

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., чл.-
корр. РАН

_____ А.М. Кривцов
«__» _____ 2019 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТРА**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ ИНИЦИАЦИИ ТРЕЩИНЫ
ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА НА НАГНЕТАТЕЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ В
ПОРОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКЕ**

по направлению 01.04.03 «Механика и математическое моделирование»
по образовательной программе
01.04.03_04 «Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи»

Выполнил: студент гр. 23642/4

(подпись)

П.К. Кабанова

Руководитель: к.ф.-м.н., доцент

(подпись)

И.Б. Сулова

Санкт-Петербург

2019

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Теоретическая механика»

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

А.М. Кривцов

« » 2019 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту Кабановой Полине Константиновне, гр. 23642/4

1. Тема работы: Моделирование давления инициации трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине в пороупругой постановке.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2019.
3. Исходные данные по работе: имеющаяся проблематика в области разработки месторождений.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): построение физико-математической модели для определения давления инициации трещины с последующей численной реализацией, оценка влияния различных параметров на величину давления роста трещины.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): отсутствуют.
6. Консультанты по работе: Падерин Г.В., руководитель направления ООО «Газпромнефть НТЦ», Шель Е.В., ведущий специалист ООО «Газпромнефть НТЦ».
7. Дата выдачи задания 15.01.2019.

Руководитель ВКР _____ к.ф-м. н., Суслова И.Б.
(подпись)

Задание принял к исполнению 15.01.2019.
(дата)

Студент _____ Кабанова П.К.
(подпись)

РЕФЕРАТ

На 72 стр., 39 рисунков, 3 таблицы, 1 приложение, 33 литературных источника.

ТРЕЩИНА АВТОГРП, НАГНЕТАТЕЛЬНАЯ СКВАЖИНА, ПОРОУПРУГОСТЬ, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, КРИТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ.

В работе представлена модель для оценки критического давления, при котором произойдет рост трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине. Поставлена и численно реализована физико-математическая модель задачи. Определен критерий роста трещины, позволяющий найти критическое давление автоГРП, проведено исследование влияния параметров пласта и разработки на его величину. Полученная методика определения критического давления может быть использована для регулирования режимов заводнения и оптимизации системы разработки.

THE ABSTRACT

72 pages, 39 pictures, 3 tables, 1 application, 33 references.

WATER-INDUCED FRACTURE, INJECTION WELL, POROELASTICITY, NUMERIC MODELING, CRITICAL PRESSURE.

This thesis presents a model for estimating the critical pressure at which the hydraulic fracture growth at the injection well begins. A physico-mathematical model of the problem was set and numerically implemented. The criterion of fracture growth, which allows finding the critical pressure of water-induced fracturing, is determined, the influence of the formation and field development parameters on its value has been studied. The obtained method for determining the critical pressure can be used to regulate the regimes of waterflooding and to optimize the field development system.

3.3. Зависимость давления автоГРП от длины трещины.	66
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	67
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	68
Приложение 1. Термины и аббревиатуры.	72

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных факторов, влияющих на эффективность добычи углеводородов при разработке месторождения, является система заводнения. Целью заводнения является поддержание пластового давления (ППД) и увеличение нефтеотдачи пласта за счет охвата при заводнении. Зачастую с этой целью осуществляют перевод добывающих скважин, отработавших на истощение, в нагнетание. Несмотря на применяемость и эффективность данного способа, возможны последующие осложнения при разработке. Они в первую очередь связаны с тем, что на момент перевода в нагнетание большинство эксплуатационного фонда скважин было предварительно простимулировано гидроразрывом пласта. Гидроразрыв пласта подразумевает закачку жидкости в скважину под давлением выше давления разрыва породы с целью образования трещин и последующей интенсификацией притока к скважине. Поскольку при нагнетании давление жидкости, как правило, превышает давление разрыва пласта, возникает риск инициации самопроизвольного роста техногенной трещины. Данное явление называется эффектом автоГРП, а длина трещины автоГРП может варьироваться от десятков метров до километра и более. Эффект автоГРП проявляется не только на «бывших» добывающих скважинах с ГРП, но и на обычных нагнетательных, а также на нагнетательных скважинах, на которых был проведен ГРП с целью увеличения охвата заводнения. Также самопроизвольное возникновение трещин автоГРП связано с эффектами термоупругости. Влияние термоупругости проявляется за счет закачки воды с температурой гораздо меньше температуры пласта, в результате чего последующее охлаждение пласта снижает пластовые напряжения и приводит к росту трещины автоГРП.

Отрицательные последствия роста трещины автоГРП зависят от ее длины, высоты и ориентации и заключаются в том, что развитие трещины может стать причиной роста давления и обводнения добывающих скважин, а также прорыва

воды в верхние или нижние горизонты, что снижает эффективность эксплуатации/добычи.

Поскольку нагнетание жидкости производится с большим расходом, практически невозможно избежать инициации трещины автоГРП в начале закачки [1]. Однако насыщение пласта водой по мере закачки может сдерживать рост трещины счет эффектов пороупругости.

Оценка критического давления, при котором трещина на нагнетательной скважине не будет расти или прекратит свой рост, возможна путем совмещения гидродинамического и геомеханического моделирования. Однако ввиду больших временных затрат на вычисления и адаптацию моделей, возникает необходимость в разработке быстрого метода для оценки давления инициации трещины. Создание быстрого метода с упрощенным подходом позволит осуществлять контроль над давлением на забое и устье нагнетательной скважины и расходом жидкости для предотвращения возникновения автоГРП.

Таким образом, *целью* данной работы является моделирование давления инициации трещины на нагнетательной скважине с учетом пороупругих эффектов методом численного моделирования.

Объектом исследования является периодическая область разработки, включающая нагнетательные и добывающие скважины с трещинами ГРП. *Предметом исследования* является критическое давление, при котором произойдет рост трещины на нагнетательной скважине.

Для достижения поставленной цели предполагается выполнение следующих *задач*:

- 1) Обзор литературы по проблематике обнаружения, контроля и моделирования трещин автоГРП.
- 2) Построение физико-математической модели задачи.
- 3) Численная реализация задачи:
 - гидродинамической части;
 - пороупругой части.
- 4) Валидация модели на конечно-элементном решении.

- 5) Поиск критерия распространения трещины.
- 6) Поиск критического давления жидкости в скважине.
- 7) Исследование зависимости критического давления от параметров пласта и разработки.

Апробацией работы служило представление доклада «Анализ влияния режима работы нагнетательной скважины на рост трещины автоГРП» на VIII Научно технической конференции молодых учёных ООО «Газпромнефть НТЦ» (Санкт-Петербург, 25-26 апреля 2019 г.).

ГЛАВА 1. ОБЗОР МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕЩИН АВТОГРП.

1.1. Промысловые методы регистрации и контроля трещины автоГРП.

Выявление эффекта автоГРП является важным с точки зрения выявления причин обводнения продукции, выбора системы разработки, планирования заводнения и т.д. Гидродинамические исследования скважин (ГДИС) являются одним из способов подтверждения наличия трещин автоГРП и оценки их влияния на разработку. Исходя из данных гидродинамических исследований, по сопоставлению данных давления на различные даты можно определить динамику роста трещины ГРП. Исследования подтверждают, что при интенсивной закачке жидкости, что особенно характерно для низкопроницаемых коллекторов, происходит неминуемый рост техногенной трещины, рост которой сложно контролировать [1].

В статье [5] приведены результаты исследований ГДИС, свидетельствующие о росте трещины автоГРП и влиянии трещины автоГРП на обводнение добывающих скважин. Промысловые исследования позволили определить, что длина трещины может превышать 1000 м. В работе представлены примеры, подтверждающие, что в случае, если нагнетательная скважина ориентирована перпендикулярно минимальным напряжениям, как и добывающая скважина, рост трещины от нагнетательной скважины до добывающей скважины вызывает обводнение до 99% (Рис 1.1а). Однако трещина автоГРП может иметь довольно сложную траекторию распространения (Рис. 1.1б). В [4], [5] примером, подтверждающим данный факт, является низкая обводненность скважин, лежащих между нагнетательной и исследуемой добывающей скважиной.

Кроме того подтверждением влияния трещины может служить ограничение закачки или полная остановка нагнетательной скважины. В этом случае должно произойти снижение обводненности добывающей скважины [4].

Также имеются исследования, подтверждающие возможность смыкания незакрепленной части трещины при изменении режима работы нагнетательной

скважины [5]. Таким образом, путем ограничения закачки и снижения давления на забое можно добиться смыкания трещин автоГРП.

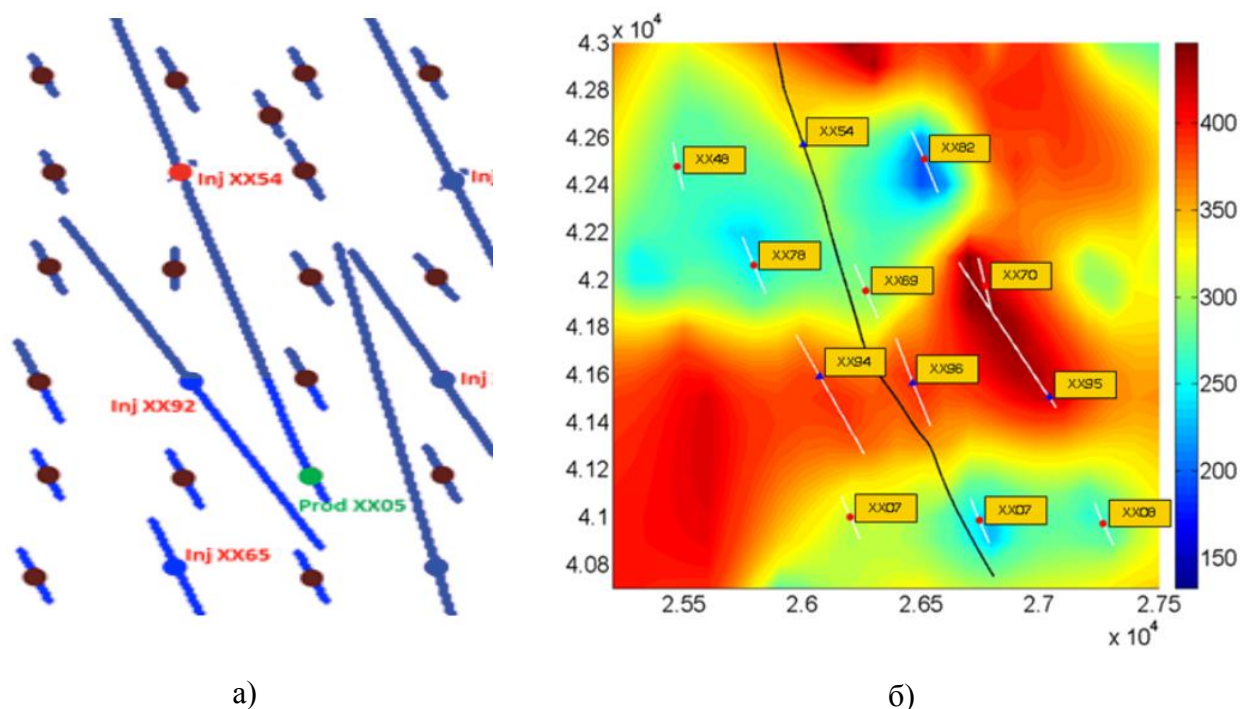


Рис. 1.1. а) Участки исследования взаимодействия скважин [5]; б) Карта распределения давления и расчет траектории развития трещины автоГРП в нагнетательной скважине [4].

Проблема роста трещин может быть решена за счет выбора системы разработки, предполагающей ориентацию относительно преимущественного направления развития трещин [12]. Однако во избежание взаимовлияния скважин необходимо иметь возможность определить траекторию развития трещин автоГРП до начала проектирования разработки.

Направление развития трещины, ее рост в высоту и давление разрыва определяется напряженно-деформированным состоянием пласта при разработке. Наиболее точным способом определения параметров инициации и роста трещины автоГРП является совмещенное гидродинамическое и геомеханическое моделирование [4], [11]. Такой подход подразумевает учет распределения давления в элементе разработки в текущий момент времени, решение полной механической задачи, а также учет влияния соседних скважин.

Траектория развития трещины будет определяться полем напряжений, зависящим от изменений порового давления.

Помимо предотвращения обводнения добывающих скважин, информация о геометрии трещин автоГРП также может быть использована для оптимизации системы разработки. Зная предполагаемую геометрию трещин автоГРП, можно уменьшить количество скважин в рядах нагнетания и максимально сблизить зоны отбора и нагнетания [2].

1.2. Уравнения теории пороупругости.

Расчет роста трещины автоГРП невозможен без учета эффектов пороупругости. Это связано с тем, что значительное влияние на геометрию трещины и давление жидкости в ней оказывает давление в порах горной породы, влияющее на напряженно-деформированное состояние среды.

Модель учета пороупругих эффектов была впервые представлена в работе Терцаги [31], которая предполагает представление тензора напряжений как сумму тензора эффективных напряжений, действующих на скелет породы, и порового давления:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij}p \quad (1.1)$$

где σ_{ij} – тензор полных напряжений, σ'_{ij} – тензор эффективных/скелетных напряжений, δ_{ij} – символ Кронекера, p – поровое давление (давление жидкости).

Впоследствии модель была усовершенствована в работах М. Био [13]

$$\sigma_{ij} = \sigma''_{ij} + \alpha\delta_{ij}p \quad (1.2)$$

где α – коэффициент эффективного напряжения Био.

Коэффициент Био является свойством скелета породы и порового пространства и не зависит от свойств жидкости. При этом значение константы Био лежит в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 1$. Таким образом, в пределе при $\alpha = 1$ формула Био (1.2) переходит в формулу Терцаги (1.1).

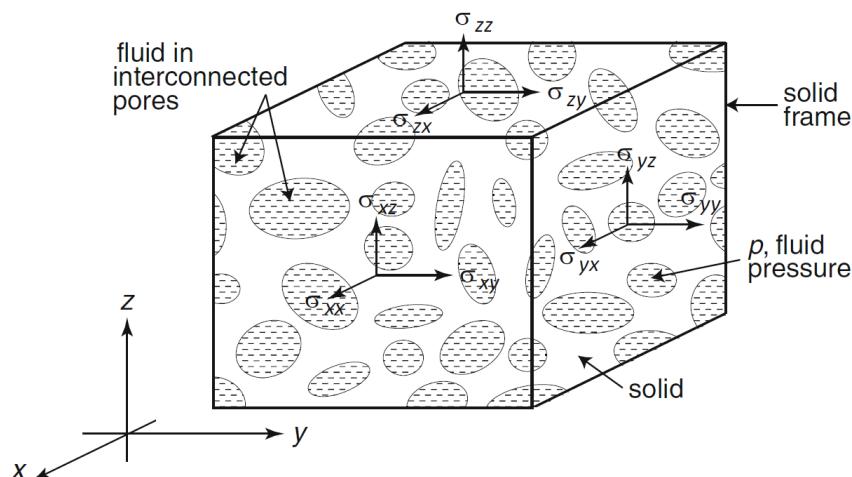


Рис. 1.2. Тензор полных напряжений в элементарном объеме [15].

В случае линейной теории пороупругости определяющие уравнения для твердого тела (скелета) имеют вид [15], [17], [18]:

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{\alpha(1-2\nu)}{1+\nu}\delta_{ij}p \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij} + \alpha\delta_{ij}p = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij} \quad (1.4)$$

где G – модуль сдвига, ε_{ij} – тензор деформаций, σ_{kk} – сумма главных напряжений, ν – коэффициент Пуассона, ε – след тензора деформаций.

Определяющие уравнения для жидкости можно записать следующим образом:

$$2G\zeta = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1+\nu}\left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B}p\right) \quad (1.5)$$

$$p = M(\zeta - \alpha\varepsilon) \quad (1.6)$$

где ζ – объем жидкости, входящий в объем скелета, B – коэффициент Скемптона, M – модуль Био.

Течение жидкости в поровом пространстве описывается законом Дарси. В приближении малых деформаций и несжимаемости жидкости закон Дарси имеет вид:

$$q_i = -\kappa(p_i - f_i) \quad (1.7)$$

где $f_i = \rho_f g_i$ – объемная сила, $\kappa = k/\mu$ – коэффициент подвижности.

Уравнение равновесия имеет представление:

$$\sigma_{ij,j} = -F_i \quad (1.8)$$

где $F_i = \rho g$ – объемная сила, $\rho = (1 - \varphi)\rho_s + \varphi\rho_f$ – общая плотность, φ – пористость, ρ_s, ρ_f – плотности твердой и жидкой фазы.

Локальное уравнение неразрывности в случае несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,i} = \gamma \quad (1.9)$$

где γ – интенсивность объемного поступления жидкости (расход закачиваемой жидкости в единицу объема пористого материала).

Таким образом, поведение линейной изотропной пороупругой среды описываются полной системой уравнений (1.3 – 1.9).

1.3. Моделирование трещин автоГРП.

Одной из первых работ, посвященных эффекту автоГРП, является работа [23], в которой рассматриваются различные аспекты моделирования трещин на нагнетательных скважинах. В частности, представлено решение задачи механики трещины в линейно-пороупругой однородной изотропной среде. Также было сделано предположение о малости полудлины трещины по сравнению с толщиной пласта, что приводит к плоско-деформированной постановке задачи. Трещина предполагается тонким эллипсом, находящимся под нагрузкой жидкости сжимающих напряжений на бесконечности, имитирующих тектонические напряжения (Рис. 1.3а). Профиль порового давления был задан упрощенно, а именно экспоненциально убывающим от трещины к скважине (Рис. 1.3б). При этом заданный профиль давления

удовлетворяет граничным условиям на трещине ($p = p_f$) и на бесконечности ($p = p_e$).

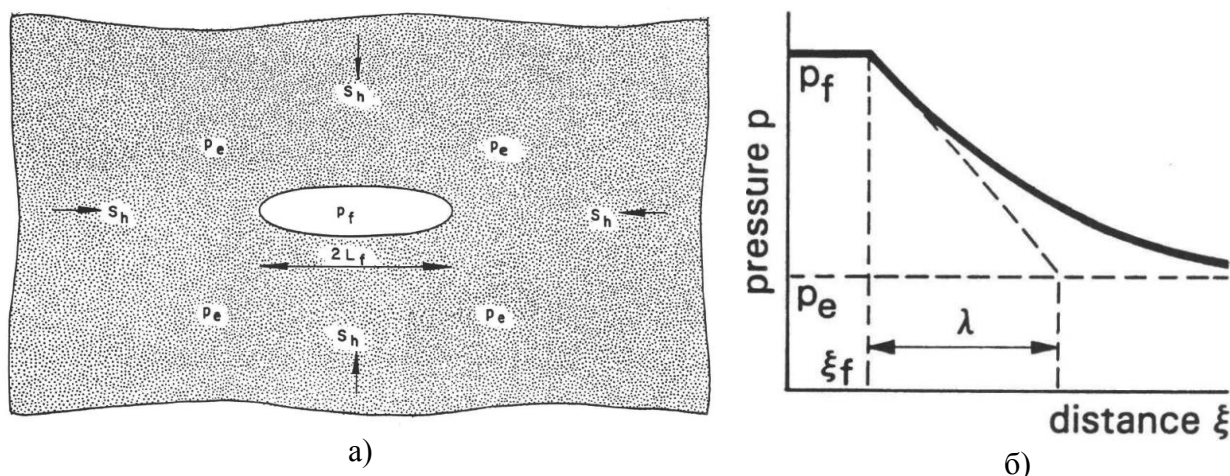


Рис. 1.3. а) Линейная трещина в поропругой среде; б) Профиль порового давления [23].

