

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д.ф. – м.н., чл.-корр. РАН

_____ А. М. Кривцов

«_____» _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

по направлению подготовки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

профиль

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с

микроструктурой

Выполнил

студент гр. 5030103/90101

Косолапов Е.С.


Руководитель

Профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Иванова Е.А.

Санкт-Петербург

2023



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор
ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__»_____20__г.

ЗАДАНИЕ

**на выполнение выпускной квалификационной
работы**

студенту Косолапову Егору Сергеевичу, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: «Моделирование движения тела-точки в постоянном электромагнитном поле»
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: справочная литература.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
моделирование движения тела-точки в электромагнитном поле,
исследование зависимости траектории тела-точки от начальных данных и
исходных параметров тела-точки.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не
предусмотрено.
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР: _____ Е.А.Иванова, профессор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., доцент.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: _____ Е.С.Косолапов.

РЕФЕРАТ

На 37 с., 13 рисунков

ТЕЛО-ТОЧКА, ЭЛЕКТРОДИНАМИКА .

В данной работе представлено моделирование движения тела-точки в постоянном электромагнитном поле с помощью языка программирования Matlab.

Основой моделирования являются уравнения баланса количества движения и кинетического момента, описывающие движение тела-точки.

В ходе работы были получены не только численные, но и аналитические результаты. Был получен первый интеграл изучаемой системы дифференциальных уравнений. Также была получена оценка сверху на перемещение тела-точки вдоль некоторого направления.

Были проанализированы полученные численные решения. Определены некоторые достаточно большие отличия от движения материальной точки.

Также рассмотрен частный случай тела-точки, чьи инерционные характеристики близки к соответствующим характеристикам электрона. В этом частном случае были получены численные решения и проведено сравнение движения тела-точки в зависимости от инерционных параметров и начальной трансляционной скорости.

ABSTRACT

37 pages, 13 pictures.

BODY-POINT, ELECTRODYNAMICS .

This paper presents the simulation of motion of a body-point in a constant electromagnetic field using the Matlab programming language.

The modeling is based on the equations of balance of momentum and angular momentum, which describe the motion of body-point.

In the course of the work, not only numerical, but also analytical results were obtained. The first integral of the system of differential equations under study was obtained. An upper estimate was also obtained for the displacement of a body-point along a certain direction.

The obtained numerical solutions were analyzed. Some rather large differences from the motion of a material point was determined.

A special case of a body-point, whose inertial characteristics are close to the corresponding characteristics of an electron, is also considered. In this particular case, numerical solutions were obtained and the motion of a body-point was compared depending on the inertial parameters and the initial translational velocity.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СВОДКА	6
1.1. Основные уравнения движения тела-точки	6
1.2. Постановка задачи	7
1.3. Аналитические результаты	9
1.4. Координатная запись основного уравнения	12
ГЛАВА 2. СРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ И МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ	14
2.1. Выбор начальных условий и шага интегрирования	14
2.2. Результаты численного расчёта	16
2.2.1. Результаты в случае $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y > 0$	16
2.2.2. Результаты в случае $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y < 0$	22
ГЛАВА 3. СРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ И ЭЛЕКТРОНА	25
3.1. Определение параметров тела-точки и начальных условий	25
3.2. Обезразмеривание уравнений	26
3.3. Результаты численного решения	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	34
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	36

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время были найдены и изучены подходы, позволяющие связать механику и электромагнетизм. В работах [5], [10], [11] и [12] эта связь устанавливается благодаря рассмотрению тел-точек или сред, состоящих из тел-точек.

В данной работе рассматривается движение тело-точки с некоторым зарядом в постоянном электромагнитном поле. Постановка задачи вдохновлена экспериментами, проводимыми Кауфманом в начале 20 века. В этом эксперименте Кауфман исследовал движение электрона в постоянном электромагнитном поле с параллельными векторами напряженности и магнитной индукции. Более точно, исследуется зависимость отклонения электрона от прямолинейного движения от начальной скорости. Более подробное описание эксперимента есть в [13] и [14]. В данной работе рассматривается движение тела-точки в таком же поле и сравнивается с движением обыкновенной материальной частицей и с электроном.

Структура данной работы такова:

В 1 главе вводятся основные уравнения, ставится исследуемая задача и выводятся основные полученные аналитические результаты.

Во 2 главе происходит исследование полученных численных решений для некоторых абстрактных тел-точек.

В 3 главе исследуются численные решения для тела-точки, чьи инерционные характеристики схожи с соответствующими характеристиками электрона, а начальные скорости берутся порядка тех, которые участвуют в эксперименте Кауфмана.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СВОДКА

1.1. Основные уравнения движения тела-точки

Всё, что написано в данном параграфе является выжимкой из [4], необходимой для постановки задачи.

В данной работе в качестве исходного объекта рассматривается частица, которая реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Такой объект мы будем называть телом-точкой или односпиновой частицей. Движение такого объекта описывается с помощью вектора положения $\underline{R}(t)$ и тензора поворота $\underline{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорость определяются по следующим ниже формулам

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{R}}(t), \quad \underline{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P} \right)_{\times},$$

где крестик внизу второго выражения означает векторный инвариант, определение которого есть например в [2].

Основной динамической структурой тела-точки является кинетическая энергия

Определение. *Кинетической энергией тела-точки называется квадратичная форма её скоростей*

$$K = m \left(\frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\omega} \right)$$

Тензоры $m\underline{B}$ и $m\underline{C}$ называются тензорами инерции тела-точки, а скалярный множитель m называется массой тела.

В данной работе мы будем требовать от кинетической энергии положительной определенности.

Из кинетической энергии также получаются следующие важные динамические структуры

Определение. *Количеством движения \underline{K}_1 тела-точки называется линейная форма скоростей*

$$\underline{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \underline{v}} = m(\underline{v} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega}).$$

Пусть Q – некоторая зафиксированная точка в теле отсчёта. Эту точку Q называют опорной.

Определение. *Кинетическим моментом \underline{K}_2^Q тела-точки, вычисленном относительно опорной точки Q , называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле*

$$\underline{K}_2^Q = (\underline{R}(t) - \underline{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \underline{v}} + \frac{\partial K}{\partial \underline{\omega}} = m[(\underline{R}(t) - \underline{R}_Q) \times (\underline{v} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\omega}) + \underline{v} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\omega}]$$

Основные дифференциальные уравнения, позволяющие определить траекторию тела-точки есть баланс количества движения и баланс кинетического момента. Баланс количества движения записывается формулой

$$\dot{\underline{K}}_1 = \underline{F} + \underline{k}_1,$$

где \underline{F} – сила со стороны внешних тел на изучаемое тело, а \underline{k}_1 – подвод количества движения в изучаемое тело.

Баланс количества кинетического момента записывается формулой

$$\dot{\underline{K}}_2 = \underline{M}^Q + \underline{k}_2,$$

где \underline{M}^Q – момент, действующий со стороны внешних тел на изучаемое тело, вычисленный относительно опорной точки Q . \underline{k}_2 есть скорость подвода кинетического момента в изучаемое тело.

1.2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается движение тела-точки с тензорами инерции

$$\underline{\underline{B}} = \frac{B}{m} \underline{\underline{E}}, \quad \underline{\underline{C}} = \frac{J}{m} \underline{\underline{E}},$$

где B , J – некоторые скалярные константы.

При таком предположении кинетическая энергия переписывается следующим образом

$$K = \frac{1}{2}m\underline{v} \cdot \underline{v} + B\underline{v} \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2}J\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}.$$

Из условия положительной определенности квадратичной формы K следует некоторое ограничение на тензора инерции

$$mJ - B^2 > 0. \quad (1)$$

Также предполагается, что тело-точка обладает некоторым зарядом q . Везде в работе q берётся отрицательным.

Рассматривается движение односпиновой частицы в постоянном электромагнитном поле с вектором напряженности \underline{E} и вектором магнитной индукции \underline{H} . Причём дополнительно требуется, чтобы вектор \underline{E} был параллелен вектору \underline{H} и с некоторым зарядом q в постоянном электромагнитном поле с векторами напряженности \underline{E} и магнитной индукцией \underline{H} .

Предполагается также, что система, состоящая из одной лишь исследуемой односпиновой частицы является замкнутой. Математически это означает, что

$$\underline{k}_1 = \underline{k}_2 = 0.$$

В итоге получаем следующий вид для основных балансовых соотношений

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\underline{v} + B\underline{\omega}) = q[\underline{E} + \underline{v} \times \underline{H}] \\ \frac{d}{dt}[\underline{r} \times (m\underline{v} + B\underline{\omega}) + B\underline{v} + J\underline{\omega}] = \underline{r} \times q[\underline{E} + \underline{v} \times \underline{H}] \end{cases} \quad (2)$$

Требуется проанализировать влияние характеристик тела-точки на её траекторию, а также сравнить движение тела-точки с эквивалентной материальной частицей.

Разъясним, что мы понимаем под эквивалентной материальной частицей. Известно, что движение тела-точки без воздействия внешних сил представляет из себя движение по спирали [3]. Движение материальной частицы в свою очередь есть прямолинейное движение. В данной работе прямолинейное движение материальной частицы всегда будет направлено вдоль некоторой фиксированной оси, называемой осью Y с некоторой начальной скоростью v . Мы называем тело-точку эквивалентной такой материальной частице тогда и только тогда, когда выполнены следующие требования

- Ось спирали, по которой движется тело-точка сонаправлена с осью Y .
- Радиус спирали много меньше проходимого расстояния по оси Y .
- Проекция скорости тела-точки на ось Y равна v .

