«Решение задачи нагружения упругого элемента силой тяжести методом конечных элементов»

# Введение

Рассматривается упругий элемент. Материал определяется модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. На объект действует сила тяжести. Требуется решить задачу методом конечных элементов и найти вектор перемещений узловых сил.

# Метод конечных элементов

Задача решается с помощью плоских линейных треугольных элементов. Для этого объект был поделен на 4 конечных элемента. Для того, чтобы найти вектор перемещений в узлых U нужно решить систему:

$$KU=F\_{v}$$

, где K – глобальная матрица жесткости, Fv – глобальный вектор объемных сил. Матрица жесткости и вектор сил формируются путем сложения по определенным правилам элементных матриц жесткости:

$$K=\sum\_{}^{}\left(a^{e}\right)^{t}k^{e}a^{e}$$

$$F\_{v}=\sum\_{}^{}\left(a^{e}\right)^{t}f\_{v}$$

, где $a^{e}$ - матрицы кинематических связей. Матрицы кинематических связей формируются таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$u^{e}=a^{e}U$$

Что касается элементной матрицы жесткости, то для плоского упругого изотропного элемента выражение для нее имеет следующий вид:

$$k^{e}=\frac{h}{4A}\left[\begin{matrix}y\_{23}&0&x\_{32}\\0&x\_{32}&y\_{23}\\y\_{31}&0&x\_{13}\\0&x\_{13}&y\_{31}\\y\_{12}&0&x\_{21}\\0&x\_{21}&y\_{12}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\frac{E}{1-ν^{2}}&\frac{νE}{1-ν^{2}}&0\\\frac{νE}{1-ν^{2}}&\frac{E}{1-ν^{2}}&0\\0&0&\frac{E}{2(1+ν)}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}y\_{23}&0&y\_{31}&0&y\_{12}&0\\0&x\_{32}&0&x\_{13}&0&x\_{21}\\x\_{32}&y\_{23}&x\_{13}&y\_{31}&x\_{21}&y\_{12}\end{matrix}\right]$$

, где h – толщина плоского элемента, А – площадь конечного элемента, $x\_{ij}=x\_{i}-x\_{j}$. Ниже приведена формула для элементного вектора сил тяжести:

$$f\_{v}^{e}=\frac{Ah}{3}\left[\begin{matrix}0\\ρg\\0\\ρg\\0\\ρg\end{matrix}\right]$$

, где ρ - плотность материала, g – ускорение свободного падения.

# Программа на C#

## Интерфейс программы

На рисунке 2.1 изображен интерфейс программы. Есть возможность задать модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность. Граничные условия задаются путем нажатия на узлы: 1 нажатие – закрепление по оси х, 2 нажатие – закрепление по оси y, 3 нажатие – закрепление по оси х и у. После задания физических параметров материала и граничных условий при нажатии кнопки Start выводится вектор перемещений (Рис. 2.2).



## Внутренне устройство

Программа состоит из 6 классов: Form1.cs, Form1Designer.cs, GlobalSystem.cs, MatrixOffLinks.cs, TriangularElement.cs, MatrixOffElasticModulus.cs.

Первые два класса отвечают за интерфейс и рисование. TriangularElement.cs содержит методы, формирующие элементную матрицу жесткости и элементный вектор сил. MatrixOffLinks.cs содержит метод, реализующий алгоритм связи элементного вектора перемещений с глобальным. GlobalSystem.cs содержит методы ансамблирования глобальной матрицы жесткости и глобального вектора сил, метод задания граничных условий, а также метод решения СЛАУ.

# Заключение

Была написана программа на языке C#, реализующая метод конечных элементов на примере задачи нагружения упругого элемента силой тяжести. Был создан дружественный интерфейс, есть возможность задавать параметры материала и граничные условия. Результатом работы программы является сообщениие, содержащее вектор узловых перемещений.