

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Выпускная квалификационная работа магистра

Разработка и калибровка математической модели системы «бетонная плотина – основание» с учетом данных натурных наблюдений

Выполнил:

студент гр. 5040103/10301

А.А. Мосягина

Научный руководитель:

доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

Е.Ю. Витохин

Цели и задачи

Цель работы – создание детерминированной прогнозной модели системы «бетонная плотина – основание», отвечающей данным натурных наблюдений

Задачи:

1. Построение геометрической и конечно-элементной модели системы «бетонная плотина – основание» в ПК ABAQUS и подготовка ее к процессу калибровки (идентификации параметров);
2. Определение целевых переменных и варьируемых параметров, границ их значений и их количества;
3. Сбор базы данных на основе расчетов КЭМ, состоящей из значений варьируемых параметров и соответствующим им значений целевой переменной;
4. Построение аппроксимирующих функций по полученным базам данных;
5. Решение обратной задачи (задачи оптимизации) и нахождение оптимальных параметров на основе полученных аппроксимированных функций с учетом данных натурных наблюдений;
6. Анализ полученных результатов и формулирование выводов о точности описанных методов.

Идентификация параметров

Идентификация параметров динамических систем – совокупность методов, позволяющая строить по данным натурных наблюдений такие математические модели, где невозможность учета многих внешних и внутренних факторов, действующих на объект, осложняет процесс моделирования. Этот процесс также можно назвать калибровкой системы (модели).

Идентификация параметров сводится к решению **обратной задачи**:

Требуется найти такой оптимальный набор параметров, при которых модель максимально описывает данные наблюдения, взятые с исходного объекта.

Постановка задачи

- Дана система «бетонная плотина – основание»;
- Рассматривается одна секция бетонной плотины;
- Известны исходные данные (о размерах, материалах и т. д.) для построения модели системы;
- На бетонную плотину действуют нагрузки:
 - температура наружного воздуха,
 - температура воды,
 - давление воды на напорную грань,
 - противодействие на подошву плотины,
 - температура в галереях,
 - собственный вес;
- Даны натурные данные о горизонтальных смещениях (вдоль потока) на трех отметках: 160м, 175м и 210м.

