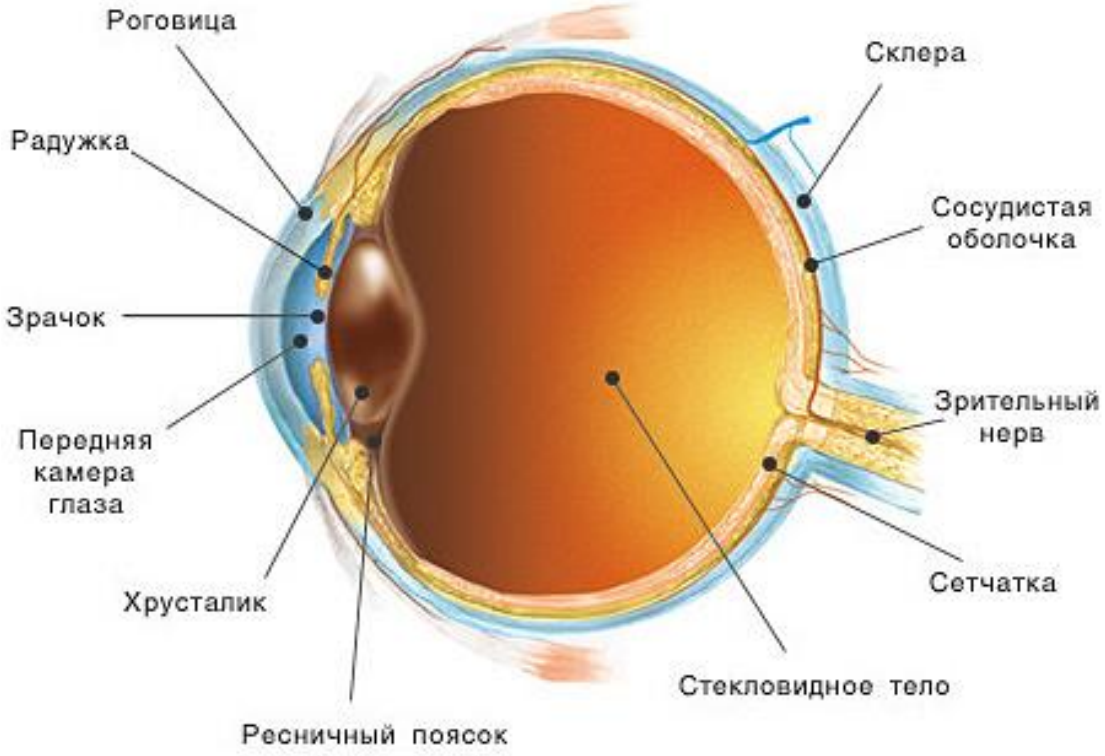
Вязкоупругая модель склеральной оболочки глаза

К.П. Фролова (6 курс, каф. ТМ, ИПММ, СПбПУ)

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Е.Н. Вильчевская (доц. каф. ТМ, ИПММ, СПбПУ; ИПМаш РАН)

Структура глаза



Сечение глазного яблока

Цели исследования

- Смоделировать поведение склеры после интравитреальной инъекции
- Определить значение коэффициента сдвиговой вязкости склеры

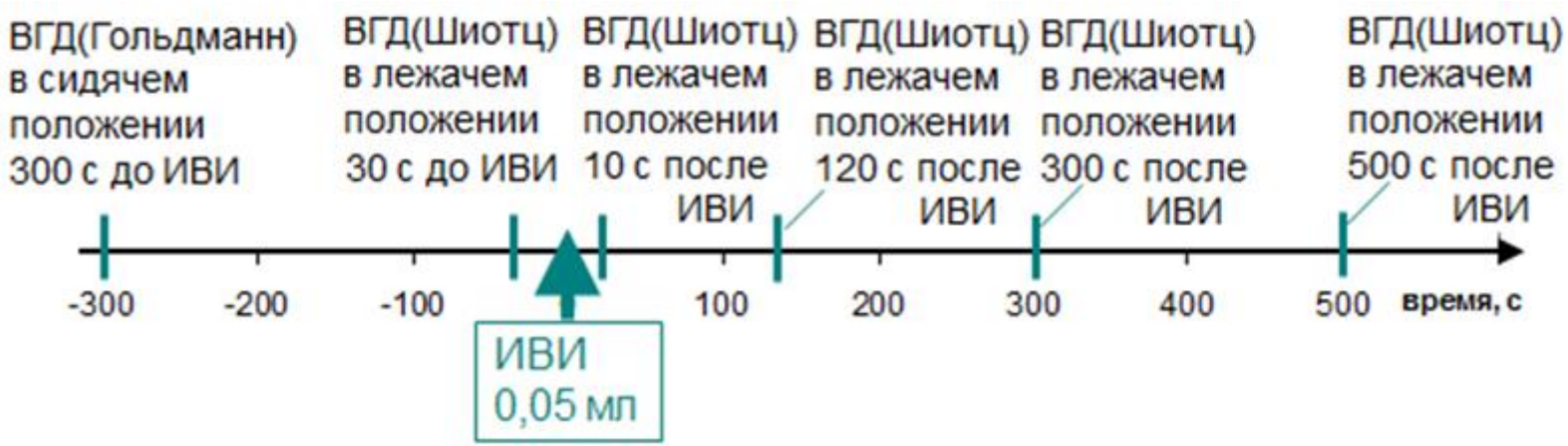
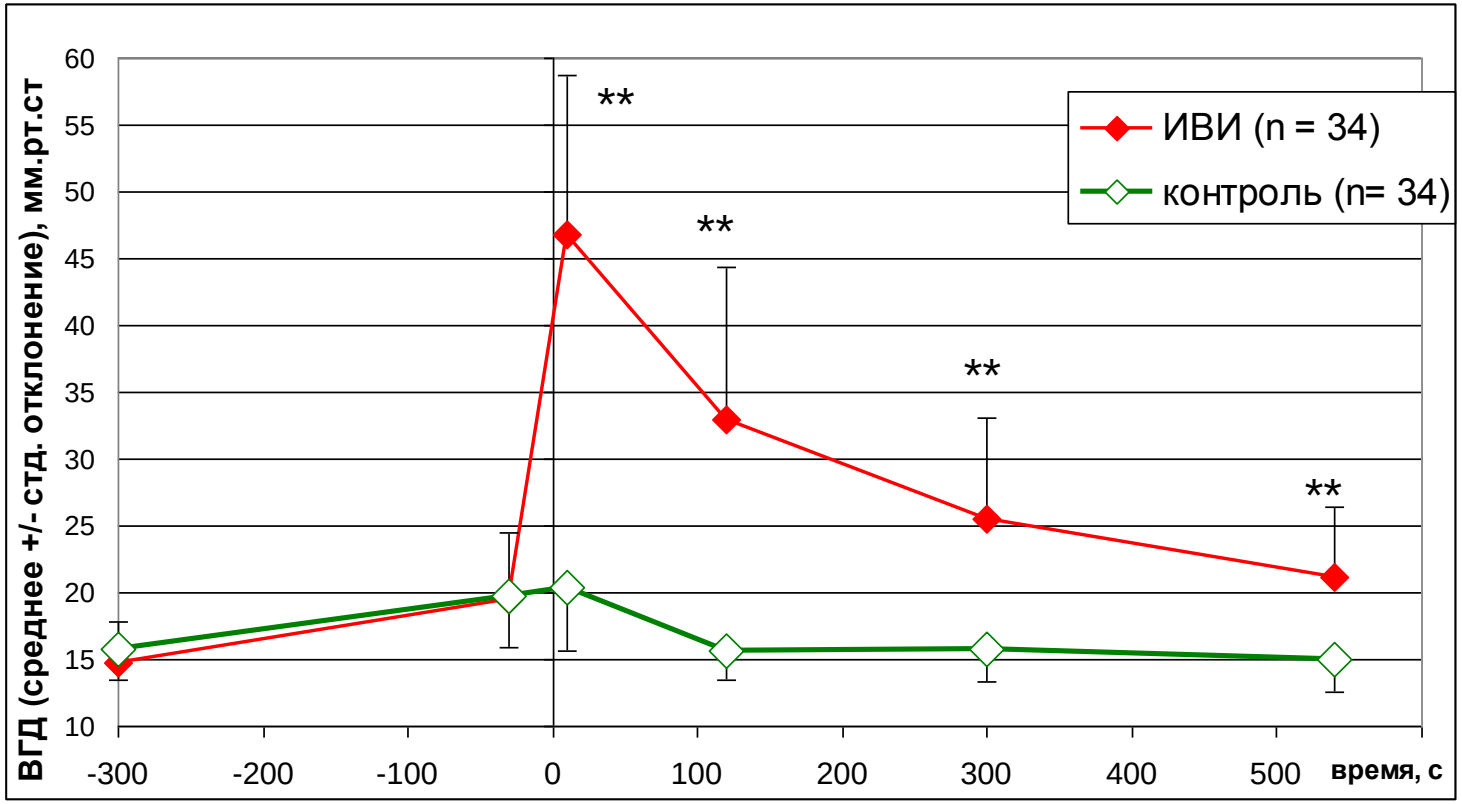