1.3. Аналитические результаты

При $B = 0$ система (2) переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\underline{v}) = q[\underline{E} + \underline{v} \times \underline{H}] \\ \frac{d}{dt}(J\underline{\omega}) = 0 \end{cases}$$

В частности, при $B = 0$ траектория тела-точки совпадёт с траекторией материальной частицы. Поэтому нет смысла рассматривать случай $B = 0$. Везде в дальнейшем предполагается, что $B \neq 0$

Утверждение. Пусть \underline{v} , $\underline{\omega}$ – решения системы дифференциальных уравнений (ссылка на систему из прошлого параграфа). Тогда \underline{v} удовлетворяет уравнению

$$\dot{\underline{v}} \left[B - \frac{mJ}{B} \right] + \underline{v} \times \left[\frac{qJ}{B} \underline{H} + q\underline{E}t + q\underline{r} \times \underline{H} + \underline{K}_1^{(0)} \right] + \frac{qJ}{B} \underline{E} = 0, \quad (3)$$

где $\underline{K}_1^{(0)}$ – количество движения в начальный момент времени

$$\underline{K}_1^{(0)} = m\underline{v}^{(0)} + B\underline{\omega}^{(0)}.$$

Доказательство. Проинтегрировав первое выражение системы (ссылка на систему) в предположении, что $\underline{r}(0) = \underline{0}$, получим

$$m\underline{v} + B\underline{\omega} = q\underline{E}t + q\underline{r} \times \underline{H} + \underline{K}_1^{(0)}, \quad (4)$$

где $\underline{K}_1^{(0)}$ – количество движения в начальный момент времени.

Преобразуем второе выражение системы (2)

$$\dot{\underline{r}} \times (m\underline{v} + B\underline{\omega}) + \underline{r} \times \frac{d}{dt}(m\underline{v} + B\underline{\omega}) + B\dot{\underline{v}} + J\dot{\underline{\omega}} = \underline{r} \times q[\underline{E} + \underline{v} \times \underline{H}]. \quad (5)$$

Подставив выражение (4), получим

$$\underline{v} \times \left[q\underline{E}t + q\underline{r} \times \underline{H} + \underline{K}_1^{(0)} \right] + B\dot{\underline{v}} + J\dot{\underline{\omega}} = 0. \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (2), получим

$$\dot{\underline{\omega}} = \frac{1}{B} [q[\underline{E} + \underline{v} \times \underline{H}] - m\dot{\underline{v}}]. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим нужное равенство

$$\dot{\underline{v}} \left[B - \frac{mJ}{B} \right] + \underline{v} \times \left[\frac{qJ}{B} \underline{H} + q\underline{E}t + q\underline{r} \times \underline{H} + \underline{K}_1^{(0)} \right] + \frac{qJ}{B} \underline{E} = 0.$$

□

Замечание. Заметим, что абсолютно такое же доказательство справедливо и при произвольных полях $\underline{E}(x, y, z)$ и $\underline{H}(x, y, z)$, лишь бы они не зависели от времени. В частности, следствия ниже также будут верны для произвольных стационарных полей векторов \underline{E} и \underline{H} .

Благодаря переходу к уравнению (2) достаточно интегрировать 3 уравнения, а не 6. Влияние начального вектора. Все численные решения в дальнейшем были посчитаны именно для уравнения (2), а не для системы (1).

Следствие. Выражение

$$|\underline{v}|^2 - \frac{2qJ}{mJ - B^2} \underline{E} \cdot \underline{r} \quad (8)$$

является первым интегралом системы (2)

Доказательство. Домножив уравнение (3) скалярно на \underline{v} , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\underline{v} \cdot \underline{v}) \cdot \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] + \frac{qJ}{B} \underline{E} \cdot \underline{v} = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{2} |\underline{v}|^2 = \frac{qJ}{mJ - B^2} \underline{E} \cdot \underline{r} + \frac{1}{2} |\underline{v}^{(0)}|^2,$$

где $\underline{v}^{(0)}$ – начальная скорость частицы. □

Следующее следствие будет полезно в дальнейшем при исследовании численных результатов

Следствие. Пусть \underline{r} – решение системы (ссылка на систему). r_x – проекция радиус-вектора \underline{r} на ось, сонаправленную с \underline{E} . Пусть также $q < 0$, $E > 0$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$

$$r_x(t) \leq \frac{(v^{(0)})^2 (B^2 - mJ)}{2qJE} \quad (9)$$

Доказательство. Из прошлого следствия следует, что

$$|\underline{v}|^2 = \frac{2qJ}{mJ - B^2} \underline{E} \cdot \underline{r} + |\underline{v}^{(0)}|^2.$$

По определению

$$\underline{E} \cdot \underline{r} = Er_x.$$

Отсюда получаем

$$\frac{2qJ}{mJ - B^2} E r_x = |\underline{v}|^2 - |\underline{v}^{(0)}|^2.$$

Учитывая, что

$$B^2 < mJ,$$

получим

$$r_x = \frac{mJ - B^2}{2J|q|} (|\underline{v}^{(0)}|^2 - |\underline{v}|^2) \leq \frac{mJ - B^2}{2J|q|} |\underline{v}^{(0)}|^2,$$

что и требовалось доказать. \square

Из условия положительной определенности K и отрицательности заряда q следует, что $r_x(t)$ ограничивается каким-то положительным числом. В частности получаем, что тело-точка может отклоняться по направлению вектора напряженности \underline{E} , чего никогда не происходит для отрицательно заряженной материальной частицы. Такое движение действительно иногда происходит. Во второй главе были получены соответствующие численные решения.

1.4. Координатная запись основного уравнения

Введём оси следующим образом. Направим ось X вдоль вектора напряженности \underline{E} , ось Y вдоль вектора начальной скорости частицы, а ось Z вдоль направления, перпендикулярного осям X и Y . Тогда

$$\underline{E} = (E, 0, 0), \quad \underline{H} = (H, 0, 0).$$

Обозначим v_x, v_y, v_z – проекции вектора \underline{v} на оси x, y и z соответственно. Также за $v_x^{(0)}$ обозначена начальная трансляционная скорость по оси X . Аналогичная нотация применена и к остальным векторам.

Тогда векторное уравнение (3) в выше введенных координатах будет иметь вид

$$\dot{v}_x \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] + qHv_x r_x - qH[v_x r_x + v_y r_y + v_z r_z] + m[v_y v_z^{(0)} - v_z v_y^{(0)}] + B[v_y \omega_z^{(0)} - v_z \omega_y^{(0)}] + \frac{qJ}{B} E = 0,$$

$$\dot{v}_y \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] + \frac{qJ}{B} H v_z + qt E v_z + qH r_y v_x + m[v_z v_x^{(0)} - v_x v_z^{(0)}] + B[v_z \omega_x^{(0)} - v_x \omega_z^{(0)}] = 0,$$

$$\dot{v}_z \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - \frac{qJ}{B} H v_y - qt E v_y + qH r_z v_x + m[v_x v_y^{(0)} - v_y v_x^{(0)}] + B[v_x \omega_y^{(0)} - \omega_x^{(0)} v_y] = 0.$$

ГЛАВА 2. СРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ И МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

2.1. Выбор начальных условий и шага интегрирования

В данной работе численный метод применяется не к исходной системе (2), а для дифференциального уравнения (3).

В качестве численного метода использовался явный метод Рунге-Кутты 4 порядка, описание алгоритма которого может быть найдено в учебниках [1], [6] или [8]. Шаг интегрирования для этого метода подбирался таким образом, чтобы отклонение полученного в предыдущей главе интеграла (8) было меньше 1 процента.

Начальные условия подбираются таким образом, чтобы движение тела-точки в поле с $\underline{E} = \underline{H} = 0$ представляло из себя движение по спирали, ось которой направлена вдоль оси Y , а радиус спирали много меньше проходимого расстояния вдоль той же оси Y .

Более точно, решение для движения тела-точки в отсутствии внешних сил согласно [3] будет иметь вид

$$\underline{r} = \frac{v(mJ - B^2)|\underline{e} \times \underline{e}_0|}{BK_1}(\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) + vt(\underline{e} \cdot \underline{e}_0)\underline{e}_3, \quad (10)$$

где K_1 , v – модули количества движения и скорости в начальный момент времени. $\underline{e} = \frac{\underline{K}_1}{K_1}$, $\underline{e}_0 = \frac{v^{(0)}}{v}$, $\underline{e}_3 = \underline{e}$, $\underline{e}_1 = \frac{\underline{e} \times \underline{e}_0}{|\underline{e} \times \underline{e}_0|}$, а α есть некоторая линейная функция от времени t .

Из формулы (10) следует, что ось спирали, по которой движется тела-точка будет совпадает с \underline{e}_3 . Это означает, что \underline{K}_1 должно быть параллельно оси Y . Отсюда получаем условие на угловые скорости

$$\omega_x^{(0)} = -\frac{m}{B}v_x^{(0)}, \quad \omega_z^{(0)} = -\frac{m}{B}v_z^{(0)}. \quad (11)$$

Также из явной формулы замечаем, что радиус спирали равен

$$R = \frac{v(mJ - B^2)}{BK_1} |\underline{e} \times \underline{e}_0|.$$

Тогда

$$R \leq \frac{v(mJ - B^2)}{BK_1}.$$

В данной главе начальные параметры подбираются таким образом, чтобы безразмерная величина

$$\frac{mv}{K_1} \quad (12)$$

была много меньше 1.

В дальнейшем во всех полученных решениях принимаются ограничения (11), (12).

Учитывая выражение (11), основные уравнения немного упрощаются

$$\begin{cases} \dot{v}_x \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - qH[v_y r_y + v_z r_z] - v_z(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)}) + \frac{qJ}{B} E = 0, \\ \dot{v}_y \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] + \frac{qJ}{B} H v_z + qt E v_z + qH r_y v_x = 0, \\ \dot{v}_z \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - \frac{qJ}{B} H v_y - qt E v_y + qH r_z v_x + v_x(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)}) = 0. \end{cases}$$

2.2. Результаты численного расчёта

В программе Matlab были получены численные решения. Рассмотрим два отдельных случая $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y > 0$ и $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y < 0$. Здесь \underline{e}_y – орт, сонаправленный с осью Y .

2.2.1. Результаты в случае $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y > 0$

Вначале рассмотрим движение тела-точки без \underline{H} . Параметры расчёта

- $v_z^{(0)} = 1$ м/с, $v_x^{(0)} = v_y^{(0)} = 10$ м/с,
- $\omega_y^{(0)} = 10^3$ рад/с, $q = -1$ Кл, $m = 1$ кг,
- $B = \frac{1}{2}$ кг · м, $J = 1$ кг · м², $E = 100$ Н/Кл, $H = 0$ Тл.

Результаты изображены на рисунках 1 и 2.