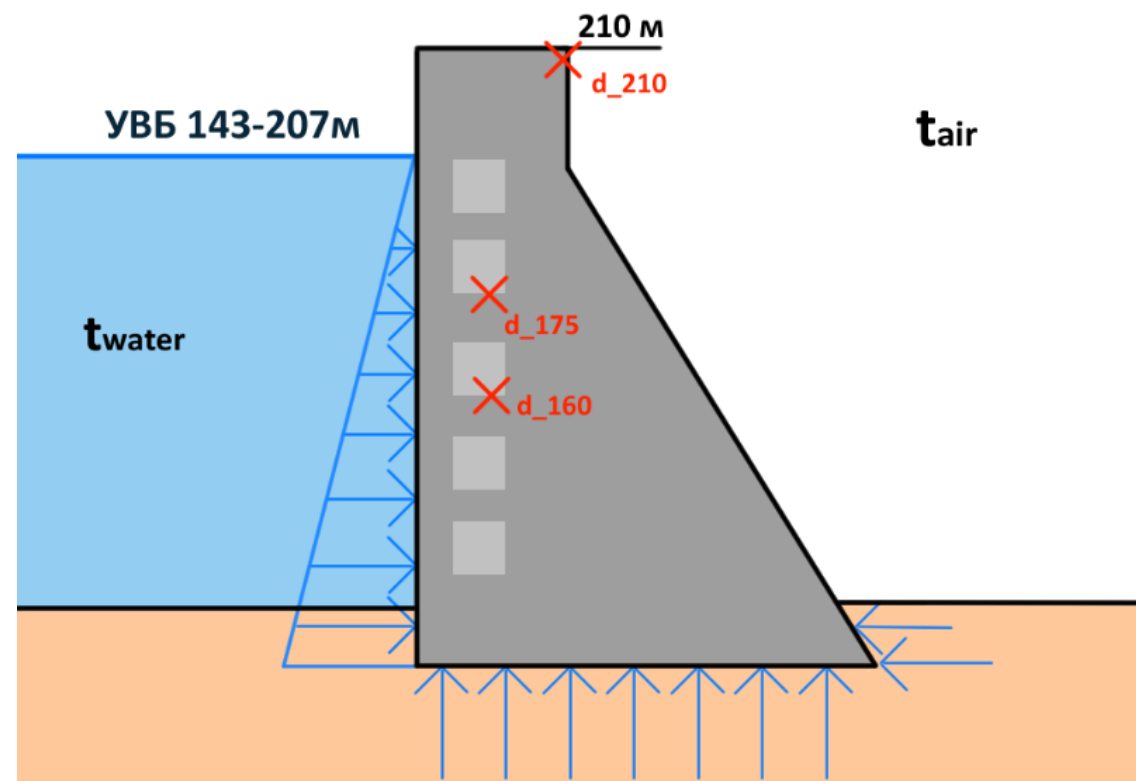


Рис. 1. Схема нагрузок

Постановка задачи

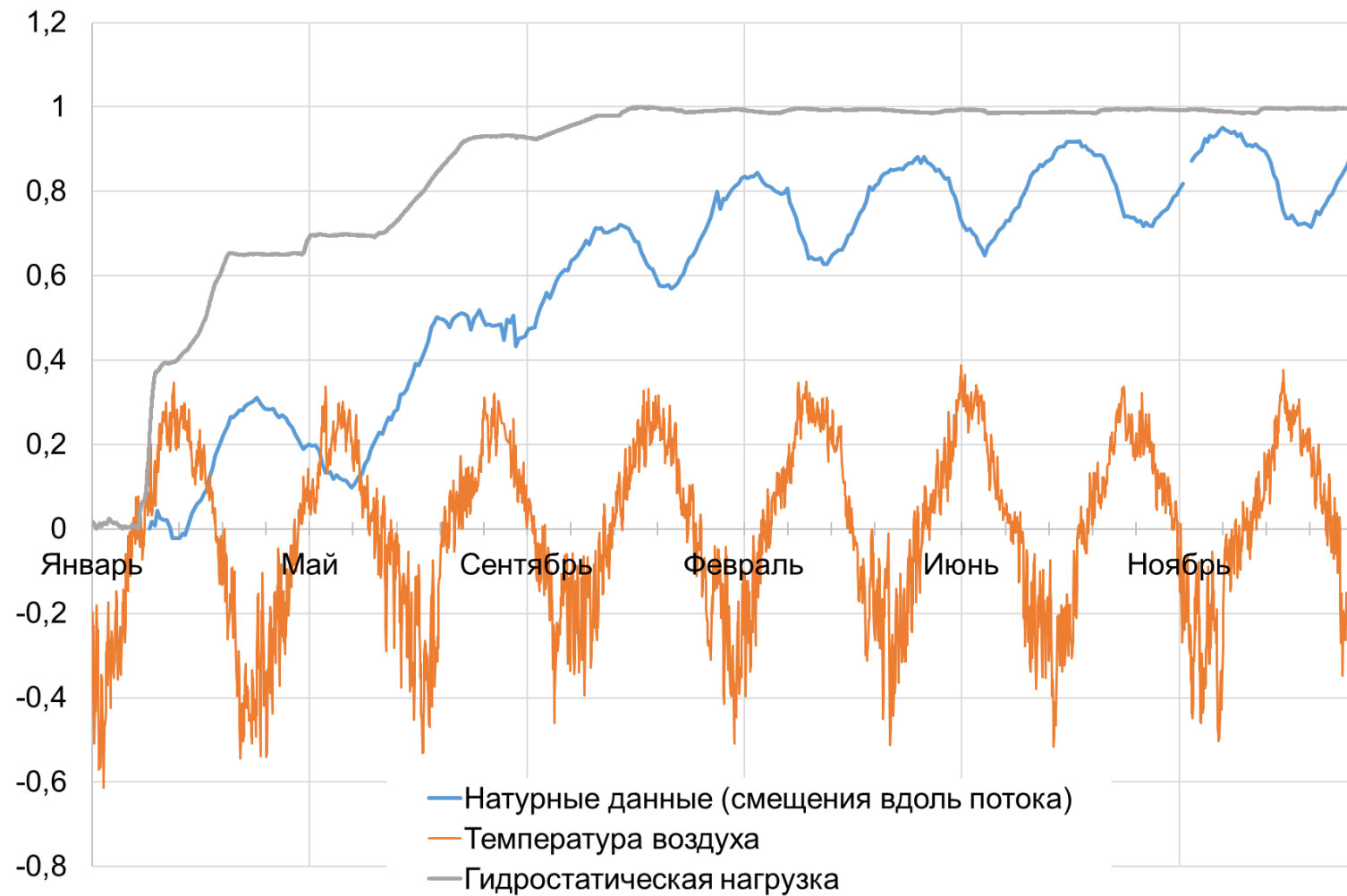
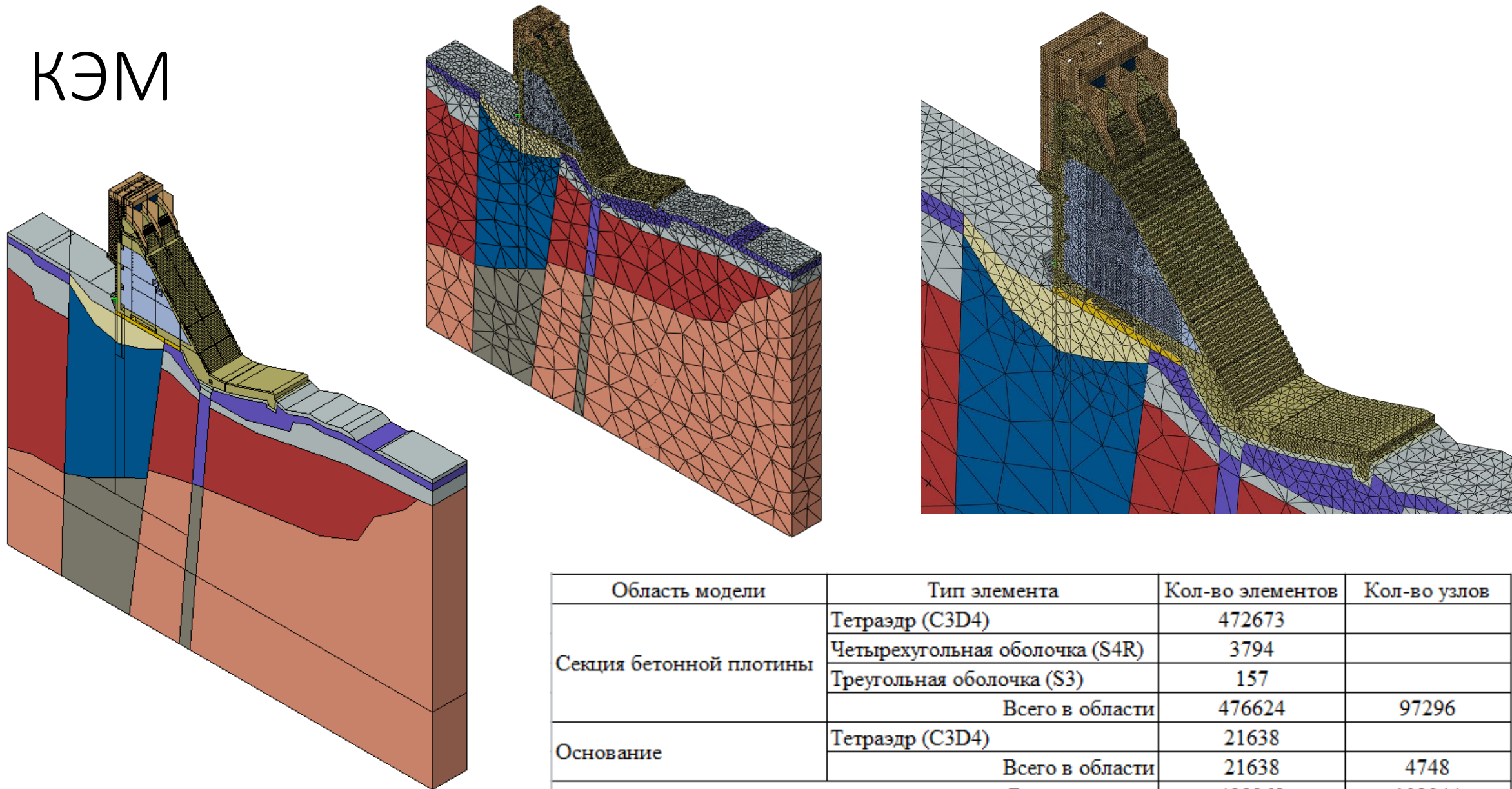


Рис. 2. Исходные данные натуральных наблюдений, нормированных относительно своих максимумов и минимумов.

КЭМ



Область модели	Тип элемента	Кол-во элементов	Кол-во узлов
Секция бетонной плотины	Тетраэдр (C3D4)	472673	
	Четырехугольная оболочка (S4R)	3794	
	Треугольная оболочка (S3)	157	
	Всего в области	476624	97296
Основание	Тетраэдр (C3D4)	21638	
	Всего в области	21638	4748
Всего в модели		498262	102044

Рис 3. Конечно-элементная модель (ABAQUS)

Моменты времени и исходные данные

Будем рассматривать **9 моментов времени** (отмечены красным на графике), в которых проведем идентификацию параметров, используя натурные данные горизонтальных смещений (см. таблицу).

Таблица 2. Точки, выбранные из базы натуральных данных для оптимизации.

Дата	горизонтальные смещения, мм		
	u_{160}	u_{175}	u_{210}
08.08.2017	6.96	8.55	13.7
20.02.2018	8.38	11.81	26.51
14.08.2018	7.41	9.24	15.94
12.02.2019	8.63	12.24	27.94
23.07.2019	7.62	9.56	16.25
18.02.2020	8.55	12.14	27.09
11.08.2020	7.61	9.43	16.04
02.03.2021	8.74	12.58	28.85
20.07.2021	7.75	9.88	17.58