Схема моделируемого эксперимента[1]

[1]К. Котляр, С. Бауэр, Н. Планге. Клинические и биомеханические аспекты изменения внутриглазного давления после интравитреальных инъекций // Российский общенациональный офтальмологический форум - 2013.

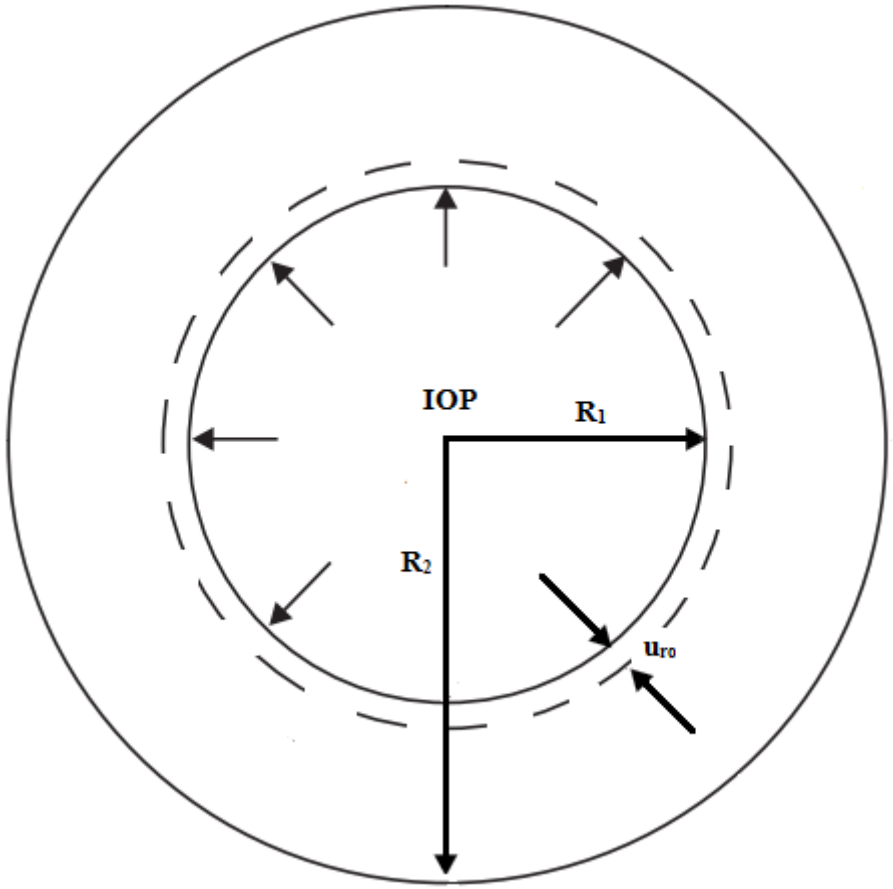
Экспериментальная кривая



Изменение ВГД с течением времени[1]

[1]К. Котляр, С. Бауэр, Н. Планге. Клинические и биомеханические аспекты изменения внутриглазного давления после интравитреальных инъекций // Российский общенациональный офтальмологический форум - 2013.