В результате решения уравнений линейной теории поропругости, было получено аналитическое решение для распределения напряжений как сумма трех функций упругих напряжений и специальной функции поропругих напряжений. Это выражение позволяет найти форму трещины, раскрытие (1.10), давление закрытия (1.11) и давление распространения трещины (1.12) как функцию глубины проникновения давления:

$$w_f = \frac{2(1 - \nu^2)L_f}{E} \left(p_f - s_h - \frac{\lambda}{1 + 2\lambda} A(p_f - p_e) \right) \quad (1.10)$$

где L_f – полудлина трещины, E – модуль Юнга, s_h – минимальное горизонтальное напряжение, $\lambda = \frac{L_p}{L_f}$ ($\lambda \ll 1$), $\lambda = \ln\left(\frac{2L_p}{L_f}\right)$ ($\lambda \gg 1$), L_p – глубина проникновения давления, A – поропругая константа.

$$p_{foc} = s_h + \frac{\lambda}{1 + 2\lambda} A(p_{foc} - p_e) \quad (1.11)$$

$$p_{fp} = p_{foc} + \frac{K_{Icr} / \sqrt{\pi L_f}}{\left(1 - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A\right)} \quad (1.12)$$

где K_{Icr} – критический коэффициент интенсивности напряжений (трещиностойкость породы).

Отмечается, что стабильная линейная трещина принимает эллиптическую форму в случае равномерного давления. Ширина трещины уменьшается при увеличении глубины проникновения давления за счет расширения скелета породы.

В пороупругой среде давление раскрытия трещины равно давлению закрытия трещины и равно сжимающим напряжениям, перпендикулярным границе трещины. Это давление возрастает при увеличении глубины проникновения давления. При этом давление распространения трещины выше, чем давление раскрытия/закрытия трещины. Разница увеличивается при увеличении глубины проникновения давления и уменьшается с увеличением длины трещины. Для длинных трещин давление распространения трещины практически равно давлению закрытия/открытия.

Помимо решения механической задачи описано моделирование распространения трещины автоГРП, которое совмещает решение из однофазного гидродинамического симулятора с аналитической моделью трещины. Представленная модель способна рассчитывать распространение трещины как функцию от: 1) расхода или давления; 2) свойств пласта или жидкости; 3) давления автоГРП.

Рассматривается рост трещины в двумерном симметричном элементе, содержащем одну нагнетательную и одну или более добывающую скважину. Рост трещины происходит от нагнетательной скважины в выбранном направлении, определяемом ориентацией поля напряжений: трещина распространяется перпендикулярно минимальному сжимающему напряжению. Для упрощения было сделано предположение об упругой среде, то есть

эффектами пороупругости пренебрегается. Давление инициации трещины вычисляется по формуле:

$$p_{fi} = p_{foc} + \frac{K_{Icr}}{\sqrt{\pi L_{fi}}} \quad (1.13)$$

где L_{fi} – длина трещины, при которой произойдет рост.

Моделирование роста трещины основано на модели Картера [14].

В [30] представлена полуаналитическая модель трещины на нагнетательной скважине, рост которой происходит на единичной скважине в бесконечном пласте. Модель имеет две важные особенности. Во-первых, распределение утечек двумерное, а давление эллиптически распространяется вглубь пласта. Во-вторых, было учтено влияние термоупругих изменений на пластовые напряжения и распространение давления. Было показано, что охлаждение пласта вследствие закачки холодной жидкости может привести к возникновению очень длинных трещин.

Одной из первых работ, посвященных аналитическому решению задачи о росте трещины автоГРП, является статья [26]. В статье предложена модель трещины автоГРП, индуцированной на единичной скважине в бесконечном пласте. Модель может учитывать как одномерные утечки, перпендикулярные трещине, так и двумерные радиальные.

Изначально автором представлена модель распространения трещины в отсутствие изменения пластовых напряжений на основе предположения о том, что длина трещина пропорциональна квадратному корню времени и с использованием уравнения баланса объема. Предполагается, что трещина имеет прямоугольную форму. Предположение об одномерности утечек (модель утечек Картера) и использование решения одномерного уравнения диффузии приводит к тому, что скорость распространения трещины получается гораздо больше скорости распространения давления в пласте. В случае если трещина распространяется медленнее, чем давление, модель Картера неверна. Тогда можно считать, что трещина квазистационарна и длину трещины можно

считать константой. Фронт давления от трещины в пласт считается эллиптическим с учетом медленно растущей трещины. Использование эллиптического решения для давления позволяет рассчитать длину трещины. В работе [22] показано, что в бесконечном пласте длина трещины всегда пропорциональна квадратному корню времени.

В работе [21] приведено аналитическое выражение для давления в трещине бесконечной проводимости при постоянном расходе, позволяющее получить числовые ограничения модели Картера и радиальной модели.

Учет изменений напряжений из-за пороупругих и термоупругих эффектов происходит при предположении о клиновидной форме трещины, которая имеет эллиптическое поперечное сечение по горизонтали и прямоугольное по вертикали. Если давление жидкости в трещине и горизонтальные напряжения равномерны на границе трещины, то давление распространения трещины определяется как:

$$p_f - s_h = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi L}} \quad (1.14)$$

где p_f – давление жидкости в трещине, s_h – горизонтальное напряжение пласта, K_{IC} – критический коэффициент интенсивности напряжений, L – полудлина трещины.

Изменение температуры или давления в пласте приводят к изменению напряжений. Если происходит охлаждение пласта, пластовые напряжения снижаются, и наоборот нагрев пласта приводит к увеличению горизонтальных напряжений. При увеличении пластового давления скелет породы стремится расширяться, тем самым повышая горизонтальные напряжения. Существуют работы [27], посвященные учету влияния пластового давления и температуры на напряжения вокруг скважины в отсутствие трещины. Одним из важных выводов является тот факт, что горизонтальные напряжения зависят от отношения высоты пласта к глубине проникновения фронта давления и

температуры. Эффект поро- и термоупругих изменений напряжений можно учесть следующим образом:

$$s_h = s_{hi} + \Delta\sigma_{yp} + \Delta\sigma_{yT} \quad (1.15)$$

где s_{hi} – начальное горизонтальное напряжение, $\Delta\sigma_{yp}, \Delta\sigma_{yT}$ – поро- и термоупругие изменения полного напряжения на границе трещины в направлении перпендикулярном трещине.

В работе [29] показано, что данная формула справедлива, только если вычисления поправок к напряжениям производится при граничных условиях нулевых смещений, перпендикулярных границе трещины. Использование решения [28] и эллиптических координат позволяет вычислить распределение давления как функцию времени.

В работе [30] была вычислена поправка к напряжениям за счет пороупругости в эллиптической области. Представленное аналитическое решение имело сходимость с численными результатами. Аналогичное приближение об эллиптичности зоны постоянного давления вокруг трещины было сделано при учете поправки за счет пороупругости.

В случае приближения о плоской деформации получены выражения для поправок за счет поро- и термоупругих эффектов:

$$\Delta\sigma_{ypD}^{(ps)} = \frac{1}{2}\Delta p_D(o) - \frac{1}{4}, \quad \Delta\sigma_{xpD}^{(ps)} = \frac{1}{2}\Delta p_D(o) + \frac{1}{4} \quad (1.16)$$

$$\Delta p_D(o) = \frac{\Delta p(o)}{q\mu} 2\pi kh$$

В случае осесимметричных изменений давления и температуры отклонение от условий плоской деформации может быть учтено за счет подстановки решения для плоской деформации в модифицированное граничное условие на бесконечности. Это граничное условие учитывает, что на бесконечности напряжения равны равномерному изменению напряжений. Тогда модифицированные поправки к напряжениям в трехмерной постановке имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ypD} &= \frac{1}{2}\Delta p_D(o) - \frac{1}{4} + \Delta s_{HpD}; & \Delta\sigma_{xpD} &= \frac{1}{2}\Delta p_D(o) + \frac{1}{4} + \Delta s_{HpD} \\ \Delta s_{HpD} &= \frac{1}{2}\Delta p_D(o) + \frac{1}{4}Q(R_e) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Также получены поправки к напряжениям в случае наличия разных зон нагнетания (зона холодной воды, нагретой воды и нефтяной зоны) за счет учета разных значений подвижности жидкости.

Представлен и численный метод вычисления поро- и термоупругих напряжений в пласте вокруг трещины. Численное решение задачи подразумевает разбивание пласта на блоки в декартовой системе координат с постоянным давлением в каждом блоке. Напряжения на границе вычисляются суммированием вкладов от каждого блока.

Расчет изменения напряжений за счет термоупругих эффектов производится путем замены в приведенных выше уравнениях $\Delta p \rightarrow \Delta T$ и $A_p \rightarrow A_T$.

В работе [19] предлагается использование термо-гидродинамического симулятора для расчета распространения трещин автоГРП, а также оценки влияния на коэффициент заводнения. Предполагается, что трещина имеет бесконечную проводимость, а моделирование роста происходит, исходя из понятия о критическом коэффициенте интенсивности напряжений. Учтено влияние изменения поро- и термоупругих напряжений с помощью численных расчетов, а также образование фильтрационной корки на стенках трещины, причиной образования которой является качество закачиваемой воды.

В статье [16] автором описывается моделирование роста трещины автоГРП с совмещением моделирования потока жидкости, а также эффектов термо- и пороупругости. Представлена конечно-разностная модель течения жидкости и потока тепла в пласте, сопряженная с определением изменений поро- и термоупругих напряжений. Расчет роста трещины производится с использованием конечно-элементной модели.

Следует подчеркнуть, что существующие на тот момент модели описывали лишь отдельные процессы, связанные с ростом трещины автоГРП, но эти процессы не были совмещены в одной трехмерной постановке. Причиной этому является различие подходов моделирования: использование конечно-разностной постановки для решения задачи о потоке жидкости и решение упругой задачи решается в конечных элементах. Сложность заключалась не столько в вычислительном методе, а в совмещении сеток, так как в упругой задаче концентрация напряжений находится у концов трещины, при этом температурный фронт, как и фронт жидкости, имеет другую локализацию. Решение механической задачи предполагает разделение решения следующим образом:

- вычисление напряжений, получившихся в результате распределения температуры и давления в отсутствие трещины;
- использование полученного поля напряжений для расчета механики трещины.

При вычислении поро- и термоупругих напряжений было необходимо найти напряжения на предполагаемой границе трещины, в связи с чем предполагалось вычислять только компонент напряжений, нормальный к трещине, что упростило вычисления.

Задачу о распространении трещины можно свести к двумерной постановке, то есть считать, что трещина занимает всю мощность пласта, а распространение трещины происходит преимущественно в горизонтальном направлении. Рост трещины будет представлять собой серию равновесных состояний, определяемых коэффициентом интенсивности напряжений на кончиках трещины. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений производится с помощью интегралов Коши. Также в [16] представлен способ решения трехмерной механической задачи для трещины методом граничных элементов.

Отдельно влияние термоупругих напряжений на рост трещины автоГРП было рассмотрено в статье [8] Учет термоупругих эффектов происходил путем

расчета поправки, характеризующей снижение давления в охлажденной области. Рассчитанное давление распространения трещины в данном случае при сравнении с данными забойного давления для нескольких скважин показал, что в 67% случаев существует вероятность образования трещин автоГРП.

Представленные подходы к определению геометрии трещины автоГРП отличаются тем, что теоретически определяемая длина трещины автоГРП стремится к бесконечности. В статье [10] предложен подход, не приводящий к неограниченному росту трещины в ходе закачки. Отличительной чертой математической модели развития трещины автоГРП является расчет утечек в пласт. Согласно представленному алгоритму первым этапом является расчет движения жидкости в трещине и получение поля давления в трещине. Затем производится расчет поля давлений в пласте, при этом одним из граничных условий является найденное до этого давление в трещине. После этого происходит расчет утечек и пересчет перерасчет давления в трещине и пласте. По найденным давлениям производится расчет поля напряжений и коэффициента интенсивности напряжений и проверка критерия разрушения. Расчет прекращается при невыполнении критерия разрушения.

Исходя из обзора существующих методов моделирования трещин автоГРП, можно сделать вывод о том, что аналитические выражения могут быть получены только при определенных предположениях о распределении порового давления, напряженно-деформированном состоянии пласта и рассматриваемой области решения. При этом зачатую моделирование трещины автоГРП подразумевает инициацию трещины, а не развитие уже существующей, что влияет на критерий ее роста.

Работы, посвященные полному (трехмерному) геомеханическому моделированию роста трещины, предлагают подходы, позволяющие избежать упрощающих предположений, однако являются более вычислительно затратным по сравнению с полуаналитическими оценками.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ ИНИЦИАЦИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА НА НАГНЕТАТЕЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ.

2.1. Постановка задачи.

Рассмотрим периодическую систему разработки, при которой добывающие и нагнетательные скважины образуют рядную систему. Выделим элемент разработки, состоящий из двух нагнетательных и двух добывающих скважин (Рис. 2.1, *область 1*). Поставим задачу о нахождении давления, при котором произойдет рост трещины ГРП при закачке жидкости в нагнетательную скважину с постоянным давлением. Рассматриваемая среда предполагается однородной и изотропной по своим упругим, прочностным и фильтрационно-емкостным свойствам, поток жидкости считаем однофазным. Реология жидкости ньютоновская (вода).

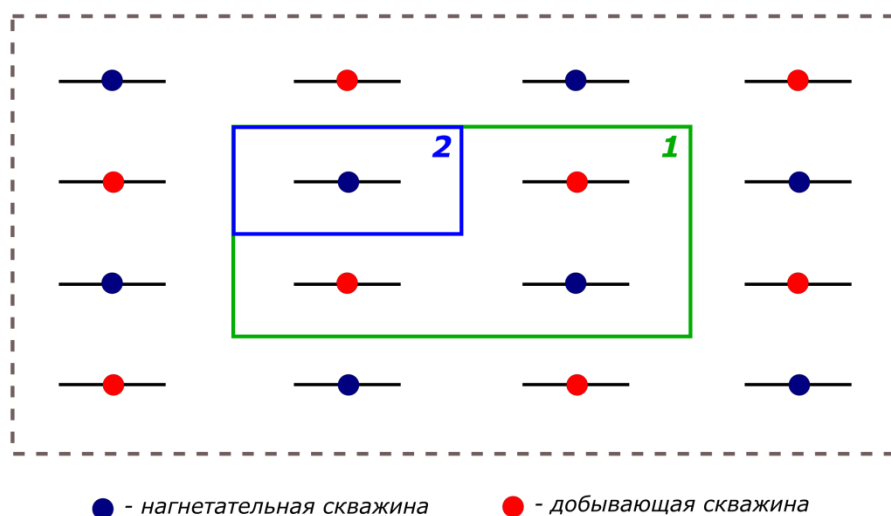


Рис. 2.1. Рассматриваемый элемент разработки: 1 – область расчета пороупругой задачи; 2 – область расчета гидродинамической задачи.

Задача включает следующие этапы решения:

- нахождение распределения давления в элементе разработки;
- нахождение изменения напряжения в элементе разработки за счет изменения давления;
- вычисление критерия роста трещины;

- поиск критического давления, при котором произойдет рост трещины.

Описанный алгоритм был использован для создания численной модели, реализованной на языке программирования Python.

2.2. Решение гидродинамической задачи.

2.2.1. Физико-математическая модель распределения давления в элементе.

Первым шагом в поиске давления инициации трещины является решение гидродинамической задачи о распределении давления в элементе разработки. Для сокращения вычислительных затрат поле давлений будем искать на четверти указанного элемента, то есть для области с единичной нагнетательной скважиной (Рис. 2.1, область 2).

При нахождении поля давления будем считать, что скважина работает длительное время, то есть считать режим установившимся, а также, что трещина имеет бесконечную проводимость. На основании этих предположений будет рассматривать стационарную задачу с постоянным давлением на границе элемента и постоянным давлением закачки жидкости в скважину (Рис.2.2).

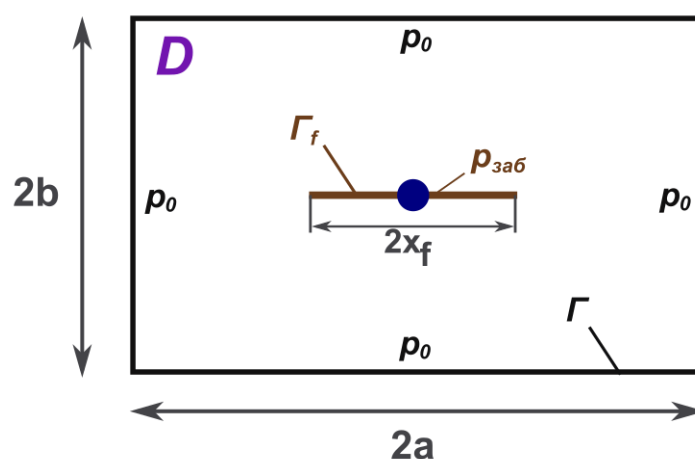


Рис. 2.2. Область расчета задачи гидродинамики с граничными условиями (где Γ – граница области, Γ_f – граница трещины, a, b – размеры области, x_f – полудлина трещины).

Тогда для нахождения поля давлений необходимо решить стационарное уравнение пьезопроводности, то есть уравнение Лапласа с граничными условиями:

$$\begin{cases} \Delta p(x, y) = 0 \\ p|_{\Gamma} = p_0 \\ p|_{\Gamma_f} = p_{заб} \end{cases} \quad (2.1)$$

где $p = p(x, y)$ – давление в точке (x, y) , принадлежащей области $D = \{(x, y): x \in [-a, a], y \in [-b, b]\}$;

p_0 – начальное пластовое давление;

$p_{заб} = p_0 + p_{репр}$ – забойное давление (давление в скважине и трещине);

$p_{репр}$ – репрессия на забое.

Поскольку решение задачи в силу линейности можно разложить как:

$$p(x, y) = p_0 + p_{delta}(x, y) \quad (2.2)$$

где $p_{delta}(x, y)$ – прирост давления в точке (x, y) , принадлежащей области D , будем решать задачу относительно прироста давления $p_{delta}(x, y)$. Тогда система уравнений (2.1) примет вид (Рис. 2.3):

$$\begin{cases} \Delta p_{delta}(x, y) = 0 \\ p_{delta}|_{\Gamma} = 0 \\ p_{delta}|_{\Gamma_f} = p_{репр} \end{cases} \quad (2.3)$$

Функцию прироста давления $p_{delta}(x, y)$ можно разложить как:

$$p_{delta} = p_{репр} \cdot f(x, y) \quad (2.4)$$

Тогда окончательно имеем следующую краевую задачу с однородными граничными условиями Дирихле для решения:

$$\begin{cases} \Delta f(x, y) = 0, & -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b \\ f(|x| < x_f, 0) = 1 \\ f(x = \pm a, y) = 0 \\ f(x, y = \pm b) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

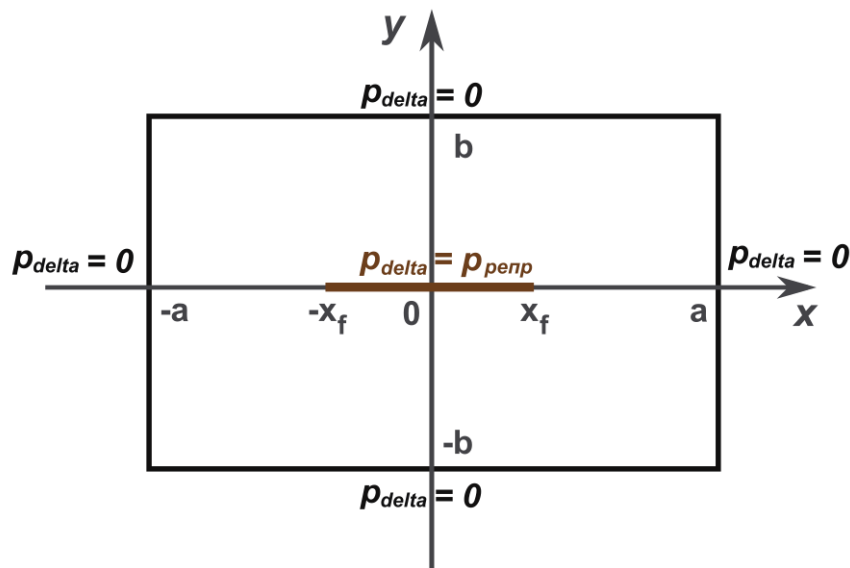


Рис. 2.3. Область расчета задачи гидродинамики с граничными условиями для прироста давления $p_{\text{delta}}(x, y)$.