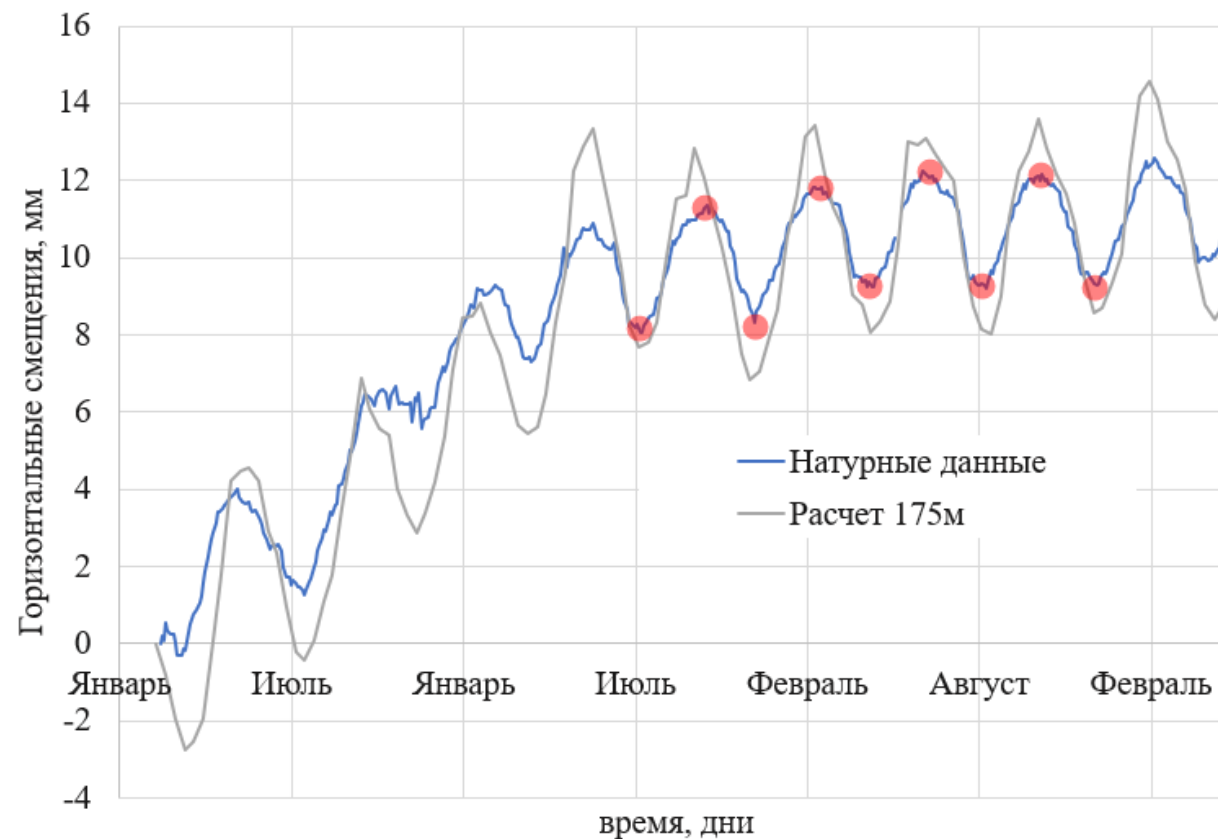


Рис. 4. Смещения вдоль потока на отметке 175 м. Моменты времени, в которых будут искаяться оптимальные наборы параметров, отмечены красным цветом.

Параметры

В качестве варьируемых параметров возьмем:

1. Для случая варьирования **одного параметра** – модуль деформации E_{B1} секции основания B1;
2. Для случая варьирования **двух параметров** – модули деформации E_{B1} и E_{B1T} секций оснований B1 и B1T соответственно;

Целевой переменной будет **горизонтальные смещения (вдоль потока) плотины** $u(E_i)$. Они определены в трех точках u_{160} , u_{175} и u_{210} .

Функция отклика – это зависимость между целевой переменной от выбранных варьируемых параметров. Вид функции отклика определяется при аппроксимации данных.

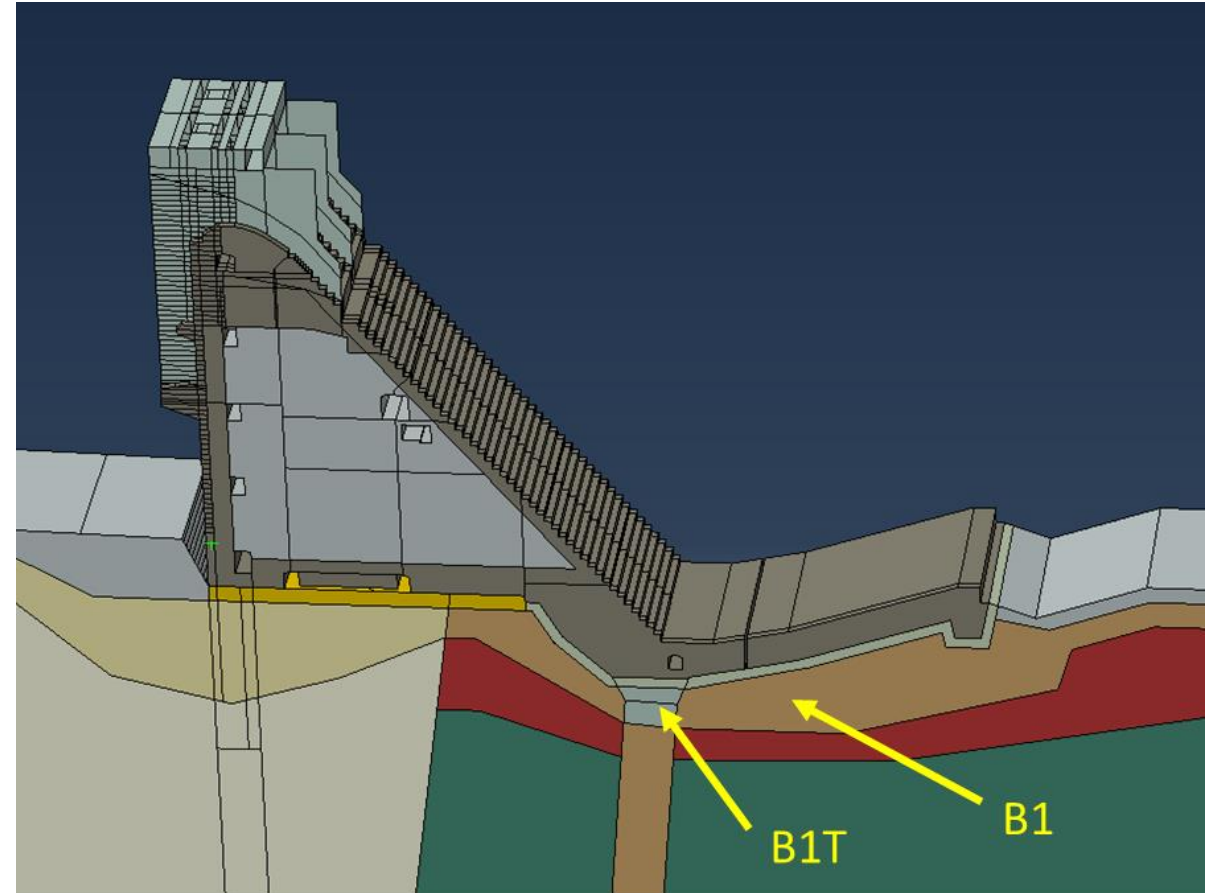


Рис. 5. Местоположение секций оснований B1 и B1T в модели (области, обозначенные оранжевым и серым цветами соответственно)

Первый случай – Аппроксимация

Варьирование одного параметра – модуль деформации E_{B1} основания В1

Предполагаем, что вид функции имеет вид:

$$u_i(x_1) = \frac{1}{b_3x_1^3 + b_2x_1^2 + b_1x_1 + b_0} + a_0 \quad (1)$$

Где x_1 – параметр E_{b1} , a_0, b_0, \dots, b_3 – коэффициенты искомой функции, $i = 160, 175, 210$.

Для аппроксимации используется [библиотека SciPy](#) и ее [метод curve_fit](#), реализующий метод наименьших квадратов (МНК) при заданном виде функции (1).

Часть кода, реализующая аппроксимацию МНК:

```
def objective_func(x, b3, b2, b1, b0, c):
    return 1 / (b3 * x * x * x + b2 * x * x + b1 * x + b0) + c

def create_curve_fit(x, y, objective):
    popt, _ = curve_fit(objective, x, y)
    return popt
```