Математическая модель



1. Предполагается, что дополнительный объем жидкости сохраняется в стекловидном теле на протяжении эксперимента
2. Учитывается отток внутриглазной жидкости

Материал склеры: Линейный трансверсально-изотропный

Граничные условия

Система уравнений центральносимметричной задачи в рамках 3D теории линейной вязкоупругости

Компоненты

$u_\varphi = u_\theta = 0$

$u_r = u_r(r,t)$

Условия симметрии

$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0$

Связь компонент тензора **ε** с компонентами вектора **u**

$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r,t), \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}(r,t), \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r,t)$

$\varepsilon_{rr} = \dfrac{du_r}{dr}$

$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u_r}{r}$

$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = 0$

u – вектор перемещений
σ – тензор напряжений
ε – тензор деформаций
e – девиатор тензора **ε**
$^4\mathbf{C}$ – тензор жесткости
η – коэффициент сдвиговой вязкости

Модель Кельвина – Фойгта, 1 к-т вязкости

Определяющие соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2\eta\dot{\mathbf{e}}$$

Квазистатическая задача

Уравнение движения

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0$$

Закон Гука для упругих напряжений трансверсально-изотропного материала[2]

r – ось симметрии, (θ, φ) – плоскость изотропии

$$\sigma_{rr}^{el} = \frac{E_{rr}E_{\theta\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\left[\frac{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{E_{\theta\theta}}\varepsilon_{rr}+\nu_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+\nu_{r\theta}\varepsilon_{\varphi\varphi}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{el} = \frac{E_{rr}E_{\theta\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\left[\nu_{r\theta}\varepsilon_{rr}+\frac{1}{\left(1+\nu_{\theta\varphi}\right)}\left(\left(1-\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\theta\theta}+\left(1+\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)\right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{el} = \frac{E_{rr}E_{\theta\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\left[\nu_{r\theta}\varepsilon_{rr}+\frac{1}{\left(1+\nu_{\theta\varphi}\right)}\left(\left(1+\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\theta\theta}+\left(1-\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)\right]$$

$$\sigma_{\theta\varphi}^{el} = \frac{E_{rr}}{2\left(1+\nu_{\theta\varphi}\right)}\varepsilon_{\theta\varphi}, \sigma_{r\theta}^{el} = \mu_{r\theta}\varepsilon_{r\theta}, \sigma_{\varphi r}^{el} = \mu_{r\theta}\varepsilon_{\varphi r}$$

$\boldsymbol{\sigma}^{el}$ – тензор упругих напряжений

E_{rr}, $E_{\theta\theta}$ –модули Юнга направлении оси симметрии и в плоскости изотропии

$\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta\varphi}$ - коэффициенты Пуассона

$\mu_{r\theta}$ – модуль сдвига плоскости (r, θ)

[2] Р. Кристенсен. Введение в механику композитов // Пер. с англ. – М.: Мир - 1982 – 334 с.

Безразмерная постановка вязкоупругой задачи

Безразмерные величины

Координата

$$\beta = \frac{R_1}{R_2} \le x = \frac{r}{R_2} \le 1$$

Перемещения

$$u = \frac{u_r}{R_2}$$

Напряжения

$$\sigma_{ij\,\mathrm{dim}} = \frac{\sigma_{ij}}{E_{\theta\theta}}$$

Время

$$\tau = \frac{E_{\theta\theta}}{\eta} t$$

Модуль Юнга

$$\xi = \frac{E_{rr}}{E_{\theta\theta}}$$

Производные от перемещений

$$\dot{u}_r = \frac{R_2 E_{\theta\theta}}{\eta} \dot{u}$$

$$\frac{d\dot{u}_r}{dr} = \frac{E_{\theta\theta}}{\eta} \frac{d\dot{u}}{dx}$$

$$\frac{d^2\dot{u}_r}{dr^2} = \frac{E_{\theta\theta}}{R_2\eta} \frac{d^2\dot{u}}{dx^2}$$

Метод преобразования Лапласа

- **Преобразование Лапласа —** интегральное преобразование, связывающее функцию комплексного переменного (изображение) с функцией вещественного переменного (оригиналом).
- **Преимущество метода:** многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями.

Оригинал удовлетворяет следующим условиям:

1. $f\ (x,\ \tau)$ интегрируема на любом конечном интервале оси τ
2. $f(x,\tau)\big|_{\tau<0} \equiv 0$
3. $\exists M>0, s_0 \geq 0 : \left| f(x,\tau) \right| \leq M e^{s_0 \tau}$

$$f(x,\tau) \to \int_0^\infty e^{-s\tau} f(x,\tau)\, d\tau = \bar{f}(x,s)$$

$$\dot{f}(x,\tau) \to \int_0^\infty e^{-s\tau} \dot{f}(x,\tau)\, d\tau = s\bar{f}(x,s) - f(x,0)$$

$$\boxed{s = c + i\omega, c > s_0}$$

Преобразование уравнений с помощью метода Лапласа

Уравнение движения

$$\frac{\xi^2\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2\left(1-\nu_{r\theta}\right)}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}\frac{u}{x^2}\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}-2\frac{\dot{u}}{x^2}\right]=0$$

Уравнение движения в пространстве Лапласа

$$\left[\frac{\xi^2\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}+\frac{4}{3}s\right]\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-2\frac{\bar{u}}{x^2}\right)-\frac{2\xi[1-\nu_{r\theta}-\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)]}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}\frac{\bar{u}}{x^2}=0$$

Радиальная компонента тензора напряжений в пространстве Лапласа

$$\overline{\sigma_{xx}}=\overline{\sigma_{rr\,\mathrm{dim}}}=\left[\frac{2\nu_{r\theta}\xi}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}-\frac{4}{3}s\right]\frac{\bar{u}}{x}+\left[\frac{\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)\xi^2}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}+\frac{4}{3}s\right]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

Граничные условия при сохранении дополнительного объема жидкости

Граничные условия

$$u(\tau)\big|_{x=\beta} = u_0 H(\tau) \to \bar{u}(s)\big|_{x=\beta} = \overline{u_0 H(\tau)}$$

$$\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=1} = \sigma_{rr\,\dim}(\tau)\big|_{x=1} = 0 \to \overline{\sigma_{xx}}(s)\big|_{x=1} = 0$$

Функция Хевисайда

$$H(\tau) = \begin{cases} 0, \tau < 0 \\ 1, \tau \geq 0 \end{cases}$$

Учет дополнительного объема при инъекции

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\left(R_1 + u_{r0}(R_1)\right)^3 - \frac{4}{3}\pi\left(R_1\right)^3 \approx 4\pi R_1^2 u_{r0}$$

$$u_{r0} \approx \frac{\Delta V}{4\pi R_1^2}$$

$$u_0 \approx \frac{\Delta V}{4\pi R_2 R_1^2}$$

Численные алгоритмы обратного преобразования Лапласа

Интеграл Бромовича[3]

$$f(x,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s\tau}\,\overline{f}(x,s)\,ds,\ \tau>0$$

Аппроксимация Паде[4]

Квадратурная формула типа Гаусса[3]

$$f(x,\tau)\approx f_n(x,\tau)\equiv f_{n,a,K}(x,\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n}K_j\,\overline{f}\left(x,\frac{a_j}{\tau}\right)$$

a – вектор узлов,
K – вектор весов

n – размерность векторов **a** и **K**

Алгоритм Закиана[5]

n=5

$$f_{n,a,K}^{Zakian}(x,\tau)=2\,f_{n,a,K}(x,\tau)$$

Алгоритм Джеффресона и Чоу[6]

n=10 **n=15**

[3]J. Abate, W. Whitt. A Unified Framework for Numerically Inverting Laplace Transforms // INFORMS Journal on Computing – 2006 – V.18 – №4 – pp.408-421.
[4]G. A. Baker, P. Graves-Morris. Pad´e Approximants, 2nd ed. // Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications - 1996 - V.59. – 764 p.
[5]V. Zakian. Numerical inversion of Laplace transform // Elec. Lett. – 1969 - №5 - pp. 120-121.
[6]C.P. Jeffreson, E.-P. Chow. Least squares coefficients for a quadrature formula for Laplace transform inversion // Journal of Computational and Applied Mathematics – 1978 – V.4 - №1 - pp. 53-58.