2.2.2. Численная схема решения задачи гидродинамики.

Решение системы (2.5) будем искать численным методом. Первым шагом является дискретизация расчетной области, то есть построение сетки пространства (Рис. 2.4).

Дискретизация расчетной области:

$$\begin{aligned} x_i &= i * h_x - a, \quad i = 0, \dots, N \\ y_j &= j * h_y - b, \quad j = 0, \dots, M \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $h_x = \frac{2 * a}{N}$ – шаг по пространству в направлении x , N – число ячеек по x ;

$h_y = \frac{2 * b}{M}$ – шаг по пространству в направлении y , M – число ячеек по y .

Искомую функцию $f(x, y)$ заменяем дискретным аналогом $f_{i,j}$.

Дискретизация уравнений. Дискретизацию уравнения Лапласа произведем с использованием центрально-разностной схемы:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{h_x^2} + O(h_x^2) \quad (2.7)$$

Аналогичная аппроксимация второго порядка точности справедлива для координаты y .

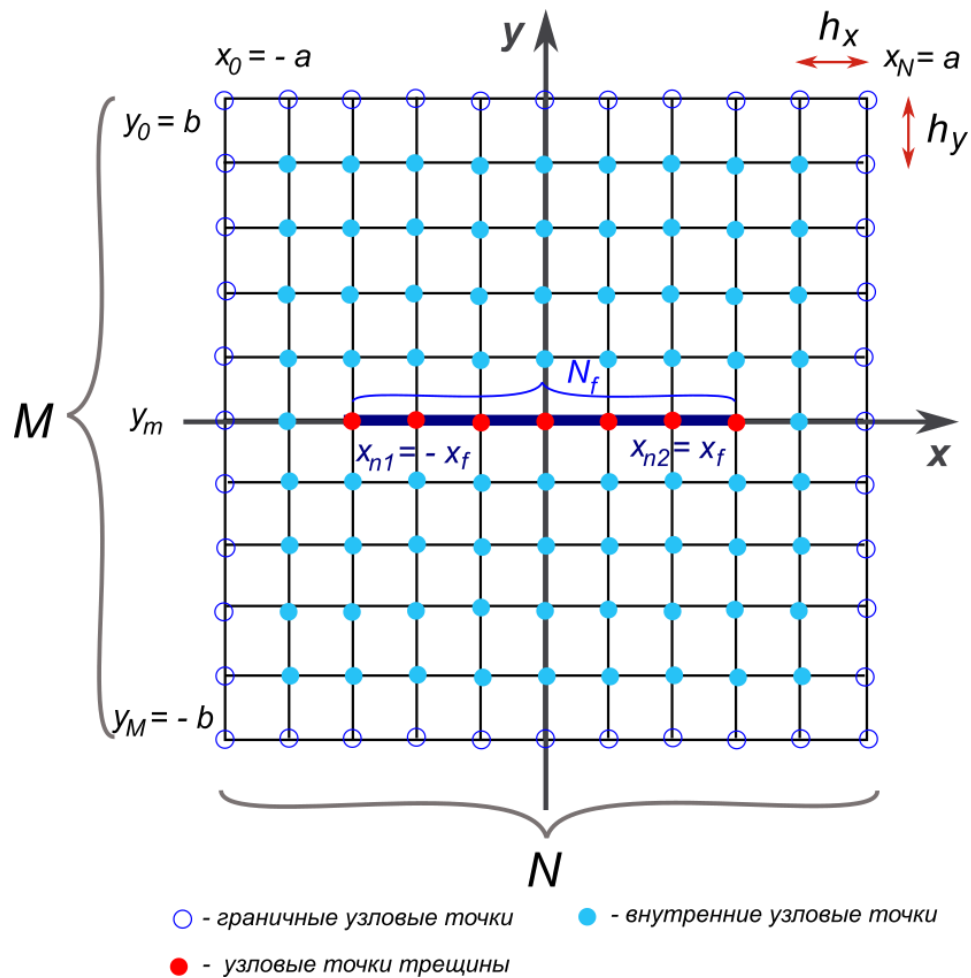


Рис. 2.4. Сетка пространства.

Тогда первое уравнение системы (2.5) примет вид:

$$\frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{h_y^2} = 0 \quad (2.8)$$

Тогда выражение для нахождения $f_{i,j}$:

$$f_{i,j} = \frac{1}{2(h_x^2 + h_y^2)} (h_y^2 f_{i-1,j} + h_y^2 f_{i+1,j} + h_x^2 f_{i,j-1} + h_x^2 f_{i,j+1}) \quad (2.9)$$

где $i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, M-1}$.

Таким образом, значение функции $f_{i,j}$ зависит от значений в соседних узлах, образуя схему «крест» (Рис. 2.5).

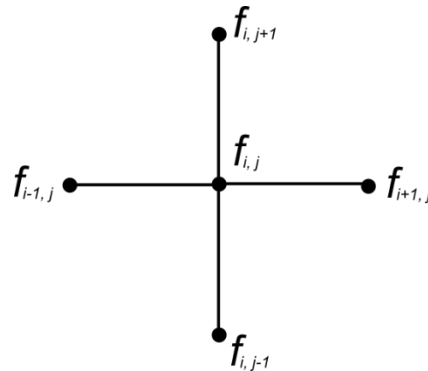


Рис. 2.5. Конечно-разностная схема «крест».

Дискретизация граничных условий.

$$f_{i,j} = 1 \text{ при } \begin{cases} i = \overline{n_1, n_2} \\ j = m \end{cases} \quad (2.10)$$

где $n_1 = \frac{N-N_f}{2}$, $n_2 = N + N_f$ – номера узлов трещины.

$$f_{i,j} = 0 \text{ при } \begin{cases} i = 0, & j = \overline{0, M} \\ i = N, & j = \overline{0, M} \\ i = \overline{0, N}, & j = 0 \\ i = \overline{0, N}, & j = M \end{cases} \quad (2.11)$$

Граничные условия разрешены относительно неизвестных в граничных узлах сетки, поэтому уравнения, содержащие граничные условия, можно убрать из системы разностных уравнений, подставив вместо соответствующих неизвестных их значения.

Сформируем вектор неизвестных \vec{f} следующим образом: $\vec{f} = (f_{1,1}, f_{2,1}, \dots, f_{N-1,1}, f_{1,2}, f_{2,2}, \dots, f_{N-1,2}, \dots, f_{1,M-1}, f_{2,M-1}, \dots, f_{N-1,M-1})$.

Тогда систему разностных уравнений можно записать в матричном виде:

$$A\vec{f} = \vec{B} \quad (2.12)$$

встроенную функцию `numpy.linalg.solve`, реализующую процедуру LAPACK * `gesv` (LAPACK — библиотека с открытым исходным кодом, содержащая методы для решения основных задач линейной алгебры). Она подразумевает использование LU-разложения [7], [9] для нахождения решения. В данном случае матрица A представляется в виде произведения трех матриц: $A = PLU$, где P — матрица перестановок, L — нижнетреугольная матрица, U — верхнетреугольная матрица. Таким образом, в результате прямых и обратных подстановок с использованием факторизованной матрицы A удастся получить решение. Ограничением модели является трудоемкость вычислений, поскольку при использовании мелкой сетки матрица A будет иметь большую размерность.

Итерационный метод [7], [9] подразумевает получение решения в виде предела последовательных приближений. Поскольку за конечное число итераций предел не достигается, задается некоторое число $\varepsilon > 0$, характеризующее точность получаемого решения. Достижение заданной точности в процессе итераций будет означать окончание вычислений.

Простейшими итерационными методами являются:

- Метод Якоби;
- Метод Гаусса-Зейделя;
- Метод верхней релаксации.

Указанные методы применимы для симметричных положительно определенных матриц, тогда СЛАУ (2.12) приведем к виду $-A\vec{f} = -\vec{B}$, где матрица $(-A)$ будет положительно определенной.

Метод Якоби предполагает нахождение значения функции $f_{i,j}$ на новой итерации с помощью схемы (2.9) для значений на предыдущей итерации, при этом необходимо задать начальное приближение решения.

Каноническая форма записи метода Якоби имеет вид:

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(h_x^2 + h_y^2)} (h_y^2 f_{i-1,j}^k + h_y^2 f_{i+1,j}^k + h_x^2 f_{i,j-1}^k + h_x^2 f_{i,j+1}^k) \quad (2.13)$$

где k – номер итерации.

Достаточным условием сходимости метода Якоби является диагональное преобладание матрицы $(-A)$.

Метод Гаусса-Зейделя является модификацией метода Якоби. Отличие метода состоит в том, что для вычисления i -ой (j -ой) компоненты функции $f_{i,j}$ на итерации $(k + 1)$ используется уже вычисленное на этом $(k + 1)$ -м шаге значение $i - 1$ ($j - 1$) компонент.

Метод Гаусса-Зейделя в каноническом виде имеет вид:

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(h_x^2 + h_y^2)} (h_y^2 f_{i-1,j}^{k+1} + h_y^2 f_{i+1,j}^k + h_x^2 f_{i,j-1}^{k+1} + h_x^2 f_{i,j+1}^k) \quad (2.14)$$

Условие сходимости метода аналогично методу Якоби. Заметим, что при условии диагонального преобладания метод Гаусса-Зейделя сходится быстрее, чем метод Якоби.

Существенного ускорения скорости сходимости можно добиться, используя *метод верхней релаксации*, который является обобщением метода Гаусса-Зейделя:

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{w}{2(h_x^2 + h_y^2)} (h_y^2 f_{i-1,j}^{k+1} + h_y^2 f_{i+1,j}^k + h_x^2 f_{i,j-1}^{k+1} + h_x^2 f_{i,j+1}^k) + (1 - w)f_{i,j}^k \quad (2.15)$$

где w – параметр релаксации. В случае симметричной положительно определенной матрицы A метод сходится при $0 < w < 2$ [9]. Выбор оптимального итерационного параметра в методе верхней релаксации позволяет ускорить сходимость метода.

Условием окончания итераций было выбрано следующее условие (достижение евклидовой нормы заданной точности):

$$\sqrt{\sum_{i,j} (f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k)^2} \leq \varepsilon \quad (2.16)$$

В Таблице 2.1 представлено сравнение итерационных методов, а именно количество необходимых итераций для достижения заданной точности ($\varepsilon = 1e - 4$).

Таблица 2.1

Сравнение итерационных методов по скорости сходимости

Число ячеек $N \times M$	Число итераций		
	Метод Якоби	Метод Гаусса-Зейделя	Метод верхней релаксации
10 × 10	70	39	16
20 × 20	252	139	31
40 × 40	918	507	63
60 × 60	1944	1079	95
120 × 120	6934	3893	191

Исходя из сравнения описанных итерационных методов, метод верхней релаксации требует меньшее количество итераций для достижения заданной точности (Таблица 2.1).

В Таблице 2.2 представлено сравнение прямого метода решения СЛАУ (LU-разложение) и итерационного (метод верхней релаксации) с точки зрения времени расчета.

Из сравнения времени расчета (Таблица 2.2) видно, что прямой метод решения СЛАУ имеет явное преимущество с точки зрения быстроты вычислений, в связи было принято решение о его использовании для решения задачи. Однако стоит отметить, что при увеличении числа ячеек происходит переполнение матрицы A , что затрудняет расчет с помощью прямого метода. В таком случае для расчета был использован метод верхней релаксации.

Таблица 2.2

Сравнение времени расчета прямым и итерационным методом

Число ячеек $N \times M$	Время расчета, с	
	LU-разложение	Метод верхней релаксации
10×10	0.01	0.01
20×20	0.02	0.13
40×40	0.1	1.35
60×60	0.65	6.5
120×120	25.4	89.3

2.2.3. Проверка численной реализации.

Проверку реализованной численной схемы можно осуществить путем сравнения с известным аналитическим решением. Тогда рассмотрим следующую краевую задачу (Рис. 2.7):

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b \\ u(x = \pm a, y) = V_0 \\ u(x, y = \pm b) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

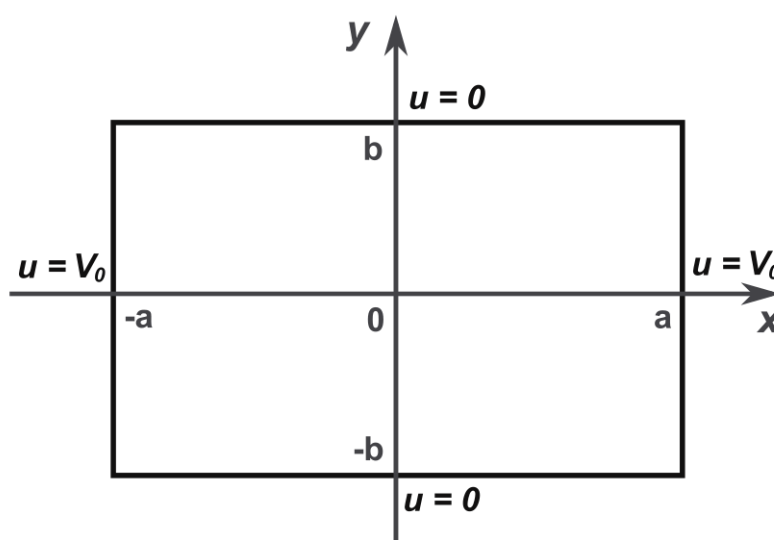
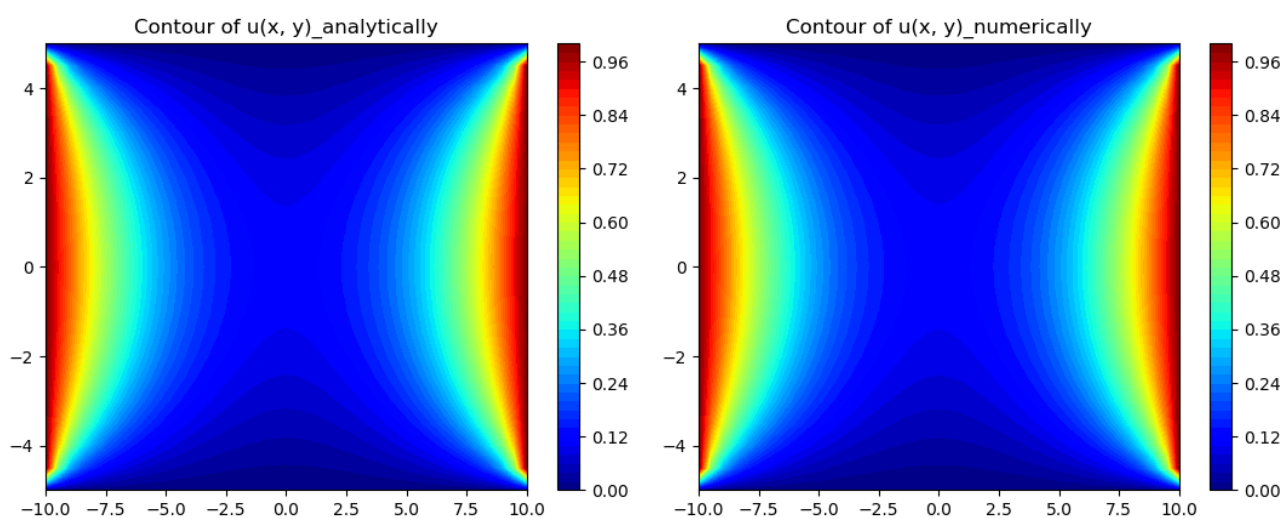


Рис. 2.7. Граничные условия задачи (2.17).

Решая задачу методом разделения переменных Фурье, получаем следующее решение:

$$u(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n+1)}{2b} x \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2n+1)}{2b} 2a} \frac{1}{2n+1} \quad (2.18)$$

На Рис. 2.8 представлены результаты вычислений функции $u(x, y)$ численным методом и с помощью аналитической формулы (2.18) при $V_0 = 1$.



а) Аналитическое решение

а) Численное решение

Рис. 2.8. Результаты вычисления функции $u(x, y)$ аналитическим а) и численным б) методом.

Результаты вычисления ошибки численного метода показывают, что максимальная относительная погрешность вычисления составляет 2.5% (Рис 2.9).

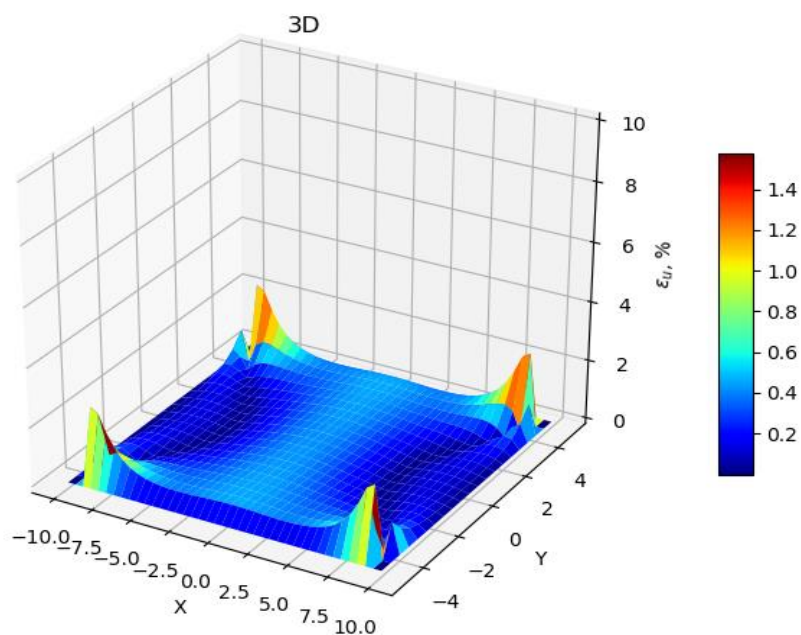


Рис. 2.9. Относительная погрешность вычислений.

2.2.4. Результаты решения гидродинамической задачи.

Результат решения задачи гидродинамики представлен на Рис. 2.10, 2.11. Расчет распределения функции $f(x, y)$ производился при следующих параметрах: $a = 500$ м, $b = 350$ м, $x_f = 100$ м.

Полученное решение для области с одной нагнетательной скважиной можно распространить на элемент разработки, содержащий 2 нагнетательные и 2 добывающие скважины (Рис. 2.12, 2.13).

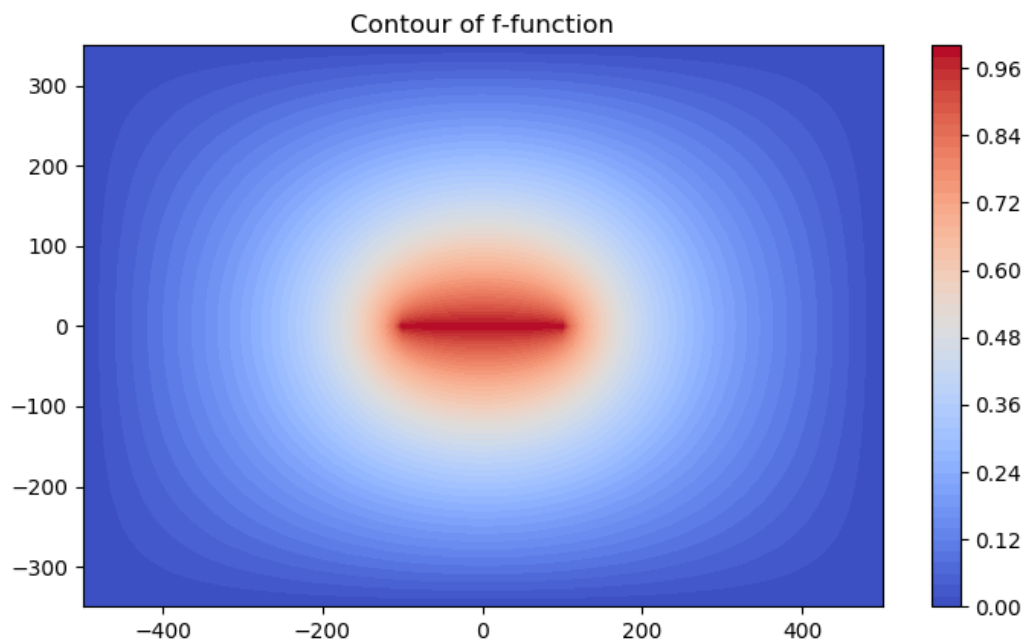


Рис. 2.10. Распределение функции $f(x, y)$ в области с одной нагнетательной скважиной (2D).