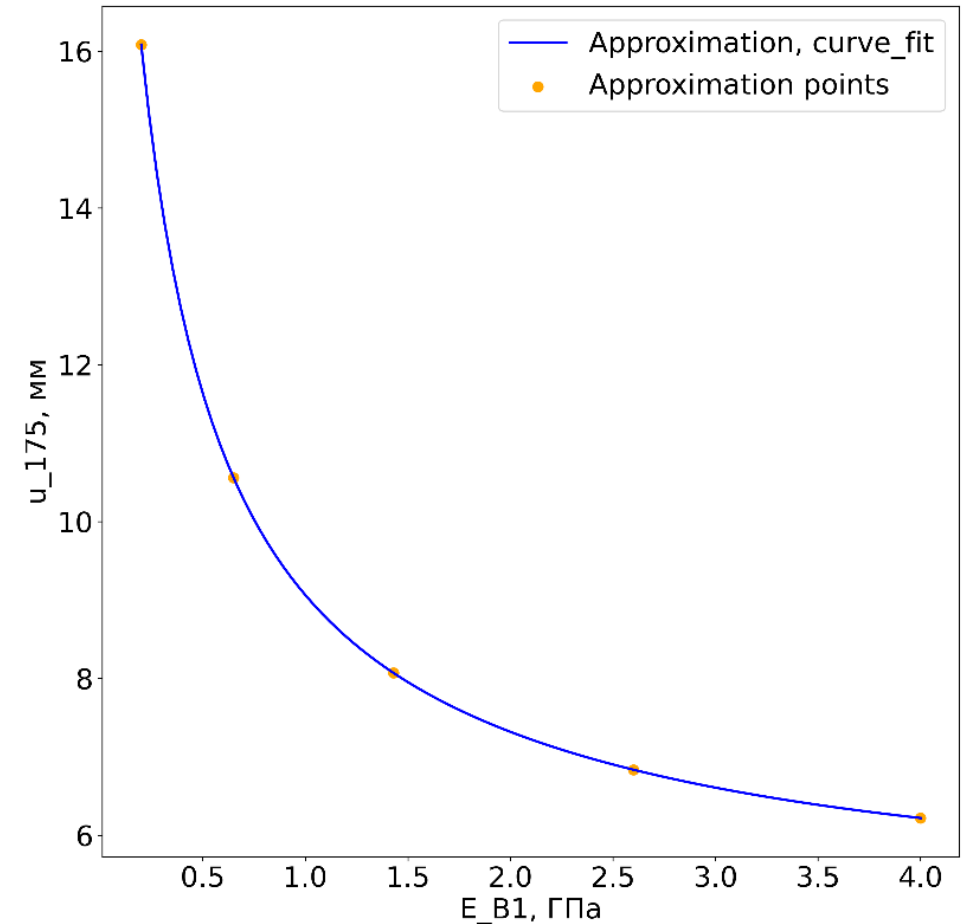


Рис. 6. График зависимости $u_{175}(E_{B1})$ для лета 2017 года.

Первый случай – Оптимизация

Варьирование одного параметра – модуль деформации E_{B1} основания В1

Зная функции отклика, можем решить задачу оптимизации (обратную задачу):

$$(u_i(x_1) - u_i^{target})^2 \rightarrow \min$$

Где x_1 – параметр E_{b1} , $i = 160, 175, 210$.

Для решения задачи оптимизации будет использована [библиотека Optuna](#).

Часть кода, решающая задачу оптимизации:

```
def objective(trial):
    x_trial = trial.suggest_float("x", limits_x[0], limits_x[1])
    return abs(current_func(x_trial, *coeff_fit) - target)

study = optuna.create_study(sampler=optuna.samplers.TPESampler())
study.optimize(objective, n_trials=N_TRIALS)
```

Полученные функции отклика (для нормированных переменных!):

Момент времени – лето 2017 года (08.08.2017)

$$u_{160}(E_{B1}) = \frac{1}{3.99 * E_{B1}^3 - 0.06 * E_{B1}^2 + 8.42 * E_{B1} + 0.93} - 0.08$$

$$u_{175}(E_{B1}) = \frac{1}{3.99 * E_{B1}^3 - 0.01 * E_{B1}^2 + 8.49 * E_{B1} + 0.93} - 0.07$$

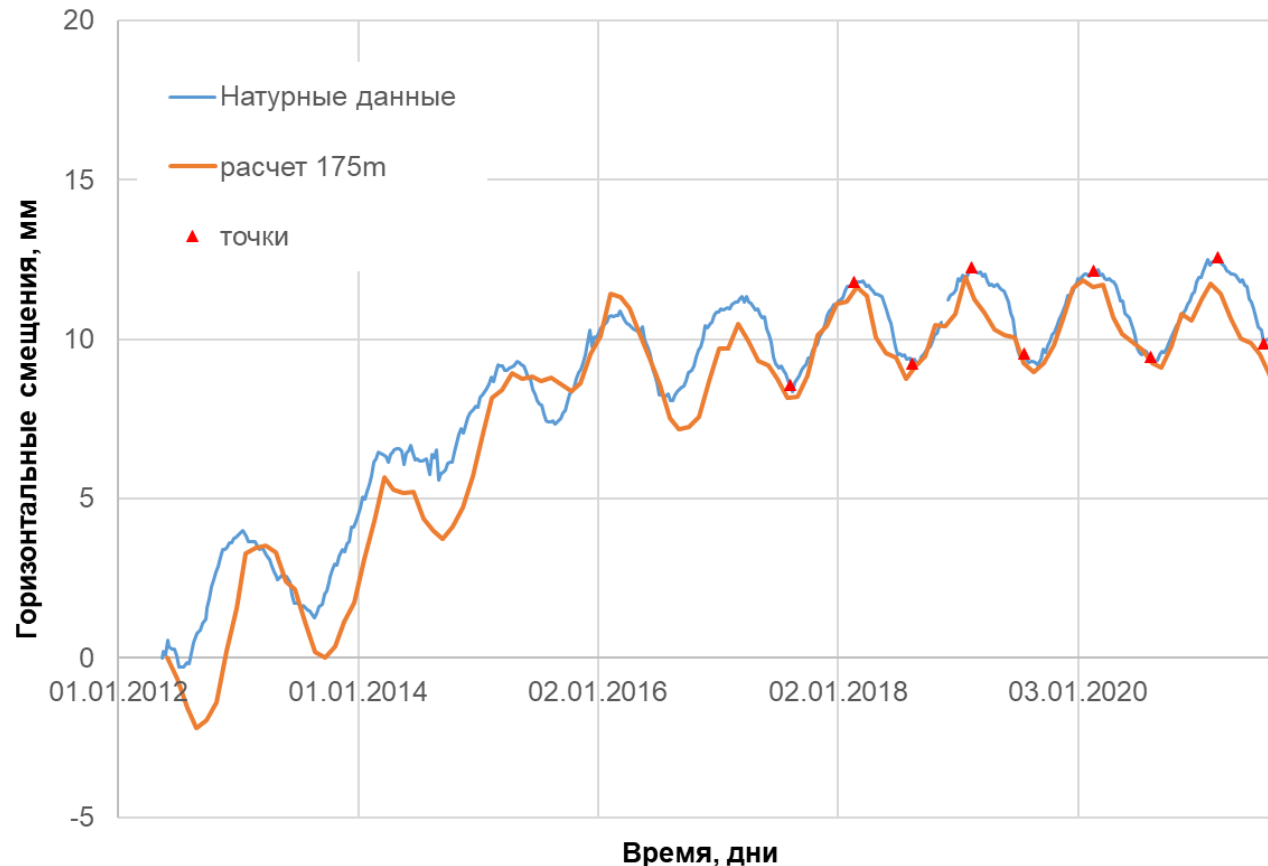
$$u_{210}(E_{B1}) = \frac{1}{4.02 * E_{B1}^3 - 0.01 * E_{B1}^2 + 8.52 * E_{B1} + 0.93} - 0.07$$

Оптимальные значения для каждой функции:

$$\begin{aligned} u_{160} &= 6,96 \text{ мм}, & E_{B1} &= 0,6789 \text{ ГПа} \\ u_{175} &= 8,55 \text{ мм}, & E_{B1} &= 1,1918 \text{ ГПа} \\ u_{210} &= 13,70 \text{ мм}, & E_{B1} &= 2,8514 \text{ ГПа} \end{aligned}$$

Первый случай – расчет КЭМ

Варьирование одного параметра – модуль деформации E_{B1} основания В1



MAE – Средняя абсолютная ошибка

MAPE – Средняя абсолютная процентная ошибка

RMSE – Корень из средней квадратичной ошибки

R^2 – Коэффициент детерминации

Метрика	Исходные параметры	Варьирование E_{B1}
		МНК
MAE	0,83 мм	0,56 мм
MAPE	8,45%	5,30%
RMSE	0,92 мм	0,62 мм
R^2	0,61	0,82

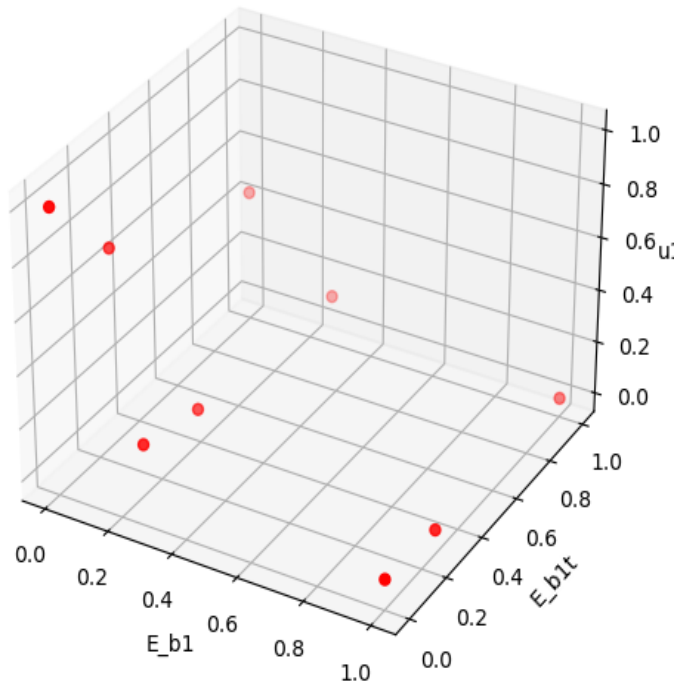
Рис. 7. Зависимости смещений вдоль потока с течением времени на отметке 175м, результаты при варьировании одного параметра.

