список использованных источников из 136 наименований.

Исследования автора на различных этапах работы поддерживались грантами РФФИ (04-01-00431-а, 07-01-00525-а, 10-01-00670-а, 11-01-16069-моб_з_рос), программой ОЭММПУ РАН №13 (рук. акад. РАН И.Г.Горячева) и программой фундаментальных исследования госакадемий РФ №23 (рук. акад. РАН И.Г.Горячева и акад. РАН Н.Ф.Морозов), гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации НШ-3776.2010.1 (рук. акад. РАН Н.Ф.Морозов), гранта для аспирантов вузов и академических институтов на территории Санкт-Петербурга и Министерством образования и науки РФ (контракт 14.740.11.0353).

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, дана общая характеристика работы, приводится обзор публикаций по теме диссертации, указаны основные цели работы, кратко изложена структура диссертации, охарактеризована ее научная новизна, научная и практическая значимость, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе исследованы равновесные области новой анизотропной фазы, имеющие форму эллиптического цилиндра, находящегося в материале исходной изотропной фазы. Определены зависимости ориентации оси равновесного цилиндра и соотношения полуосей эллипса, лежащего в основании, от внешних деформаций. Для случая изотропных фаз в пространстве

деформаций построены поверхности зарождения новой фазы в виде цилиндрических областей.

В параграфе 1.1 приводится математическая постановка задачи нахождения равновесных двухфазных конфигураций упругого тела. Фазы, обозначаемые индексами “+” и “-”, различаются тензорами модулей упругости \mathbf{C}_\pm и тензорами деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p$ в ненапряженном состоянии. Если $\boldsymbol{\varepsilon}_-^p = 0$, то $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_+^p$ – собственная деформация превращения.

Для того, чтобы материал допускал фазовое превращение при деформировании, объемная плотность его свободной энергии f должна быть невыпуклой функцией деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = \min_{-,+} \{f_-(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta), f_+(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta)\},$$

$$f_\pm(\boldsymbol{\varepsilon}, \theta) = f_\pm^0(\theta) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p) : \mathbf{C}_\pm : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p).$$
(1)

где θ – температура, f_\pm^0 – плотности свободной энергии фаз в ненапряженном состоянии, верхние и нижние знаки и индексы \pm соответствуют друг другу, $(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$. Термоупругие напряжения и поверхностная энергия не учитываются.

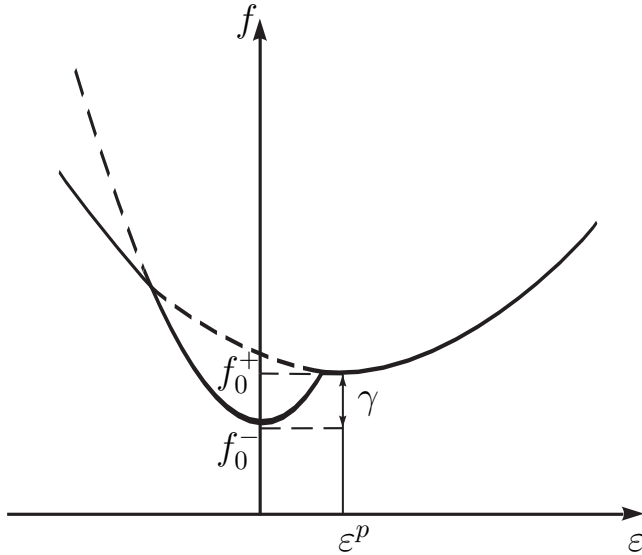


Рис. 1: Одномерный аналог зависимости плотности свободной энергии от деформаций.

Плотности энергии (1) соответствуют определяющие соотношения для напряжений $\boldsymbol{\sigma}_\pm$ в областях тела, занятых разными фазами:

$$\boldsymbol{\sigma}_\pm = \mathbf{C}_\pm : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm^p)$$
(2)

При заданных внешних воздействиях равновесное двухфазное состояние с межфазной границей Γ соответствует минимуму энергии Гиббса тела, которая с точностью до слагаемого, связанного с плотностями свободной энергии материалов фаз в ненапряженном состоянии, совпадает с

потенциальной энергией. Рассматриваются межфазные границы, на которых перемещения \mathbf{u} непрерывны. Необходимые условия минимума энергии двухфазного тела включают обычные для составного тела уравнения равновесия в объеме тела и условие непрерывности усилий на границе раздела материала-

$$\mathbf{x} \notin \Gamma : \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \theta = \text{const}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma : [\mathbf{u}] = 0, \quad [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

и дополнительное термодинамическое условие равновесия, появляющееся из-за дополнительной степени свободы – положения межфазной границы:

$$\mathbf{x} \in \Gamma : [f] - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : [\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-). \quad (5)$$

Здесь \mathbf{x} – точка тела, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к межфазной границе, квадратными скобками обозначено изменение величины при переходе через межфазную границу, $[\cdot] = (\cdot)_+ - (\cdot)_-$, $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : [\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\sigma}_\pm : [\boldsymbol{\varepsilon}]$.

Из условий (4) следует формула для определения скачка деформаций в зависимости от нормали и деформаций по одну из сторон границы¹:

$$\begin{aligned} [[\boldsymbol{\varepsilon}]] &= \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_\pm, \quad \mathbf{q}_\pm = -[[\mathbf{C}]] : \boldsymbol{\varepsilon}_\pm + [[\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p]], \\ \mathbf{K}_\pm(\mathbf{n}) &= \{\mathbf{n}\mathbf{G}_\pm(\mathbf{n})\mathbf{n}\}^s, \quad \mathbf{G}_\pm = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_\pm \cdot \mathbf{n})^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

знак s означает операцию симметризации, $K_{ijkl} = n_{(i}G_{j)(k}n_{l)}$.

После подстановки (1) и (2) в (5) термодинамическое условие с учетом соотношений (6) принимает вид уравнения, определяющего однопараметрическое семейство нормалей к границе фаз в зависимости от деформаций по одну из сторон границы²:

$$\begin{aligned} \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\pm, \mathbf{n}) &= \gamma + \frac{1}{2} [[\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p]] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_\pm : [[\mathbf{C}]] : \boldsymbol{\varepsilon}_\pm - \\ &\quad - \boldsymbol{\varepsilon}_\pm : [[\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p]] \pm \frac{1}{2} \mathbf{q}_\pm : \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_\pm = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где параметр $\gamma = f_0^+(\theta) - f_0^-(\theta)$ определяется температурой.