Определение коэффициента сдвиговой вязкости склеральной оболочки глаза

Связь ВГД с напряжением

$$IOP_{\dim}(\tau) = -\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=\beta}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr\dim} = \sigma_{rr}/E_{\theta\theta}$$

Коэффициент сдвиговой вязкости склеры

$$\eta = E_{\theta\theta} t/\tau$$

Эксперимент 1. Данные К.Е. Котляра[1]

ВГД=6266 Па (ВГД$_{безр}$=438.2e-6), t=10 с
ВГД=4533 Па (ВГД$_{безр}$=317.0e-6), t=120 с
ВГД=3466 Па (ВГД$_{безр}$=242.4 e-6), t=300 с
ВГД=2800 Па (ВГД$_{безр}$= 195.8e-6), t=500 с

Эксперимент 2. Данные Б.С. Першина[7]

ВГД=8733 Па (ВГД$_{безр}$=610.7e-6), t=0 с
ВГД=6853 Па (ВГД$_{безр}$=479.2e-6), t=60 с
ВГД=4800 Па (ВГД$_{безр}$=335.6e-6), t=180 с
ВГД=2800 Па (ВГД$_{безр}$= 195.8e-6), t=300 с

Диапазоны значений безразмерного ВГД

Эксперимент 1: 195.8e-6 – 438.2e-6
Эксперимент 2: 195.8e-6 – 610.7e-6
Теоретические данные: ≈ 285e-6 – 430e-6

$E_{\theta\theta}$=14.3 МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta}$=0.01, $\nu_{r\theta}$=0.01, $\nu_{\theta\varphi}$=0.45
R_1=11.75 мм, R_2=12.25 мм, ΔV=0.05 мл

[1]К. Котляр, С. Бауэр, Н. Планге. Клинические и биомеханические аспекты изменения внутриглазного давления после интравитреальных инъекций // Российский общенациональный офтальмологический формум - 2013.
[7]Б.С. Першин. Гидродинамический баланс глазного яблока при интравитреальном введении дополнительного объема жидкости // Дисс. – 2012 – 150 с.

Значения коэффициента сдвиговой вязкости при использовании разных численных алгоритмов

Данные К.Е. Котляра для 2-ой точки:
ВГД=4533 Па, t=120 с

→

η=12.8 МПа·с (**алгоритм Закиана**)

η=12.8 МПа·с (**алгоритм Д&Ч, n=10**)

η=12.9 МПа·с (**алгоритм Д&Ч, n=15**)

Данные Б.С. Першина для 3-ей точки:
ВГД=4800 Па, t=180 с

→

η=27.8 МПа·с (**алгоритм Закиана**)

η=27.7 МПа·с (**алгоритм Д&Ч, n=10**)

η=27.8 МПа·с (**алгоритм Д&Ч, n=15**)

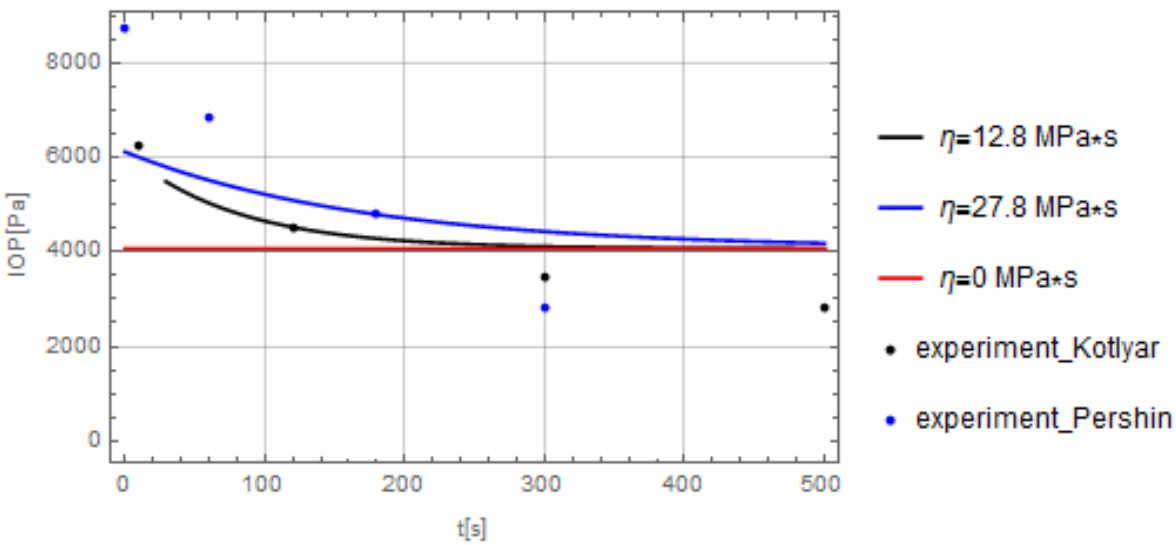
Определение ВГД

Сходимость решения[8]

Алгоритм Закиана

$$\lim_{\tau\to\infty} IOP_{\dim}(\tau) = IOP\big|_{\eta=0} \approx 285e-6 \approx IOP_{el} = 291e-6$$

$$\sigma_{rr,el} = \frac{r^{-2-m}E_{rr}R_1^{1+m}\left(r^{1+2m}-R_2^{1+2m}\right)u_{r0}\left(-4E_{\theta\theta}^2\nu_{r\theta}^2-2E_{rr}E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)+m(1+m)E_{rr}^2\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)^2\right)}{\left(2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2+E_{rr}\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)\right)\left(2E_{\theta\theta}\left(R_1^{1+2m}-R_2^{1+2m}\right)\nu_{r\theta}+E_{rr}\left((1+m)R_1^{1+2m}+mR_2^{1+2m}\right)\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)\right)}$$