Второй случай – Наборы данных

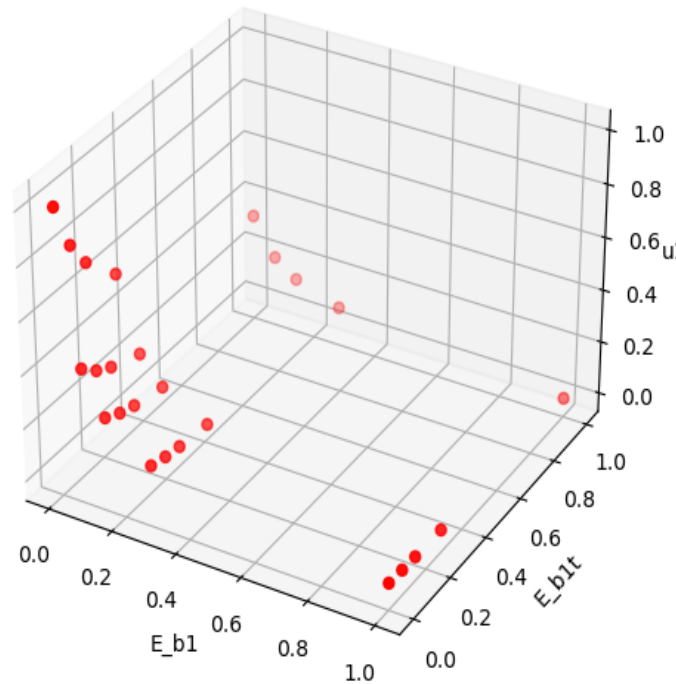
Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

Для второго случая было сделано три набора данных (9, 25 и 36 точек), с целью посмотреть как количество точек влияет на точность аппроксимации и расчета в целом. Для нормирования данных был использован [метод MinMaxScaler\(\)](#) из библиотеки [scikit-learn](#).

CurveFit, 9points, region: u160, normalized



CurveFit, 25points, region: u160, normalized



CurveFit, 36points, region: u160, normalized

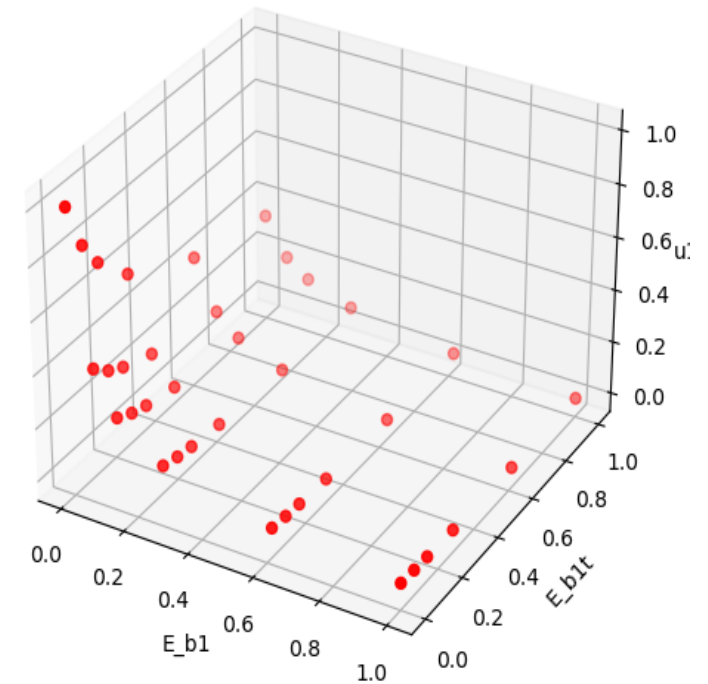


Рис. 8. Три набора данных для момента времени 11.08.2020 (лета 2020 года), значения нормированы.

Второй случай – Аппроксимация

Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

Аппроксимация производилась двумя методами:

- МНК с заданным видом функции;
- [Метод радиальных базисных функций \(RBF\) из библиотеки SciPy.](#)

Предполагаем, что функция отклика имеет вид:

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{b_5x_2^2 + b_4x_1^2 + b_3x_1x_2 + b_2x_2 + b_1x_1 + b_0} \quad (2)$$

Функция (2) подается на вход методу `curve_fit` (код практически аналогичный первому случаю).

Для метода RBF используются радиальные функции (kernel) “thin_plate_spline”, представляющие из себя [полигармонические сплайны](#).

x_1 – модуль E_{B1} ,
 x_2 – модуль E_{B1T} ,
 b_0, \dots, b_5 – коэффициенты,
 $i = 160, 175, 210$

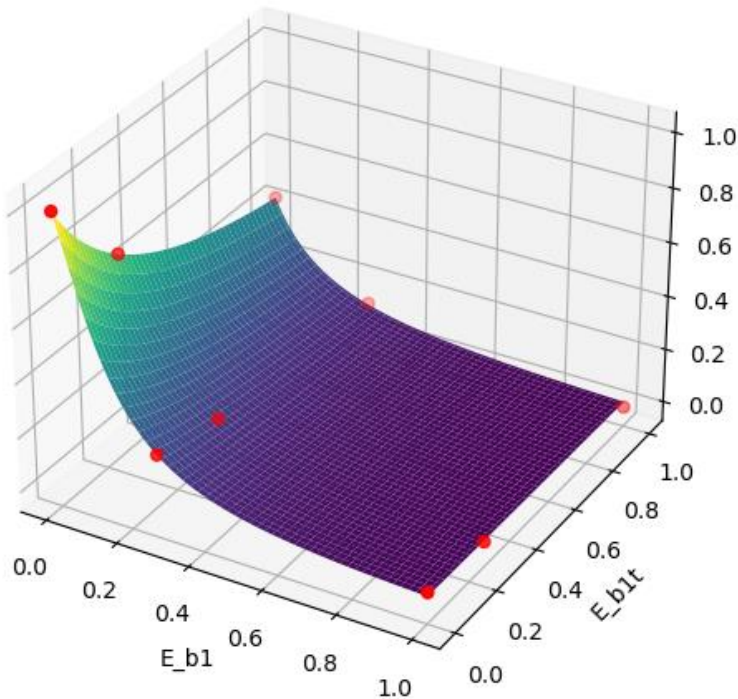
Часть кода, реализующая аппроксимацию методом RBF:

```
smooth_coeff = 0
rbf_fun = RBFInterpolator(
    list(zip(x_scaled.ravel(), y_scaled.ravel())),
    z_scaled,
    kernel="thin_plate_spline",
    smoothing=smooth_coeff,
)
```