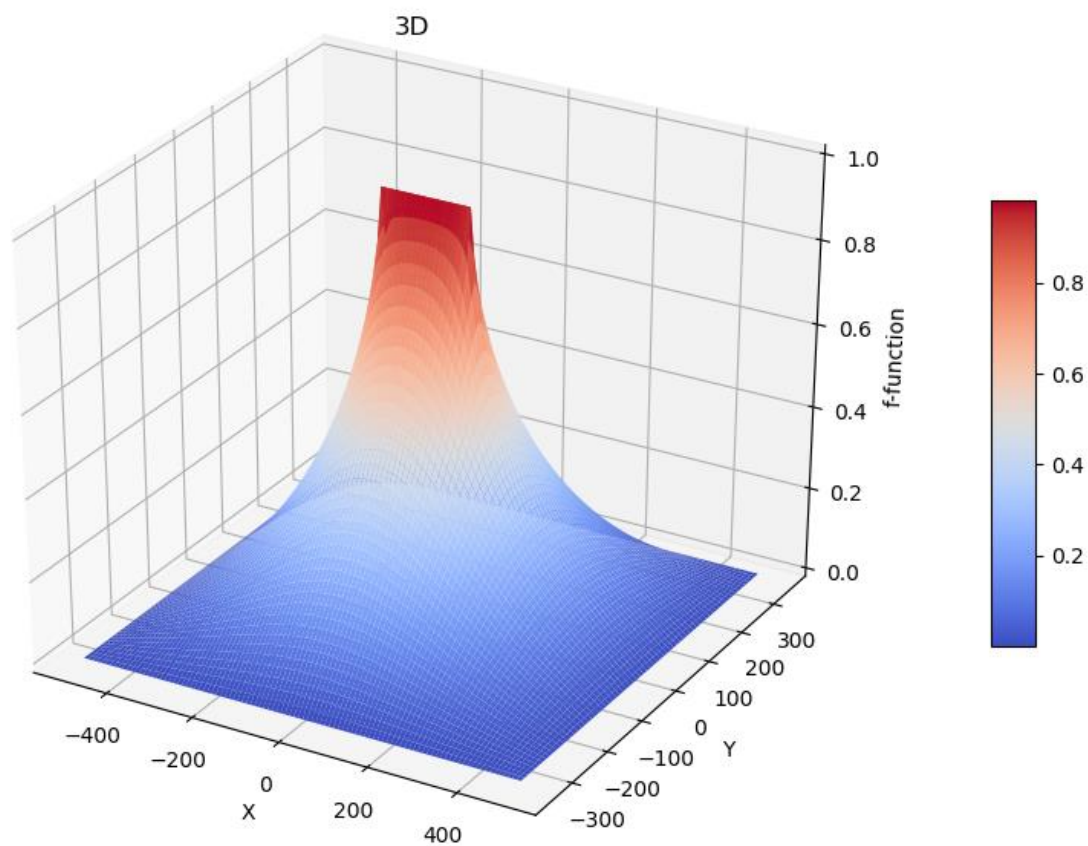


Рис. 2.11. Распределение функции $f(x, y)$ в области с одной нагнетательной скважиной (3D).

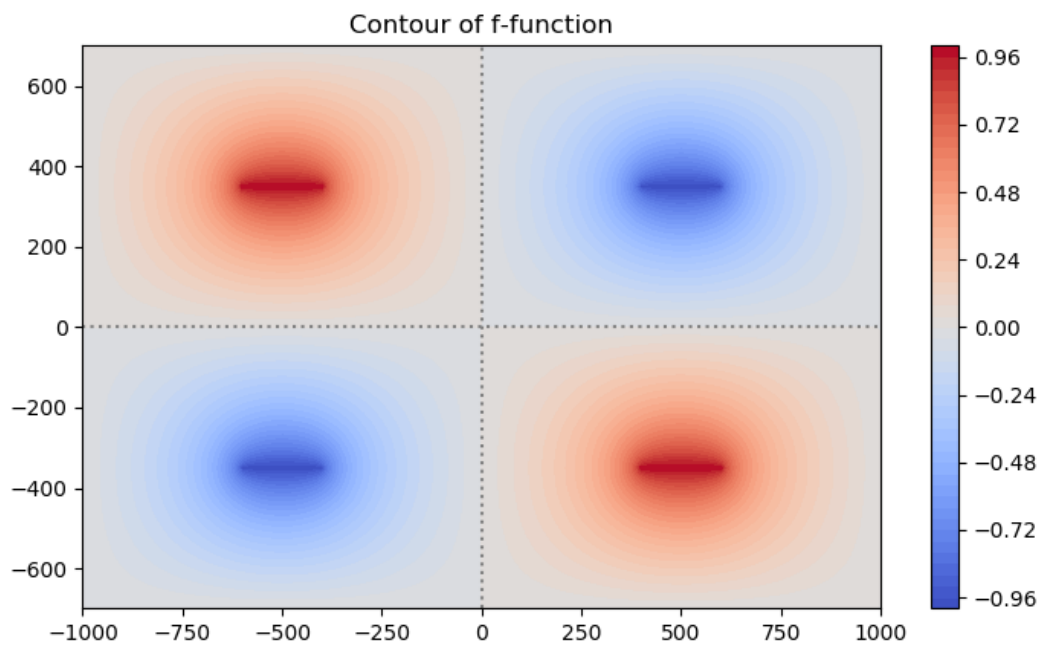


Рис. 2.12. Распределение функции $f(x, y)$ в элементе с 2 нагнетательными и 2 добывающими скважинами (2D).

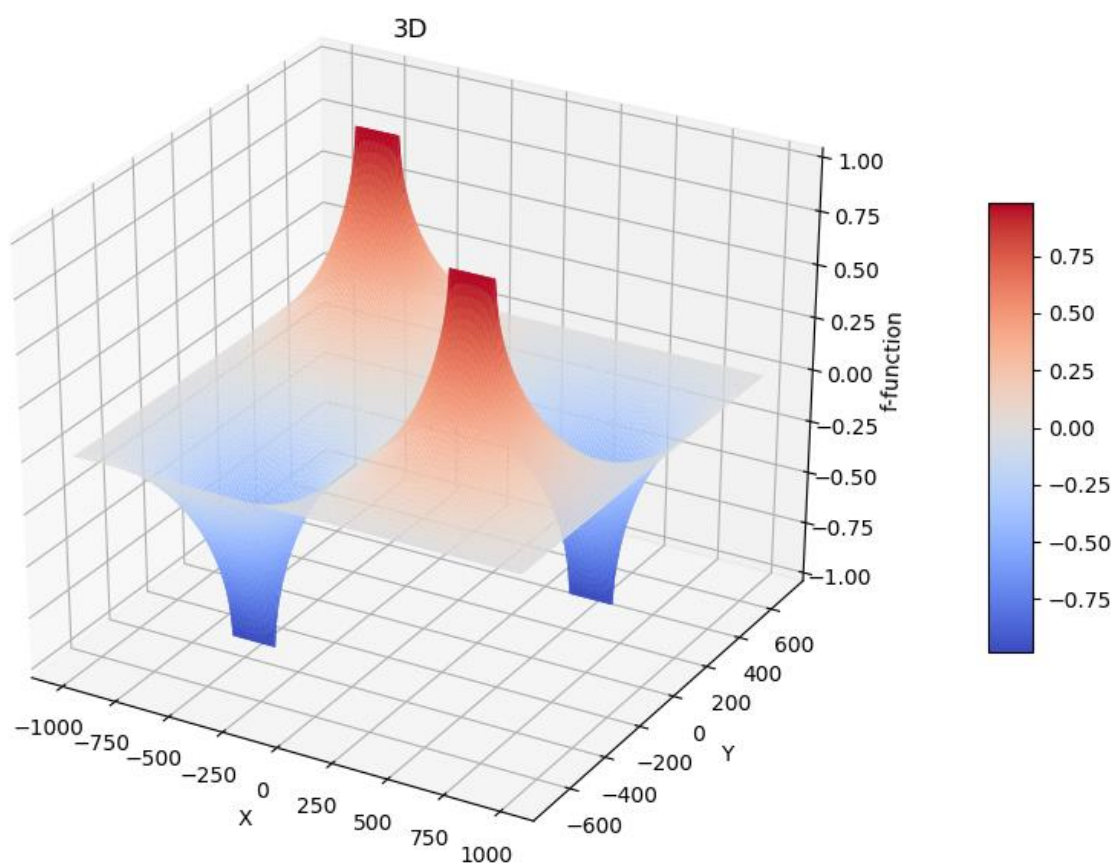


Рис. 2.13. Распределение функции $f(x, y)$ в элементе с 2 нагнетательными и 2 добывающими скважинами (3D).

2.3. Решение пороупругой задачи.

2.3.1. Физико-математическая модель.

Следующим шагом в решении задачи о поиске давления роста трещины является поиск изменения напряжений, вызванных изменением давления p_{delta} .

Для нахождения изменения напряжений необходимо решить уравнение равновесия для полных напряжений:

$$\partial_j \sigma_{delta ij} = 0 \quad (2.19)$$

Напряжения в пласте описываются обобщенным законом Гука с учетом пороупругости [15], [17]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + (\lambda\theta + \alpha p_{delta})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

Выражение для изменения напряжений имеет вид:

$$\sigma_{delta ij} = (\lambda\theta + \alpha p_{delta})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.21)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z)$ – тензор полных напряжений;

σ_{ij}^0 – начальное поле напряжений;

$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – коэффициенты Ламе;

E – модуль Юнга;

ν – коэффициент Пуассона;

$\theta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ – след тензора деформаций;

α – коэффициент Био;

δ_{ij} – символ Кронекера;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор малых деформаций;

u_i – проекции вектора перемещений $\vec{u}(u, v, w)$.

Поскольку при изменении давления в пласте вертикальные напряжения не меняются, то есть $\sigma_{delta zz} = 0$, задачу можно свести к плоско-напряженной

постановке. То есть можно считать рассматриваемую область тонкой пластинкой, основания которой свободны от внешних напряжений [6].

Выразим компонент тензора напряжений $\sigma_{\delta zz}$:

$$\sigma_{\delta zz} = \lambda\theta + \alpha p_{\delta} + 2\mu\varepsilon_{zz} \quad (2.22)$$

Так как $\sigma_{\delta zz} = 0$, получаем:

$$\lambda\theta^* + \lambda\varepsilon_{zz} + \alpha p_{\delta} + 2\mu\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.23)$$

где θ^* – плоский след тензора деформаций.

Выразим компонент ε_{zz} тензора деформаций:

$$(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} = -\alpha p_{\delta} - \lambda\theta^* \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\alpha p_{\delta} - \lambda\theta^*}{\lambda + 2\mu} \quad (2.25)$$

Подставляем выражение (2.25) в (2.21):

$$\sigma_{\delta ij} = (\lambda(\theta^* + \varepsilon_{zz}) - \alpha p_{\delta})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{\delta ij} = \left(\lambda \left(\theta^* + \frac{-\alpha p_{\delta} - \lambda\theta^*}{\lambda + 2\mu} \right) + \alpha p_{\delta} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{\delta ij} = \left(\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \theta^* - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - 1 \right) \alpha p_{\delta} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.28)$$

$$\sigma_{\delta ij} = \left(\lambda \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \theta^* + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha p_{\delta} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.29)$$

Обозначим $\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} = A$, тогда обобщенный закон Гука примет вид:

$$\sigma_{\delta ij} = (\lambda A \theta^* + A \alpha p_{\delta}) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.30)$$

Решение задачи будем искать в смещениях (u, v) . Граничные условия на смещения поставим периодическими в силу периодичности системы разработки:

$$\begin{aligned} u(x, y = 2b) &= u(x, y = -2b) \\ u(x = 2a, y) &= u(x = -2a, y) \\ v(x, y = 2b) &= v(x, y = -2b) \\ v(x = 2a, y) &= v(x = -2a, y) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Подставляем (2.30) в (2.19), получаем:

$$\partial_j(\lambda A \theta^* + A \alpha p_{\text{delta}}) \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} \partial_j(\partial_j u_i + \partial_i u_j) = 0 \quad (2.32)$$

$$\partial_j \lambda A \theta^* \delta_{ij} + \mu \partial_j(\partial_j^2 u_i + \partial_i \partial_j u_j) = -A \alpha \partial_j p_{\text{delta}} \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Тогда математическая модель для нахождения смещений имеет вид:

$$\partial_j \lambda A \theta^* \delta_{ij} + \mu \partial_j(\partial_j^2 u_i + \partial_i \partial_j u_j) = -A \alpha \partial_j p_{\text{delta}} \delta_{ij} \quad (2.34)$$

$$\text{гУ: } \begin{cases} u_i(x, y = 2b) = u_i(x, y = -2b) \\ u_i(x = 2a, y) = u_i(x = -2a, y) \end{cases} \quad (2.35)$$

В проекциях на x, y уравнение (2.34) преобразуется к следующей системе:

$$\begin{cases} \lambda A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda A \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -A \alpha \frac{\partial p_{\text{delta}}}{\partial x} \\ \lambda A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda A \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -A \alpha \frac{\partial p_{\text{delta}}}{\partial y} \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} (\lambda A + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda A + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -A \alpha \frac{\partial p_{\text{delta}}}{\partial x} \\ (\lambda A + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\lambda A + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -A \alpha \frac{\partial p_{\text{delta}}}{\partial y} \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda A + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} & (\lambda A + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ (\lambda A + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & (\lambda A + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\alpha \frac{\partial p_{\text{delta}}}{\partial x} \\ -A\alpha \frac{\partial p_{\text{delta}}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Решение системы (2.38) будем искать с помощью интегрального преобразования Фурье, что позволит свести систему дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений и автоматически удовлетворить периодическим граничным условиям. То есть будем искать решение задачи в виде интегрального разложения функции, соответствующего разложению в тригонометрический ряд Фурье [3]:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_y) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dk_x dk_y \quad (2.39)$$

где $f(x, y)$ – некоторая двумерная функция (оригинал);

k_x, k_y – частоты;

$\hat{f}(k_x, k_y)$ – фурье-образ функции $f(x, y)$.

Переход от фурье-образа функции к оригиналу называется обратным преобразованием Фурье (2.39), а от оригинала к образу – прямым и определяется как:

$$\hat{f}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dx dy \quad (2.40)$$

Применяя прямое преобразование Фурье к системе (2.38) и пользуясь тождеством $\widehat{f^{(n)}} = (ik)^n \hat{f}$, получаем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} (\lambda A + 2\mu)k_x^2 + \mu k_y^2 & (\lambda A + \mu)k_x k_y \\ (\lambda A + \mu)k_x k_y & (\lambda A + 2\mu)k_y^2 + \mu k_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iA\alpha k_x \hat{p}_{\text{delta}} \\ iA\alpha k_y \hat{p}_{\text{delta}} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Решая систему уравнений, получаем выражения для фурье-образов смещений (\hat{u}, \hat{v}) :

$$\begin{aligned}\hat{u} &= i \frac{A\alpha}{\lambda A + 2\mu} \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}} \\ \hat{v} &= i \frac{A\alpha}{\lambda A + 2\mu} \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}}\end{aligned}\quad (2.42)$$

Тогда можем получить выражения для фурье-образов деформаций:

$$\begin{aligned}\widehat{\varepsilon}_{xx} &= -\frac{A\alpha}{\lambda A + 2\mu} \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}} \\ \widehat{\varepsilon}_{yy} &= -\frac{A\alpha}{\lambda A + 2\mu} \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}} \\ \widehat{\varepsilon}_{xy} &= -\frac{A\alpha}{\lambda A + 2\mu} \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}}\end{aligned}\quad (2.43)$$

Фурье-образ следа тензора деформации:

$$\widehat{\theta}^* = -\frac{A\alpha}{\lambda A + 2\mu} \hat{p}_{\text{delta}}\quad (2.44)$$

Выражения для фурье-образов напряжений:

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{xx} &= \alpha(1 - 2\nu) \frac{k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}} \\ \widehat{\sigma}_{yy} &= \alpha(1 - 2\nu) \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}} \\ \widehat{\sigma}_{xy} &= \alpha(1 - 2\nu) \frac{k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2} \hat{p}_{\text{delta}}\end{aligned}\quad (2.45)$$

Оригиналы функций (2.45)-(2.45) находим с помощью обратного дискретного преобразования Фурье:

$$f[k, l] = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \hat{f}[m, n] e^{-2\pi i \frac{mk}{(M+1)}} e^{-2\pi i \frac{nl}{(N+1)}}\quad (2.46)$$

2.3.2. Результаты моделирования – поля смещений, деформаций и напряжений.

Результат описанного метода по нахождению изменений напряжений представлен на Рис. 2.14- 2.21. Расчет проведен при следующих параметрах: $a = 500$ м, $b = 350$ м, $x_f = 100$ м, $\alpha = 0,8$, $E = 20$ ГПа, $\nu = 0,27$, $p_{\text{репр}} = 200$ атм.

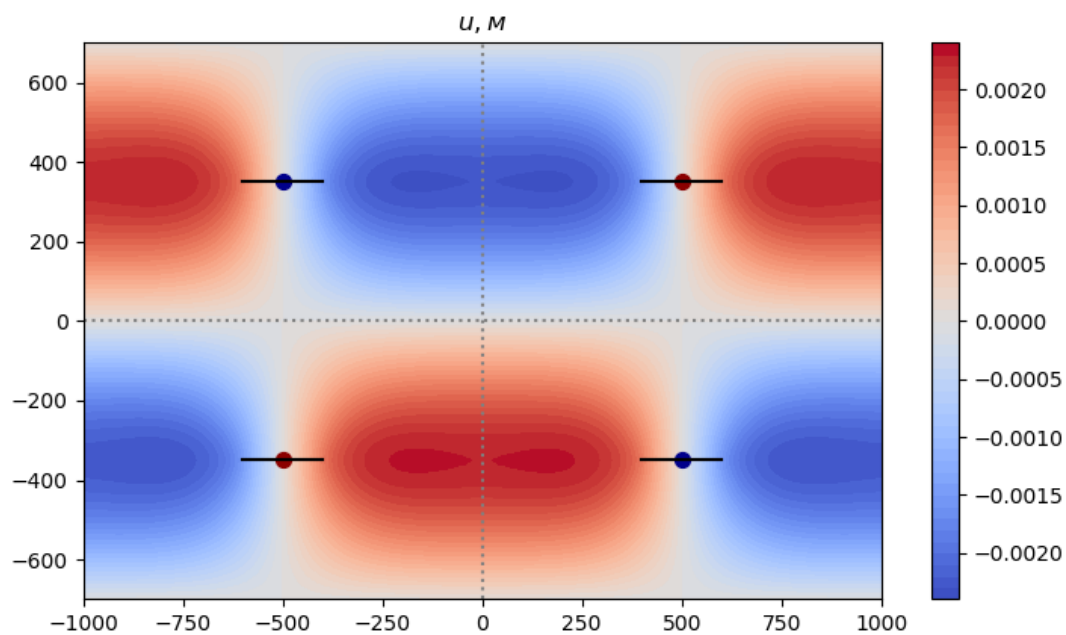


Рис. 2.14. Распределение смещения u .