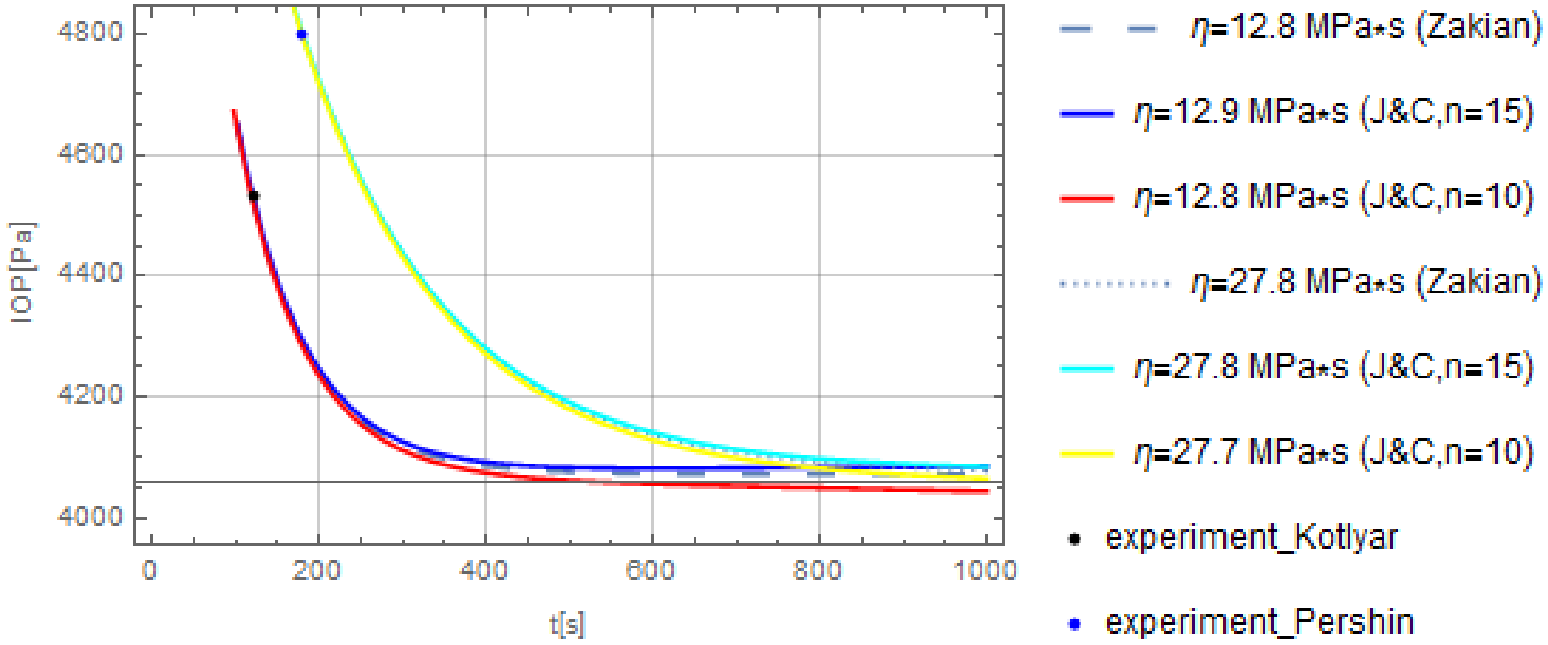


$$m = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2E_{\theta\theta}\left(\nu_{r\theta}-1\right)}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}}$$

Изменение ВГД с течением времени

[8]С.М. Бауэр, Л.А. Замураев, К.Е. Котляр. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики – 2010 – Т.10 - №2 – сс.43–49.

Графическое сравнение численных алгоритмов обратного преобразования Лапласа на примере определения ВГД



Изменение ВГД с течением времени

Граничные условия при наличии оттока внутриглазной жидкости

Текущий объем глаза

$$V(t) = V_0^{eye} + \Delta V + \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\, d\tilde{t}$$

Объем глаза сразу после инъекции

$$V(t) - V(0) = V(t) - V_0^{eye} - \Delta V = 4\pi R_{inj}^2 u_r(t)$$

$$R_{inj} = \sqrt[3]{R_1^3 + \frac{3\Delta V}{4\pi}}$$

Граничные условия

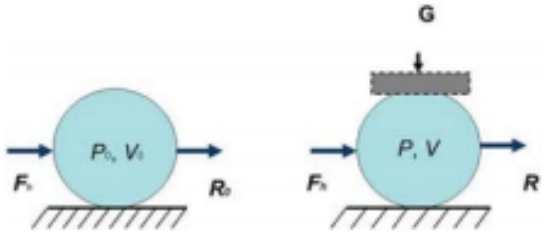
$$\sigma_{xx}(t)\big|_{x=1} = 0, u(t)\big|_{x=\beta} = u_0 + \frac{\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\, d\tilde{t}}{4\pi R_2 R_{inj}^2}$$

- **Безразмерное перемещение**
- **Размерное время**

Коэффициент сдвиговой вязкости входит в систему уравнений

Метод тонографии[9]

Тонография *- метод измерения и регистрации ВГД, позволяющий определять состояние оттока внутриглазной жидкости.*



Модель глазного яблока

V – объем глаза
F, R– скорости притока и оттока жидкости
C – коэффициент легкости оттока
P, P_e – ВГД и давление в эписклеральных венах
1/α, E_i – объемная жесткость и средний коэффициент ригидности корнеосклеральной оболочки