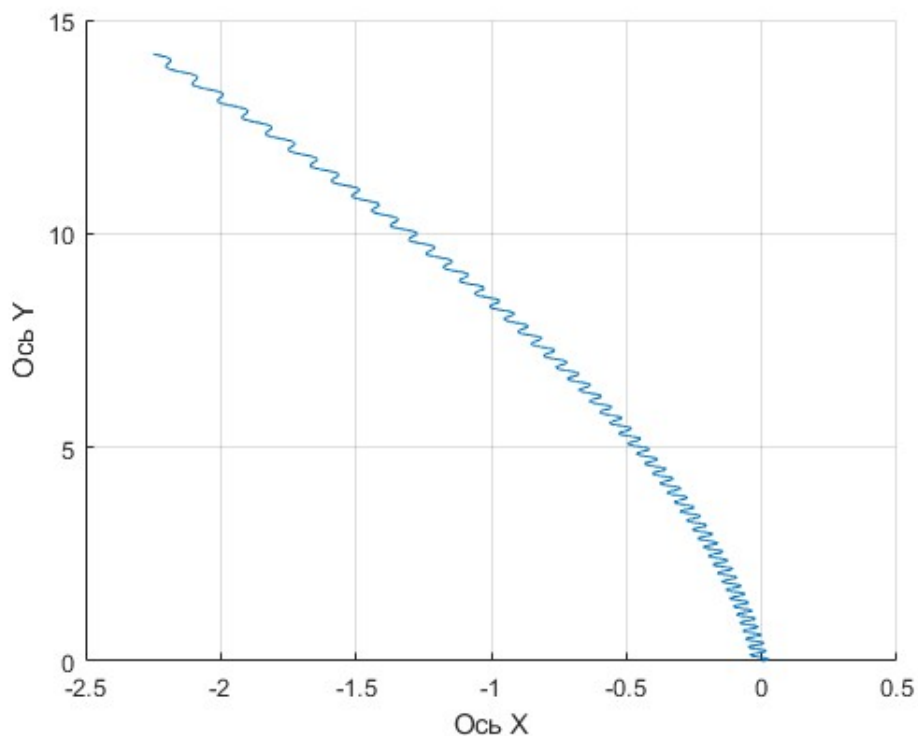


Рис. 1: Траектория тела-точки при $\underline{H} = 0$, проекция на плоскость XY

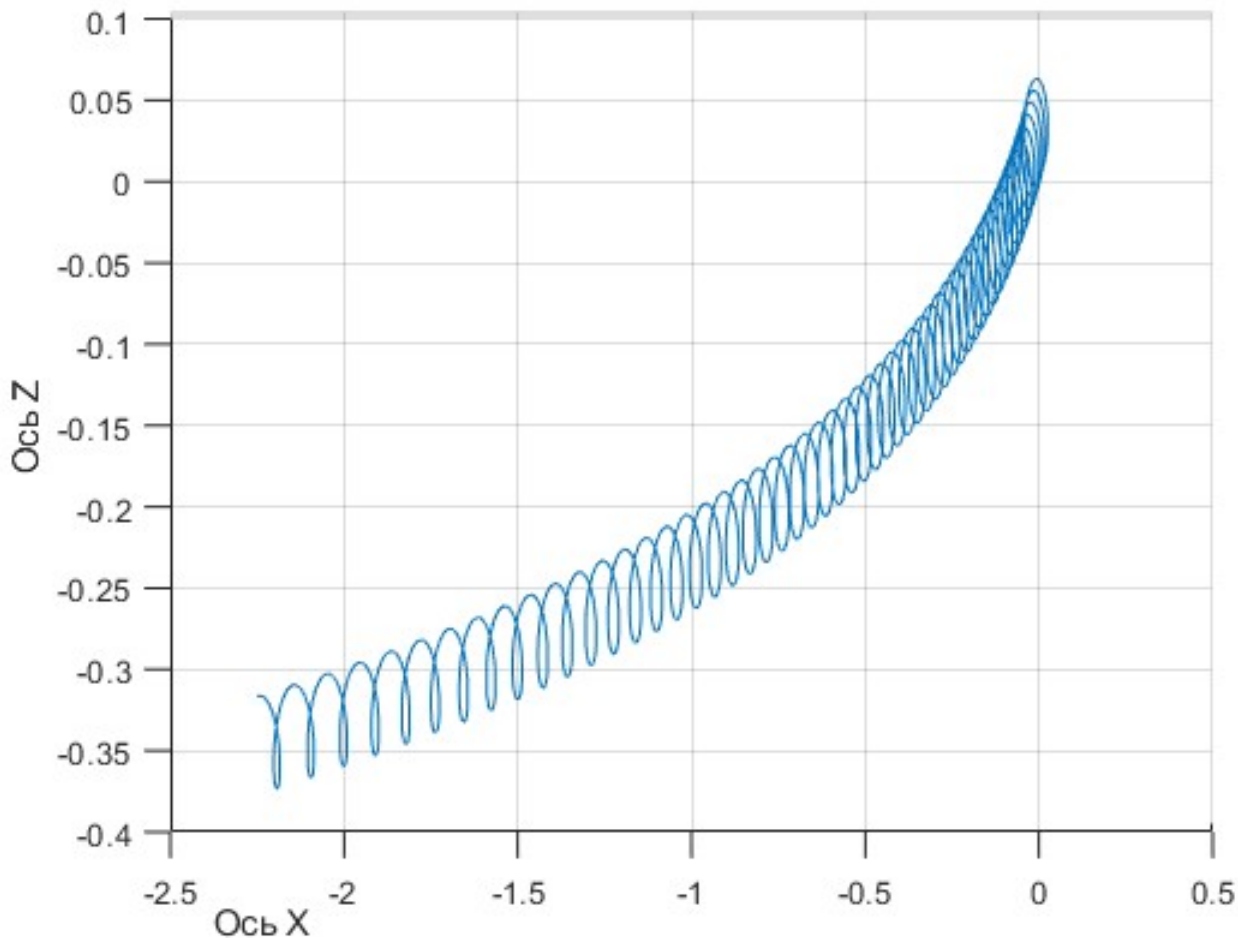


Рис. 2: Траектория тела-точки при $\underline{H} = 0$, проекция на плоскость XZ

Из рисунков 1, 2 можно сделать следующие выводы

- При появлении ненулевого вектора напряженности \underline{E} , отрицательно заряженная тело-точка также как и обычная частица начинает отклоняться по оси X в сторону, противоположную вектору \underline{E} .
- Из рисунка 2 видно, что шаг спирали, по которой движется тело-точка увеличивается. Это означает, что под действием силы напряженности \underline{E} , скорость тела-точки увеличивается.
- В отличие от обычной материальной частицы, тело-точка отклоняется вдоль

оси Z . Этот феномен можно объяснить наличием слагаемого вида $v_x(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)})$ в выражении для \dot{v}_z . Действительно, как видно из рисунков, скорость v_x вдоль оси X уменьшается. Тогда получаем, что ускорение вдоль оси Z

$$\dot{v}_z = qtEv_y - v_x(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)})$$

может уменьшаться из-за второго слагаемого в правой части этого равенства.

Теперь рассмотрим случай, когда как \underline{E} , так и \underline{H} не равно 0. Параметры расчёта такие же, как и в прошлом случае, за исключением H , которое в данном случае берётся равным $H = 100$ Тл

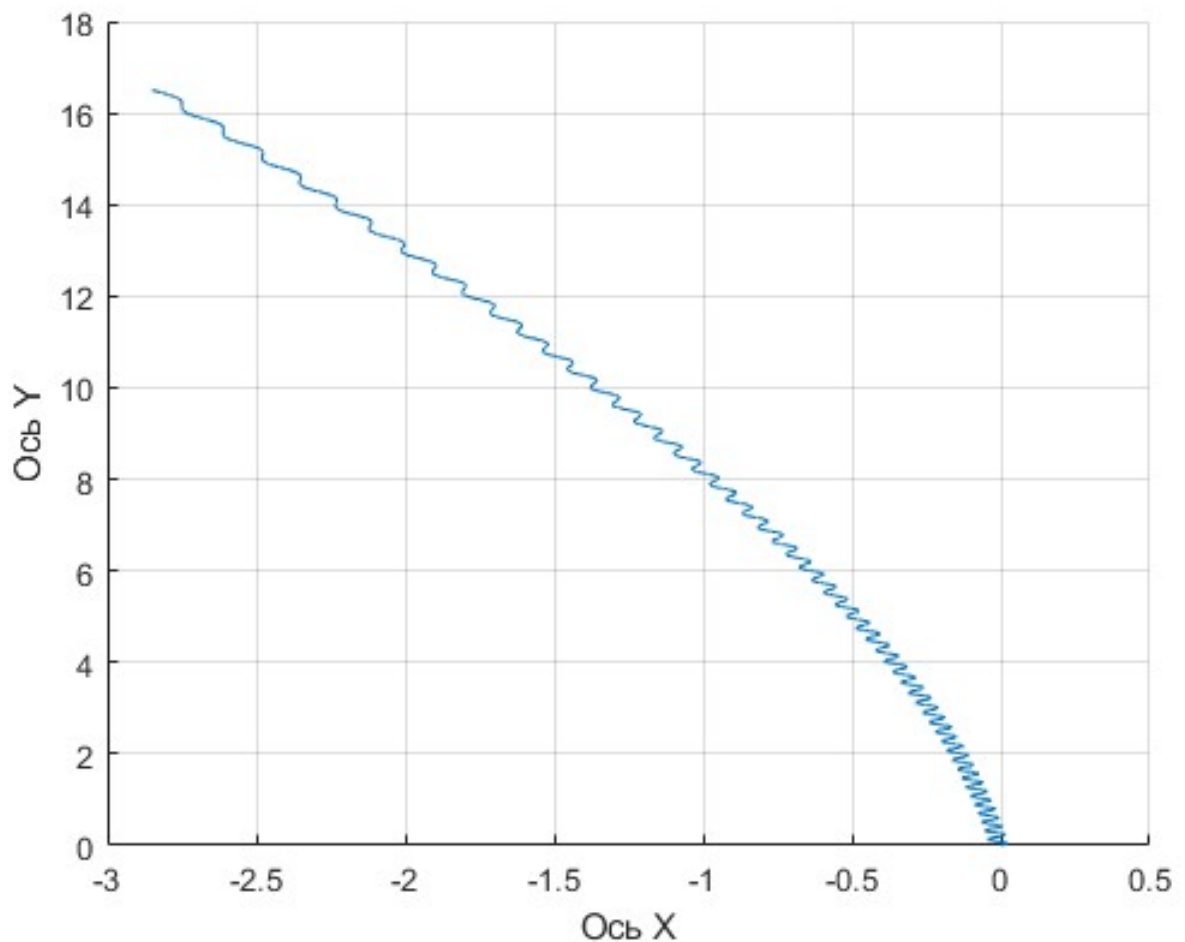


Рис. 3: Траектория тела-точки при $\underline{E} \neq 0$, $\underline{H} \neq 0$, проекция на плоскость XY