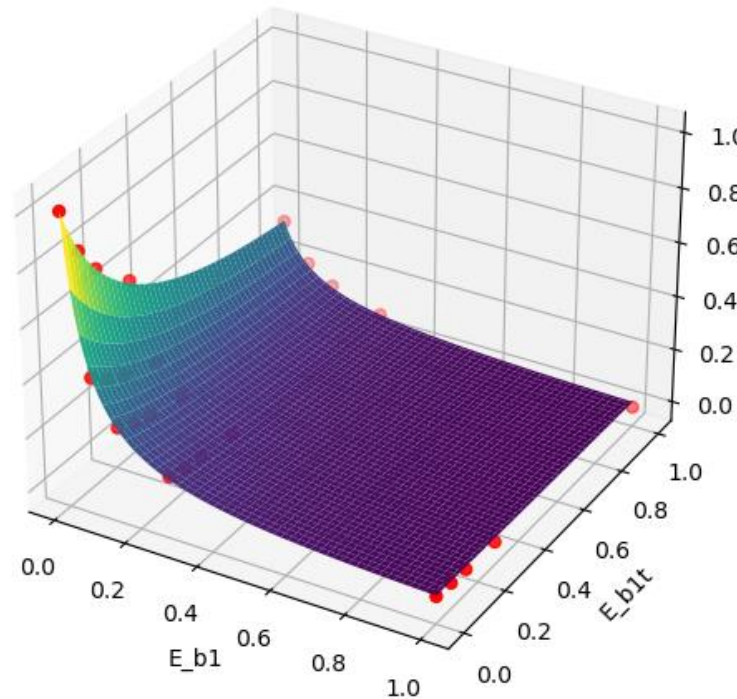
Второй случай – Аппроксимация (МНК)

Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

CurveFit, 9points, region: u175, normalized



CurveFit, 25points, region: u175, normalized



CurveFit, 36points, region: u175, normalized

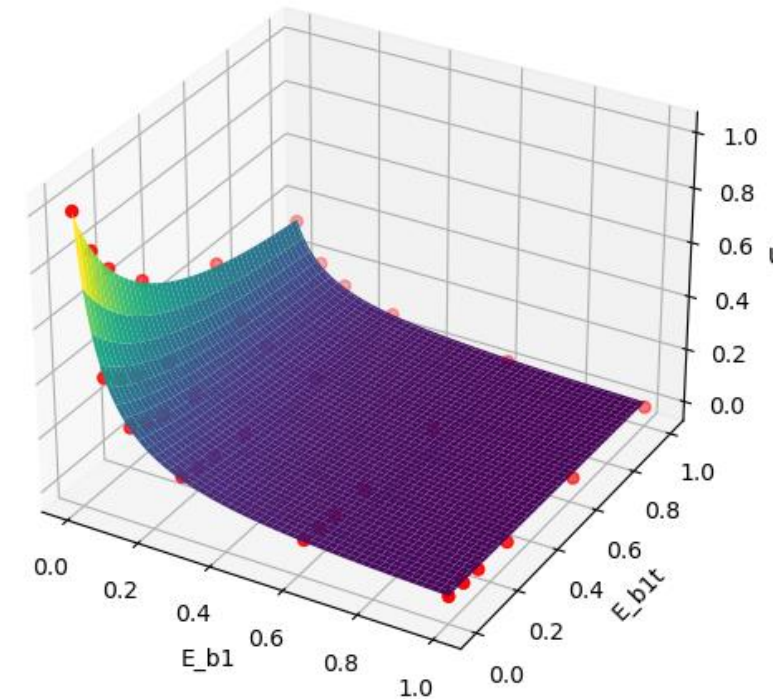
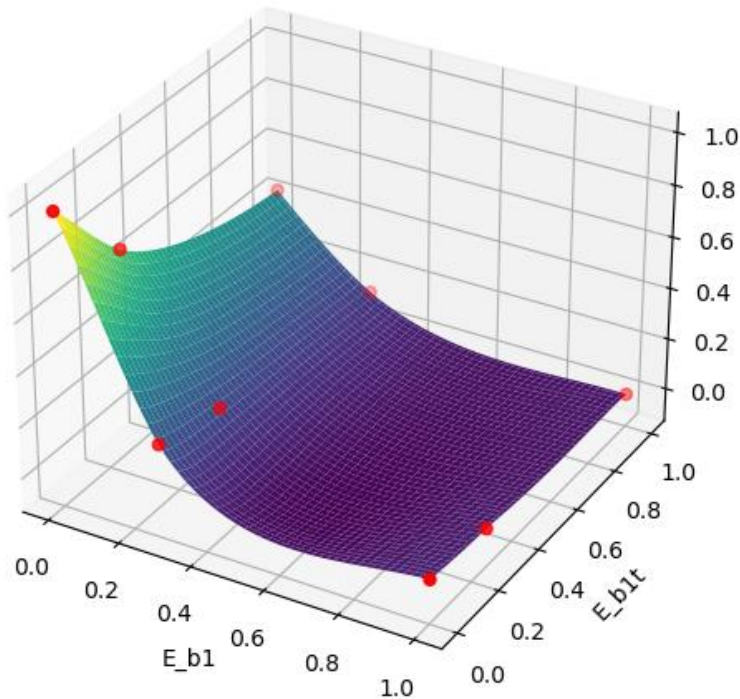


Рис. 9.1. Поверхности отклика для момента времени 11.08.2020 (лета 2020 года), значения нормализованы, метод МНК.

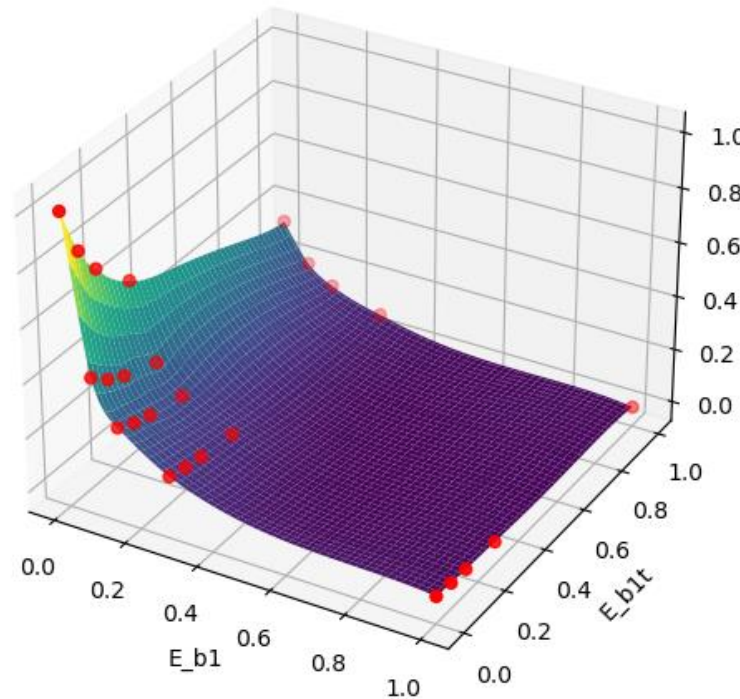
Второй случай – Аппроксимация (RBF)

Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

RBF, 9points, region: u175, normalized



RBF, 25points, region: u175, normalized



RBF, 36points, region: u175, normalized

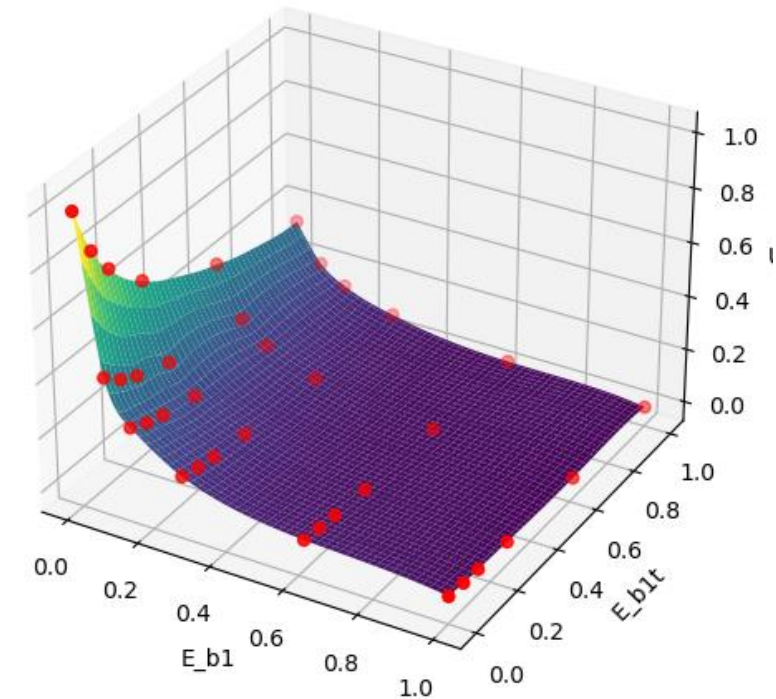


Рис. 9.2. Поверхности отклика для момента времени 11.08.2020 (лета 2020 года), значения нормализованы, метод RBF.