$$\frac{dV}{dt} = F - R$$

До нагружения

$$F = R, P = P_0$$

$$R = C\left(P - P_e\right)$$

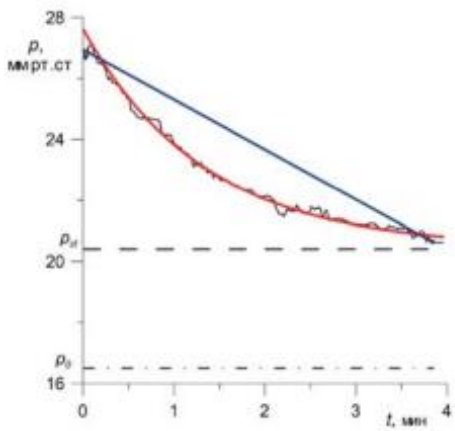
$$dV = \alpha dP$$

$$1/\alpha = P_0 E_i \ln 10$$

Коэффициент легкости оттока

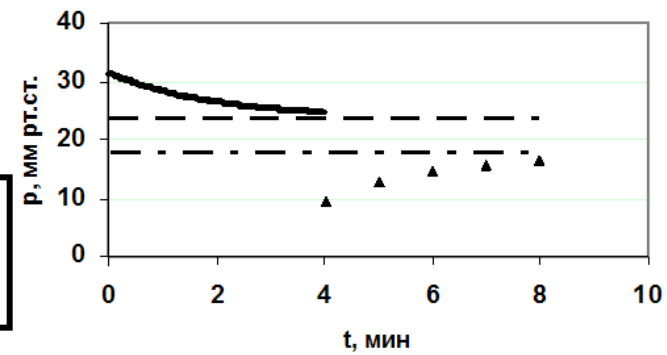
[9]Е.Н. Иомдина, С.М. Бауэр, К.Е. Котляр. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения // М.: Реал Тайм – 2015 – 208 с.

Схемы обработки данных модифицированного тонографического исследования[10]



$$\alpha \frac{dp}{dt} = F - C\left(P - P_e\right)$$

$$\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}\left(\tilde{t}\right) d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \left(F\left(\tilde{t}\right) - R\left(\tilde{t}\right)\right) d\tilde{t}$$



Аппроксимация экспериментальной кривой

Стандартная схема

$$P_e - P_{e0} = 1.25 \qquad C = C_0 = const \qquad F = F_0 = const$$

$$P\left(t\right) = P_{st} + \left[P\left(0\right) - P_{st}\right]\exp\left(-t/\tilde{\tau}\right)$$

$$P_{st} = P_0 + P_e - P_{e0} \qquad \tilde{\tau} = \alpha / C$$

Предположения при новых схемах

Схема №1

$$P_e - P_{e0} = 1.25 \qquad F = R_{st} \neq F_0$$

Схема №2

$$F = R_{st} = F_0 \qquad P_e - P_{e0} \neq 1.25$$

[10]Г.А. Любимов, И.Н. Моисеева, А.А. Штейн, Е.Н. Иомдина, Л.А. Назаренко. Об оценке величины оттока жидкости из глаза с помощью модифицированного метода тонографии // Российский журнал биомеханики – 2012 – Т.16, №2 – сс. 8–20.

Определение коэффициента сдвиговой вязкости склеральной оболочки глаза с помощью итерационного метода

Метод бисекции

Первая теорема Больцано-Коши:

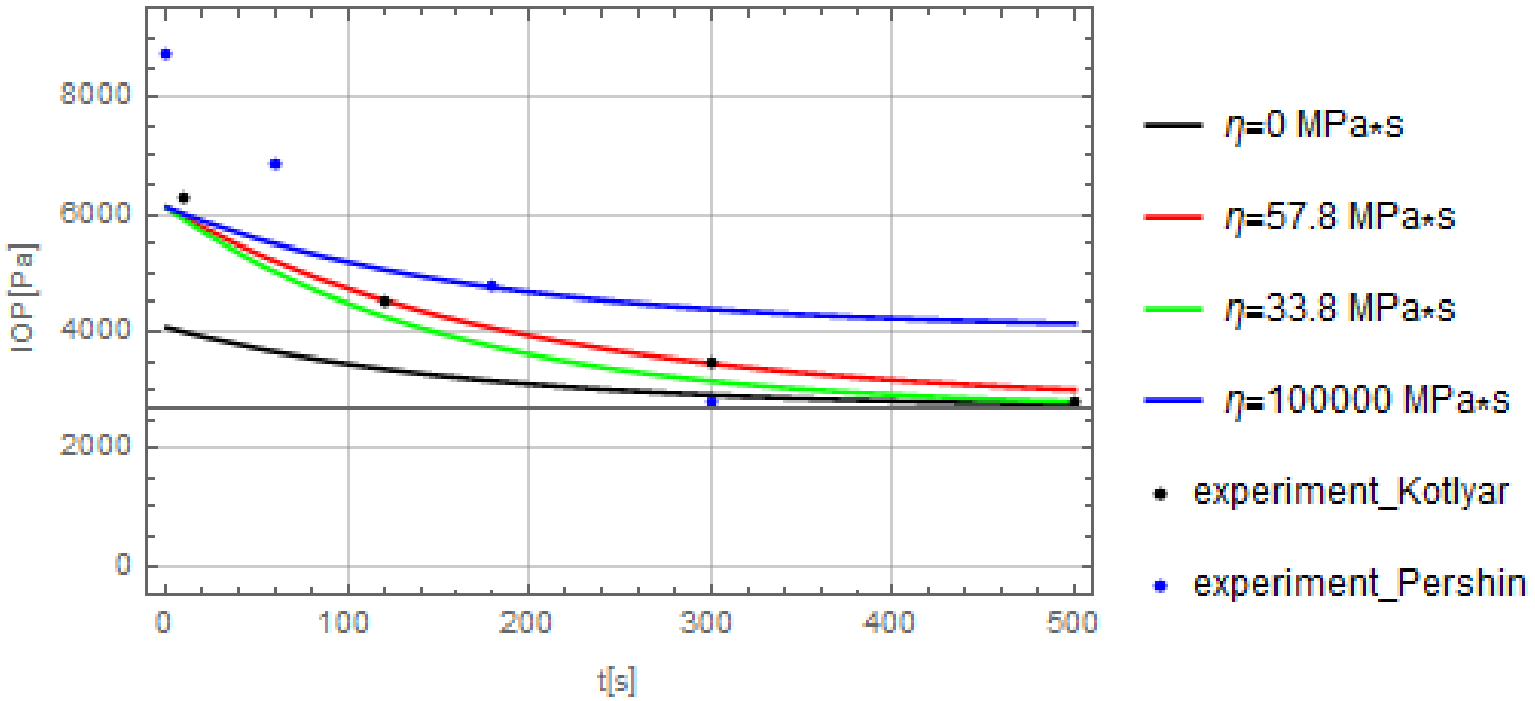
$$\Phi(\eta) \in C[\eta_a, \eta_b], \Phi(\eta_a) \cdot \Phi(\eta_b) < 0 \Rightarrow \exists \eta_c \in [\eta_a, \eta_b] : \Phi(\eta_c) = 0$$

$$\Phi(\eta) = \left(IOP_{\exp eriment(\dim)} - \left(-\sigma_{xx} \Big|_{x=\beta} \right) \right) \Big|_{t=t_{\text{experiment}}}$$