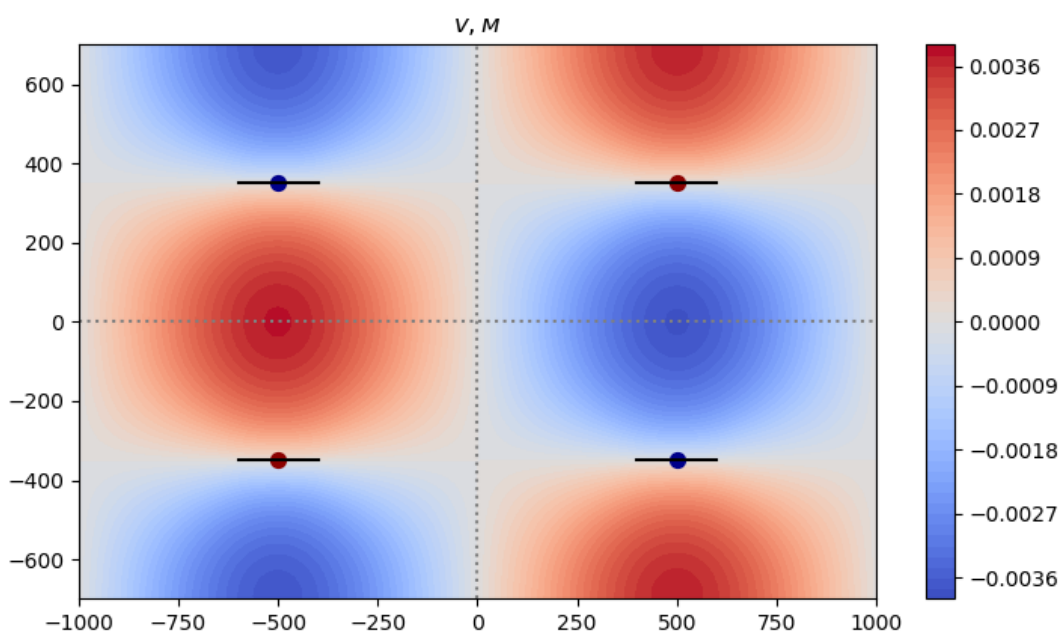


Рис. 2.15. Распределение смещения v .

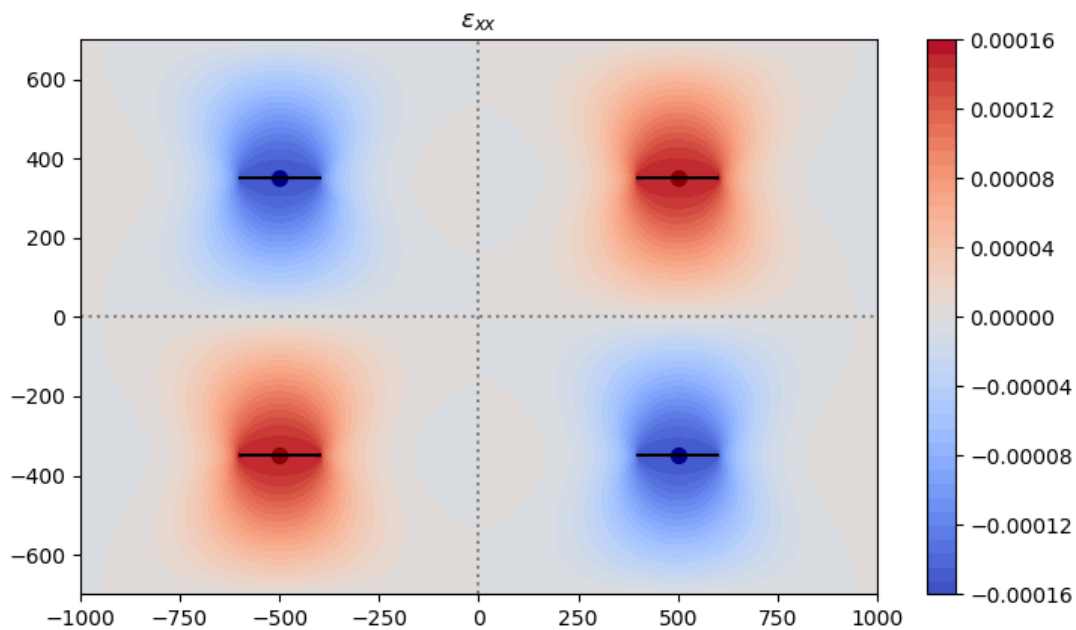


Рис. 2.16. Распределение деформации ε_{xx} .

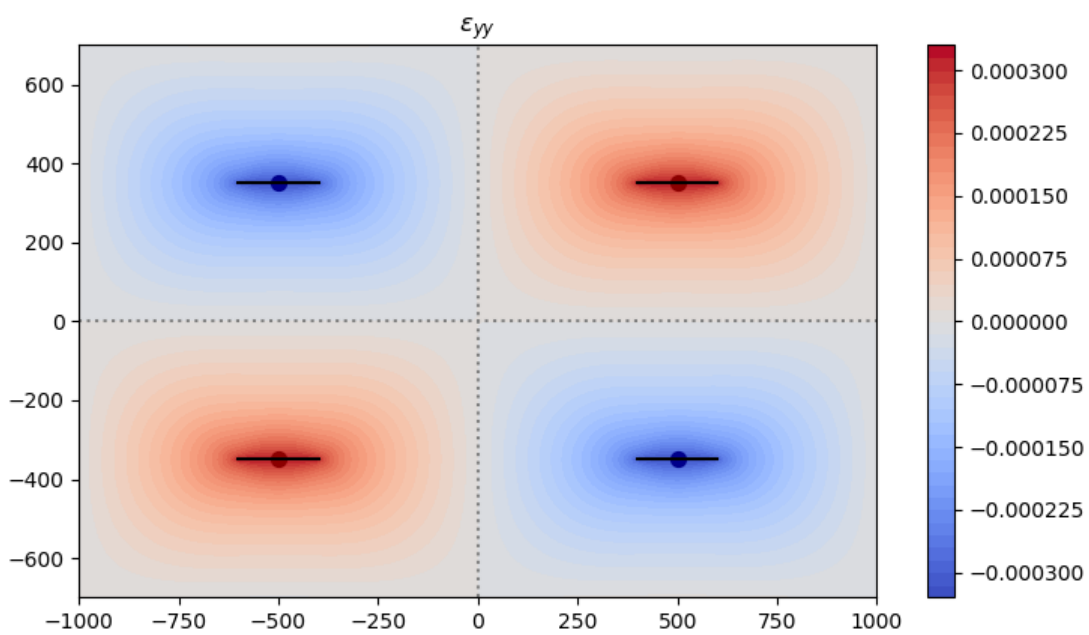
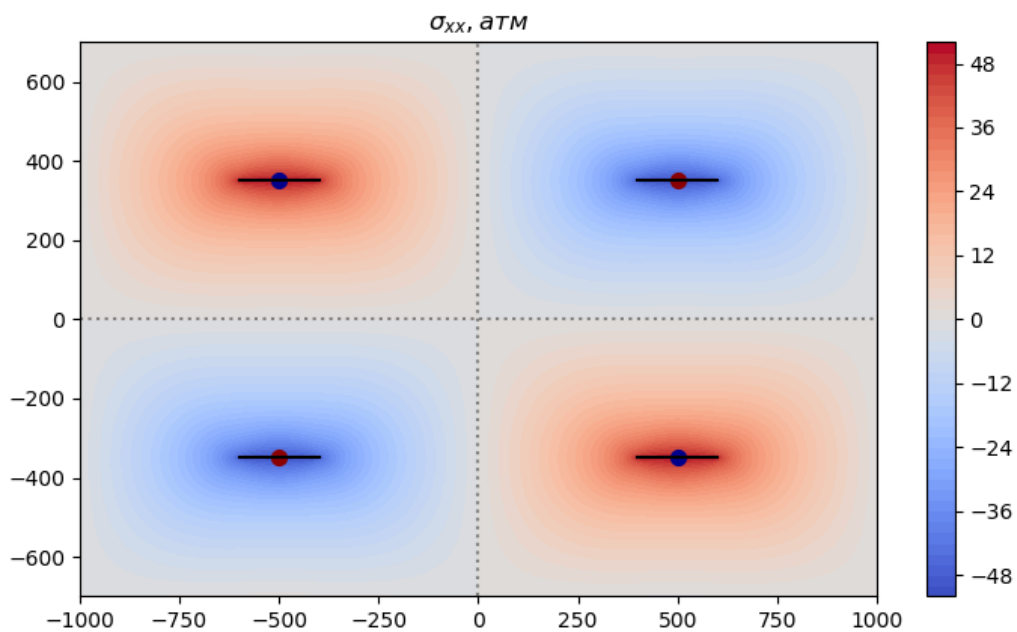
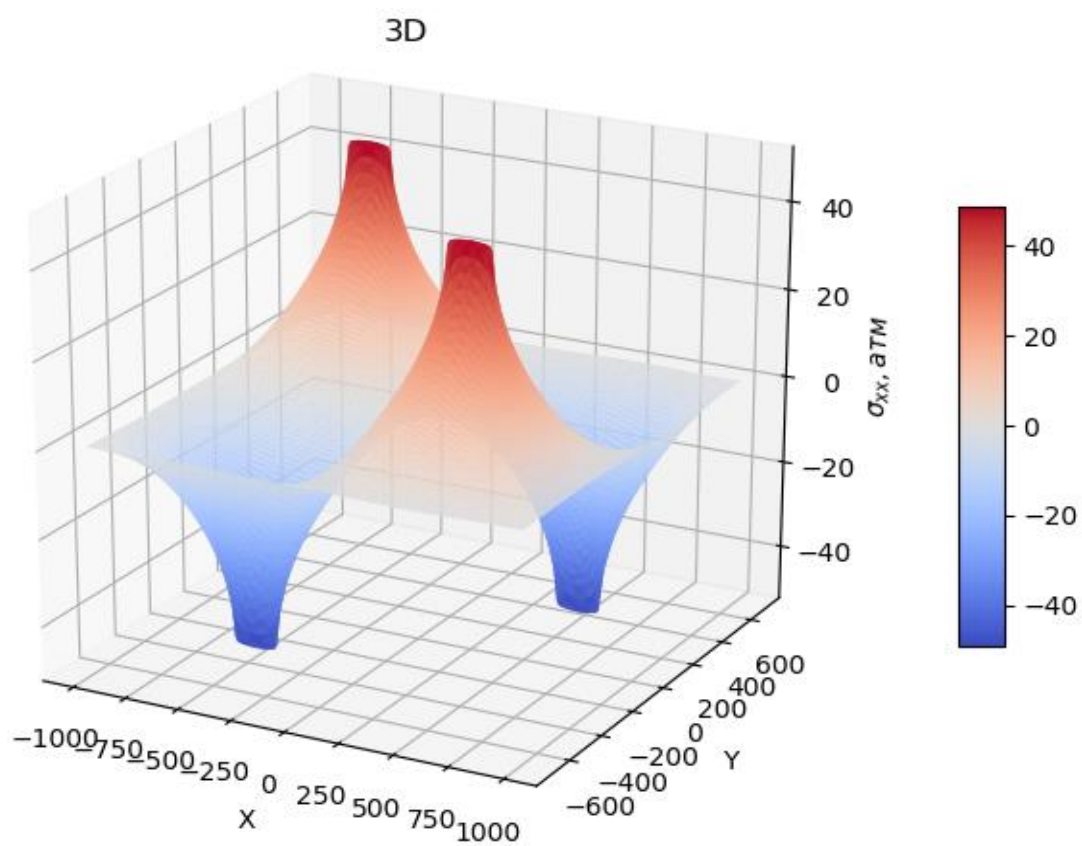
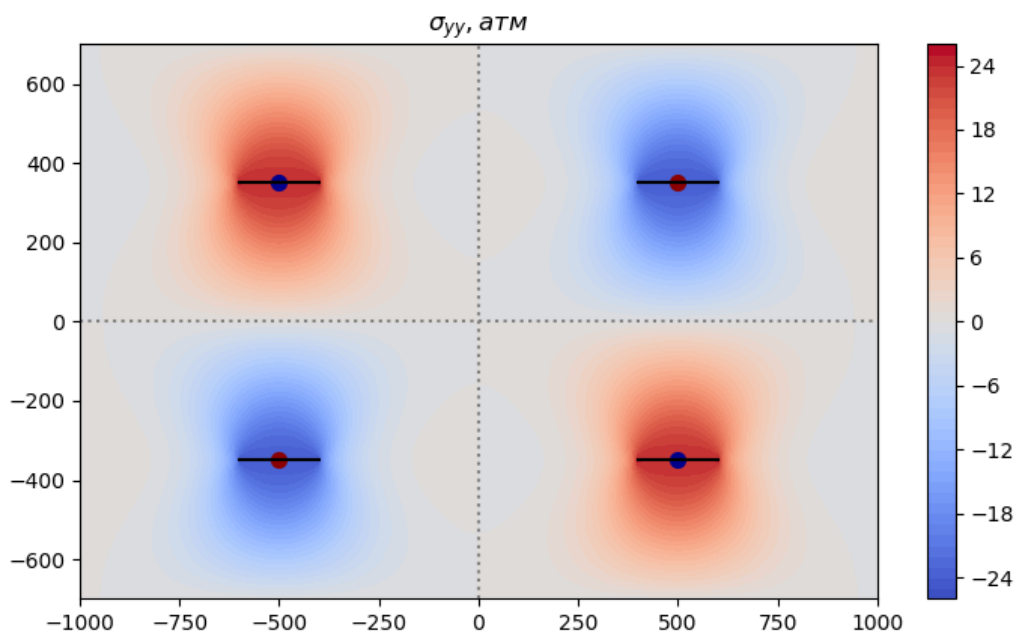
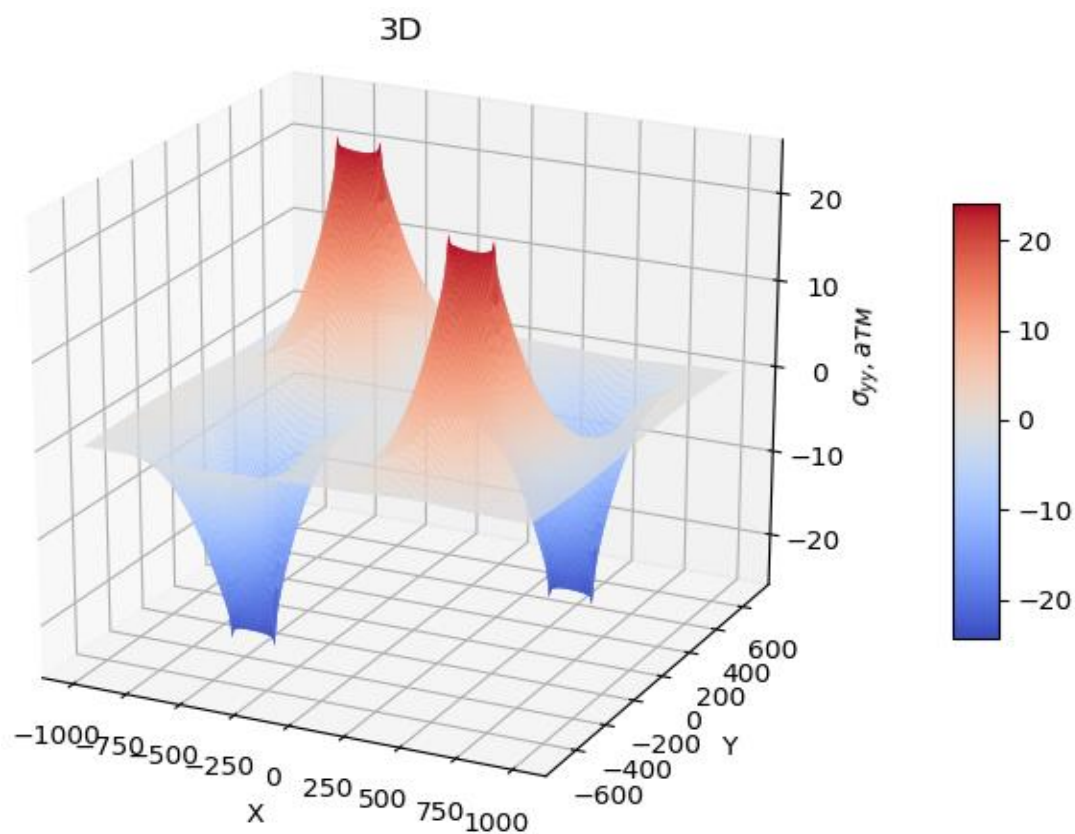


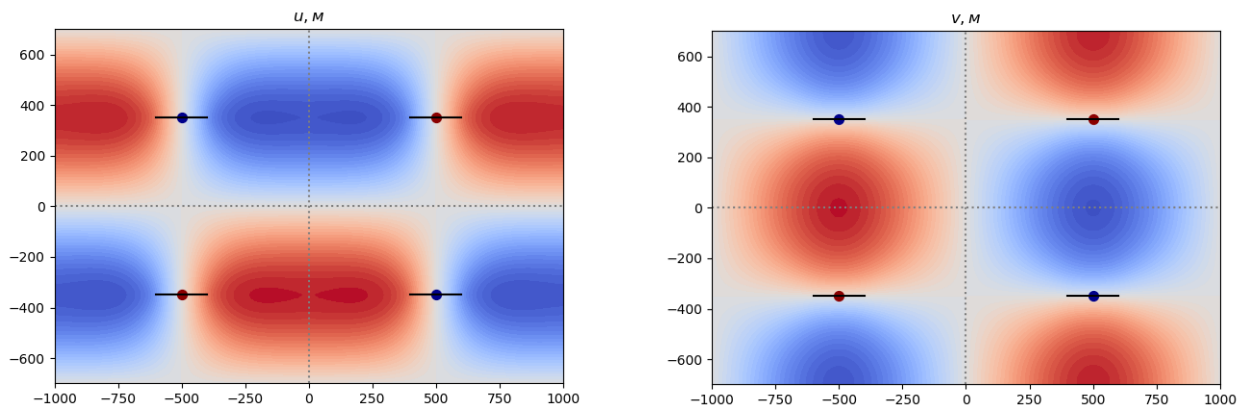
Рис. 2.16. Распределение деформации ε_{yy} .

Рис. 2.18. Распределение напряжения σ_{xx} .Рис. 2.19. Распределение напряжения σ_{xx} (3D).

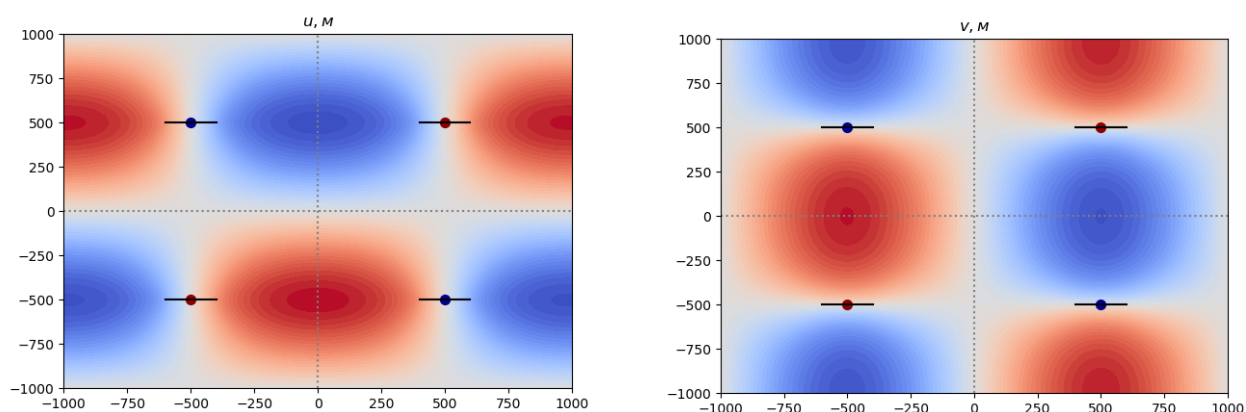
Рис. 2.20. Распределение напряжения σ_{yy} .Рис. 2.21. Распределение напряжения σ_{yy} (3D).

