БАЛАНС ПОТОКА ЭНЕРГИИ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СРЕДАХ

А.М. Кривцов[1,2]
[1]*Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Санкт-Петербург*
[2]*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*
akrivtsov@bk.ru

Аннотация. Рассматриваются энергетические уравнения баланса для широкого класса консервативных сред и полей. Используется аналогия процессов распространением массы в пространстве и энергии в веществе. На указанной аналогии базируются методы энергетической динамики, позволяющие использовать подходы, развитые в классической механике, для описания энергетических процессов в различных физических средах и полях, в том числе немеханического характера. Данный доклад ограничивается рассмотрением консервативных систем, неограниченных в пространстве. Рассматривается волны в классических упругих средах, баллистическая тепловая кинетика в твердом теле, электромагнитное поле в вакууме, движение квантовой частицы в потенциальном поле.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21-11-00378.

Введение

Процессы, для которых поток энергии является определяющим фактором, встречаются практически во всех разделах физики. Это распространение механических волн в упругих средах, перенос тепла в кристаллических твердых телах, распространение электромагнитной энергии в вакууме, перенос вероятности в квантовых системах и многое другое. Подход энергетической динамики [1, 2] позволяет с единых позиций рассмотреть подобные процессы независимо от их различной природы. Для этого вводится понятие носителя (среда или поле, способное переносить энергию) и фантома (виртуальное материальное тело, плотность массы в котором повторяет распределение энергии в носителе). Для описания переноса энергии ключевыми являются законы баланса энергии и потока энергии. Эти законы являются аналогами законов баланса массы и импульса для описания переноса вещества в пространстве. В данном докладе ограничиваемся рассмотрением консервативных систем – то есть систем, в которых отсутствует диссипация энергии. Процессы рассматриваются в безграничной среде, при этом энергия процессов конечна – такие процессы будем называть возмущениями, в силу конечности энергии возмущения локализованы в пространстве (на конечных временах). Для рассматриваемых систем анализируются уравнения баланса потока энергии, обсуждается физический смысл и практическое применение входящих в них величин.

Общие уравнения

Носитель описывается уравнением динамики в обобщенных перемещениях и представлением локальной энергии через обобщенные скорости и деформации. Дифференцирование указанного представления по времени с учетом уравнения динамики дает уравнение баланса локальной энергии

$$\dot{\epsilon} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \tag{1}$$

где ϵ – локальная энергия (полная удельная энергия бесконечно малого элемента носителя, кинетическая плюс потенциальная), точкой над символом обозначается производная по времени, ∇ – набла-оператор (векторный оператор дифференцирования по пространственным координатам), точка между символами – скалярное произведение векторных или тензорных величин, $\mathbf{q}$ – вектор локального потока энергии (представляется через обобщенные скорости и деформации). Интегрирование этого уравнения по пространственному объему дает сохранение полной глобальной энергии возмущения: $E = \int \epsilon \, \mathrm{d}V = \mathrm{const}$. Дифференцирование выражения для потока энергии по времени с учетом уравнения динамики дает уравнение баланса локального потока энергии

$$\dot{\mathbf{q}} = -\nabla \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\varphi}, \tag{2}$$

где $\mathbf{g}$ – тензор суперпотока (потока потока) энергии, $\boldsymbol{\varphi}$ – подвод потока энергии. Можно показать, что поток энергии характеризует перенос энергии, суперпоток – ее дисперсию (расплывание в пространстве). Интегрирование уравнения (2) по объему дает уравнение баланса $\dot{\mathbf{Q}} = \int \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}V$, где $\mathbf{Q} \overset{\mathrm{def}}{=} \int \mathbf{q} \, \mathrm{d}V = E\mathbf{v}_c$ – глобальный поток энергии, $\mathbf{v}_c$ – скорость энергетического центра возмущения. Масса m и импульс $\mathbf{p}$ фантома связаны с энергией и потоком энергии возмущения соотношениями $E = mc^2$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{p}c^2$, где c – некоторая характерная скорость (константа).