Стандартная схема модифицированного метода тонографии

Данные К.Е. Котляра	Алгоритм Закиана	Алгоритм Джефферсона и Чоу	
		n=10	n=15
ВГД=4533 Па, t=120 с	η=57.1 МПа·с	η=57.1 МПа·с	η=57.1 МПа·с
ВГД=3466 Па, t=300 с	η=58.6 МПа·с	η=59.1 МПа·с	η=58.3 МПа·с
ВГД=2800 Па, t=500 с	η=33.8 МПа·с	η=35.3 МПа·с	η=33.0 МПа·с

Определение ВГД с помощью алгоритма Закиана



Изменение ВГД с течением времени

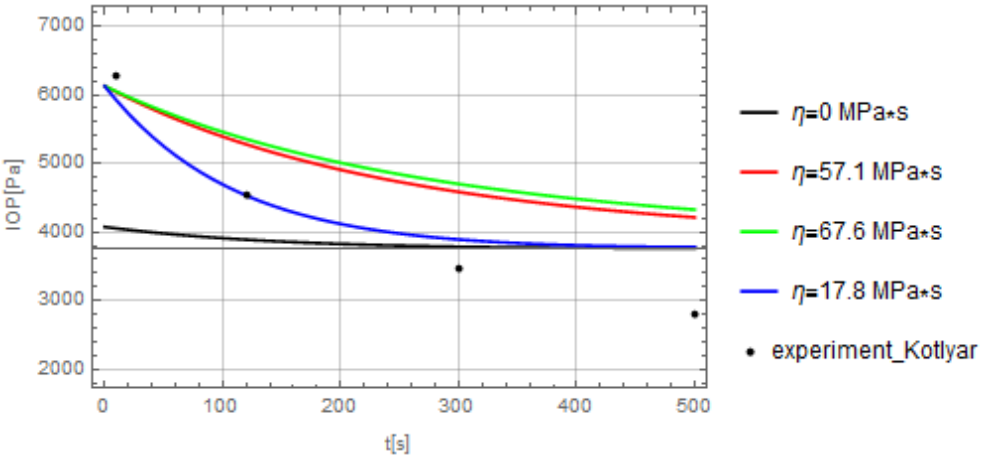
Сравнение схем обработки данных тонографического исследования при использовании алгоритма Закиана

$$P_e - P_{e0} = 1.25$$

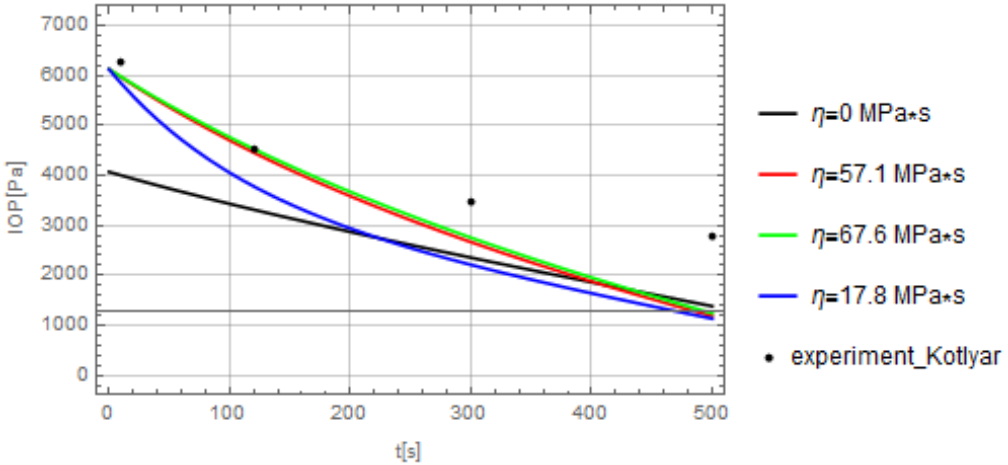
$$F = R_{st} \neq F_0$$

ВГД=4533 Па, t=120 с

η= 17.8 МПа*с



Изменение ВГД с течением времени



$$F = R_{st} = F_0$$

$$P_e - P_{e0} \neq 1.25$$

ВГД=4533 Па, t=120 с

η= 67.6 МПа*с

Влияние модулей Юнга на коэффициент сдвиговой вязкости[11]