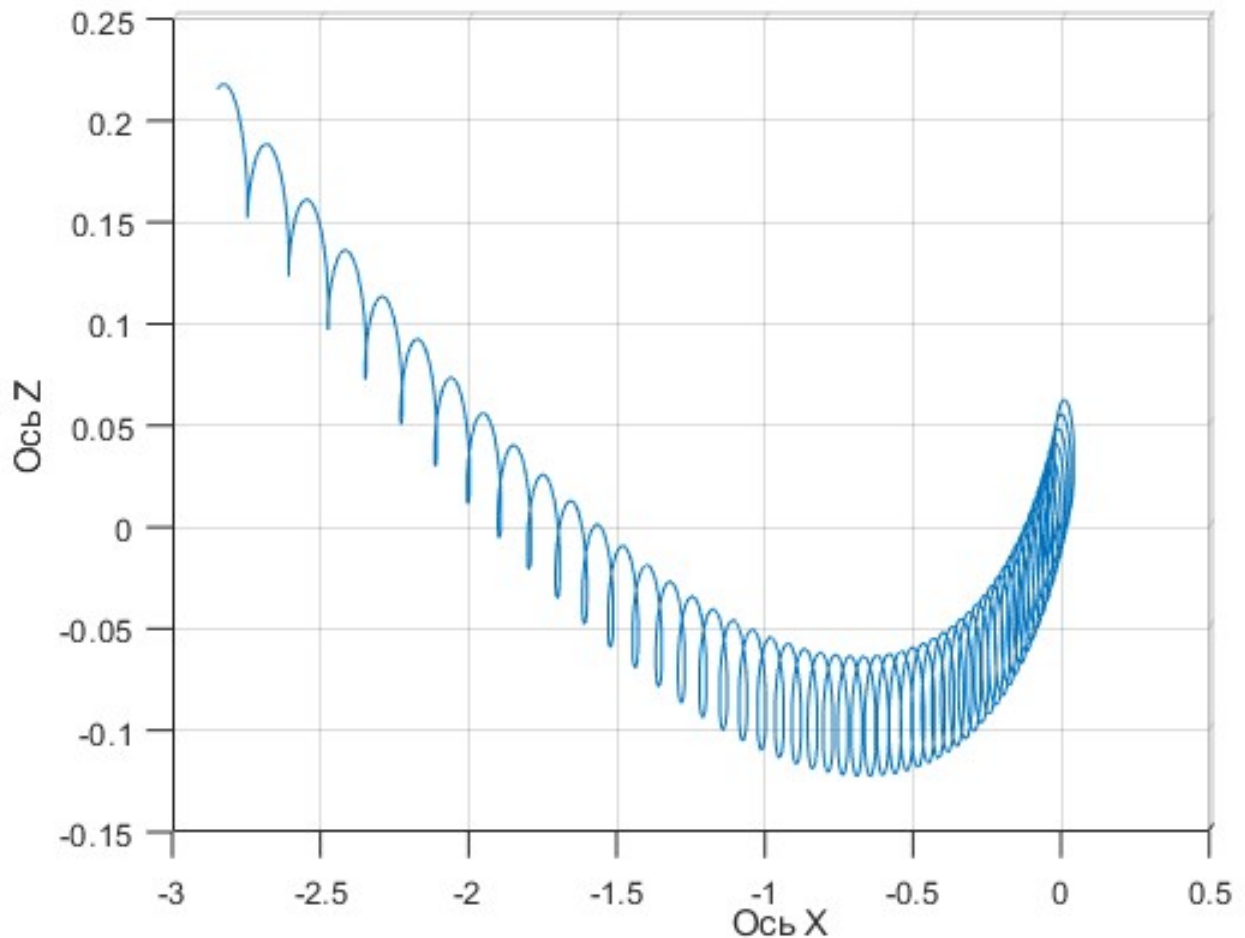


Рис. 4: Траектория тела-точки при $\underline{E} \neq 0$, $\underline{H} \neq 0$, проекция на плоскость XZ

Из рисунков 3, 4 можно сделать некоторые выводы

- Также, как и в случае отсутствия магнитной индукции, тело-точка отклоняется вдоль оси X в сторону, противоположную вектору напряженности \underline{E} .
- Также, как и в случае движения материальной частицы, тело-точка под действием магнитной индукции \underline{H} начинает отклоняться по направлению оси Z в отрицательную сторону.
- Также как и в случае электромагнитного поля с $\underline{H} = 0$, тело-точка начинает отклоняться в отрицательную сторону по оси Z . С увеличением времени

тело-точка под действием магнитной индукции начинает лететь вверх.

Приведём также полученное численное решение при магнитной индукции \underline{H} , равной \underline{E} . Более точно, параметры расчёта будут равны

- $v_z^{(0)} = 1$ м/с, $v_x^{(0)} = v_y^{(0)} = 10$ м/с,
- $\omega_y^{(0)} = 10^3$ рад/с, $q = -1$ Кл, $m = 1$ кг,
- $B = \frac{1}{2}$ кг · м, $J = 1$ кг · м², $E = 100$ Н/Кл, $H = 100$ Тл.