Классические упругие среды

Волны в классических упругих средах эффективно переносят энергию и лежат в основе всех вибрационных и акустических явлений. Упругие среды можно разделить на скалярные (и сводящиеся к ним) и векторные. В скалярных упругих средах процессы описываются одной скалярной переменной – плотность для звуковых волн, прогиб для струн и мембран, поворот для крутильных колебаний и др. Для векторных сред процессы описываются несколькими переменными – вектор перемещения трехмерной упругой среды, набор перемещений для связанных скалярных сред (например, двойная струна), перемещения и повороты для моментных сред и т.д. Для однородных скалярных сред выполняется закон сохранения потока энергии – в связи с этим движение энергетического центра любого возмущения происходит прямолинейно и равномерно – как движение центра масс материальной системы в вакууме. В качестве примера рассмотрим некоторую скалярную упругую среду, динамика которой сводится к волновому уравнению, а локальная энергия задается формулой:

$$\rho\ddot{u} = C\nabla^2 u, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}[\rho v^{\mathbf{2}} + C(\nabla u)^2], \tag{3}$$

где u – перемещение, ρ – плотность, C – жесткость, $v \overset{\text{def}}{=} \dot{u}$ – скорость. Такими уравнениями описываются звуковые волны, волны в струнах и мембранах и др. Запись для системы (3) уравнения баланса энергии (1) дает следующие выражения для потока и суперпотока энергии [3] (60, 64):

$$\mathbf{q} = -Cv\nabla u, \qquad \mathbf{g} = \frac{C}{2\rho}[\rho v^2 - C(\nabla u)^2]\,\mathbf{I} + \frac{C^2}{\rho}\nabla u\nabla u, \tag{4}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Подвод потока для данной системы тождественно равен нулю ($\boldsymbol{\varphi} = 0$), поэтому глобальный поток энергии сохраняется: $\mathbf{Q} = \text{const}$. В случае неоднородных скалярных сред подвод потока определяется градиентом свойств среды (плотность, жесткость) и движение энергетического центра возмущения может рассматриваться как движение материальной точки в силовом поле. Сложнее обстоит ситуация для векторных сред. Для них, даже в случае однородности носителя, поток энергии, вообще говоря, не сохраняется – возникает подвод потока, связанный с перераспределением энергии между различными степенями свободы (например, продольными и поперечными волнами в трехмерной упругой среде). Однако, поскольку движение волн в различных модах происходит с разной скоростью, с течением времени эти волны перестают взаимодействовать. Следовательно, энергетический центр в таких системах на больших временах также движется прямолинейно и равномерно в случае однородности носителя, и скорость энергетического центра изменяется в соответствии с изменением плотности и упругих свойств при неоднородности носителя. Это позволяет и для векторных сред использовать аналогию между переносом массы и энергии.

Кинетический перенос тепла в твердом теле

Перенос тепла на макроуровне, как правило, хорошо описывается классическим уравнением теплопроводности. Однако, с развитием нанотехнологий, появились эксперименты убедительно показывающие, что распространения тепла на микроуровне существенно отличаются – вместо диффузионного характера, справедливого для макросистем, перенос тепла на наноуровне имеет преимущественно баллистический характер, при котором тепловую энергию переносят упругие волны, свободно распространяющиеся в кристаллической решетке вещества [4]. Такие процессы могут описываться динамикой кристаллической решётки, однако значительно более простой (хотя и менее точный) подход состоит в использовании кинетической теории распространения тепла, основы которого были заложены еще в первой половине двадцатого века [5]. Согласно этому подходу, энергия переносится квазичастицами – фононами. В баллистическом случае фононы движутся свободно. По мере перехода с наноуравня на микро, мезо, а затем и макроуровень все более существенным становятся столкновения фононов друг с другом и с дефектами кристаллической структуры твердого тела. Несмотря на почти вековую историю данного подхода, по-прежнему остается много вопросов как к концепции фонона, так и к переходу между динамическим и кинетическим описанием переноса энергии в кристаллических твердых телах [6]. Подход энергетической динамики позволяет перекинуть необходимый мостик, в частности, в работе [2] (8) получено следующее выражение для глобального потока энергии в скалярной кристаллической решетке и доказано его сохранение

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r},\alpha} \mathbf{a}_{\boldsymbol{\alpha}} C_{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} + \mathbf{a}_{\boldsymbol{\alpha}})\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{r}$ – положение отсчетного узла кристаллической решетки, $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\alpha}}$ – вектор положения соседнего узла по отношению к отсчетному, α – номер соседнего узла, $C_{\boldsymbol{\alpha}}$ – жесткость связи, u и v – перемещение и скорость частицы, суммирование ведется по всем возможным отсчётным узлам $\mathbf{r}$ и по всем соседям α каждого отсчетного узла. В отличие от рассмотренных выше континуальных формул, данная формула дискретная (интеграл заменен на сумму), однако по существу используется тот же подход. В частности, энергетический центр любого возмущения в рассматриваемой дискретной среде движется прямолинейно и равномерно, а фантом, соответствующий возмущению, представляет собой квазичастицу (фонон), на концепции которой строится кинетическая теория теплопереноса. При рассмотрении длинных волн в кристаллической решетке описание может строится континуальными методами, в том числе для нелинейных систем [7].