Второй случай – Оптимизация

Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

Зная функции отклика, можем решить задачу оптимизации (обратную задачу):

$$(u_i(x_1, x_2) - u_i^{target})^2 \rightarrow \min$$

Где x_1 – параметр E_{B1} , x_2 – параметр E_{B1T} ,
 $i = 160, 175, 210$.

Для примера возьмем момент времени – лето 2020 года (дата 11.08.2020).

Взял набор из 36 точек.

Для решения задачи оптимизации будет использована [библиотека Optuna](#).

Часть кода, решающая задачу оптимизации:

```
def objective(trial):  
    x = trial.suggest_float("x", limits_x[0], limits_x[1])  
    y = trial.suggest_float("y", limits_y[0], limits_y[1])  
    return abs(rbf_fun(convert(x, y)) - target)  
  
study = optuna.create_study(sampler=optuna.samplers.TPESampler())  
study.optimize(objective, n_trials=N_TRIALS)
```

Таблица 3. Подобранные оптимальные наборы параметров.

дата	u_{160}		u_{175}		u_{210}	
	E_{B1} , ГПа	E_{B1T} , ГПа	E_{B1} , ГПа	E_{B1T} , ГПа	E_{B1} , ГПа	E_{B1T} , ГПа
08.08.2017	0.3733	1.7512	0.5819	1.0932	0.2411	2.6777
20.02.2018	0.6639	0.9479	0.8202	1.5270	0.5229	2.4934
14.08.2018	0.2262	2.9961	0.4133	2.1072	0.2084	2.7645
12.02.2019	0.4701	1.5166	0.5317	2.0578	0.2208	3.8356
23.07.2019	0.3634	1.5181	0.5603	1.0230	0.4618	0.7068
18.02.2020	0.3259	3.5334	0.7976	1.0196	0.4529	2.0132
11.08.2020	0.2209	2.6948	0.3410	2.4059	0.4830	0.3827
02.03.2021	0.7442	0.1012	0.4078	3.5226	0.4636	1.1872
20.07.2021	0.3084	2.3642	0.5765	1.4167	0.2276	3.5522

*Результаты подобраны для МНК, для RBF строится аналогичная таблица

Второй случай – Расчеты КЭМ (МНК)

Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

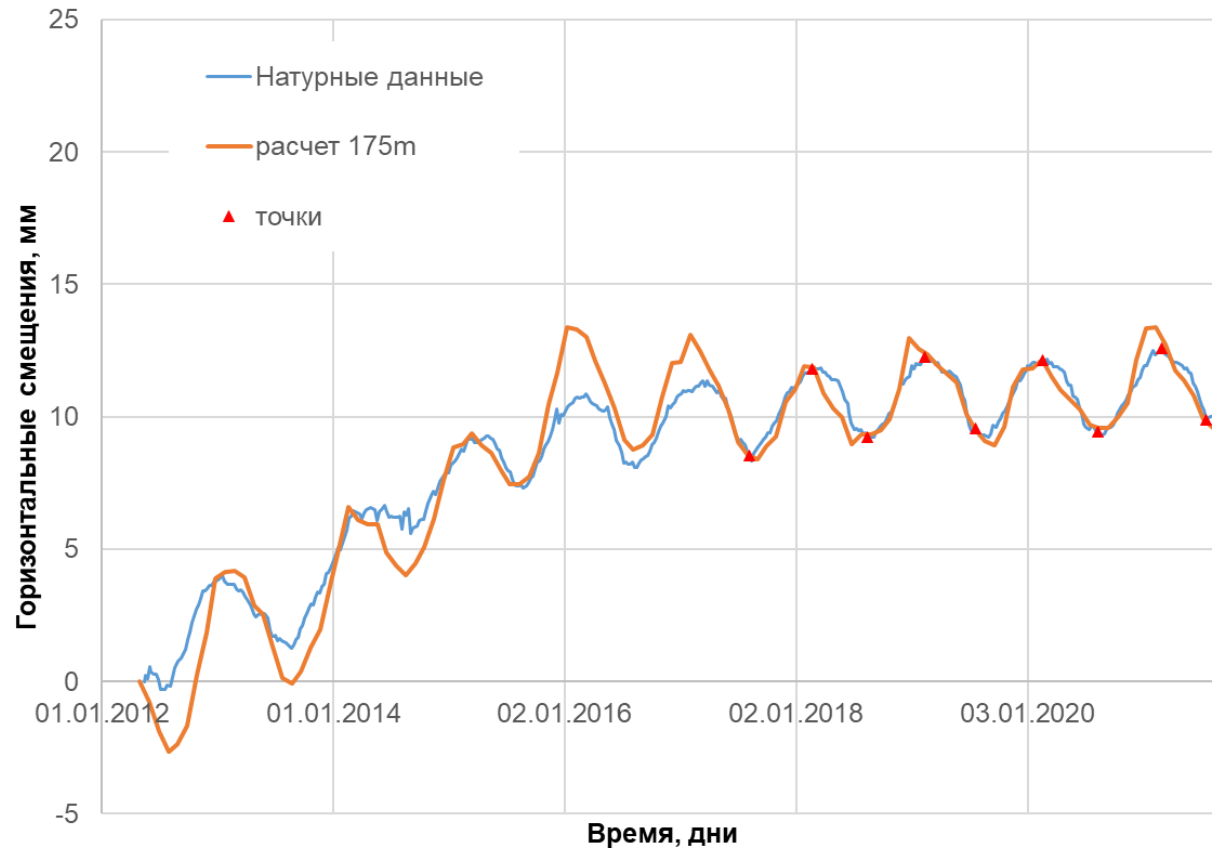


Рис. 10.1. Зависимость смещений вдоль потока с течением времени, результаты при варьировании двух параметров, метод МНК.

Таблица метрик (МНК, отметка 175м)

Метрика	Исходные параметры	Варьирование E_{B1} и E_{B1T}	
		МНК	RBF
MAE	0,83 мм	0,07 мм	0,16 мм
MAPE	8,45%	0,68%	1,66%
RMSE	0,92 мм	0,09 мм	0,22 мм
R^2	0,61	0,99	0,98

Второй случай – Расчеты КЭМ (RBF)