Таким образом, задача описания равновесной двухфазной конфигурации упругого тела является задачей с неизвестной границей и сводится к определению перемещений и положения межфазной границы, которые удовлетворяют условиям (3), (4), (7) и граничным условиям. Поскольку эти условия являются только необходимыми условиями минимума энергии, должна быть дополнительно исследована устойчивость найденных решений.

В параграфе 1.2 исследуются равновесные цилиндрические области новой фазы. Доказывается следующая теорема.

¹ Kunin I.A. Elastic media with Microstructure. Vol. 2. Three Dimensional Models. Springer Series in Solid State Sciences. V. 44. Berlin, New York, etc. Springer-Verlag. 1983.

² Кубланов Л.Б., Фрейдин А.Б. Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // ПММ. 1988. Т. 52. С. 493–501.

Теорема. Если на равновесной межфазной границе цилиндрической области фазы “+”, находящейся в однородном изотропном материале фазы “-”, тензоры $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_+^p$ постоянны, а тензор $[[\mathbf{C}]]$ – невырожденный, то тензор \mathbf{q}_+ – осесимметричный,

$$\mathbf{q}_+ = q_k \mathbf{k}\mathbf{k} + q_*(\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k}), \quad (8)$$

где \mathbf{k} – ось цилиндра. Главные значения q_k и q_* связаны термодинамическим условием

$$\psi(q_k, q_*) + \frac{1}{2}c_-q_*^2 = 0, \quad \text{где} \quad \psi(q_k, q_*) = \gamma_* + \frac{1}{2}\mathbf{q}_+ : [[\mathbf{C}]]^{-1} : \mathbf{q}_+, \quad (9)$$

$c_- = \mathbf{E} : \mathbf{K}_-(\mathbf{n}) : \mathbf{E} = \left(k_- + \frac{4}{3}\mu_-\right)^{-1}$, μ_- и k_- – модуль сдвига и объемный модуль упругости фазы “-”.

Скачок деформаций на равновесной межфазной границе равен

$$[[\boldsymbol{\varepsilon}]] = c_-q_*\mathbf{n}\mathbf{n}, \quad (10)$$

где \mathbf{n} – нормаль к границе.

Если материал фазы “+” также изотропный, то условие (9) принимает вид

$$2\gamma_* + \frac{(q_k + 2q_*)^2}{9k_1} + \frac{(q_k - q_*)^2}{3\mu_1} + c_-q_*^2 = 0, \quad (11)$$

где $\mu_1 = \mu_+ - \mu_-$ и $k_1 = k_+ - k_-$ – изменения модуля сдвига и объемного модуля упругости соответственно.

Согласно решению Эшелби поле деформаций внутри однородного эллиптического цилиндра, находящегося в однородном внешнем поле, однородно. Если такой цилиндр является равновесным включением новой фазы, то в силу теоремы ориентация оси цилиндра и отношение длин полуосей эллипса подстраиваются под внешнее поле так, что один из главных векторов тензора \mathbf{q}_+ направлен по оси цилиндра, а главные значения, соответствующие двум другим главным векторам, равны. Кроме того, главные значения тензора \mathbf{q}_+ удовлетворяют равенству (9), которое в случае изотропных фаз принимает вид (11).

Внутренние $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ и внешние деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, ориентация цилиндра и соотношение полуосей эллипса в основании связаны формулой Эшелби

$$\boldsymbol{\varepsilon}_+ = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{A} : \mathbf{q}_+, \quad (12)$$

где \mathbf{A} – тензор Кунина – Эшелби, однозначно определяемый направлением оси цилиндра и ориентацией и отношением длин полуосей эллипса. Из (12) и

(8) следует, что

$$(q_k - q_*)\mathbf{k}\mathbf{k} + q_*([\mathbf{C}]:\boldsymbol{\omega} + \mathbf{E}) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}_0 = -[\mathbf{C}]:\boldsymbol{\varepsilon}_0 + [\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p], \quad (13)$$

где неотрицательно определенный тензор

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}:\mathbf{E} = c_-(\omega_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \quad \omega_1 = \frac{1}{1+\xi}, \quad \omega_2 = \frac{\xi}{1+\xi}, \quad \xi = a_1/a_2 \quad (14)$$

определяет ориентацию эллипса и отношение полуосей, направление которых задается векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Из соотношения (13) следуют уравнения, определяющие геометрические параметры равновесного цилиндра в зависимости от внешнего поля $\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

В параграфе 1.3 в пространстве деформаций для случая изотропных фаз строятся поверхности возникновения цилиндрических областей новой фазы и проводится сравнение с поверхностями возникновения областей другой формы. Ограничения на деформации, при которых такие области существуют, следуют из неотрицательной определенности тензора $\boldsymbol{\omega}$. Поверхности возникновения и локальные поля на межфазной границе соотносятся с зонами фазовых переходов¹ и поверхностями возникновения эллипсоидальных областей новой фазы².

На рис. 2 показаны сечения зон фазовых переходов и поверхностей возникновения равновесных эллипсоидальных и цилиндрических областей новой фазы плоскостью $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$, соответствующей осесимметричным внешним деформациям, \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) – главные направления деформаций. Показан случай $\mu_1 < 0, k_1 < 0$. В работе также рассмотрены и другие соотношения параметров материала.

Зоны фазовых переходов (ЗФП) закрашены серым цветом. Они состоят из всех деформаций, которые в данном материале могут существовать на межфазных границах. Границы ЗФП являются поверхностями возникновения слоев новой фазы.

Эллипс $B'A'VAB'$ соответствует возникновению круговых цилиндров фазы “–” с осью, совпадающей с направлением \mathbf{e}_3 . Круговая форма основания связана с осесимметрией внешнего деформирования. Дуги $C'D'$ и CD соответствуют возникновению цилиндров фазы “–” с осью, лежащей в плос-

¹Морозов Н.Ф., Фрейдин А.Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. 1998. Т. 223. С. 220–232.

²Кубланов Л.Б., Фрейдин А.Б. Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // ПММ.- 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 493–501.

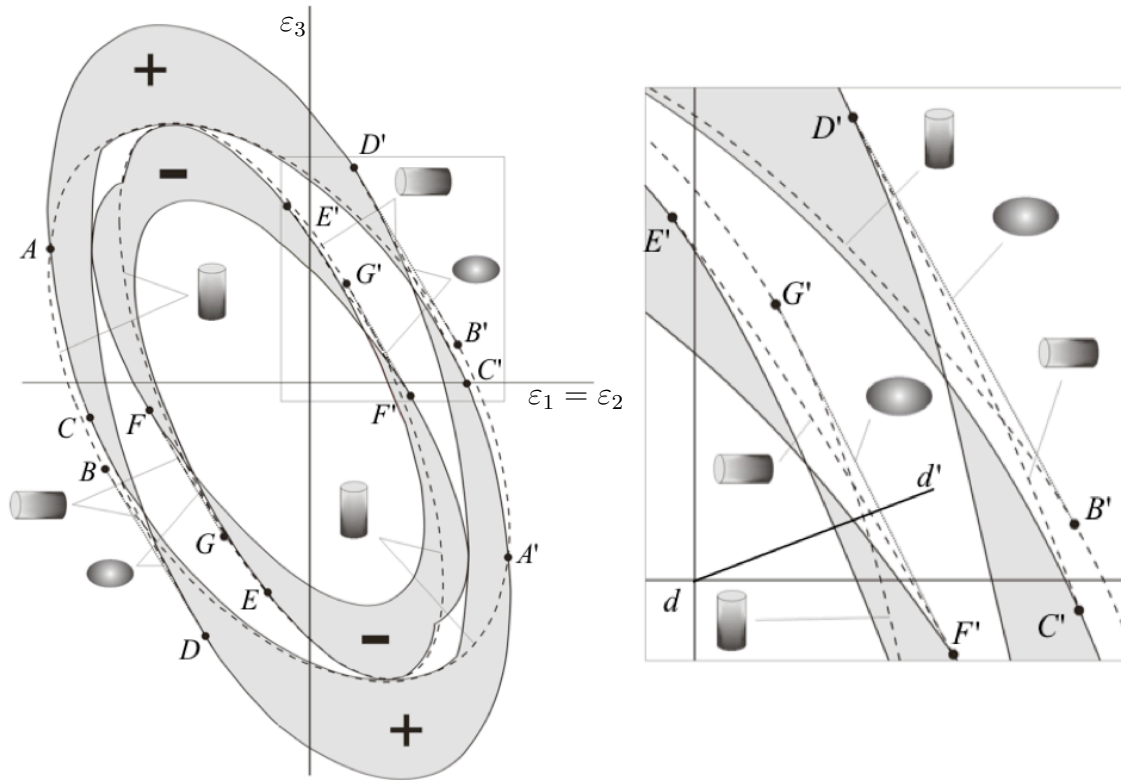


Рис. 2: Осесимметричное сечение пространства внешних деформаций в случае $\mu_- = 30, k_- = 78, \mu_+ = 15, k_+ = 39, \gamma = f_+^0 - f_-^0 = 6.75, \varepsilon^p = 0.1$.

кости векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Эллипс $G'GG'$ соответствует возникновению цилиндров фазы “+” с осью, совпадающей с \mathbf{e}_3 . Сегменты $E'F'$ и EF соответствуют возникновению цилиндров фазы “+” с осью, лежащей в плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Отрезки $D'B', DB$ и $FG, F'G'$ соответствуют равновесным эллипсоидальным включениям фаз “-” и “+”. В точках B, B', G и G' одна из полуосей эллипсоида становится бесконечной и эллипсоид превращается в цилиндр. В точках D, D', F и F' две полуоси эллипсоида становятся бесконечными, эллипсоид превращается в слой. В этих же точках в слое превращаются цилиндры с осью, лежащей в плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Отмечается неоднозначность типа равновесных состояний. Например, там, где линии существования цилиндрических областей пересекают ЗФП, условиям равновесия удовлетворяют и цилиндры, и слои. В следующих главах показывается, что равновесные цилиндрические области в этом случае неустойчивы.

Если принять за поверхность превращения огибающую построенных поверхностей возникновения областей новой фазы различного типа, то при прямом превращении, то есть когда тело нагружают из исходного недеформи-

рованного состояния, фаза “+” зарождается в виде плоских слоев, ориентация которых известным образом зависит от вида деформированного состояния. При обратном превращении из фазы “+” в фазу “–” в зависимости от вида деформированного состояния фаза “–” зарождается в виде эллипсоидов, цилиндров или слоев.

Отметим, что поверхность обратного превращения теряет выпуклость в окрестности точек A и A' . В четвертой главе показывается, что в этой области деформаций *предельная* поверхность превращения “овыпукляет” огибающую поверхностей возникновения цилиндров и слоев, причем предельным деформациям соответствуют микроструктуры, представляющие собой “наклонные слои второго ранга”.

Исследовано влияние параметров материала (модулей упругости фаз и собственной деформации превращения) и определяемого температурой параметра γ на форму огибающей поверхностей возникновения слоев, цилиндров и эллипсоидов новой фазы и ее положение относительно начала координат, соответствующего недеформированному состоянию фазы “–”. Показано, что если тензор $[[\mathbf{C}]]$ разности модулей упругости знакоопределенный, то огибающая является замкнутой поверхностью. Если тензор $[[\mathbf{C}]]$ не является знакоопределенным, то огибающая – разомкнутая.

Изменение собственной деформации превращения может приводить к сдвигу поверхностей возникновения областей новой фазы в пространстве деформаций такому, что при прямом превращении огибающая будет совпадать с поверхностью возникновения слоев, а при обратном превращении в зависимости от траектории деформирования огибающей могут соответствовать эллипсоиды или цилиндры новой фазы.

Во второй главе исследуется устойчивость равновесных цилиндрических межфазных границ в случае изотропных фаз.

В параграфах 2.1, 2.2 обсуждаются необходимые условия устойчивости произвольной межфазной границы является устойчивость всех кусочно-постоянных полей деформаций с плоскими границами, на которых заданы те же пары сосуществующих деформаций, что и в точках исследуемой границы¹ (рис. 3). Так как поле деформаций внутри равновесного цилиндра однородное и осесимметричное, для каждого цилиндра необходимо исследовать устойчивость только одного кусочно-постоянного поля.

¹Gurtin M.E. Two-phase deformations of elastic solids // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1983. Vol. 84. № 1. P. 1–29.

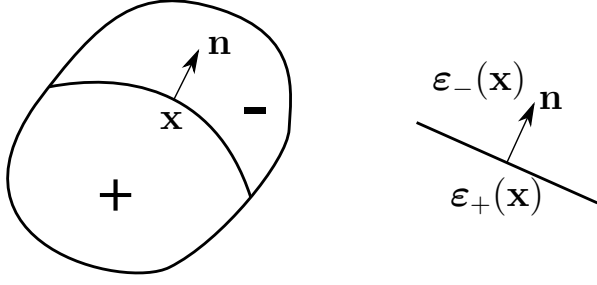


Рис. 3: Необходимое условие устойчивости межфазной границы – устойчивость кусочно- постоянных двухфазных деформаций, соответствующих точкам границы.

Эволюция границы описывается кинетическим уравнением, согласно которому нормальная составляющая скорости границы фаз определяется формулой

$$v_n^\Gamma = -\varkappa \chi(\boldsymbol{\varepsilon}_\pm, \mathbf{n}), \quad (15)$$

где \varkappa – положительный кинетический коэффициент. Если двухфазное состояние устойчиво, то возмущенная межфазная граница возвращается в исходное состояние, если неустойчиво – развивается дальше.

Линеаризованные условия равновесия и кинетическое уравнение для возмущенной задачи имеют вид¹:

$$\mathbf{x} \notin \Gamma : \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_\pm(\mathbf{w}) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_\pm(\mathbf{w}) = \mathbf{C}_\pm : \mathbf{w}, \quad (16)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_1 \cup \Omega_2 : \quad \mathbf{w}|_{\Omega_1} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w})|_{\Omega_2} = 0, \quad (17)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma : \quad \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = -\eta \llbracket \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}^0 \rrbracket, \quad \mathbf{n} \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}) \rrbracket = \nabla \eta \cdot \llbracket \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{u}^0) \rrbracket, \quad (18)$$

$$-\mathbf{q}_\pm(\mathbf{u}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}_\pm(\mathbf{w}) \pm \mathbf{q}_\pm(\mathbf{u}^0) : \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_\pm(\mathbf{w}), = -\frac{1}{k} \frac{d\eta}{dt} \quad (19)$$

где $\mathbf{q}_+(\mathbf{w}) \stackrel{\Delta}{=} -\llbracket \mathbf{C} \rrbracket : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = (\nabla \mathbf{u})^s$, $\Omega_1 \cup \Omega_2$ – внешняя граница материала. Кинетическое уравнение (19) следует из соотношений (7) и (15).

Рассматриваются возмущения вида

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}(y_2)e^{iy_1} + K.C., \quad \eta = \gamma(t)e^{iy_1} + K.C. \quad y_1 = s = \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}, \quad y_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \quad (20)$$

где $K.C.$ означает комплексно сопряженное выражение, \mathbf{t} – единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к межфазной границе, $\mathbf{z}(y_2)$ экспоненциально убывает при удалении от межфазной границы.

¹Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л. Об устойчивости равновесия двухфазных тел // ПММ. 2007. Т. 71. С. 66–92.

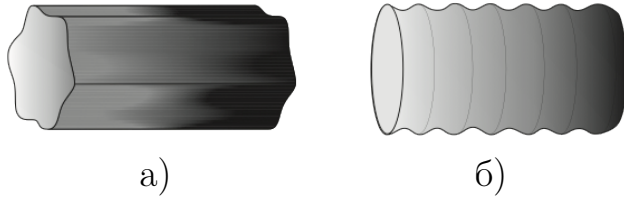


Рис. 4: Схематическое изображение типов возмущения межфазной цилиндрической границы: а) в плоскости основания цилиндра; б) вдоль оси цилиндра.

Система уравнений (16–19) после подстановки выражений (20) решается относительно вектора $\mathbf{z}(y_2)$. После подстановки полученного решения в кинетическое уравнение (19) получаем линеаризованное уравнение, определяющее кинетику возмущенной границы:

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = L(\epsilon_{\pm}^0)\gamma(t), \quad (21)$$

где ϵ_{\pm}^0 – деформации на межфазной границе в невозмущенном состоянии.

По знаку коэффициента L можно судить об устойчивости межфазной границы. Если $L > 0$, то равновесная межфазная граница неустойчива.

В параграфах 2.3, 2.4 после решения системы (16–19) обсуждаются результаты исследования устойчивости межфазных цилиндрических границ по отношению к возмущениям в плоскости основания цилиндра (рис. 4 а) и вдоль оси цилиндра (рис. 4 б). Рассматривается случай изотропных фаз и шаровой собственной деформации превращения. В этом случае в силу доказанной выше теоремы деформации внутри равновесного цилиндрического включения – осесимметричные: $\epsilon = \epsilon_k \mathbf{k}\mathbf{k} + \epsilon_* (\mathbf{E} - \mathbf{k}\mathbf{k})$. Примеры полученных зависимостей L от внутренней деформации ϵ_* приведены на рис. 5.

Устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости основания цилиндра определяется знаком изменения модуля сдвига. Межфазная граница неустойчива по отношению к таким возмущениям при всех внутренних деформациях (а следовательно и внешних деформациях, определяемых с помощью формулы (12)), если модуль сдвига новой фазы меньше модуля сдвига окружающего материала ($L < 0$ на сплошной кривой при всех ϵ_* на рис. 5 а). Такая неустойчивость не обнаруживается, если модуль сдвига новой фазы больше модуля сдвига окружающего материала ($L > 0$ на сплошной кривой при всех ϵ_* на рис. 5 б).

Во втором случае существует интервал деформаций, а следовательно и область в пространстве внешних деформаций на поверхности возникновения цилиндров, при которых не происходит потери устойчивости по отношению к возмущениям вдоль оси цилиндра. Вместе с тем вне этого интервала происходит потеря устойчивости по отношению к таким возмущениям, несмотря на устойчивость по отношению к возмущениям в плоскости основания цилиндра.

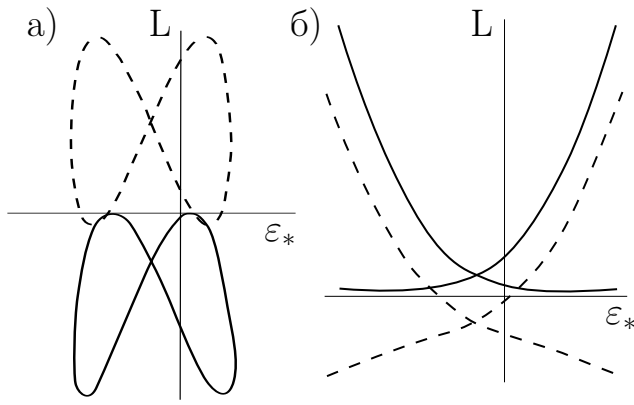


Рис. 5: Коэффициент L в зависимости от величины деформации внутри цилиндра, образованного фазой “+” в окружении фазы “-”. Сплошная линия – возмущения лежат в плоскости основания цилиндра. Пунктирная линия – возмущения направлены вдоль оси цилиндра; а) $\mu_+ > \mu_-$, $k_+ > k_-$, б) $\mu_+ < \mu_-$, $k_+ > k_-$.

Если плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью деформирования, а модуль сдвига материала цилиндра больше модуля сдвига окружающего материала, то цилиндрические межфазные границы устойчивы по отношению к возмущениям в плоскости основания цилиндра при всех внешних деформациях, допускающих существование равновесных цилиндрических областей новой фазы. Но если при этом объемный модуль упругости внутри цилиндра меньше объемного модуля упругости окружающего материала, то при всех внешних деформациях теряется устойчивость по отношению к возмущениям вдоль оси цилиндра. Это показывает, что постановка плоской деформации не всегда физически реализуема в задаче о фазовом превращении.

В третьей главе строится достижимая нижняя оценка свободной энергии двухфазного композитного материала при заданных средних деформациях и объемных долях фаз. Никакое смешивание фаз, образующих композит, не позволяет получить энергию меньшую, чем нижняя оценка. Достижимость означает, что найдена двухфазная микроструктура, на которой эта оценка выполняется точно. Для упрощения рассматривается материал, состоящий из двух изотропных фаз, имеющих нулевой коэффициент Пуассона. В этом случае получаются простые для анализа выражения, позволяющие разработать процедуру построения нижних оценок и поиска соответствующих микроструктур. Случай произвольных модулей упругости рассматривается в четвертой главе при построении предельной поверхности фазовых превращений.

Для цилиндрических межфазных границ неустойчивость не обнаружена в случае, когда внешние деформации принадлежат огибающим поверхностям превращений, построенным в главе 1. Деформации на межфазной границе в этом случае принадлежат внешним границам ЗФП.

Отдельно исследована устойчивость цилиндрической области новой фазы, возникшей при двухосном деформировании материала. Если плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью деформирования, а модуль сдвига материала цилиндра больше модуля сдвига

В параграфе 3.1 обсуждается постановка задачи о нахождении нижней оценки энергии двухфазного периодического материала с единичной ячейкой периодичности V . Области, занимаемые фазами “−” и “+”, обозначаются V_- и V_+ соответственно, $V_- \cup V_+ = V$, объемные доли фаз равны m_- и m_+ соответственно, $m_- + m_+ = 1$. Упругие характеристики материала определяются тензором модулей упругости

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = (1 - \chi(\mathbf{x}))\mathbf{C}_- + \chi(\mathbf{x})\mathbf{C}_+, \quad \chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in V_+, \\ 0, & \mathbf{x} \notin V_+ \end{cases} \quad (22)$$

где $\mathbf{C}_\pm = 2\mu_\pm \mathbf{I}$, \mathbf{I} – единичный тензор четвертого ранга.

В ячейке периодичности заданы средние деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (23)$$

Свободная энергия материала определяется выражением

$$F = \int_V \left(f_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \right) dV, \quad (24)$$

где $f_0 = (1 - \chi(\mathbf{x}))f_-^0 + \chi(\mathbf{x})f_+^0$.

Достижимой нижней оценкой является

$$\mathcal{QF}_m = \inf_{\int_V \chi dV = m_+} \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}_\pm \in \mathcal{E}_0} F, \quad (25)$$

где \mathcal{E}_0 – множество симметричных тензоров второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}$ таких, что выполняется условие (23) и существует векторное поле \mathbf{u} такое, что

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (26)$$

В параграфе 3.2 приводится оценка свободной энергии двухфазного материала, получаемая в результате прямого поиска минимума энергии (24) по деформациям. Такая оценка соответствует оценке Рейсса для эффективных упругих свойств двухфазного материала. Она достижима только в случае одноосного растяжения на классе простых слоистых структур с нормалью, направленной вдоль оси растяжения.

В параграфе 3.3 описывается построение улучшенной оценки энергии двухфазного материала, основанной на оценке квазивыпуклой функции энергии. Для построения оценки вводится дополнительная квазивыпуклая функция, называемая транслятором¹

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}) = -\text{Cof}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{t} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (27)$$

¹Cherkaev A.V. Variational methods for structural optimization. New York: Springer–Verlag, 2000. 546 p.

(квазивыпуклой функцией здесь называется невыпуклая функция на множестве произвольных тензоров второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}$, но выпуклая на множестве $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{E}_0$.)

Транслятор зависит от тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и дополнительного неотрицательного симметричного тензора второго ранга \mathbf{t} , которым определяется тензор четвертого ранга \mathbf{T} , введение которого позволяет записать транслятор к виду квадратичной формы. Главные значения тензора называются параметрами транслятора и обозначаются t_1, t_2, t_3 .

Функция $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t})$ в декартовой системе координат, связанной с главными направлениями тензора \mathbf{t} , равна

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}) = 2t_3(\varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) + 2t_2(\varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}) + 2t_1(\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}), \quad (28)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ в базисе главных направлений тензора \mathbf{t} .

Вводится понятие “сдвинутой” энергии материала как энергии, плотность которой равна разности между плотностью свободной энергии материала и транслятором. Для построения нижней оценки необходимо, чтобы плотность “сдвинутой” энергии была выпуклой функцией на множестве тензоров деформаций. Требование выпуклости приводит к множеству допустимых тензоров \mathbf{t} : $\Theta = \{\mathbf{t} : t_i \in [0; 2 \max\{\mu_-, \mu_+\}], i = \overline{1, 3}\}$. Без ограничения общности далее полагаем, что $\mu_+ > \mu_-$.

В результате строится уточненная нижняя оценка энергии двухфазного композита материала

$$\mathcal{TF} = \max_{\mathbf{t} \in \Theta} \left\{ \inf_{\int_V \chi dV = m_+} \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} \in \mathcal{E}_0} F_{\phi} + \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_0, \mathbf{t}) \right\}, \quad (29)$$

где $F_{\phi} = \int_V \left(f^0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}) \} \right) dV,$

которая улучшает выпуклую оценку за счет выбора максимума по параметрам транслятора.

В результате нахождения минимума энергии материала по деформациям получаются следующие выражения для оптимальных средних по фазам деформаций

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\pm}^m = (m_+ \mathbf{C}_- + m_- \mathbf{C}_+ - \mathbf{T})^{-1} : (\mathbf{C}_{\mp} - \mathbf{T}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (30)$$

Уточненная нижняя оценка принимает вид

$$\overline{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \max_{t_i \in [0; 2\mu_-]} \left\{ f_-^0 + m_+ \gamma + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0 : \mathbf{T}(\mathbf{t}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0 : ((\mathbf{C}_+ - \mathbf{T}) : (m_- \mathbf{C}_+ + m_+ \mathbf{C}_- - \mathbf{T})^{-1} : (\mathbf{C}_- - \mathbf{T})) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right\}. \quad (31)$$

Вместо поиска максимума в (31) в диссертационной работе предполагается, что оценка (31) действительно достижима на классе слоистых микроструктур, вводимых в параграфе 3.4. Такая достижимость означает, что в микроструктурах действительно реализуются поля со средними деформациями, равными $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\pm}^m$. Реализуемость означает выполнимость условий совместности деформаций. Из условий совместности средних по фазам деформаций в параграфе 3.5 однозначно находятся параметры транслятора. Наконец, для доказательства достижимости необходимо оценить \mathcal{QF}_m сверху на классе слоистых микроструктур оценкой \mathcal{LF} . При совпадении нижней оценки энергии $\overline{\mathcal{F}}$ при полученных параметрах транслятора и верхней оценки \mathcal{LF} имеет место выполнение равенств $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{QF}_m = \mathcal{LF}$, что означает построение нижней оценки энергии, достижимой на классе слоистых микроструктур.

В параграфе 3.4 вводятся в

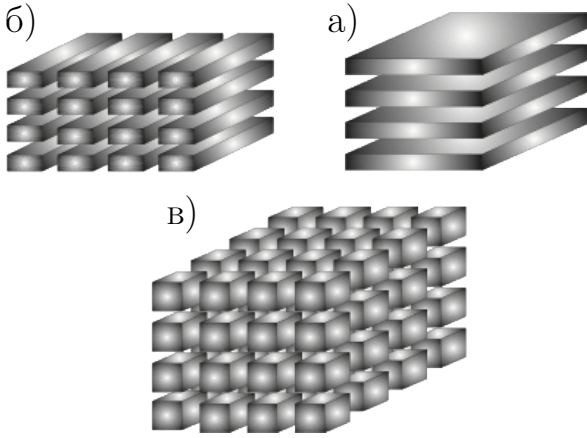


Рис. 6: Слои различных рангов: а) – первого, б) – второго, в) – третьего.

рассмотрение слоистые микроструктуры первого, второго и третьего рангов, представимые в виде иерархических структур “слоев из слоев” (рис. 6), получаемых в результате многошагового процесса построения. Простые слои, или слои первого ранга, определяются только направлением нормали \mathbf{n}_1 к межфазной границе. Слои второго и третьего рангов определяются направлением двух и трех нормалей соответственно и набором из двух и трех структурных параметров ρ_i , зависящих от объемных долей слоев на каждом шаге построения микроструктур, причем $\sum_{i=1}^d \rho_i = 1$, d – ранг микроструктуры.

В силу непрерывности перемещений скачок деформаций на межфазной границе имеет структуру симметризованной диады: $[\boldsymbol{\varepsilon}] = (\mathbf{n}\mathbf{a})^s$. Тогда в случае слоев первого ранга, поля деформаций в которых кусочно-постоянные, средние поля деформаций должны удовлетворять условию совместности

$$(\Delta \boldsymbol{\varepsilon})_{\tau\tau} = (\Delta \boldsymbol{\varepsilon})_{ss} = (\Delta \boldsymbol{\varepsilon})_{\tau s} = 0, \quad (32)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \boldsymbol{s} – взаимоортогональные касательные векторы к межфазной границе, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_+ - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_-$.

В случае слоев второго ранга условия совместности принимают вид

$$(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})_{kk} = 0, \quad (33)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 – нормали, задающие слои второго ранга.

В параграфе 3.5 определяются параметры транслятора, при которых выполняются условия совместности (32) и (33). Их выполнение достигается двумя способами. Первый способ – выбор параметров транслятора. Тогда векторы \mathbf{n} и \mathbf{k} , при которых выполняются соответственно условия (32) и (33), направлены вдоль главного направления тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Второй способ – выбор направлений векторов \mathbf{n} и \mathbf{k} при условии, что часть или все параметры транслятора находятся на границе области допустимых значений Θ .

Пространство деформаций разбивается на области, в которых выполняется одно из этих условий совместности или не выполняется ни одно из них. Затем получается соответствующая этим областям нижняя оценка энергии.

В параграфе 3.6 получено выражение для нахождения энергии слоев различного ранга

$$LF = \bar{f}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_0 : \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad (34)$$

где $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_- + m_2\{[\mathbf{C}]^{-1} + m_1 \sum_{i=1}^d \rho_i \mathbf{K}_-(\mathbf{n}_i)\}^{-1}$ – тензор эффективных модулей упругости слоя ранга d , \mathbf{n}_i – нормали к слоям на каждом шаге построения, тензор $\mathbf{K}_-(\mathbf{n}_i)$ вычисляется по формуле (6).

Оценка \mathcal{LF} энергии слоев строится в результате нахождения минимумов

$$\mathcal{LF} = \min_{\mathbf{n}_i} \min_{\rho_i} \min_d LF. \quad (35)$$

В областях пространства деформаций, где выполняется одно из условий совместности (32) или (33), нижняя оценка предписывает ранг слоев, на которых она может быть достигнута. В областях, где не выполняется ни одно из условий совместности, нижняя оценка не может быть достигнута на слоях ни первого, ни второго рангов. В этом случае показывается достижимость нижней оценки на классе слоев третьего ранга.

В случае выполнения условия совместности (32) оптимальные слои первого ранга однозначно определяются нормалью \mathbf{n}_1 , задаваемой направлениями непрерывности тензора $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. В остальных случаях оптимальные структуры определяются неединственным образом. Для доказательства достижимости нижней оценки необходимо предъявить хотя бы один тип структур, на

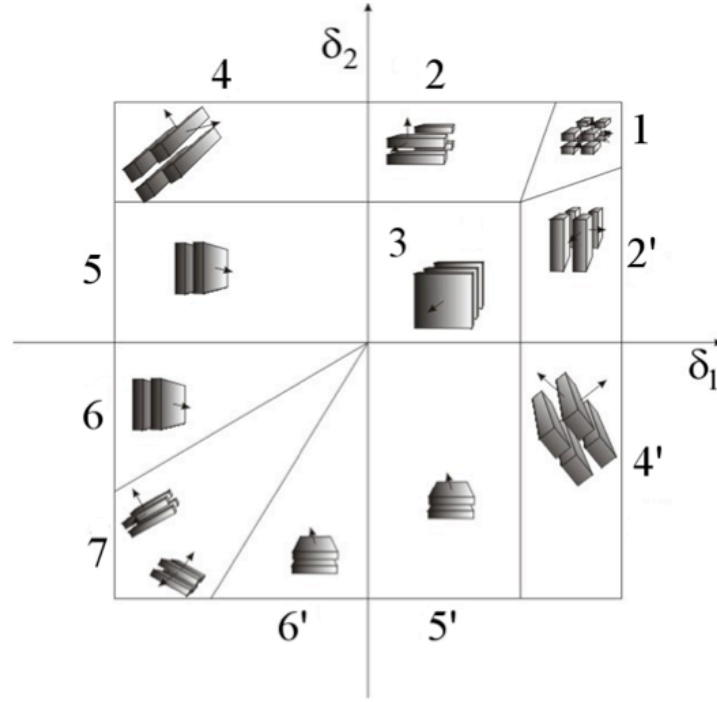


Рис. 7: Представление пространства деформаций на плоскости $\delta_1 - \delta_2$ и схематическое изображение типов двухфазных структур, для которых достигается нижняя оценка: 1, 5, 5', 6, 6' – простые слоистые структуры; 2, 2', 4, 4', 7 – слои второго ранга; 3 – слои третьего ранга. Направления нормалей приведены в тексте.

которых оценка достигается. Поэтому в работе при рассмотрении слоев третьего ранга и слоев второго ранга, для которых вектор \mathbf{k} сонаправлен с одним из главных направлений тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, принимается, что нормали сонаправлены с главными направлениями тензора средних деформаций.

В параграфе 3.7 рассматриваются наклонные слои второго ранга, то есть слои второго ранга с вектором \mathbf{k} , не совпадающем ни с одним из главных направлений тензора средних деформаций. В этом случае структурные параметры принимаются равными $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$, а проекции нормалей на главные направления связаны соотношениями $n_1^1 = n_1^2$, $n_2^1 = -n_2^2$, $n_3^1 = n_3^2$, где верхний индекс обозначает шаг построения слоя второго ранга. С использованием формул (6) для скачка деформаций на межфазной границе выводятся выражения для средних деформаций в фазе “–”. Равенство этих деформаций и оптимальных деформаций в фазе “–” (30) является условием для нахождения направления нормалей.

В параграфе 3.8 приводится анализ результата построения точных нижних оценок.

Пространство средних деформаций представляется на плоскости $\delta_1 - \delta_2$, где $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}$, $\delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные значения тензора внеш-

них деформаций, причем $|\varepsilon_3| \geq \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$ (рис. 7). Тогда все возможные деформационные состояния лежат в области $\delta_1, \delta_2 \in [-1; 1]$.

В области 1 нижняя оценка энергии достигается на классе слоев третьего ранга, нормали которых сонаправлены с главными векторами тензора внешних деформаций. В областях 2 и 2' – на классе слоев второго ранга с нормалью, сонаправленной с главными векторами, соответствующими наибольшим по величине главным значениям тензора ε_0 . В области 3 – на классе простых слоев с нормалью, сонаправленной с главным направлением тензора ε_0 , соответствующим максимальному по величине главному значению. В областях 4, 4', 7 – на классе слоев второго ранга с нормалью, не лежащими в главных плоскостях тензора ε_0 . В областях 5, 5', 6, 6' – на классе простых слоев с нормалью, лежащими в плоскости максимального и минимального главных значений тензора ε_0 .

Таким образом, на примере композитных материалов, состоящих из двух изотропных фаз с нулевыми коэффициентами Пуассона, разработана процедура построения нижних оценок свободной энергии при произвольных заданных средних деформациях и объемных долях изотропных фаз. Достижимость показывается на классе слоистых микроструктур первого, второго и третьего рангов.

В четвертой главе описывается построение предельных поверхностей превращения в случае произвольных изотропных фаз и приводится анализ типов двухфазных микроструктур, соответствующих предельным поверхностям.

В параграфе 4.1 в результате обобщения построений главы 3 нижняя оценка энергии строится для случая произвольных упругих изотропных фаз с учетом деформаций ε_{\pm}^p фаз в ненагруженном состоянии.

В параграфе 4.2 на основе достижимой нижней оценки энергии двухфазных структур в пространстве внешних деформаций строится предельная поверхность превращения, соответствующая всем средним деформациям, при которых двухфазные структуры впервые минимизируют энергию материала по отношению к однофазным материалам.

На рис. 8 приведен пример сечения предельных поверхностей прямого и обратного фазовых превращений, соответствующего осесимметричному деформированию материала.