Перенос энергии электромагнитными волнами

На первый взгляд, электромагнитные процессы сильно отличаются от механических, однако еще Максвелл при получении своих уравнений использовал механические аналогии. Уравнения же Максвелла в вакууме эквивалентны уравнениям динамики несжимаемой упругой среды [8] и могут быть сведены к волновому уравнению, а энергия, поток и суперпоток энергии могут быть представлены в виде [9] (14.05,14.06,15.13)

$$\epsilon = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \qquad \mathbf{q} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \qquad \mathbf{g} = \frac{c^2}{4\pi}\left(\mathbf{EE} + \mathbf{BB} - \frac{1}{2}\,(E^2 + B^2)\,\mathbf{I}\right), \tag{6}$$

где $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, E и B – их модули, c – скорость света в вакууме. Вектор $\mathbf{q}$ в электродинамике называют вектором Умова-Пойтинга, тензор $\mathbf{g}$ рассматривался еще Максвеллом (тензор “натяжений”) [9]. Подвод потока в этом случае $\boldsymbol{\varphi} = 0$, поэтому энергетический центр любого возмущения электромагнитного поля в вакууме движется прямолинейно и равномерно, как центр масс свободного материального тела – фантома. По сути, свободно летящий фотон является таким же фантомом, однако для рассмотрения подобных процессов требуется сопряжение энергетической динамики и квантовой механики, чему посвящен следующий раздел.

Поток вероятности и процессы переноса для квантовых систем

Движение квантовой частицы в потенциальном поле описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\psi, \tag{7}$$

где i – комплексная единица, $\hbar$ – приведенная постоянная Планка, ψ – волновая функция, m – масса частицы, U – потенциал внешнего поля, $\mathbf{r}$ – пространственная координата. Следуя Шрёдингеру [10], предположим, что уравнение (7) описывает распространение возмущения в некоторой среде. Локальную энергию среды определим как $\epsilon = E|\psi|^2$, где E – полная энергия возмущения. Тогда для потока локальной энергии можно получить формулу

$$\mathbf{q} = E\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \tag{8}$$

где $\mathbf{j}$ – поток вероятности [11], звездочка означает комплексное сопряжение. Дифференцируя это соотношение по времени и интегрируя по пространству получим

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\int \epsilon\,\nabla U\,\mathrm{d}V \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\int |\psi|^2\,\nabla U\,\mathrm{d}V, \tag{9}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{Q}c^2$ – средний импульс квантовой частицы. Данное соотношение в квантовой механике носит название теоремы Эренфеста, связывающей квантовые и классические характеристики частицы. Согласно формуле (9), среднее движение квантовой частицы в точности совпадает с движением центра масс фантома, соответствующего возмущению и движущемуся в неоднородной среде, свойства которой определяются внешним потенциальным полем.

Заключение

В докладе рассмотрено применение методов энергетической динамики для описания четырех различных физических процессов – распространение акустических волн в газе, баллистическое распространение тепла в твердом теле, перенос электромагнитной энергии в вакууме и движение квантовой частицы в потенциальном поле. Для всех рассмотренных процессов показано, что баланс потока энергии определяет ключевые свойства процесса, а концепция носитель / фантом может успешно применяться для интерпретации величин различной физической природы и выявления общих закономерностей существенно различных физических явлений.

Литература

1. A.M. Krivtsov. Dynamics of matter and energy, ZAMM 2022, e202100496.
2. J.A. Baimova, N.M. Bessonov, A.M. Krivtsov. Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices. Physical Review E, 2023, accepted.
3. А.М. Кривцов. Потоки энергии в среде Коши. Манускрипт fvb (29). 2022. Не опубликовано.
4. C.W. Chang, D. Okawa, H. Garcia, A. Majumdar, A. Zettl. Breakdown of Fourier’s Law in nanotube thermal conductors. Phys. Rev. Lett. **101** (7). 2008.
5. R. Peierls. Zur kinetischen theorie der wärmeleitung in kristallen. Ann. Phys. 3, 1055. 1929.
6. V.A. Kuzkin, A.M. Krivtsov. Unsteady ballistic heat transport: linking lattice dynamics and kinetic theory. 2021, Acta Mechanica, 232 (5). 2021.
7. С.А. Щербинин, А.М. Кривцов. Эволюция возмущений в слабонелинейных упругих средах. Тезисы докладов, XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. 2023.
8. П.А. Жилин. Реальность и механика. Труды XXIII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, СПб., 1996. С. 6-49.
9. С.В. Измайлов. Курс электродинамики. Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, М.: 1962.
10. E. Schrodinger. Quantisation as a problem of proper values (Part IV). Annalen der Physic. **81** (4). 1926.
11. D. McMahon. Quantum Field Theory. McGraw Hill (USA). 2008.