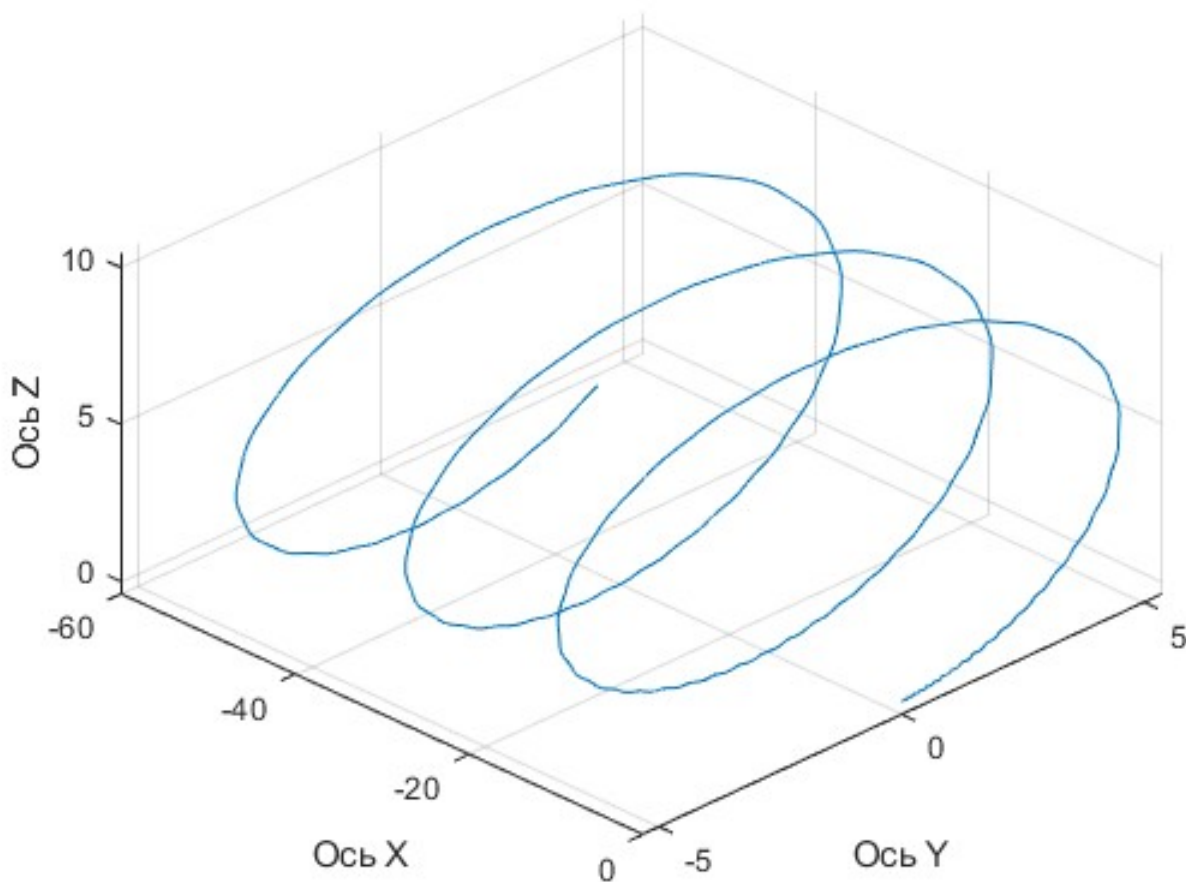


Рис. 5: Траектория тела-точки при $\underline{E} = \underline{H} \neq 0$

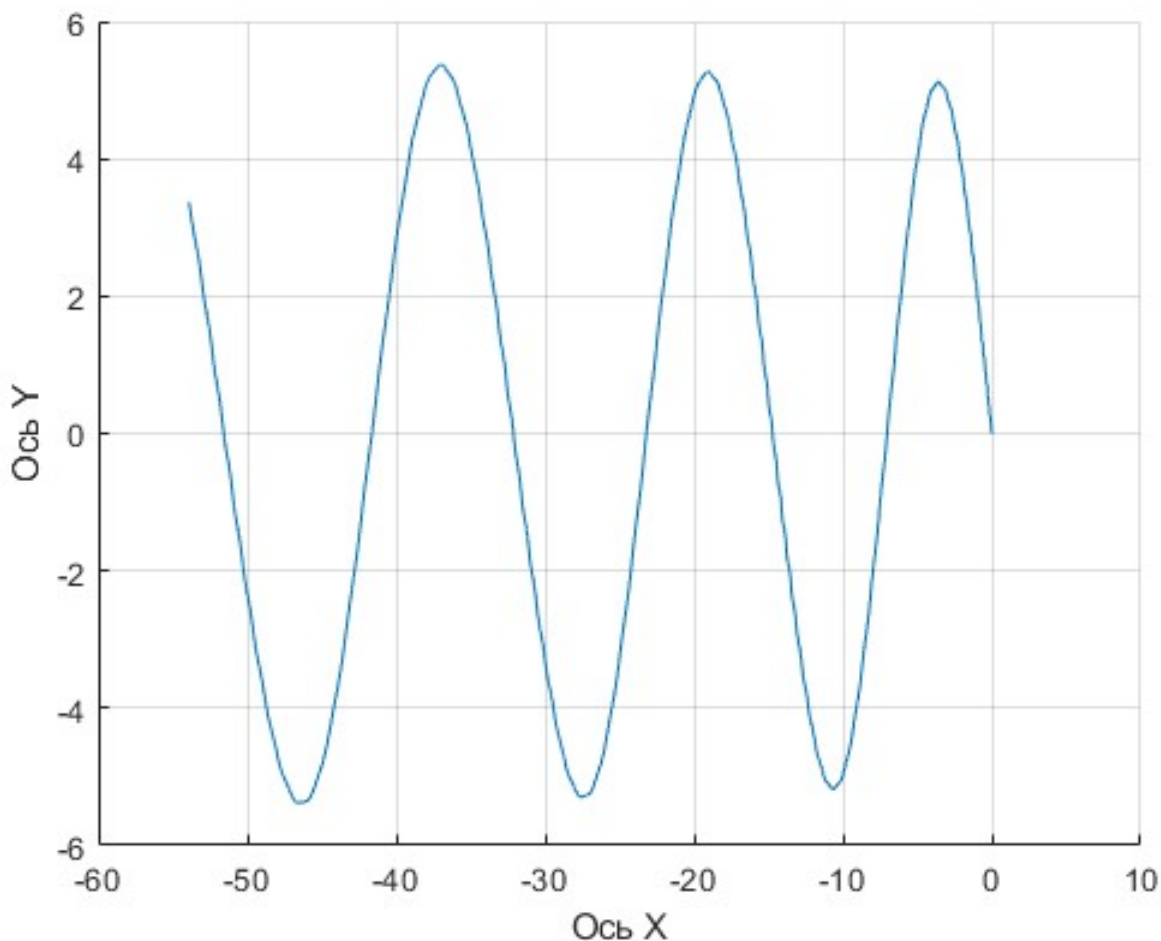


Рис. 6: Траектория тела-точки при $\underline{E} = \underline{H} \neq 0$, проекция на плоскость XY

Как известно, движение материальной точки под действием постоянных \underline{E} и \underline{H} с будет представлять из себя движение по винтовой линии [7]. Из рисунков 5, 6 заключаем, что движение тело-точки схоже с движением материальной частицы в том смысле, что тело-точка начинает двигаться по спирали, ось которой сонаправлена с осью X . Тем не менее, в траектории тела-точки присутствуют малые отклонения от траектории материальной точки.

2.2.2. Результаты в случае $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y < 0$

В этом разделе рассматриваются численные решения для случая

$$\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y < 0.$$

Сначала представим полученные решения на рисунках 7 и 8 при следующих параметрах

- $v_z^{(0)} = 1$ м/с, $v_x^{(0)} = v_y^{(0)} = 10$ м/с,
- $\omega_y^{(0)} = -10^3$ рад/с, $q = -1$ Кл, $m = 1$ кг,
- $B = \frac{1}{2}$ кг · м, $J = 1$ кг · м², $E = 100$ Н/Кл, $H = 0$ Тл.

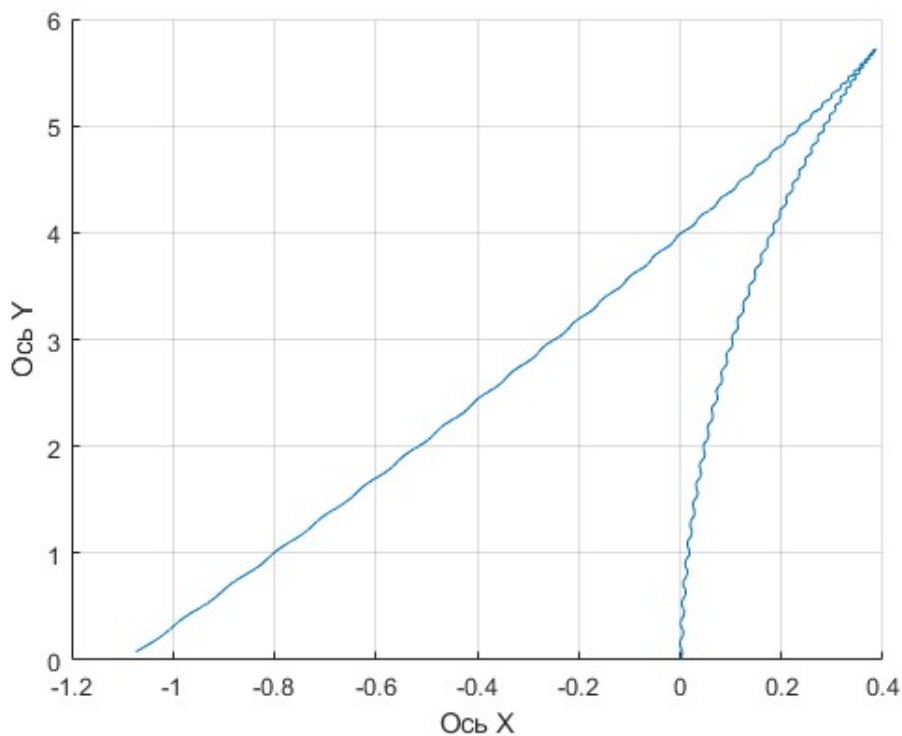


Рис. 7: Траектория тела-точки при $\underline{H} = 0$, проекция на плоскость XY

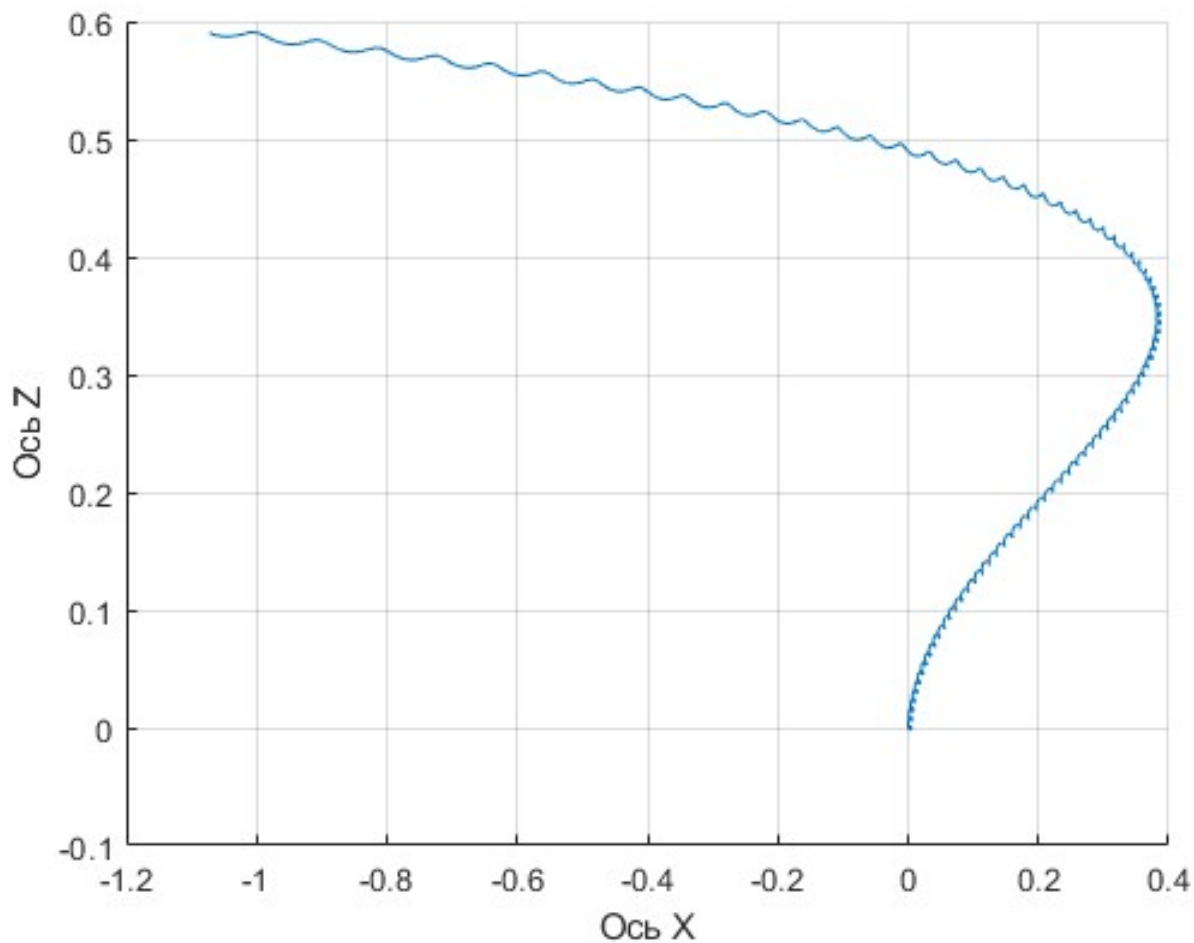


Рис. 8: Траектория тела-точки при $\underline{H} = 0$, проекция на плоскость XZ

Из рисунков 7, 8 можно сделать нижеследующие выводы

- При $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y < 0$ тело-точка может при малых временах отклоняться на некоторое расстояние L вдоль оси X по направлению вектора напряженности \underline{E} . На расстояние L в первой главе была получена оценка сверху.

Например в данном случае получаем оценку

$$L \leq 0,4.$$

. Из рисунка 8 видно, что эта оценка выполняется.

- При увеличении времени, как и следовало ожидать, частица начинает отклоняться против направленности \underline{E} .
- В отличие от предыдущего случая, скорость тела-точки по оси Y в некоторый момент становится отрицательной.