Интересным является изменение положений максимумов смещений в зависимости от соотношений размеров области a, b . Как видно из Рис. 2.22,

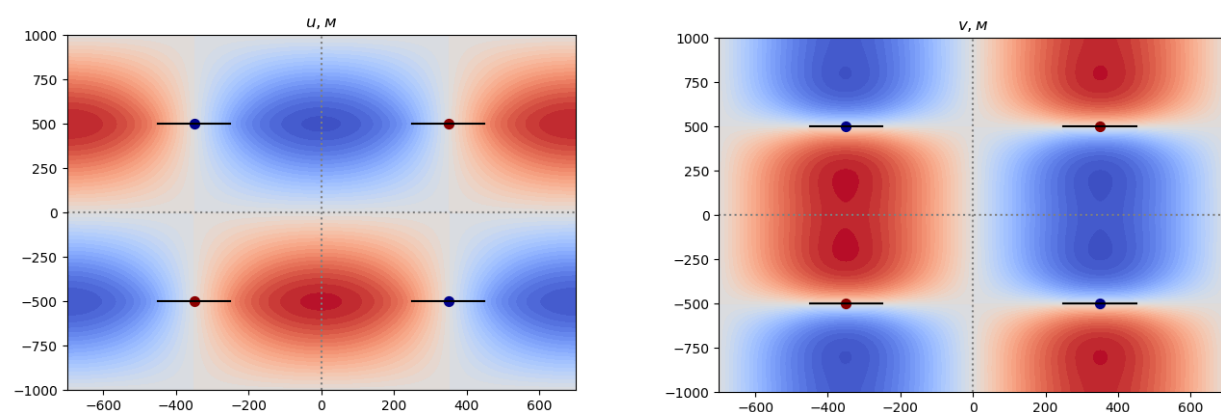
максимумы смещений находятся ровно посередине между скважинами в случае, если расстояние между скважинами по вертикали и горизонтали одинаково.



а) $a = 500 \text{ м}, b = 350 \text{ м}$



б) $a = 500 \text{ м}, b = 500 \text{ м}$



в) $a = 350 \text{ м}, b = 500 \text{ м}$

Рис. 2.22. Смещения u, v при разных соотношениях элемента разработки.

2.4. Валидация модели с помощью метода конечных элементов.

2.4.1. Суть метода конечных элементов.

Для проверки решения краевой задачи (2.34) - (2.35) используем метод конечных элементов (МКЭ). Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенном на конечном числе подобластей.

Процесс конечно-элементного анализа включает следующие этапы [32], [33]:

1) Дискретизация области: построение сетки.

Область, на которой решается задача, аппроксимируется подобластями простого типа, которые называются конечными элементами. Множество элементов составляет конечно-элементную сетку. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или просто узлами, которые являются вершинами конечных элементов и могут быть внешними и внутренними.

2) Построение системы базисных функций.

Производится выбор аппроксимирующих (базисных) функций. Они, как правило, выбираются в виде полиномов, поэтому пространство, на котором ищется решение, является пространством кусочно-полиномиальных функций.

Каждому внутреннему узлу x_i ставится в соответствие кусочно-линейная функция $N_i(x)$.

$$N_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_i}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

где $h_k = x_{k+1} - x_k$ - шаг сетки.

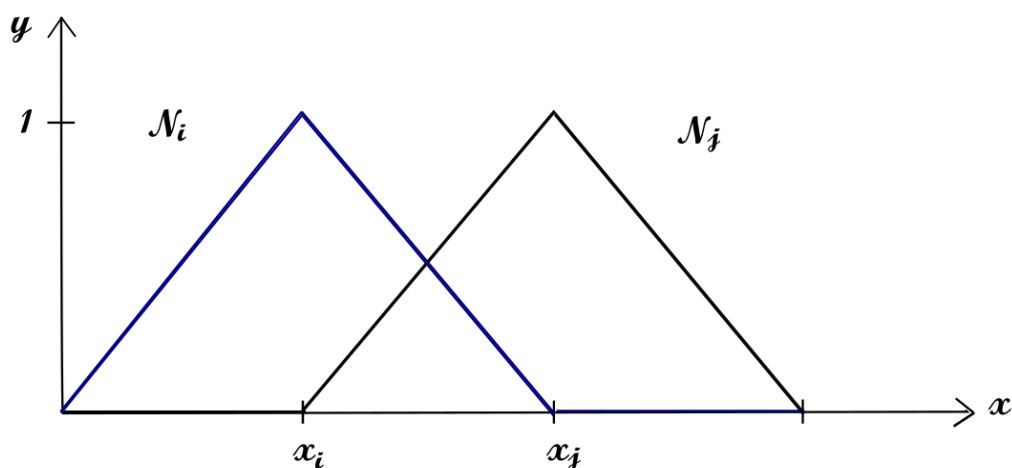


Рис. 2.23. Базисные функции N_i, N_j на элементе $[x_i, x_j]$.

Функции $N_i(x)$ обладают следующими свойствами:

- функция $N_i(x)$ равна единице в узле x_i и нулю во всех других узлах.
- функция $N_i(x)$ отлична от нуля только для элементов, содержащих узел x_i .

Базисные функции на элементе также называются функциями формы. Аппроксимирующая функция представляется в виде $\vec{v} = \sum v_l N_l(x)$.

3) Дискретизация дифференциального уравнения.

Решение краевой задачи ищется в виде линейной комбинации базисных функций, отвечающих внутренним вершинам.

Дискретизация производится с помощью метода Галеркина. Формируются интегралы от произведения исходного уравнения на базисную функцию с последующей заменой неизвестной функции ее аппроксимацией.

4) Решение системы линейных алгебраических уравнений.

2.4.2. Численная реализация МКЭ.

Решение задачи методом конечных элементов производится аналогично вышеупомянутому алгоритму: сначала решается задача на поиск изменения давления, а затем на нахождение изменения напряжений.

Программный модуль для решения задачи был разработан на базе пакета конечных элементов FreeFEM++ [24].

Первым шагом, как описывалось ранее, является задание и дискретизация (триангуляция) расчетной области (Рис. 2.24):

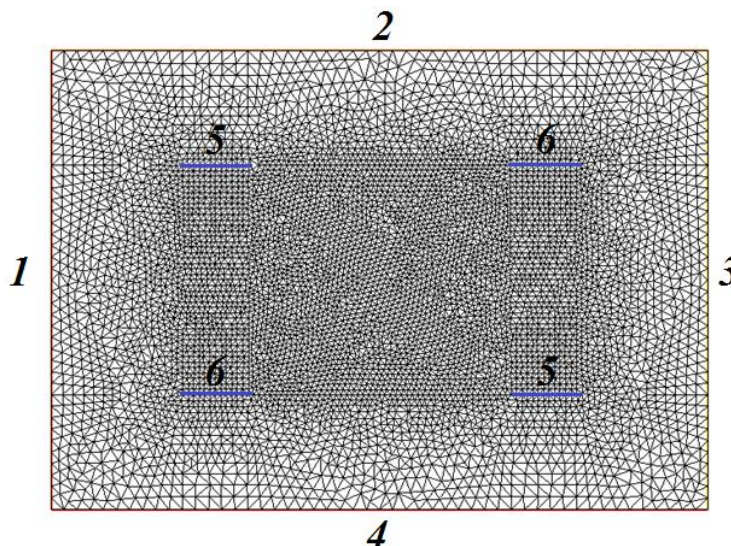


Рис.2.24. Триангулированная расчетная область с границами.

Решение краевой задачи с помощью пакета FreeFEM++ подразумевает переформулировку задачи в слабую (вариационную) форму по методу Галеркина. При этом решение некоторой функции $u(x, y)$ ищется в виде $u(x, y) = \sum u^l N^l(x)$.

Для решения краевой задачи (2.3) о распределении давления в слабой постановке умножим уравнение Лапласа на пробную функцию $w(x, y)$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\int_{\Omega} \Delta p_{\text{delta}}(x, y) \cdot w(x, y) d\Omega = 0 \quad (2.47)$$

Используя формулу Грина, получаем уравнение (2.48) из (2.47):

$$\int_{\Omega} \nabla p_{\text{delta}}(x, y) \cdot \nabla w(x, y) d\Omega = 0 \quad (2.48)$$

Программная реализация решения уравнения (2.48) с учетом граничных условия Дирихле выглядит следующим образом:

solve Laplace(p, w)

*= int2d(Th)(dx(p) * dx(w) + dy(p) * dy(w)) // $\int_{\Omega} \nabla p_{\text{delta}}(x, y) \cdot \nabla w(x, y) d\Omega = 0$*
+ on(1, 2, 3, 4, p = 0.0) // $p_{\text{delta}}|_{\Gamma} = 0$
+ on(5, p = pr) // $p_{\text{delta}}|_{\Gamma_f} = p_{\text{репр}}$
+ on(6, p = -pr).

Дискретизацию уравнения равновесия (2.19) произведем аналогично, умножив на пробную функцию $v(x, y)$ и проинтегрировав по области Ω :

$$\int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij,j} \cdot v_i d\Omega = 0 \quad (2.49)$$

где v_i – декартова компонента вектора \vec{v} .

Воспользуемся формулой дивергенции произведения тензора на вектор:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_i)_j d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij,j} \cdot v_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_{j,i} d\Omega \quad (2.50)$$

Тогда получаем:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_i)_j d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_{j,i} d\Omega = 0 \quad (2.51)$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_i)_j d\Omega = \int_{\Gamma} v_i (\sigma_{\text{delta } ij} n_j) d\Gamma \quad (2.52)$$

Имеем:

$$\int_{\Gamma} v_i (\sigma_{\text{delta } ij} n_j) d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_{j,i} d\Omega = 0 \quad (2.53)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_{j,i} d\Omega = \int_{\Gamma} g_i \cdot v_i d\Gamma \quad (2.54)$$

Правая часть уравнения равна нулю, так как изменения поверхностных сил = 0.

Поменяем индексы i и j местами в уравнении (2.54):

$$\int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ji} \cdot v_{i,j} d\Omega = 0 \quad (2.55)$$

Сложим уравнения (2.54) и (2.55):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{\text{delta } ij} \cdot v_{j,i} + \sigma_{\text{delta } ji} \cdot v_{i,j}) d\Omega = 0 \quad (2.56)$$

Поскольку тензор напряжений симметричен: $\sigma_{\text{delta } ij} = \sigma_{\text{delta } ji}$, имеем:

$$\int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij} \cdot (v_{j,i} + v_{i,j}) d\Omega = 0 \quad (2.57)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{\text{delta } ij} \cdot \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}) d\Omega = 0 \quad (2.58)$$

Учитывая определение тензора малых деформаций, имеем:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ji}(\vec{v}) \sigma_{\text{delta } ij} d\Omega = 0 \quad (2.59)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ji}(\vec{v}) \left(\lambda A \theta^* \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ji}(\vec{v}) A \alpha p_{delta} \delta_{ij} d\Omega = 0 \quad (2.60)$$

Пусть $i = j$, тогда $\delta_{ij} = 1$, а $\theta^* = \varepsilon_{kk}(\vec{u})$

$$\int_{\Omega} \left(\lambda A \varepsilon_{kk}(\vec{u}) \varepsilon_{jj}(\vec{v}) + 2\mu \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{jj}(\vec{v}) A \alpha p_{delta} d\Omega = 0 \quad (2.61)$$

2.4.3. Сравнение методов.

На Рис. 2.25-2.27 представлено сравнение расчетов, полученных с помощью описанной модели, а также с помощью метода конечных элементов.

На Рис 2.25 показаны решения о распределении давления в элементе, на Рис 2.26 (а)-(б) – смещения u по оси x , Рис 2.26 (в)-(г) – смещения v по оси y .

Рис 2.27 (а)-(б) отражает распределение напряжений σ_{xx} , а Рис 2.27 (в)-(г) – напряжений σ_{yy} .

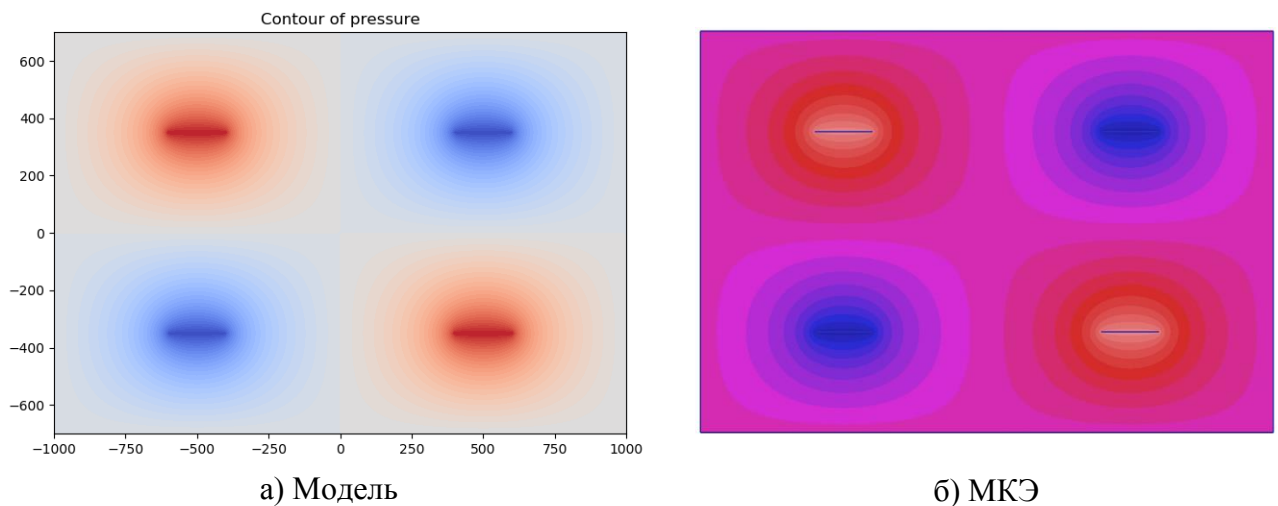
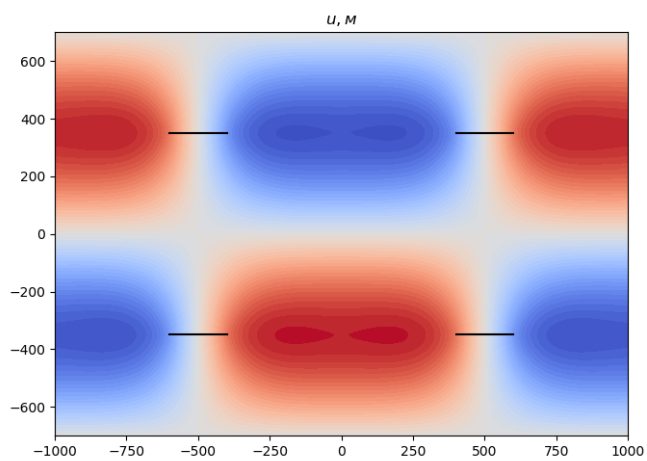
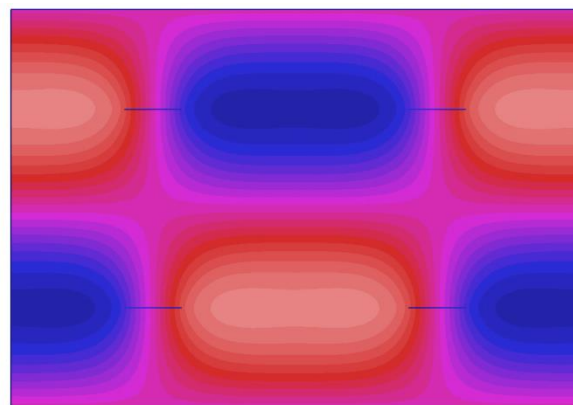


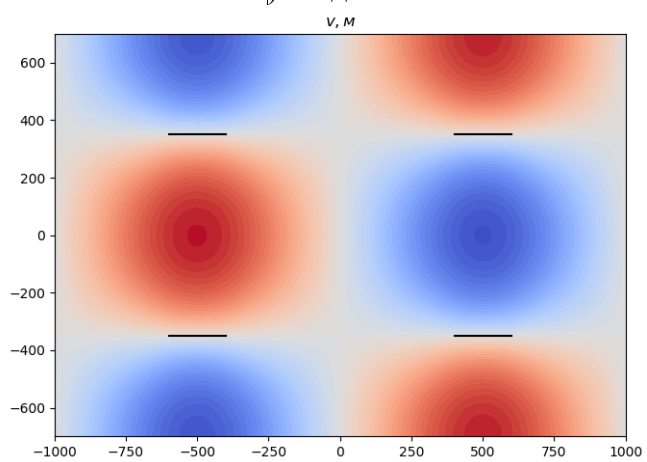
Рис. 2.25. Решение задачи гидродинамики.



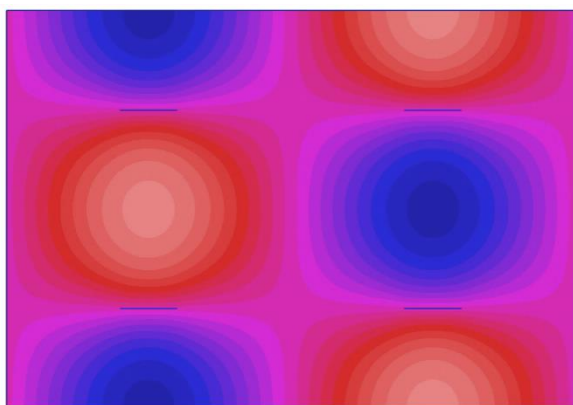
а) Модель



б) МКЭ

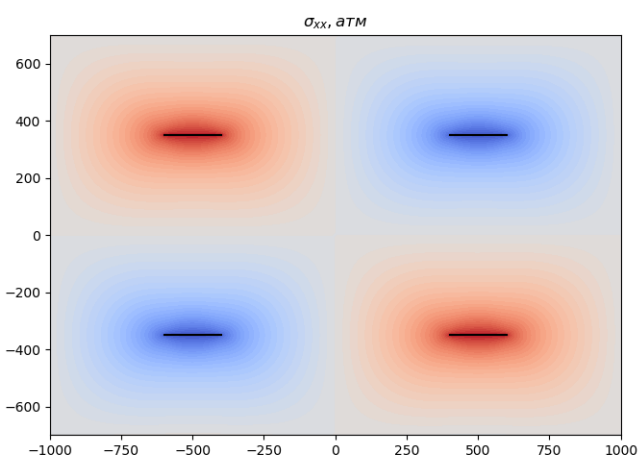


в) Модель

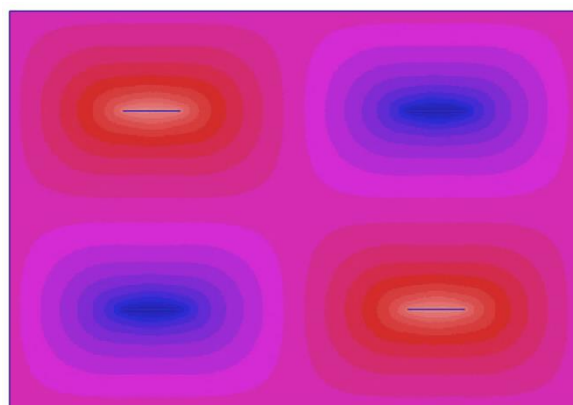


г) МКЭ

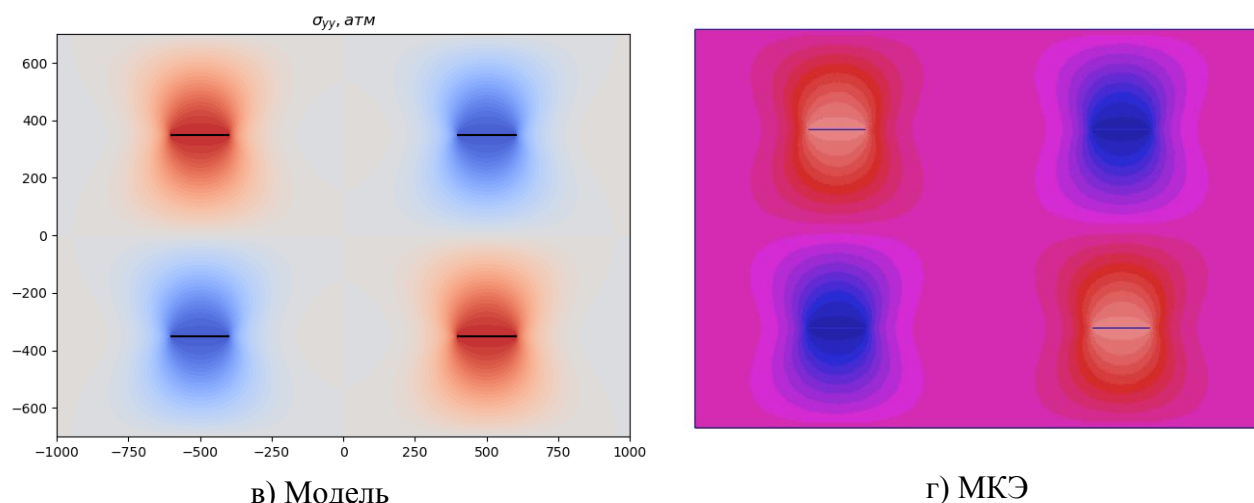
Рис. 2.26. Решение пороупругой задачи (смещения).