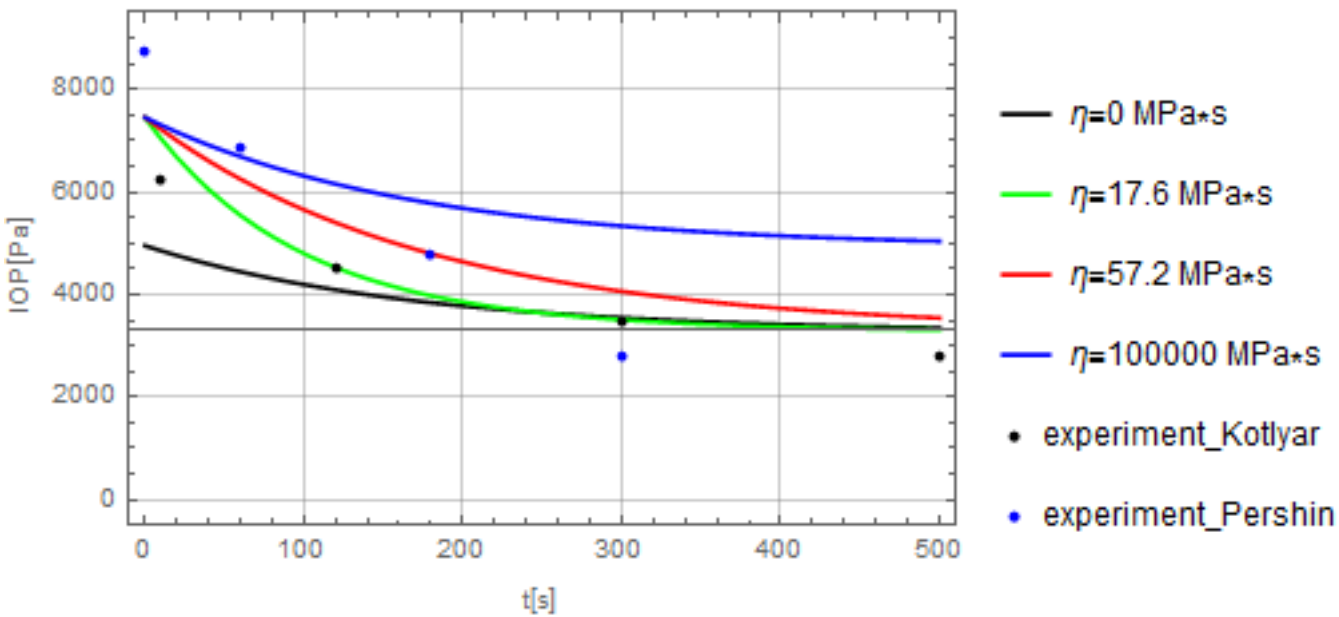
ВГД=4533 Па, t=120 с

η=17.6 МПа·с

$E_{\theta\theta}$=17.4 МПа
E_{rr}/ $E_{\theta\theta}$ =0.01

ВГД=4800 Па , t=180 с

η=57.2 МПа·с



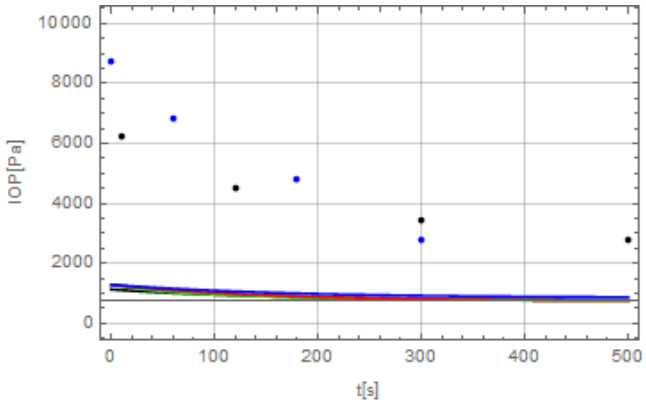
Изменение ВГД с течением времени

[11]Е.Н. Иомдина. Механические свойства тканей человека // Изд. МГУ: Современные проблемы биомеханики – 2006 – Вып.11 – сс.183-200.

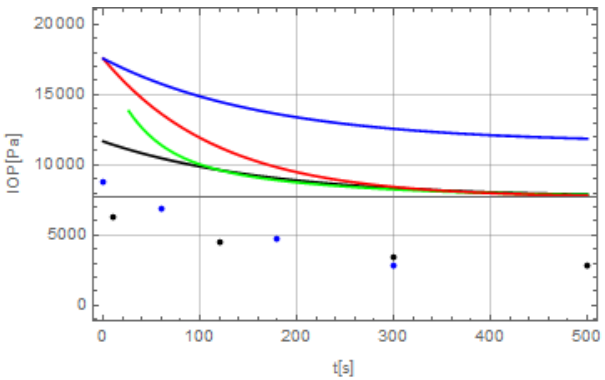
Влияние модулей Юнга на коэффициент сдвиговой вязкости[11]

Изменение ВГД с течением времени

$E_{\theta\theta}$=5.5 МПа, E_{rr}/ $E_{\theta\theta}$ =0.01



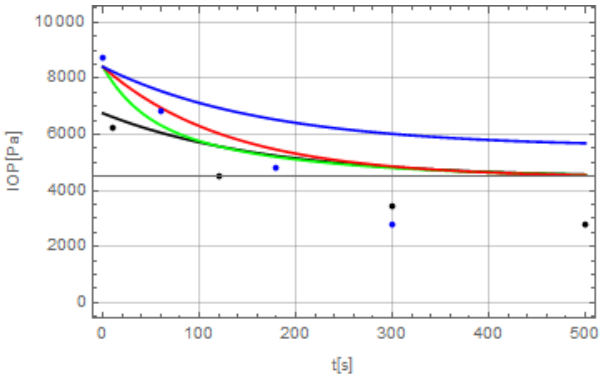
$E_{\theta\theta}$=41.0 МПа, E_{rr}/ $E_{\theta\theta}$ =0.01



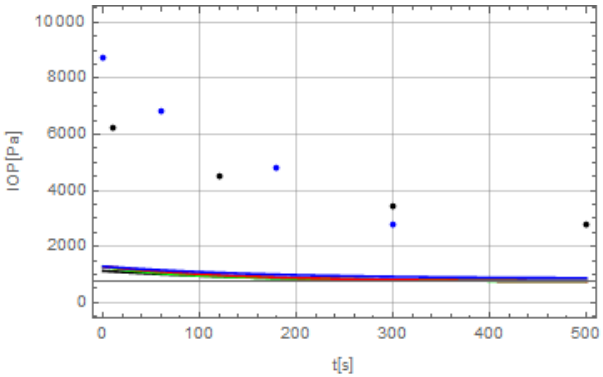
Легенда

- η=0 MPa*s
- η=17.6 MPa*s
- η=57.2 MPa*s
- η=100000 MPa*s
- experiment_Kotlyar
- experiment_Pershin

$E_{\theta\theta}$=20.0 МПа, E_{rr} =0.5 МПа



$E_{\theta\theta}$=3 МПа, E_{rr} =0.5 МПа



[11]Е.Н. Иомдина. Механические свойства тканей человека // Изд. МГУ: Современные проблемы биомеханики – 2006 – Вып.11 – сс.183-200.

Результаты

- Для описания поведения склеры после интравитреальной инъекции решена задача для вязкоупругого линейного трансверсально-изотропного сферического слоя при центральносимметричной нагрузке
- Показано, что численное решение сходится к упругому при бесконечном значении времени
- Определены значения коэффициента сдвиговой вязкости склеры при
  - Условии сохранения дополнительного объема жидкости, введенного при инъекции
  - Наличии оттока внутриглазной жидкости. Использовалось три схемы обработки данных тонографического исследования для определения граничного условия
  - Трех численных алгоритмах для обратного преобразования Лапласа: Алгоритма Закиана, Алгоритма Джефрессона и Чоу (n=10, n=15)
  - Некоторых известных из литературы комбинациях модулей Юнга

Выводы

- При учете обоих факторов: наличия вязкости и оттока внутриглазной жидкости, - теория лучше согласуется с экспериментом, чем при учете одного из них
- Значение коэффициента сдвиговой вязкости склеры меньше в случае постоянного граничного условия. При этом наблюдается меньший спад ВГД с течением времени, чем в случае наличия оттока внутриглазной жидкости
- Традиционные предположения тонографии приводят к результатам, лучше согласующимся с экспериментом, чем предположения модифицированных методов
- Выбор численного алгоритма обратного преобразования Лапласа не оказывает значительного влияния на результат
- Коэффициент сдвиговой вязкости зависит от значений модулей Юнга. При допустимом варьировании значений модулей оказывается, что коэффициент сдвиговой вязкости тем больше, чем меньше модули Юнга

Спасибо за внимание!