Варьирование двух параметров – модули деформации E_{B1} и E_{B1T}

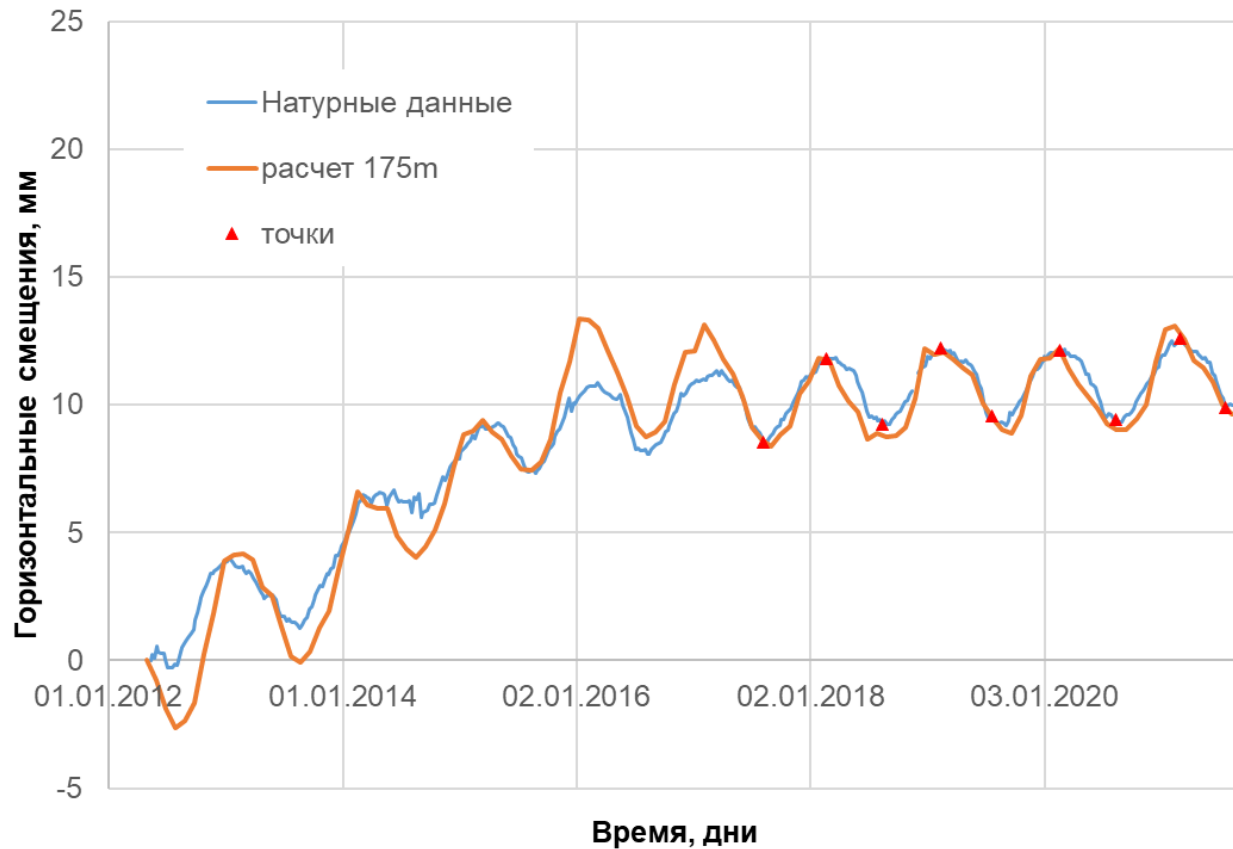


Рис. 10.2. Зависимость смещений вдоль потока с течением времени, результаты при варьировании двух параметров, метод RBF.

Таблица метрик (RBF, отметка 175м)

Метрика	Исходные параметры	Варьирование E_{B1} и E_{B1T}	
		МНК	RBF
MAE	0,83 мм	0,07 мм	0,16 мм
MAPE	8,45%	0,68%	1,66%
RMSE	0,92 мм	0,09 мм	0,22 мм
R^2	0,61	0,99	0,98

Выводы

Варьирование одного параметра:

- Среднее процентное отклонение от натуральных данных ~5-6%
- Единственность решения, один набор оптимальных параметров, который достигает нужного результата.

Варьирование двух параметров:

- Среднее процентное отклонение от натуральных данных <1% (МНК) или ~2-3% (RBF)
- Множественность решения, несколько наборов оптимальных параметров, которые достигают нужного результата
- Если известен вид функции, можно использовать МНК, в противном случае – можно использовать метод RBF.

Метрики	Исходные параметры	Варьирование E_{B1}	Варьирование E_{B1} и E_{B1T}	
		МНК	МНК	RBF
MAE	0,83 мм	0,56 мм	0,07 мм	0,16 мм
MAPE	8,45%	5,30%	0,68%	1,66%
RMSE	0,92 мм	0,62 мм	0,09 мм	0,22 мм
R2	0,61	0,82	0,99	0,98

Таблица метрик (отметка 175м)

Замечания и возможные улучшения

1. Во втором случае (варьирование двух параметров) решение не является единственным.
2. В первом случае (варьирование одного параметра) решение единственно (см. рисунок 11).
3. Наборы оптимальных параметров для каждой отметки находятся отдельно друг от друга. Можно попробовать найти такие параметры, когда достигается нужный результат на трех отметках одновременно. То есть искать минимум данного выражения:

$$\varphi(x) = \sum_i (u_i(x) - u_i^{target})^2$$

4. Последовательная калибровка с варьированием одного параметра. Сначала калибровать модель с одним параметром, потом используя откалиброванную модель снова провести процесс калибровки с варьированием другого параметра, уточняя модель дальше.

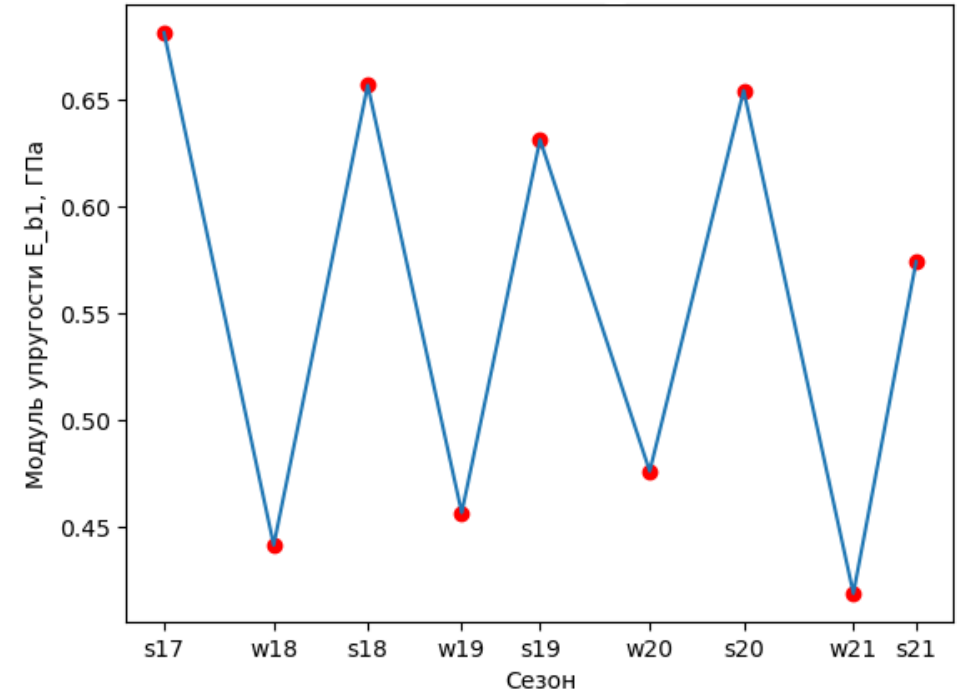


Рис. 11. График зависимости модуля деформации E_{b1} от рассматриваемого сезона для отметки 160м (первый случай, обозначения: s17 – лето 2017 года, w18 – зима 2018 года и т. д.)

Заключение

Выполнены такие задачи:

1. Построена конечно-элементная модель в ABAQUS и настроена для калибровки;
2. Выбраны два случая варьирования параметров, определены их границы, их количество для двух случаев;
3. Собраны наборы данных:
 1. Для случая варьирования одного параметра был собран 1 набор данных состоящий из 5 точек на 1 момент времени (всего 9 моментов времени);
 2. Для случая варьирования двух параметров было собрано 3 набора данных, состоящих из 9, 25 и 36 точек на один момент времени (всего 9 моментов времени);
4. Создана программа, реализующая методы аппроксимации для обоих случаев. Для первого случая рассмотрен метод МНК, для второго случая было рассмотрено методы МНК и RBF. Сделаны выводы о применимости и эффективности данных методов аппроксимации в соответствующих случаях;
5. Создана программа, реализующая решение обратной задачи (задачи оптимизации). Для обоих случаев определены оптимальные наборы параметров на каждый рассматриваемый момент времени. Проведен расчет КЭМ и выведены графики результатов. Сделаны выводы о точности результатов для каждого случая;
6. Создана детерминированная прогнозная модель, отвечающая данным натуральных наблюдений.