а) Модель



б) МКЭ



в) Модель

г) МКЭ

Рис. 2.27. Решение пороупругой задачи (напряжения).

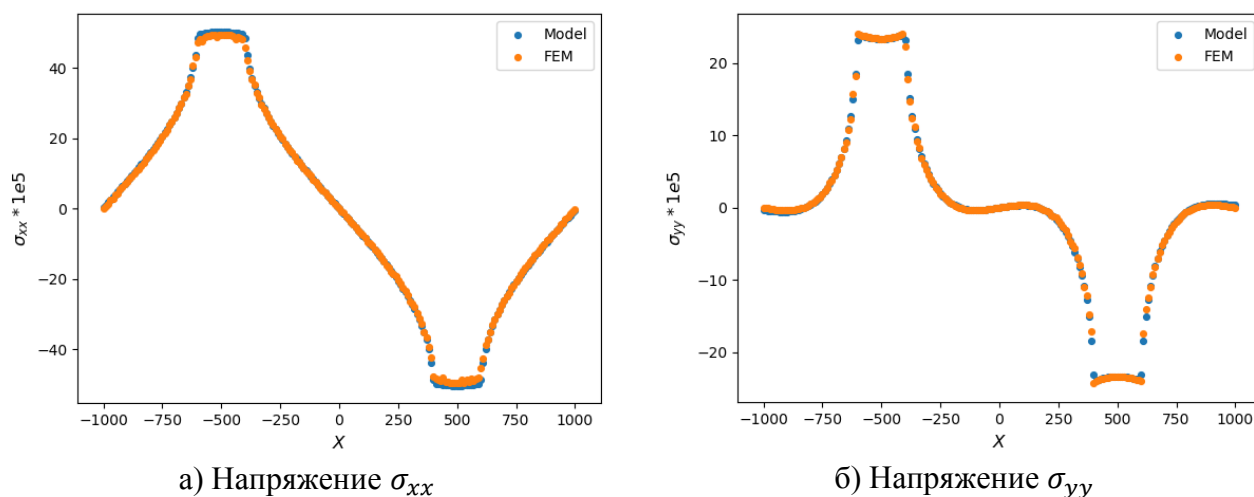
а) Напряжение σ_{xx} б) Напряжение σ_{yy}

Рис. 2.28. Сравнение срезов напряжений.

Исходя из вычисления относительной погрешности вычисления, максимальное расхождение составляет 4.2% (Рис. 2.28) что можно объяснить различием сеток для вычислений. Сравнение использованного метода с МКЭ показывает достоверность полученных результатов моделирования.

2.5. Критерий роста трещины.

Завершающим и ключевым этапом в поиске давления инициация трещины является определение критерия роста. В случае если трещина уже существует, условием для распространения трещины является увеличение

минимального горизонтального напряжения на величину критического напряжения [23]:

$$p_{fg} = \sigma_h + \sigma_{crit} \quad (2.62)$$

где p_{fg} – давление распространения трещины (давление автоГРП), $\sigma_h =$

$$\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} - \text{минимальное горизонтальное напряжение.}$$

Учитывая вид распределения минимального горизонтального напряжения (Рис. 2.29), имеющего максимумы на концах трещины, будем иметь следующий критерий роста:

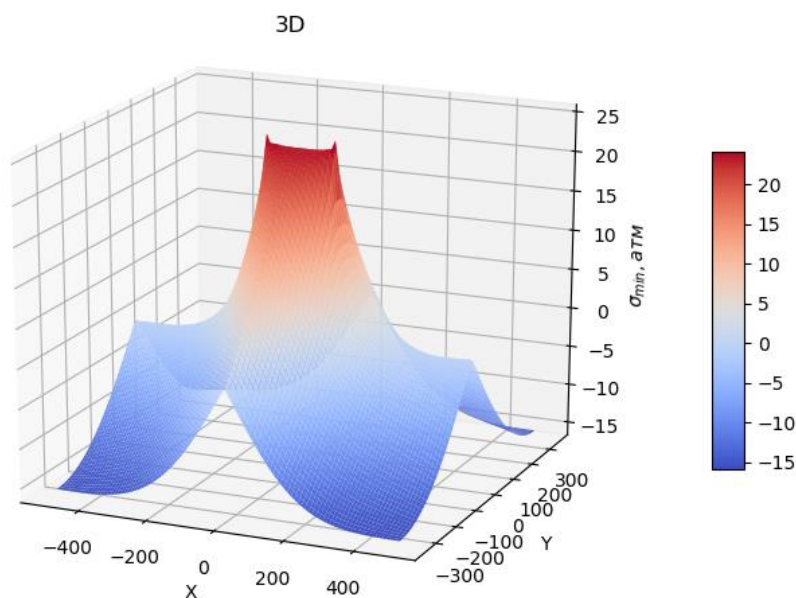


Рис. 2.29. Распределение минимальных горизонтальных напряжений вблизи нагнетательной скважины.

$$p_{fg} = \sigma_h(x_f) + \sigma_{crit} \quad (2.63)$$

Таким образом, задача состоит в нахождении критической поправки σ_{crit} на конце трещины. Удельная упругая энергия, запасенная в трещине на единицу длины, вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta U_f &= 2\delta S \int_0^v \sigma dv = 2\delta S \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sigma A d\sigma = 2\delta S \frac{1}{2} A (\sigma^2 - \sigma_0^2) \\
&= 2\delta S \frac{1}{2} A (\sigma - \sigma_0)(\sigma + \sigma_0) = 2\delta S \frac{1}{2} v (\sigma + \sigma_0) \\
&= 2\delta S \frac{1}{2} v (\sigma_0 + p_{net} + \sigma_0) = 2\delta S v \sigma_0 + 2\delta S \frac{1}{2} v p_{net} \\
&= \sigma_0 \delta V + 2\delta S \frac{1}{2} v p_{net}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

где p_{net} – чистое давление в трещине, δS – элементарная площадка, δV – элементарный объем.

Тогда полная упругая энергия трещины длины $2x_f$ (x_{f1}, x_{f2} – координаты правого и левого конца трещины) равна:

$$U_f = \int_{x_{f2}}^{x_{f1}} \sigma_0(x) \bar{w}(x) h dx + \frac{1}{2} \int_{x_{f2}}^{x_{f1}} \bar{w}(x) p_{net}(x) h dx \tag{2.65}$$

где $\bar{w}(x)$ – среднее раскрытие трещины по высоте, h – высота трещины.

Работа жидкости внутри трещины (работа внешних сил) расходуется на возрастание упругой энергии и поверхностной энергии (энергии на образование новой поверхности):

$$\delta A = \delta U_f + \delta \Pi \tag{2.66}$$

Так как $\delta A = p_{заб} \delta V$ (где $p_{заб}$ – забойное давление), имеем:

$$\begin{aligned}
p_{заб} \delta V &= \sigma_0 \delta V + \frac{1}{2} p_{net} \delta V + \delta \Pi \\
(p_{заб} - \sigma_0 - \frac{1}{2} p_{net}) \delta V &= \delta \Pi \\
\delta \Pi &= \frac{1}{2} p_{net} \delta V
\end{aligned} \tag{2.67}$$

При этом $\delta \Pi = 2\gamma \delta S$, где γ – удельная поверхностная энергия, тогда в случае равновесного состояния трещины можно приравнять два выражения для $\delta \Pi$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_{net} \delta V &= 2\gamma \delta S \\ \frac{1}{2} \int_{x_{f2}}^{x_{f1}} \bar{w}(x) p_{net}(x) h dx &= 2\gamma x_f h \\ \frac{\partial}{\partial x_{f1}} \frac{1}{2} \int_{x_{f2}}^{x_{f1}} \bar{w}(x) p_{net}(x) h dx &= \frac{\partial}{\partial x_{f1}} (2\gamma (x_{f1} - x_{f2}) h) \\ \frac{1}{2} \bar{w}(x_{f1}) p_{net}(x_{f1}) &= 2\gamma \end{aligned} \quad (2.68)$$

Так как модель рассматриваемой трещины подразумевает, что длина ее много больше высоты, поперечное сечение по вертикали – эллиптическое, а ширина трещины в точке x зависит только от $p_{net}(x)$, ширина трещины определяется как:

$$w(z) = \frac{2}{E'} p_{net} \sqrt{h^2 - 4z^2} \quad (2.69)$$

Среднюю ширину трещины вычислим следующим образом:

$$\bar{w}(z) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w(z) dz = \frac{p_{net} h \pi}{2E'} \quad (2.70)$$

Подставляя (2.69) в (2.67), получаем:

$$p_{net} = \sqrt{\frac{8\gamma E'}{h \pi}} \quad (2.71)$$

Так как $\gamma = \frac{K_{Ic}^2}{E'}$, окончательно получаем выражение для критической поправки:

$$\sigma_{crit} = p_{net} = \sqrt{\frac{8K_{Ic}^2}{h \pi}} \quad (2.72)$$

При значениях входных параметров: $a = 500$ м, $b = 350$ м, $x_f = 100$ м, $p_0 = p_{гидр} = 260$ атм, $\sigma_h^0 = 390$ атм, $\nu = 0.27$, $\alpha = 0.8$, $K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}$,

$h = 20$ м поправка к напряжениям $\sigma_{crit} = 3.6$ атм, при этом значение напряжения на кончике трещины $\sigma_h(x_f) = 415$ атм. Таким образом, критическая поправка оказывается малой по сравнению с минимальным напряжением на кончике трещины, поэтому ей можно пренебречь и считать, что рост трещины произойдет при превышении минимального горизонтального напряжения на кончике.

Исходя из этого, давление начала роста трещины (давление автоГРП) будет определяться следующим образом:

$$p_{fg} = \sigma_h(x_f) = \sigma_h^0(x_f) + \sigma_{h_delta}(x_f) \quad (2.73)$$

где σ_h^0 – начальное минимальное горизонтальное напряжение, σ_{h_delta} – прирост минимального горизонтального напряжения.

2.6. Метод определения критического давления роста трещины.

2.6.1. Оценка критического давления по формуле Итона.

В 1969 году Б. Итоном [20] на основе работы [25] была получена формула, связывающая горизонтальные напряжения и поровое давление:

$$\sigma_h = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_V - p_f) + p_f \quad (2.74)$$

где σ_h - горизонтальное напряжение, σ_V – вертикальное напряжение.

Выражение получено при предположении об отсутствии горизонтальных (тектонических) деформаций, а также при отсутствии изменений порового давления. При этом увеличение давления снижает эффективные напряжения. Поскольку в формуле Итона слагаемое, обозначающее эффективное напряжение $(\sigma_V - p_f)$, умножено на $\frac{\nu}{1-\nu}$, увеличение порового давления приводит к увеличению полных напряжений.

Модифицируя уравнение Итона, получаем:

$$\sigma_h = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_V - \alpha p_f) + \alpha p_f \quad (2.75)$$

Тогда изменение горизонтальных напряжений при изменении порового давления определяется выражением:

$$\Delta\sigma_h = \frac{\nu}{1-\nu}(-\alpha\Delta p_f) + \alpha\Delta p_f \quad (2.76)$$

или

$$\Delta\sigma_h = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\alpha\Delta p_f \quad (2.77)$$

Тогда зная, как изменяется напряжение с ростом давления, можно найти критическое давление (репрессию), при которой произойдет рост трещины. Построим график изменения забойного давления и минимального горизонтального напряжения от репрессии по формулам:

$$p_{\text{заб}} = p_0 + p_{\text{delta}} \quad (2.78)$$

$$\sigma_h = \sigma_h^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\alpha p_{\text{delta}} \quad (2.79)$$

где p_0 – начальное пластовое давление.

На Рис.2.30 приведены графики зависимости забойного давления и минимального горизонтального напряжения от репрессии (2.78, 2.79). Точка пересечения графиков и есть критическое давление:

$$p_{\text{delta}}^{\text{crit-it}} = (\sigma_h^0 - p_0) \left(1 - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\alpha\right)^{-1}, \quad (2.80)$$

при котором выполняется критерий роста трещины, а именно: забойное давление превысит минимальное горизонтальное напряжение.

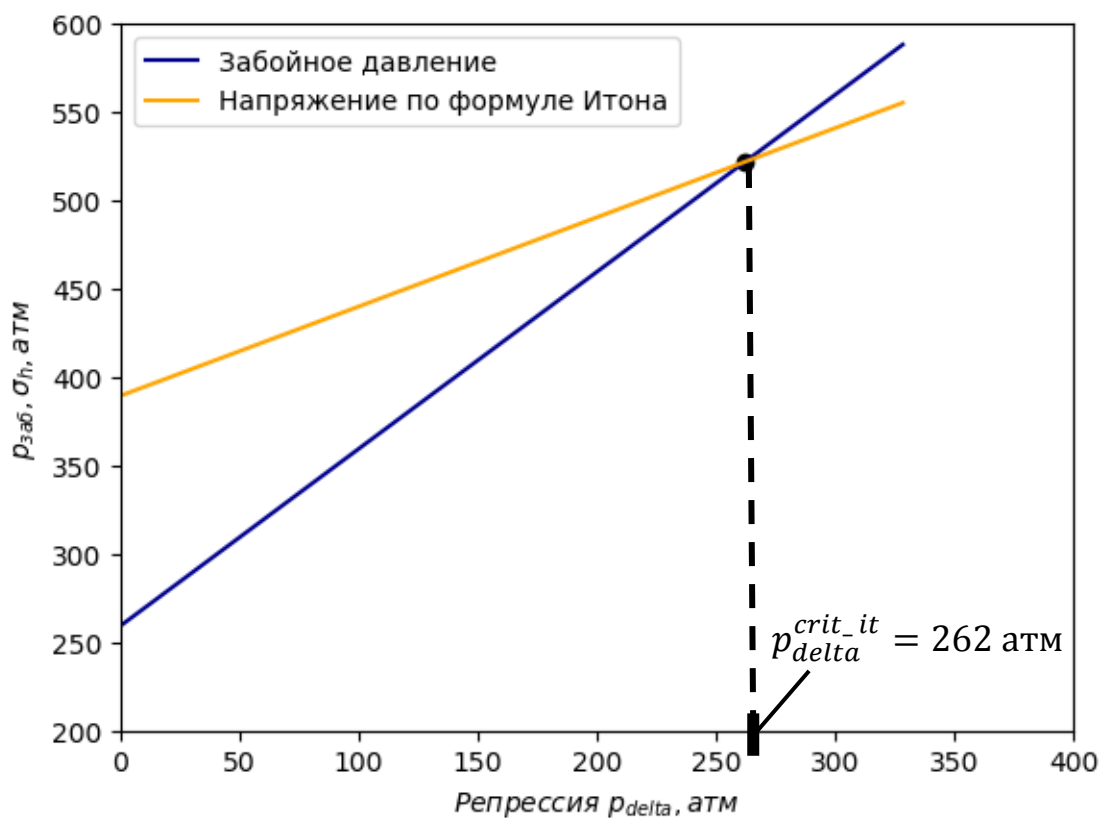


Рис. 2.30. Оценка критического давления по формуле Итона.

Значения параметров, при которых производился расчет критического давления, приведены в Таблице 2.3. расчет показывает, что давление автоГРП составляет $p_{delta}^{crit_it} = 262$ атм.

Таблица 2.3

Значения параметров расчета

a	500	м
b	250	м
x_f	100	м
$p_0 = p_{гидр}$	260	атм
σ_h^0	390	атм
E	$20e4$	атм
ν	0,27	
α	0,8	

Необходимо отметить, что недостатками приведенной оценки являются предположение о равномерном изменении давления во всей области пласта, отсутствие анизотропии напряжений, а также отсутствие трещины как таковой.

2.6.2. Оценка критического давления из решения задачи.

Теперь проведем расчет критического давления с помощью описанного в работе метода. То есть построим график давления роста трещины (давления автоГРП) от репрессии:

$$p_{fg} = \sigma_h^0(x_f) + \sigma_{h_delta}(x_f) = \sigma_h^0(x_f) + C(x_f)p_{delta} \quad (2.81)$$

где $C(x_f) = \frac{\sigma_{h_delta}(x_f)}{p_{delta}} = const.$

Таким образом, критическое значение репрессии будет вычисляться по формуле:

$$p_{delta}^{crit} = (\sigma_h^0 - p_0)(1 - C)^{-1} \quad (2.82)$$

В результате расчета получаем, что $p_{delta}^{crit} = 145$ атм (Рис. 2.31).

Таким образом получается, что разница значений критического давления, рассчитанного по формуле Итона и с помощью предложенного нами метода, составляет 117 атм.

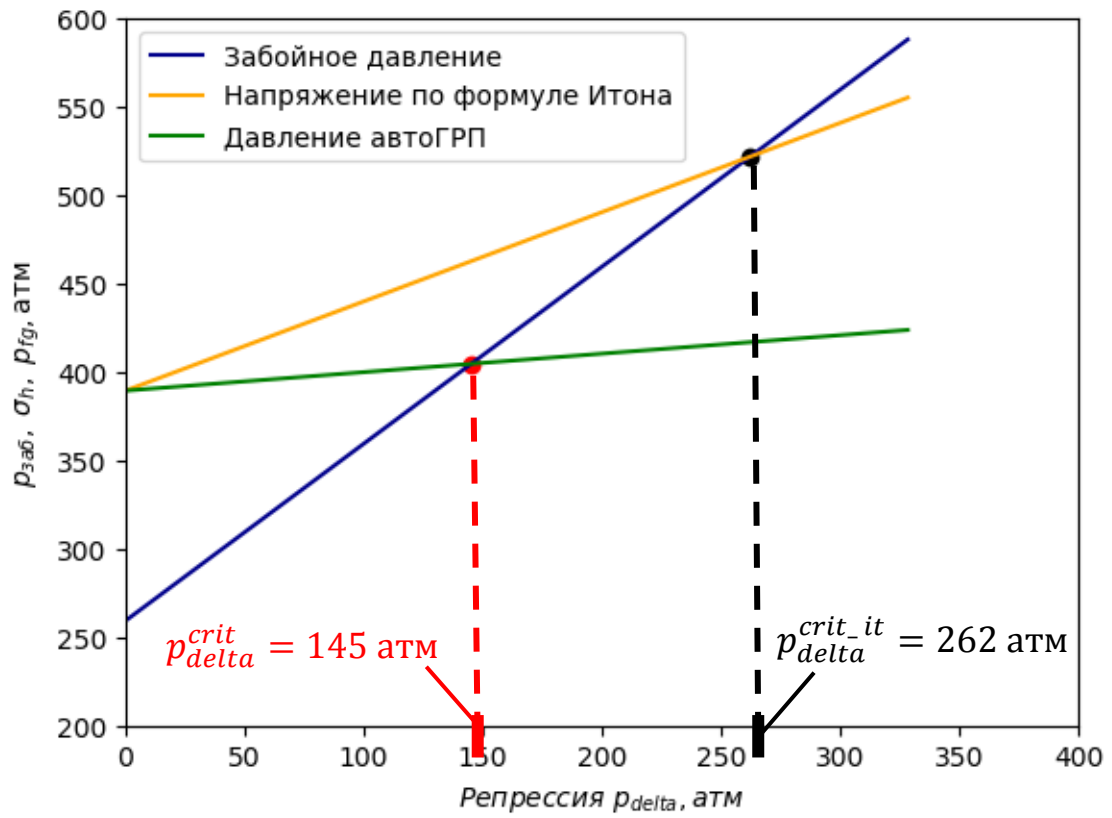


Рис. 2.31. Оценка критического давления с помощью модели.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА ДАВЛЕНИЕ РОСТА ТРЕЩИНЫ.