Кривая 1 соответствует предельной поверхности прямого превращения. Сегменты EFG и $E'F'G'$ соответствуют появлению слоев новой фазы с нормалью, сонаправленной с главным вектором тензора ε_0 , соответствующим его максимальному по величине глав-

ному значению. сегменты $E'G$ и GE' соответствуют слоям первого ранга с нормалью, лежащей в главной плоскости тензора ϵ_0 , соответствующей его максимальному и минимальным главным значениям. При выбранных параметрах материала предельная поверхность прямого превращения, построенная с использованием нижних оценок энергии, полностью совпадает с огибающей областей возникновения областей новой (такими областями являются слои новой фазы).

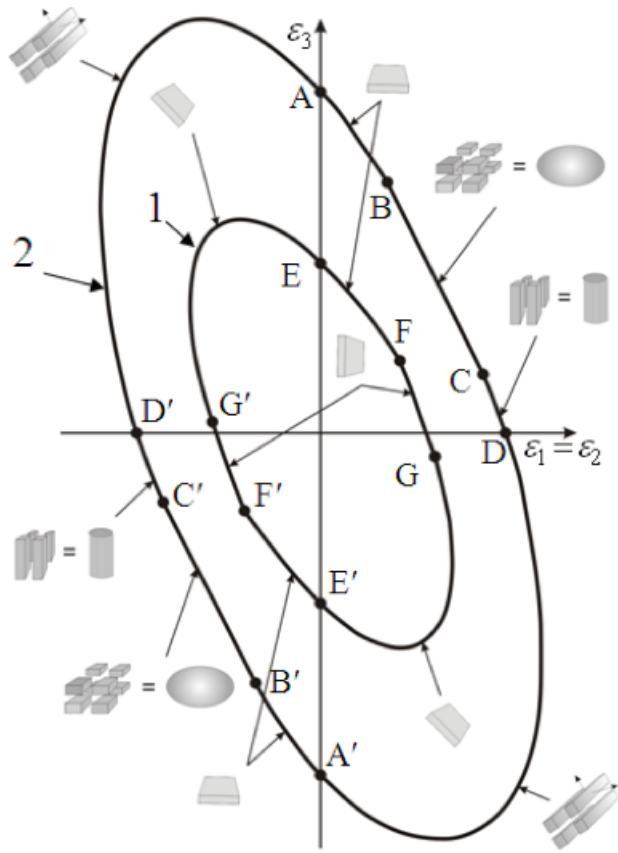


Рис. 8: Сечение предельной поверхности превращения, соответствующее осесимметричному деформированию. Параметры материала $k_1 < 0$, $\mu_1 < 0$, $\gamma > 0$, $\epsilon_{\pm}^p = 0$.

Сегменты AB и $A'B'$ соответствуют слоям первого ранга с нормалью, сонаправленной с главным вектором тензора ϵ_0 , соответствующего максимальному по величине главному значению. Сегменты $D'A$ и DA' соответствуют наклонным слоям второго ранга с нормалью, не лежащими в главных плоскостях тензора ϵ_0 . Именно эти сегменты овыщукляют построенную в первой главе огибающую поверхностей возникновения слоев, цилиндров и эллипсоидов новой фазы. В диссертации приводятся также предельные поверхности фазового превращения, построенные при разных наборах параметров материала.

В заключении приведены основные результаты и выводы по диссертационной работе.

1. Для двухфазных композитных материалов при произвольных заданных средних деформациях и объемных долях изотропных фаз найдены нижние оценки свободной энергии. Показано, что эти оценки достигаются

на микроструктурах, являющихся слоями первого, второго и третьего рангов. Определены параметры микроструктур.

2. В пространстве деформаций построены предельные поверхности прямого и обратного фазовых превращений, впервые позволившие предсказать при каких деформациях в упругом материале может начаться фазовое превращение и какие микроструктуры соответствуют началу фазового превращения при различных деформированных состояниях. Показано, что в зависимости от знакоопределенности разности тензоров модулей упругости фаз предельная поверхность может быть замкнутой или разомкнутой. Показано, что микроструктуры, возникающие при прямом и обратном превращениях могут отличаться друг от друга.
3. Проведено полное исследование задачи о термодинамически равновесной цилиндрической области новой фазы в изотропном упругом материале, претерпевающей фазовое превращение. Определены зависимости направления оси и формы основания равновесного цилиндра от деформированного состояния. Исследована устойчивость равновесных цилиндрических областей и в пространстве деформаций построены поверхности их возникновения. Показано, что устойчивые цилиндрические области возникают при тех же деформациях, что и слои второго ранга, то есть являются энергетически эквивалентными слоям второго ранга.
4. Показано, что огибающая поверхностей возникновения равновесных слоев, цилиндров и эллипсоидов новой фазы только частично совпадает с предельной поверхностью фазового превращения. В области несовпадения деформациям на предельной поверхности превращения соответствуют микроструктуры, представляющие собой наклонные слои второго ранга.

Публикации автора по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в следующих изданиях, рекомендованных ВАК России

1. М.А.Антимонов, А.В.Черкаев, А.Б.Фрейдин. Оптимальные микроструктуры и точная нижняя граница энергии упругих композитов из двух изотропных фаз // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.— 2010.— №3.— С. 112–122.
2. М.А.Антимонов, А.Б.Фрейдин. Равновесное цилиндрическое включение анизотропной фазы в изотропном упругом теле // Научно-технические

ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.— 2010.— №4.— С. 37–44.

3. М.А.Антимонов. О построении предельной поверхности фазовых превращений при деформировании упругих тел // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского.— 2011.— №4.— Ч. 5.

Другие статьи

4. M. Antimonov, A. Freidin. Equilibrium cylindrical new phase inclusion // Proc. of the XXXVII Summer School APM-2009 (Advanced Problems in Mechanics). 2009. IPME RAS, St. Petersburg.— P. 57–64.
5. M.A. Antimonov, A.V. Cherkaev, A.B. Freidin. On transformation surfaces construction for phase transitions in deformable solids // Proc. of the XXXVIII Summer School APM-2010 (Advanced Problems in Mechanics). 2010. IPME RAS, St. Petersburg.— P. 23–29.
6. М.А.Антимонов, А.В.Черкаев. Двухфазные трехмерные композиты минимальной жесткости // Сборник трудов международной школы конференции молодых ученых “Механика 2009”. Армения. Ереван.— 2009.— С.145–151.