При тех же условиях и ненулевом векторе магнитной индукции, получим, что при увеличении времени тело-точка начинает подобно материальной частице двигаться по спирали, ось которой сонаправлена с осью X . Тем не менее, тело-точка в отличие от материальной частицы будет закручиваться по спирали в другую сторону. Пример такого движения изображен на рисунке 9. Таким образом, перекрестное слагаемое в выражении для кинетической энергии влияет на траекторию не только локально (небольшие флуктуации, отличие движения при малых временах), но и глобально (изменение направления вращения на противоположный)

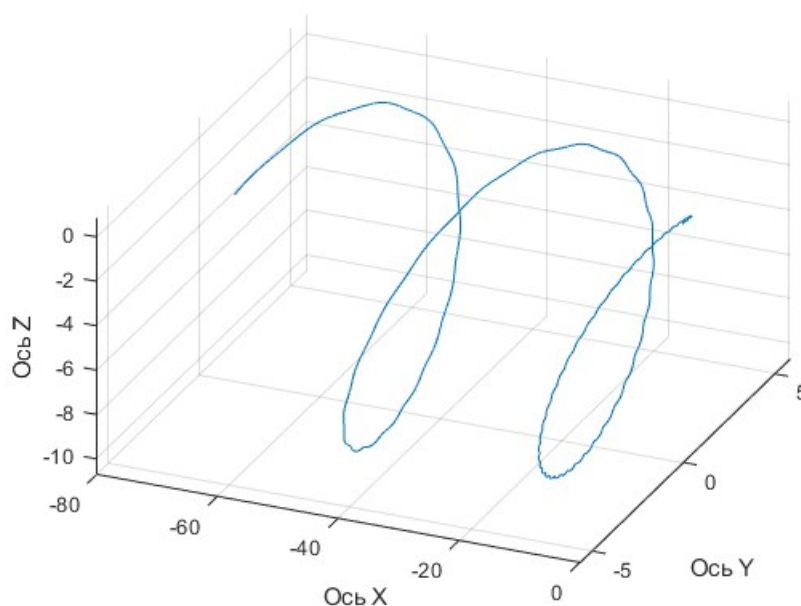


Рис. 9: Траектория тела-точки при $\underline{E} = \underline{H} \neq 0$

ГЛАВА 3. СРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ И ЭЛЕКТРОНА

3.1. Определение параметров тела-точки и начальных условий

В качестве модели электрона рассматривается заряженный шар с зарядом $q = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой, равной массе электрона в покое $m \approx 10^{-30}$ кг. В качестве радиуса рассматривается классический радиус электрона.

В этом случае момент инерции электрона будет равен моменту инерции шара с радиусом R , равному классическому радиусу электрона [15], равный $R \approx 2.818 \cdot 10^{-15}$ м

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

$\omega_y^{(0)}$ подбирается таким, чтобы слагаемые с угловой скоростью в системе (ссылка на систему) были сравнимы с остальными слагаемыми.

B подбирается из условия положительной определенности кинетической энергии K

$$mJ - B^2 > 0.$$

Начальные скорости по осям X и Z подбираются так, чтобы радиус спирали, по которой движется тело-точка без внешних сил, был много меньше проходимого расстояния. Напоминаем, что радиус этой спирали даётся следующей формулой

$$R = \frac{v(mJ - B^2)}{K_1 B} |\underline{e} \times \underline{e}_0|,$$

где $\underline{e} = \frac{K_1}{K_1}$, $\underline{e}_0 = \frac{v^{(0)}}{v}$.

Воспользовавшись определением векторов \underline{e} и \underline{e}_0 , получим

$$R = \frac{mJ - B^2}{K_1^2 B} |K_1 \times \underline{v}^{(0)}| = \frac{mJ - B^2}{K_1^2 B} B |\underline{\omega}^{(0)} \times \underline{v}^{(0)}| = \frac{mJ - B^2}{K_1^2} |\underline{\omega}^{(0)} \times \underline{v}^{(0)}|.$$

Из выражения (ссылка на выражении) получаем оценку

$$R \leq \frac{mJ - B^2}{K_1^2} |\underline{\omega}^{(0)}| \cdot |\underline{v}^{(0)}| = \frac{(mJ - B^2)v}{(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)})^2} |\underline{\omega}^{(0)}|.$$

Из условия на $\omega_y^{(0)}$, описанного выше, следует, что $\omega_y^{(0)}$ много меньше $\omega_x^{(0)}$ и $\omega_z^{(0)}$. Учитывая это замечание, получаем

$$R \leq \frac{(mJ - B^2)v}{(mv_y^{(0)})^2} \sqrt{\frac{m^2}{B^2} ((v_x^{(0)})^2 + (v_z^{(0)})^2)}.$$

Предположим, что $v_x^{(0)} = v_z^{(0)} = kv_y^{(0)}$, где k – некоторый коэффициент.

$$R \leq \frac{(mJ - B^2)v}{mB(v_y^{(0)})^2} \sqrt{(v_x^{(0)})^2 + (v_z^{(0)})^2} = \frac{(mJ - B^2)v}{mB(v_y^{(0)})^2} k\sqrt{2}v_y^{(0)}.$$

Коэффициент k будем брать меньше 1. При таком условии получим оценку на v

$$v \leq \sqrt{3}v_y^{(0)}.$$

Тогда

$$R \leq \frac{mJ - B^2}{mB} \sqrt{6}k.$$

Для численных решений коэффициент k брался равным 10^{-8} .

В качестве $v_y^{(0)}$ берутся значения порядка $10^7 - 10^8$ м/с.

Начальные угловые скорости вдоль осей X и Z подчиняются условию (11)

$$\omega_x^{(0)} = -\frac{m}{B}v_x^{(0)}, \quad \omega_z^{(0)} = -\frac{m}{B}v_z^{(0)}.$$

3.2. Обезразмеривание уравнений

При ограничениях, принятых в прошлом пункте, коэффициенты системы уравнений (2) принимают значения порядка $10^{15} - 10^{20}$. При таких значениях коэффициентов используемые численные методы расходятся. Для исправления этой проблемы можно обезразмерить уравнения, согласно [9].

Напоминаем основные уравнения движения тела-точки

$$\begin{cases} \dot{v}_x \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - qH[v_y r_y + v_z r_z] - v_z(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)}) + \frac{qJ}{B}E = 0, \\ \dot{v}_y \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] + \frac{qJ}{B}Hv_z + qtEv_z + qHr_y v_x = 0, \\ \dot{v}_z \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - \frac{qJ}{B}Hv_y - qtEv_y + qHr_z v_x + v_x(mv_y^{(0)} + B\omega_y^{(0)}) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Обозначим за L некоторую характерную длину, а за T – некоторое характерное время. Перейдём к новым безразмерным переменным

$$\tilde{r} = \frac{r}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}.$$

Тогда система уравнений (13) в новых безразмерных переменных примет вид

$$\begin{cases} \frac{L}{T^2} \tilde{v}'_x \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - qH \frac{L_2}{T} (\tilde{v}_y \tilde{r}_y + \tilde{v}_z \tilde{r}_z) - \frac{L^2}{T^2} m \tilde{v}_z \tilde{v}_y^{(0)} - \frac{L}{T} \tilde{v}_z \omega_y^{(0)} + \frac{qJ}{B}E = 0, \\ \frac{L}{T^2} \tilde{v}'_y \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] + \frac{qJH}{B} \frac{L}{T} \tilde{v}_z + qLEt \tilde{v}_z + qH \frac{L^2}{T} \tilde{r}_y \tilde{v}_x = 0, \\ \frac{L}{T^2} \tilde{v}'_z \left[\frac{B^2 - mJ}{B} \right] - \frac{qJH}{B} \frac{L}{T} \tilde{v}_y - qELt \tilde{v}_y + qH \frac{L^2}{T} \tilde{r}_z \tilde{v}_x + m \frac{L^2}{T^2} \tilde{v}_y^{(0)} \tilde{v}_x + \frac{L}{T} \tilde{v}_x B \omega_y^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

В системе (14) штрихом обозначена производная по \tilde{t} . Поделив выражения системы (14) на коэффициент, стоящий перед первым слагаемым, получим

$$\begin{cases} \tilde{v}'_x - \frac{qHB}{B^2 - mJ} LT (\tilde{v}_y \tilde{r}_y + \tilde{v}_z \tilde{r}_z) - \frac{m \tilde{v}_y^{(0)} B \tilde{v}_z}{B^2 - mJ} - \frac{\tilde{v}_z \omega_y^{(0)}}{B^2 - mJ} T + \frac{qJE}{B^2 - mJ} \frac{T^2}{L} = 0, \\ \tilde{v}'_y + \frac{qJH}{B^2 - mJ} \tilde{v}_z T + \frac{qEt \tilde{v}_z B}{B^2 - mJ} T^2 + \frac{qHB}{B^2 - mJ} LT \tilde{r}_y \tilde{v}_x = 0, \\ \tilde{v}'_z - \frac{qJH}{B^2 - mJ} \tilde{v}_y T - \frac{qEt \tilde{v}_y B}{B^2 - mJ} T^2 + \frac{qH \tilde{r}_z \tilde{v}_x}{B^2 - mJ} LT + \frac{mB \tilde{v}_x \tilde{v}_y^{(0)}}{B^2 - mJ} L + \frac{\tilde{v}_x \omega_y^{(0)}}{B^2 - mJ} T = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Параметры T и L в численных решениях берутся равными $T = L$ и такими, чтобы коэффициенты в системе (15) были порядка $10^0 - 10^2$.

3.3. Результаты численного решения

В Matlab была численно проинтегрирована система (ссылка на систему) методом Рунге-Кутты 4 порядка. Параметры расчёта

- $v_y^{(0)} = 10^8$ м/с,
- $v_x^{(0)} = v_z^{(0)} = k \cdot v_y^{(0)}$, где $k = 10^{-8}$,
- $E = 10^8$ Кл, $H = 10^8$ Тл,
- $\omega_y^{(0)} = 10^{-70}$ рад/с,
- $m = 10^{-30}$ кг, $J = 3.17 \cdot 10^{-60}$ кг · м²,
- $L = 10^{-24}$ м, $T = 10^{-24}$ с.

При численном решении варьируется параметр C , равный B^2/mJ . Полученные решения изображены на рисунках 10, 11

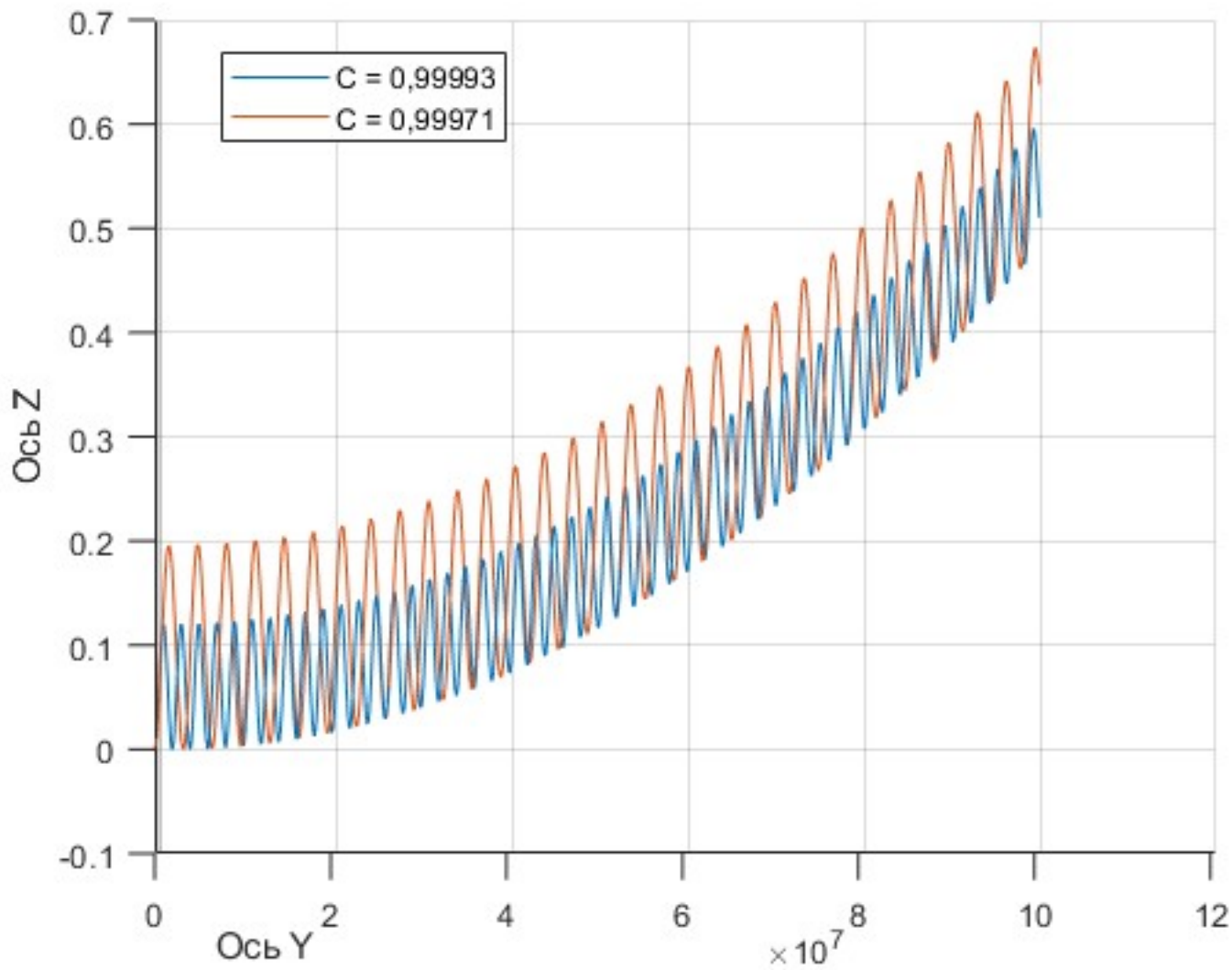


Рис. 10: Траектория тела-точки, проекция на плоскость YZ

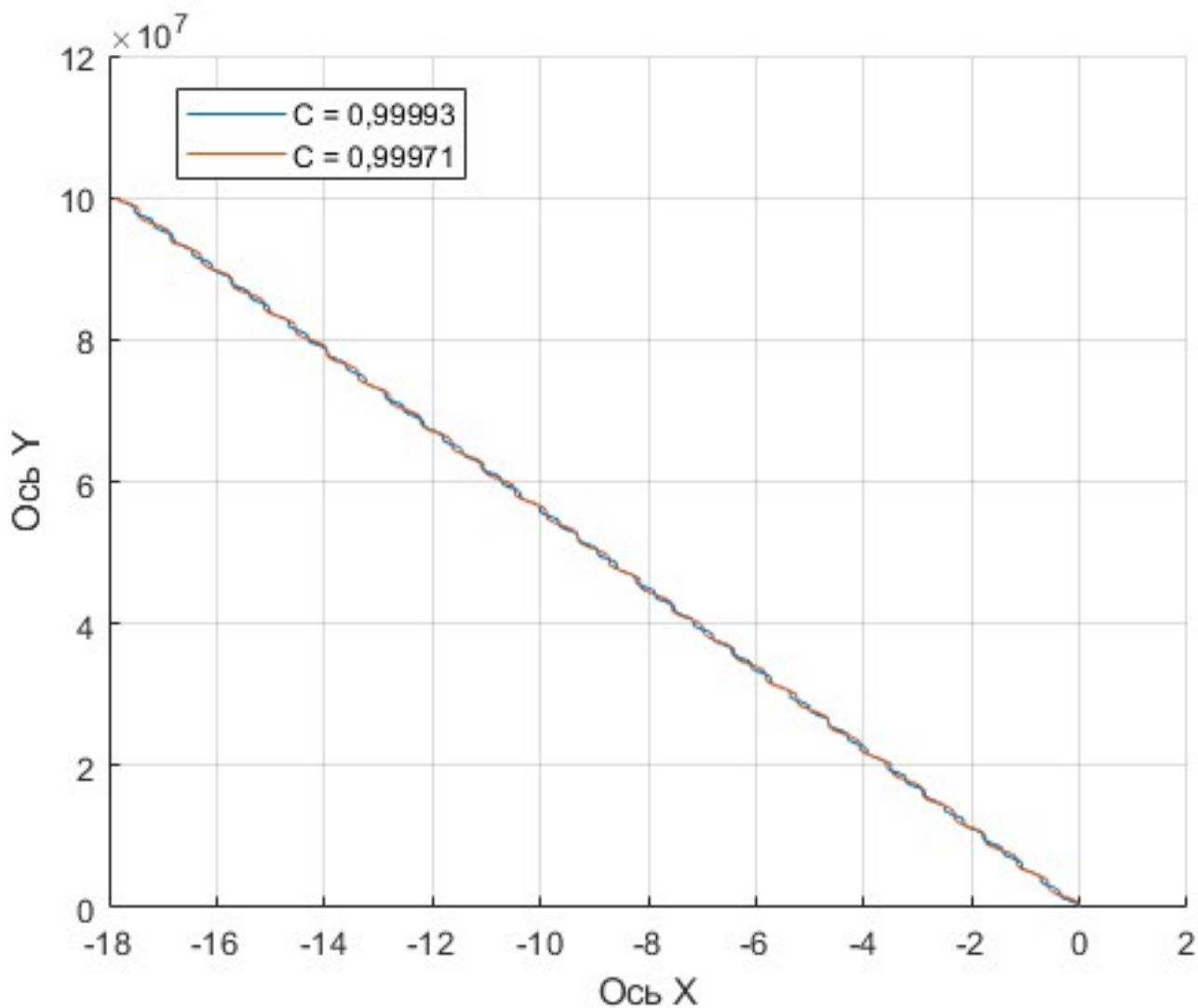


Рис. 11: Траектория тела-точки, проекция на плоскость XU

Из рисунков выше следует, что

- При уменьшении отношения B^2 к mJ радиус спирали увеличивается, как следует из явной формулы (ссылка на формула). Причём это стремление крайне быстрое. Из рисунка (номер рисунка) видно, что отклонение C порядка 0,0002 увеличивает радиус спирали траектории тела-точки примерно в полтора раза.
- Отклонение траектории тела-точки от траектории материальной частицы вдоль осей X и Y много меньше отклонения вдоль оси Z .

Также были получены зависимости компонент r_x , r_z при фиксированном r_y от начальной скорости по оси Y . Параметры расчёта такие же, как и в прошлом случае и $r_y = 10^7 \cdot L$.

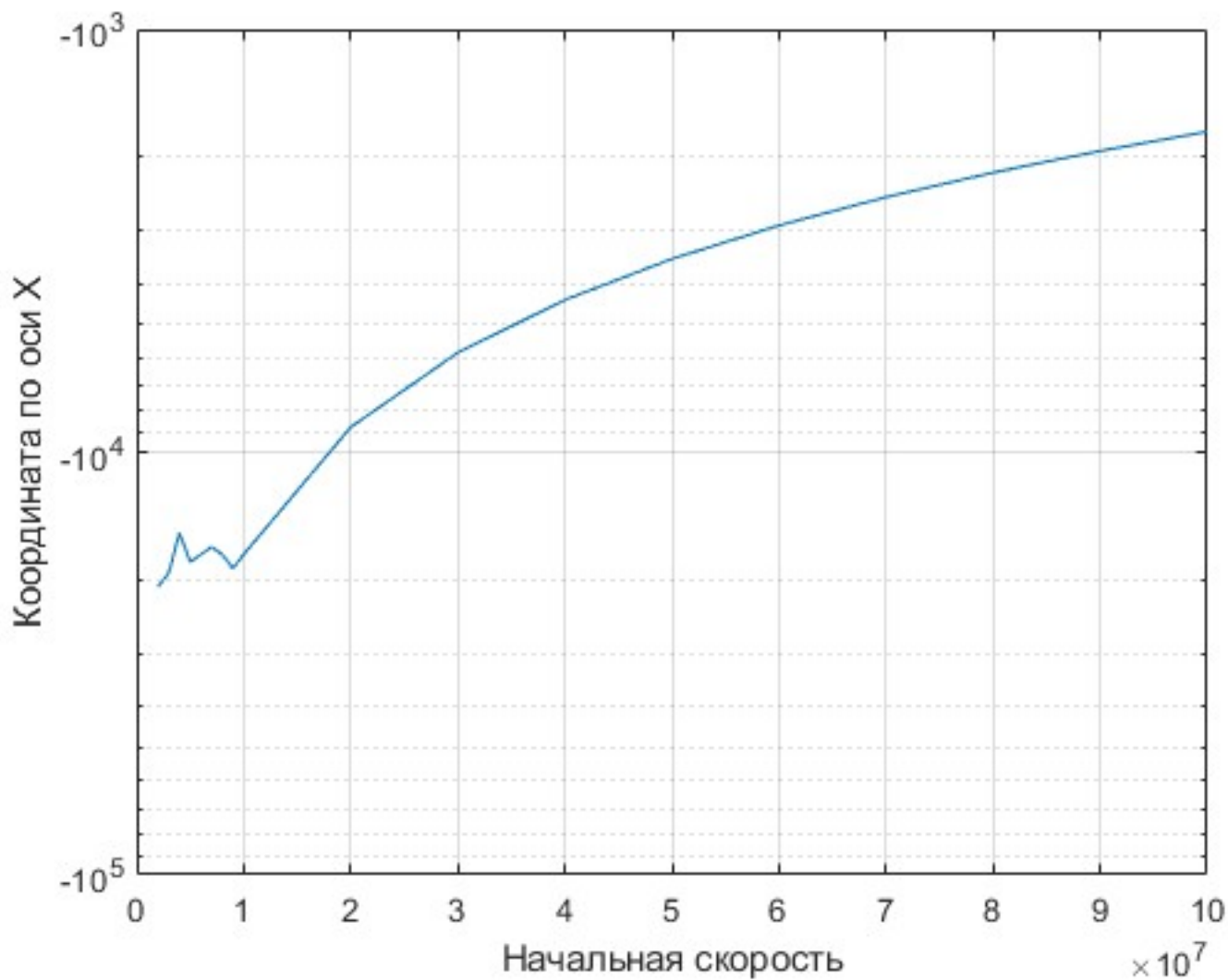


Рис. 12: Зависимость r_x при $r_y = const$ от начальной скорости

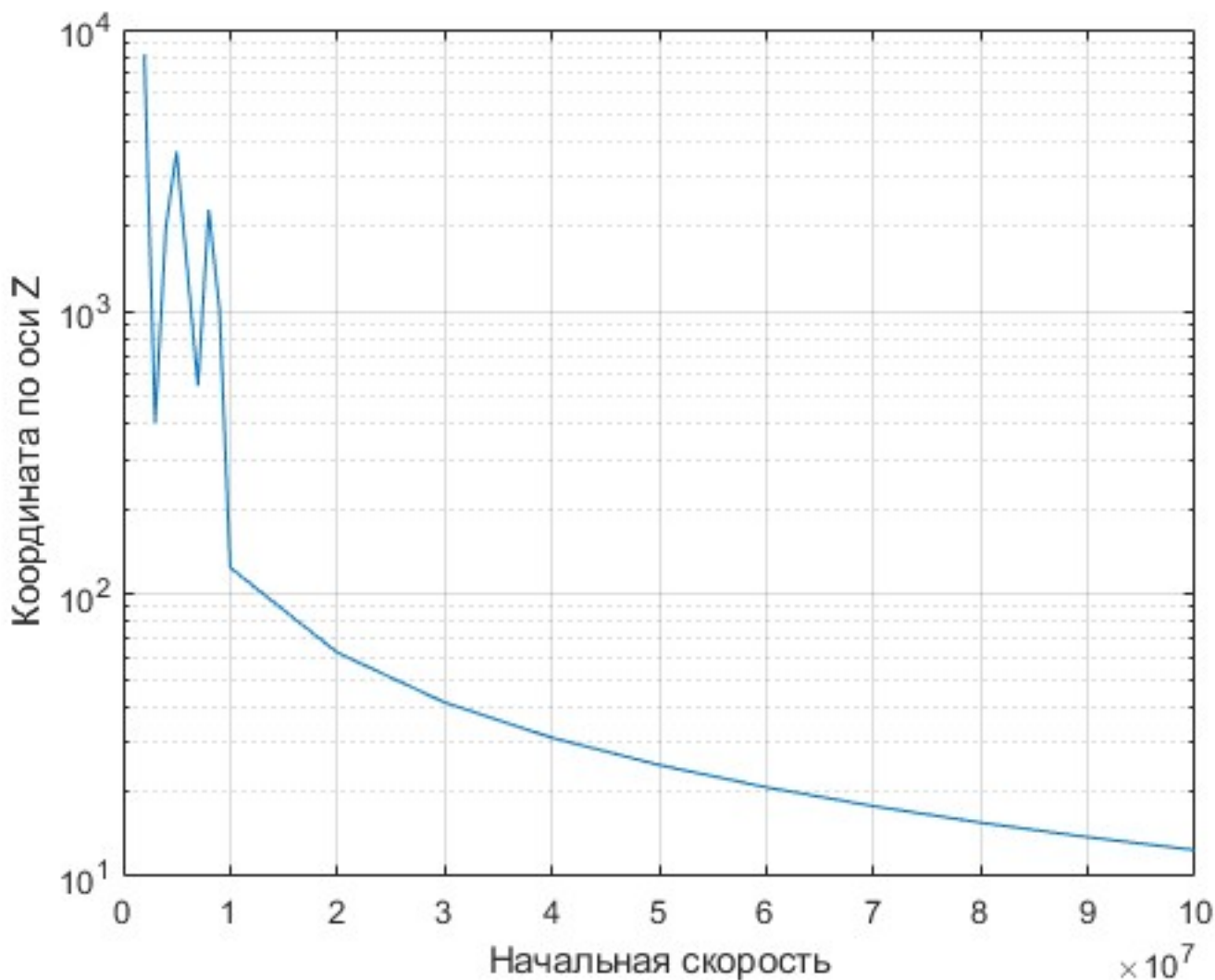


Рис. 13: Зависимость r_z при $r_y = const$ от начальной скорости

Из рисунков 12, 13 можно сделать следующие выводы

- Как и следовало ожидать, при увеличении начальной скорости $v_y^{(0)}$, координаты по оси Z и X уменьшаются по модулю.
- При небольших скоростях наблюдаются резкие скачки изменения обеих координат. Это можно объяснить спиралевидной траекторией тела-точки. При малых скоростях тело-точка может успеть достаточно сильно отклониться от движения материальной частицы. Это отклонение δ , согласно рисунку 10, но-

сит синусоидальный характер. Отсюда следует, что при относительно небольшом изменении начальной скорости $v_y^{(0)}$ отклонение тела-точки от траектории материальной частицы может сильно измениться. Из рисунков (10) и (11) видно, что отклонение δ по оси Z больше отклонения по оси X . Это наблюдение объясняет, почему скачки на графике (13) более резкие, чем на графике (12).

- Начиная с некоторых начальных скоростей $v_y^{(0)}$, отклонения, зависимость координаты по оси Z и X от начальной скорости становится более гладкой. Это можно объяснить тем, что при больших скоростях отклонение δ , введенное в прошлом пункте, не слишком сильно меняется: тело-точка просто не успевает долететь до точек траектории, где синусоидальный характер δ становится значимым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы были получены как аналитические, так и численные результаты.

В качестве аналитических результатов было сделано следующее

- Система из 6 уравнений на трансляционную и угловую скорость сведена к эквивалентной системе из 3 дифференциальных уравнений, в которой участвует только трансляционная скорость.
- Был получен первый интеграл движения тела-точки и оценка на отклонение тела-точки вдоль оси, сонаправленной с направлением \underline{E} и \underline{H} .

Также в программе Matlab были получены численные решения с помощью явного метода Рунге-Кутты 4 порядка. Шаг интегрирования подбирался таким образом, чтобы найденный первый интеграл системы отклонялся от постоянного значения не более чем на 1 процент.

Численные решения рассматривались для абстрактной тело-точки и тело-точки, чьи инерционные параметры были приближены к соответствующим параметрам у электрона. При изучении численных решений были сделаны следующие выводы.

- Движение тела-точки качественно разнится в зависимости от знака выражения $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y$. При положительности этого выражения движение тела-точки ведёт себя очень похоже на обычную материальную частица. Но при $\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_y < 0$ возможны эффекты, которые сильно отличают движение тела-точки от материальной частицы.
- Движение тела-точки с инерционными характеристиками такими же как у электрона сильно меняется при изменении безразмерного параметра $C = \frac{B^2}{mJ}$. При C , близким к 1, движение имеет спиралевидный характер и явно

отличается от движения материальной частицы. Однако уже при C меньших 0.8 полученные численные решения на рассматриваемых временах отличаются незначительно от движения материальной точки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов/В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. Вильчевская Е. Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ: учеб. пособие. -СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. -44 с.
3. Жилин П. А. Динамика твердого тела: учебное пособие. -СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. -560 с.
4. Жилин П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: Учеб, пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 340с.
5. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред: учеб, пособие, — СПб.: Изд-во Политехи, ун-та, 2012. — 584 с
6. Коплатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. -М.: ИЛ, 1964
7. Шпольский Э.В. Атомная физика: Учебник для вузов, второе издание, 520 с.
8. Iserles, A. (2008). A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations (2nd ed., Cambridge Texts in Applied Mathematics)
9. Lemons, D. (2017). A Student’s Guide to Dimensional Analysis (Student’s Guides). Cambridge: Cambridge University Press.
10. Грекова Е. Ф., Жилин П.А. Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики. Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2000. — С. 25-41.
11. Grekova E. F. Ferromagnets and Kelvin’s medium: basic equations and wave processes. Journal of Computational Acoustics

12. Ivanova, E. (2020). Modeling of electrodynamic processes by means of mechanical analogies. ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics.

13. Kaufmann W. Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. Göttinger Nachrichten, 1901, (2): 143–168.

14. Цикра С.А. Анализ опытов Кауфмана с позиций классической электродинамики

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/10321.html>

15. Length Scales in Physics: the Classical Electron Radius.

http://math.ucr.edu/home/baez/lengths/classical_electron_radius