3.1. Зависимость давления автоГРП от свойств пласта.

Проведем исследование влияния входных параметров, характеризующих упругие свойства пласта, на величину критического давления роста трещины. Согласно формулам (2.45) изменение напряжений в пласте не зависит от величины модуля Юнга, то есть коэффициент Пуассона и коэффициент Био будут являться единственными параметрами пласта, влияющими на изменение напряжений, а, следовательно, на величину давления роста трещины.

Исходя из Рис. 3.1 видно, что увеличение коэффициента Пуассона ведет к линейному снижению критического давления роста трещины. Это означает, что горные породы, обладающие большим коэффициентом Пуассона, подвержены большим деформациям за счет растяжения, вызванного давлением жидкости внутри трещины, а значит критическое давление, при котором произойдет рост трещины, будет ниже.

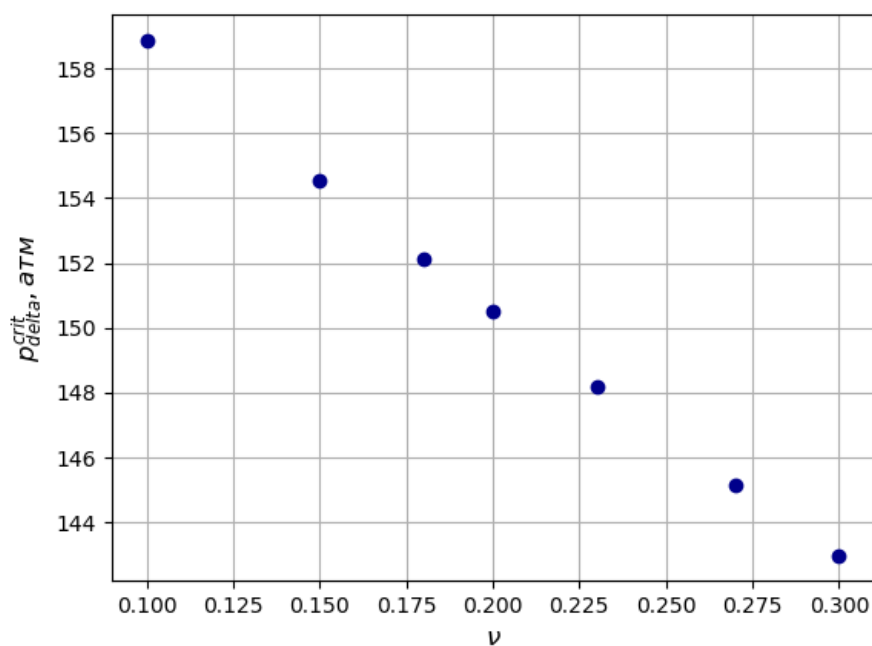


Рис. 3.1. Зависимость критического давления от коэффициента Пуассона.

На Рис. 3.2 показана зависимость критического давления роста трещины от коэффициента Био. Видно линейное возрастание критического давления с увеличением коэффициента Био, что объясняется увеличением полных напряжений.

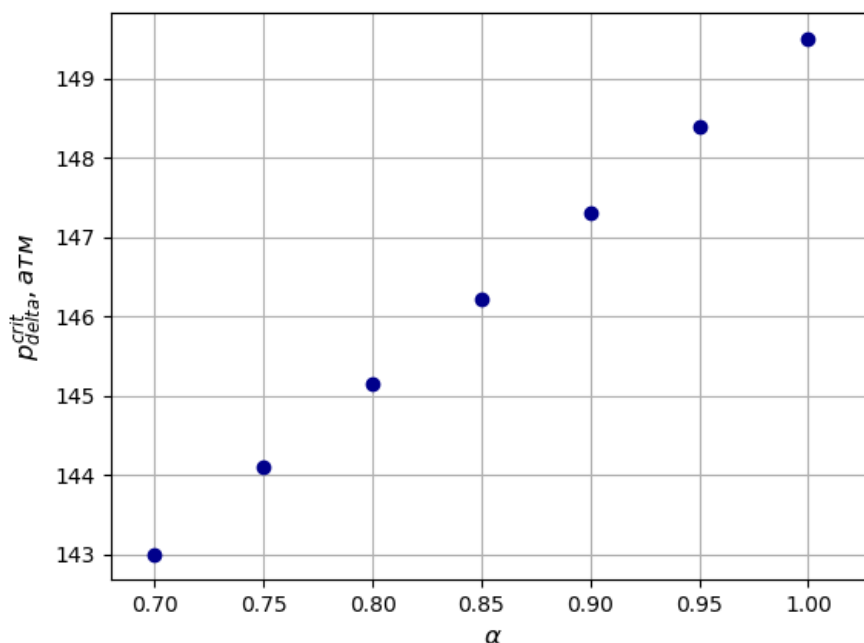


Рис. 3.2. Зависимость критического давления от коэффициента Био.

3.2. Зависимость давления автоГРП от размера элемента разработки.

Определим зависимость давления роста трещины от соотношения параметров элемента разработки, то есть от расстояния между скважинами в линии a и в ряде b (Рис. 2.1, 2.2).

Расчет давления роста трещины при изменении a производился при постоянных значениях $b = 250$ м и $x_f = 100$ м. Рис. 3.3 показывает, что увеличение расстояния между скважинами в линии ведет к уменьшению давления роста трещины, при этом видно, что существует некоторая величина a , начиная с которой давление автоГРП перестает меняться.

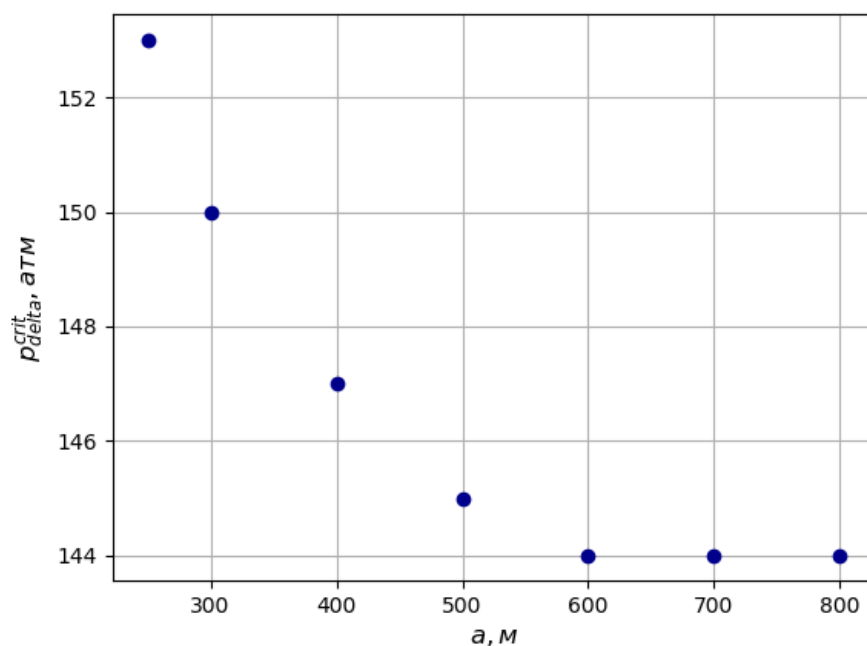


Рис. 3.3. Зависимость критического давления от расстояния a .

На Рис 3.4 показана зависимость давления автоГРП от расстояния между скважинами в ряду b при $a = 400$ м и $x_f = 100$ м. зависимость позволяет понять, что увеличение расстояния b приводит к росту давления автоГРП. Данное явление можно объяснить отдалением зоны с пониженными давлениями от добывающей скважины.

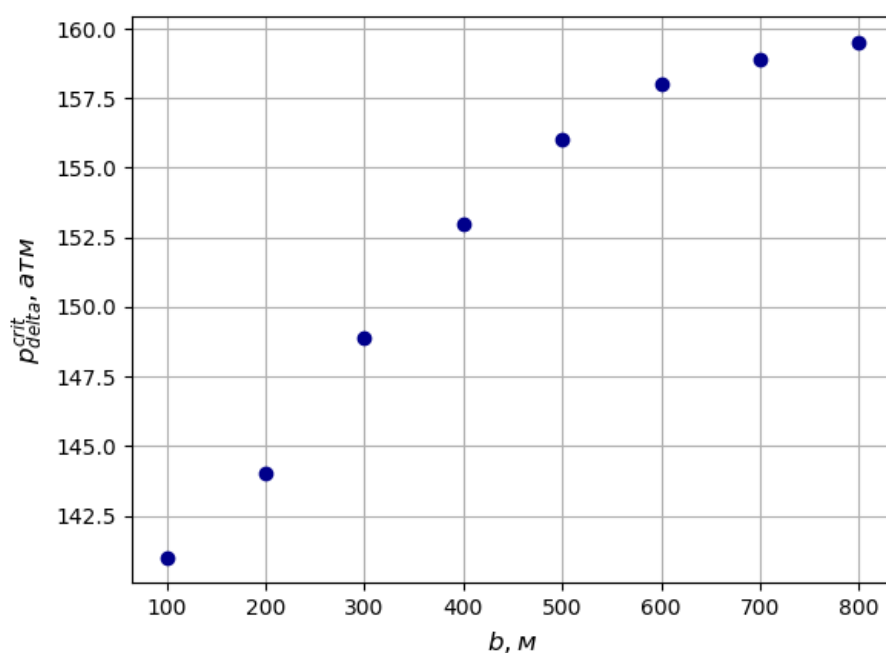


Рис. 3.4. Зависимость критического давления от расстояния b .

3.3. Зависимость давления автоГРП от длины трещины.

Проведем исследование влияния длины трещины на величину давления автоГРП при постоянных $a = 500$ м и $b = 250$ м. Как видно из Рис. 3.5, по мере увеличения длины трещины критическое давление падает, однако при достижении определенной длины происходит рост критического давления, что говорит о существовании некой критической длины трещины, после достижения которой происходит сдерживание ее роста.

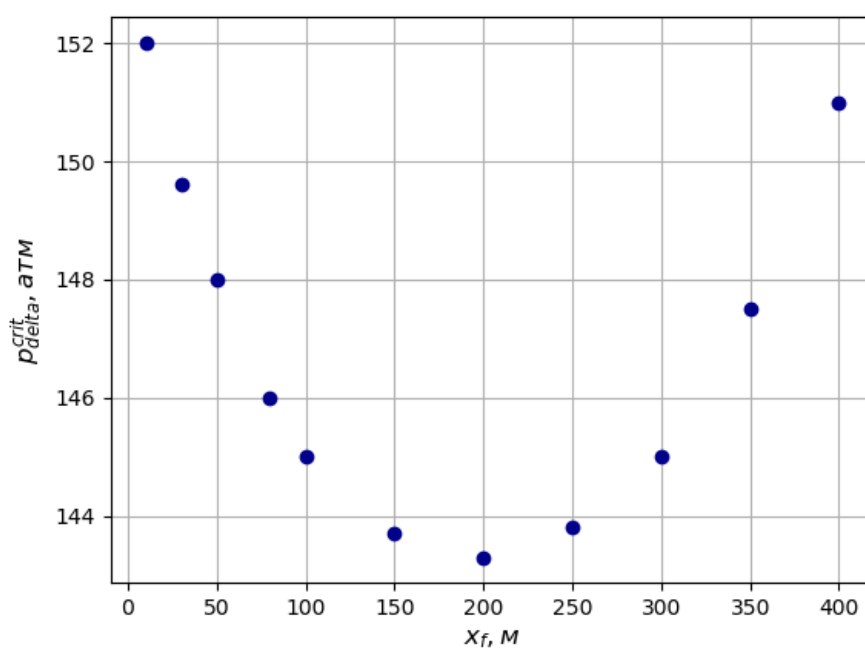


Рис. 3.5. Зависимость критического давления от длины трещины x_f .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения исследовательской работы, все поставленные цели и задачи выполнены в полной мере:

- Проведен обзор и анализ литературы, посвященной исследованию трещин автоГРП, а именно моделированию, методам их обнаружения и контроля.
- Построена физико-математической модель для определения давления роста трещины на нагнетательной скважине с последующей численной реализацией. Проведена валидация модели с помощью конечно-элементного решения задачи.
- Определен критерий роста трещины на нагнетательной скважине, согласно которому превышение минимального горизонтального напряжения на кончике трещины является условием для роста.
- Предложен метод оценки критического давления роста трещины в зависимости от забойного давления без применения полного гидрогеомеханического моделирования. Проведена оценка влияния параметров пласта и разработки на величину критического давления.
- Получено, что увеличение расстояния между скважинами в линии ведет к уменьшению давления автоГРП, в то время увеличение расстояния в ряде по вертикали снижает давление. Определено, что при определенной длине трещины происходит сдерживание ее роста.
- Представленная модель может быть использована для осуществления контроля роста трещины автоГРП, а именно регулирования режимов заводнения, и оптимизации системы разработки месторождения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Байков В.А., Давлетбаев А.Я., Асмандияров Р.Н., Усманов Т.С., Степанова З.Ю. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП в нагнетательных скважинах. Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело". 2011. №1. С. 65-75.
2. Байков В.А., Жданов Р.М., Муллағалиев Т.И., Усманов Т.С. Выбор оптимальной системы разработки для месторождений с низкопроницаемыми коллекторами, Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело", 2011-№1.- С.84-98. №1. С. 84-98.
3. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. под ред. Свешников А. Г. Задачи по математической физике. Учебное пособие. М.: Издательство МГУ, 1998 г. 350 стр. , ISBN 5-211-03373-6.
4. Давлетбаев А. Я., Асалхузина Г. Ф., Иващенко Д. С., Федоров А. И., Фурсов Г. А., Назаргалин Э. Р., Слабевский А. А., Сергейчев А. В., Ямалов И. Р., Валеева Э. З. Гидродинамические методы контроля за развитием трещин авто-ГРП при заводнении в низкопроницаемых коллекторах. 2015. SPE-176562.
5. Давлетбаев А. Я., Байков В. А., Бикбулатова Г. Р., Асмандияров Р. Н., Назаргалин Э. Р., Слабевский А. А., Сергейчев А. В., Нуриев Р. И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах. 2014. SPE-171232. <http://dx.doi.org/10.2118/171232-MS>
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд. М.: Наука, 1966 г. 708 стр.
7. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие. Москва: Изд.: Бинوم. Лаборатория знаний, Интернет-университет информационных технологий, 2006 г. 523 стр., ISBN 5-94774-542-9.
8. Салимов О.В., Гирфанов И.И., Кочетков А.В., Морозов П.Г. Влияние термоупругого эффекта на развитие трещин автоГРП в нагнетательной

скважине с трещиной ГРП. Георесурсы. 2016 г. Т. 18. №1. С.46-50. DOI: 10.18599/grs.18.1.8.

9. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989 г. 432 стр., ISBN 5-02-013996-3.

10. Тримонова М., Дубиня Н., Основные закономерности развития трещины автоГРП. 2015. SPE-176638-RU.

11. Федоров А.И., Давлетова А.Р. Симулятор напряженного состояния пласта для определения направления развития трещин. Геофизические исследования. 2014 г. Т. 15. № 1. С. 15-26.

12. Хасанов М.М., Краснов В.А., Мусабиров Т.Р., Мухамедшин Р.К. Техничко-экономический анализ систем разработки, сформированных скважинами с трещинами ГРП. Нефтяное хозяйство. 2009 г. № 2. С. 92-96.

13. Biot M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. Journal of Applied Physics. 1955. Vol. 26, no. 2. P. 182–185.

14. Carter R.D. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area, Appendix of «Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension», by Howard, G.C., and Fast, C.R., Drilling and Production Practice. API, 1957. 261-268 p.

15. Cheng A.H.-D. Poroelasticity. Springer, 2016. 877 p.

16. Clifford P. J. Simulation of waterflood fracture growth with coupled fluid flow, temperature and rock elasticity. Proceedings 1st European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Cambridge, 1989. P. 23-44.

17. Coussy O. Poromechanics. New York: John Wiley and Sons, 2004. 315 p.

18. Detournay E. and Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method, ed. C. Fairhurst, Pergamon Press, pp. 113-171, 1993.

19. Dikken B.J. and Niko H. Waterflood-Induced Fractures: A Simulation Study of Their Propagation and Effects on Waterflood Sweep Efficiency, SPE 16551 presented at the 1987 Offshore Europe Conference, Aberdeen, Sept. 8-11.
20. Eaton B.A. Fracture gradient prediction and its application in oilfield operations: *Journal of petroleum technology*, 1969, no. 21 (10):1353–1360.
21. Gringarten A. C., Ramey H. J., & Raghavan R. Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite-Conductivity Vertical Fracture. Society of Petroleum Engineers. 1974, doi:10.2118/4051-PA.
22. Hagoort J., Weatherill B.D. and Settari A. Modeling the propagation of waterflood-induced hydraulic fractures. *Soc. Petroleum Eng. J.* 20, (4), 1980. 293–303 pp.
23. Hagoort J. Waterflood-induced hydraulic fracturing. PhD. Thesis, Delft Technical University, 1981. 244 p.
24. Hecht F. FreeFem++. Third Edition, Version 3.19. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris. 2012. 416 p.
25. Hubbert M. K., Willis D. G. Mechanics of hydraulic fracturing, US Geological Survey, 210, 153-168. 1957.
26. Koning E.J.L. Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. SPE 14684, 1985.
27. Koning E.J.L. Poro- and thermo-elastic rock stresses around a wellbore. 1985.
28. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media. McGraw Hill, 1946, p. 185.
29. Olesiak Z. On a method of solution of mixed boundary-value problems of thermoelasticity. *Journal of Thermal Stresses*, 1981, pp. 501-508.
30. Perkins T.K., Gonzalez, J.A. The effect of thermo-elastic stresses on injection well fracturing. SPEJ, Feb. 1985, PP• 78-88.
31. Terzaghi K. Theoretical Soil Mechanics. New York: John Wiley and Sons, 1943. 510 p.

32. Zienkiewicz O.C., Taylor L.R. The Finite Element Method. Volume 1. The Basis. 5th Edition. Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
33. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 6th ed. Elsevier, 2005. 631 p.

Термины и аббревиатуры

АвтоГРП – эффект самопроизвольного роста трещин вследствие закачки жидкости под высоким давлением.

Гидроразрыв пласта (ГРП) – метод повышения нефтеотдачи за счет образования трещин в пласте путем закачки жидкости выше давления разрыва породы.

Заводнение – способ поддержания и восстановления пластового давления при разработке месторождения путем закачки воды.

Истощение – режим разработки месторождения за счет расходования внутренней энергии залежи.

Репрессия – разность между забойным и текущим пластовым давлением.

ГДИС – гидродинамические исследования скважин.

ППД – поддержание пластового давления.

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений.