Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Н. Вильчевская

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2012

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Н. Вильчевская

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2012

УДК 539.3
ББК 22.251я73
Ф 86

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по науке
Института проблем машиноведения Российской академии наук
А.К. Беляев
Доктор физико-математических наук, профессор
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета
В.А. Пальмов

Вильчевская Е. Н. **Тензорная алгебра и тезорный анализ**: учеб. пособие / Е.Н. Вильчевская. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 4 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту и содержанию направления подготовки бакалавров, обучающихся по специальности 010900 «Прикладные математика и физика». Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по физико-математическим и техническим специальностям.

В учебном пособии на языке прямого (бескоординатного) тензорного исчисления, наиболее соответствующего потребностям современной механики, рассмотрены основы тензорной алгебры, теории тензорных функций и тензорного анализа. Приведены основные определения и теоремы тензорной алгебры и тензорного анализа, а также ряд полезных формул и тождеств, широко применяемых во многих курсах на физико-механическом факультете.

Ил.2. Библиогр.: 20 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Историческими предшественниками тензоров были векторы, матрицы и системы с индексами, использовавшиеся в алгебре, геометрии, теории поверхностей, механике и других областях науки. Операции над системами с индексами были весьма громоздки и требовали развития нового математического аппарата. К середине XIX в. Дж.У.Гибс создал векторную алгебру с операциями сложения, скалярного и векторного умножения, и векторный анализ — теорию дифференциального исчисления векторных полей. Вскоре Дж.Риччи обобщил векторное исчисление на системы с произвольным числом индексов. К середине XX в. тензорное исчисление развилось в эффективный математический аппарат, широко используемый в различных областях науки: в механике, дифференциальной геометрии, электродинамике, теории относительности и многих других. Более подробное описание истории развития тензорного исчисления можно найти, например, в [2, 3].

Теории тензоров посвящено большое число фундаментальных монографий и учебников (см. [1, 2, 7, 14, 17] и приведенную в них литературу). Не ставя перед собой задачи представления подробного обзора литературы, упомянем лишь работы [14, 16], знакомящие начинающих с основами тензорного исчисления; [11], описывающую применение тензорных методов в аналитической и дифференциальной геометрии, а также в динамике твердого тела, гидродинамике и теории электромагнитного поля; [20], в которой подробно описывается применение тензорного анализа в теории упругости и теории пластин и оболочек.

В настоящее время существует два основных подхода к изложению теории тензоров. При координатном подходе под тензором понимается матрица, компоненты которой преобразуются при переходе от одного координатного базиса к другому по определенным формулам (см., например, [8, 15]). При прямом подходе тензор рассматривается как элемент линейного пространства, полученного специальным перемножением векторных пространств. В этом случае никакие координатные системы не привлекаются к рассмотрению, а сами тензоры не зависят от выбора системы координат. В настоящее время во все большем числе книг по тензорной алгебре и анализу используется именно прямое тензорное исчисление [3,6,10,13]. От прямой записи тензора легко перейти к его координатному представлению, введя в пространстве тензоров базис. Таким образом, с чисто математической точки зрения оба подхода эквивалентны. Использование прямого подхода предоставляет возможность проводить большинство преобразований с помощью тождеств, записанных в инвариантной форме, что позволяет сделать выкладки более компактными.

Весь материал, приведенный в пособии, излагается с точки зрения прямого тензорного исчисления. В координатной форме записи используется только ортогональный базис, что позволяет избежать введения взаимного базиса, ковариантных и контрвариантных компонент тензора [9]. За пределами пособия остались также символы Кристоффеля второго рода и ковариантная производная, о которых можно прочитать, например, в [6], и тензоры Римана-Кристоффеля и Риччи.

Автор благодарит Е.А.Иванову за ценные замечания и помощь в подготовке пособия.

1. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определение тензора

Исходным объектом при построении прямого тензорного исчисления является векторное ориентированное пространство $\mathcal{T}_1$, элементами которого являются векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$..., (направленные отрезки). Формальное произведение векторов $\mathbf{ab}$ называется диадой. Отметим, что в литературе часто используется специальный знак для обозначения тензорного умножения $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, однако, в данном пособии он будет опущен. Термин "тензорное умножение" указывает на то, что данной операции присущи некоторые свойства обычной операции умножения.

Рассмотрим формальные суммы формальных произведений:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{ef} + ...$$

Элементы $\mathbf{A}$ называются тензорами второго ранга, если выполнены условия эквивалентности (α — скаляр)

$$\begin{aligned} &\mathbf{ab} + \mathbf{cd} = \mathbf{cd} + \mathbf{ab}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \\ &(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \qquad (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Важно отметить, что тензорное умножение некоммутативно, т.е. $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

На множестве тензоров второго ранга $\mathcal{T}_2$ вводятся линейные операции:

$$\begin{gathered} \mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{de} + \mathbf{gh}, \\ \mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{de} + \mathbf{gh}, \\ \alpha\mathbf{A} = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} + (\alpha\mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) + \mathbf{c}(\alpha\mathbf{d}). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Нулевым тензором второго ранга называется тензор $\mathbf{0} = \mathbf{oo}$, где $\mathbf{o}$ — нулевой вектор. Представив нулевой вектор в виде $\mathbf{o} = 0\mathbf{a}$, получим альтернативные представления нулевого тензора: $\mathbf{0} = \mathbf{oa} = \mathbf{ao}$. Введенное таким образом множество $\mathcal{T}_2$ является линейным пространством.

Формальная сумма формальных произведений трех векторов (триад): ${}^3\mathbf{A} = \mathbf{abc} + \mathbf{def} + ...$, для которой выполняются соответствующие соотношения эквивалентности, называется тензором третьего ранга. Линейные операции на множестве тензоров третьего ранга $\mathcal{T}_3$ вводятся аналогично (1.1.). Таким же образом вводятся тензоры более высоких рангов.

Тензором нулевого ранга является скаляр – объект, полностью определяемый заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат.

1.2. Тензорный базис. Координаты тензора

Введем в рассмотрение ортогональный нормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases},$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Если при взгляде с конца вектора $\mathbf{e}_3$ кратчайший поворот вектора $\mathbf{e}_1$ к вектору $\mathbf{e}_2$ происходит против часовой стрелки, то такая тройка векторов называется правой и $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$.

Любая диада $\mathbf{ab}$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{ab} = (a_m \mathbf{e}_m)(b_n \mathbf{e}_n) = a_m b_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n.$$

Здесь и далее в соответствии с правилом Эйнштейна проводится суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3.

Линейно независимые комбинации $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$ называются элементами тензорного базиса. Всякий тензор второго ранга может быть представлен в виде следующего разложения:

$$\mathbf{A} = A_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n, \qquad A_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n. \tag{1.2}$$

Величины A_{mn} называются координатами тензора относительно введенного тензорного базиса.

Утверждение. Любой тензор может быть представлен в виде суммы трех диад.

Действительно, сгруппировав слагаемые в (1.2), получим

$$\mathbf{A} = (A_{m1} \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_1 + (A_{m2} \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_2 + (A_{m3} \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{e}_3.$$

Отметим, что хотя любая диада является тензором второго ранга, произвольный тензор второго ранга может быть сведен к одной диаде только в исключительных случаях.

1.3. Умножение тензоров

Представим тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде: $\mathbf{A} = \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m$, $\mathbf{B} = \mathbf{d}_n \mathbf{f}_n$.

1. Скалярные умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}_m \left(\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{c}\right), \qquad \mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_m\right) \mathbf{b}_m.$$

Результат умножения — вектор.

2. Векторные умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}_m \left(\mathbf{b}_m \times \mathbf{c}\right), \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m\right) \mathbf{b}_m.$$

Результат умножения — тензор второго ранга.

3. Тензорные умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c}\mathbf{A} = \mathbf{c}\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m.$$

Результат умножения — тензор третьего ранга.

4. Скалярное умножение тензора на тензор:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \cdot (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n) \mathbf{a}_m \mathbf{f}_n.$$

Результат умножения — тензор второго ранга.

5. Векторное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \times (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = \mathbf{a}_m (\mathbf{b}_m \times \mathbf{d}_n) \mathbf{f}_n.$$

Результат умножения — тензор третьего ранга.

6. Тензорное умножение тензора на тензор: $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m \mathbf{d}_n \mathbf{f}_n$.
Результат умножения — тензор четвертого ранга.

7. Двойное скалярное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \cdot\cdot\, (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{f}_n).$$

Результат умножения — скаляр.

8. Двойное векторное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \times\times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \times\times (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \times \mathbf{d}_n)(\mathbf{a}_m \times \mathbf{f}_n).$$

Результат умножения — тензор второго ранга.

9. Скалярно-векторное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \cdot\!\times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \cdot\!\times (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{a}_m \times \mathbf{f}_n).$$

Результат умножения — вектор.

10. Векторно-скалярное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \times\!\cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \times\!\cdot (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{b}_m \times \mathbf{d}_n).$$

Результат умножения — вектор.

В заключение раздела отметим, что операции двойного умножения могут быть введены различными способами. Так, например, в книге [6] операция двойного скалярного умножения обозначается $\odot$ и считается, что первая операция умножения относится к первым векторам диад, а вторая – ко вторым: $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{f}_n)$.

1.4. Симметричный и антисимметричный тензоры

Транспонированным тензором $\mathbf{A}^T$, называется тензор, в котором изменен порядок сомножителей во всех диадах $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m)^T = \mathbf{b}_m \mathbf{a}_m$. Симметричным называется тензор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Возможно другое определение симметричного тензора. Тензор второго ранга симметричен, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$.

Антисимметричным называется тензор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, или иначе: тензор второго ранга антисимметричен, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}$.

Любой тензор второго ранга $\mathbf{A}$ допускает единственное представление в виде суммы его симметричной $\mathbf{A}^S$ и антисимметричной $\mathbf{A}^A$ частей, причем

$$\mathbf{A}^S = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \qquad \mathbf{A}^A = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

1.5. Единичный тензор и тензор Леви-Чивита

Тензор второго ранга называется единичным, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство $\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{x}$.

Единичный тензор может быть представлен в виде разложения по произвольной ортонормированной тройке векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3.$$

Тензор Леви-Чивита вводится соотношением ${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}$.

Запишем тензор Леви-Чивита в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$:

$${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s)\mathbf{e}_s = \varepsilon_{kms}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_s,$$

где ε_{kms} — символы Леви-Чивита, определяемые через смешанное произведение базисных векторов: $\varepsilon_{kms} = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_s$.

1.6. Свойства операций умножения

Ниже приводится сводка основных формул, связанных с умножением тензоров на векторы и тензоров на тензоры. Подробные и обстоятельные доказательства практически всех равенств приведены, например, в [13].

1) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{c}$;

2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot {}^3\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}$;

3) $(\mathbf{c} \times \mathbf{A})^T = -\mathbf{A}^T \times \mathbf{c}$;

4) $\mathbf{c} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \mathbf{c}$;

5) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot\cdot (\mathbf{d}\mathbf{c}) = (\mathbf{d}\mathbf{c}) \cdot\cdot \mathbf{A}$;

6) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^S \cdot \mathbf{c}$;

7) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{d} = \mathbf{A} \times\cdot (\mathbf{d}\mathbf{c}) = -(\mathbf{d}\mathbf{c}) \cdot\times \mathbf{A}$;

8) $\mathbf{c} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{A} \cdot\times (\mathbf{d}\mathbf{c}) = (\mathbf{d}\mathbf{c}) \times\cdot \mathbf{A}$;

9) $\mathbf{c} \times \mathbf{A} \times \mathbf{d} = -\mathbf{A} \times\times (\mathbf{dc}) = -(\mathbf{dc}) \times\times \mathbf{A}$;

10) $\mathbf{c} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{A}) = \mathbf{d}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{A}$;

11) $(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{dc} - \mathbf{cd}) \cdot \mathbf{A}$;

12) $\mathbf{c} \times \mathbf{E} \times \mathbf{d} = \mathbf{dc} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{E}$;

13) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$;

14) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$;

15) $\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot\cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot\cdot \mathbf{B}^T$;

16) $\mathbf{A}^S \cdot\cdot \mathbf{B}^A = 0$;

17) $\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^S \cdot\cdot \mathbf{B}^S + \mathbf{A}^A \cdot\cdot \mathbf{B}^A$;

18) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot\cdot \mathbf{B}^T = 0$;

19) $(\mathbf{E} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{A}$

$(\mathbf{E} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{c} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{A}$;

20) $\mathbf{E} \times\times \mathbf{E} = 2\mathbf{E}$

$\mathbf{E} \times\times \mathbf{E} = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) = -\mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \times \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{E} = -\mathbf{E} + 3\mathbf{E} = 2\mathbf{E}$;

21) $\mathbf{A} \cdot\cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot\cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot\cdot \mathbf{B}$.

1.7. След тензора второго ранга

Следом тензора $\mathbf{A} = \mathbf{a}_m\mathbf{b}_m$, называется скаляр $\mathrm{tr}\mathbf{A}$, вычисляемый по правилу $\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_m$.

Свойства следа тензора второго ранга.

1) $\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{E}$;

2) $\mathrm{tr}\mathbf{A} = A_{mm}, \qquad \mathrm{tr}\mathbf{E} = 3$;

3) $\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathrm{tr}\mathbf{A}^T, \qquad \mathrm{tr}\mathbf{A}^A = 0$;

4) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{A}+\mathrm{tr}\mathbf{B}, \qquad \mathrm{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\,\mathrm{tr}\mathbf{A};$

5) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{B}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T) = \mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{B};$

6) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\times\mathbf{c}) = \mathrm{tr}(\mathbf{c}\times\mathbf{A})$

$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\times\mathbf{c}) = \mathrm{tr}(\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}_m\cdot(\mathbf{b}_m\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}_m\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}_m)$

$\mathrm{tr}(\mathbf{c}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{c}\times\mathbf{a}_m)\cdot\mathbf{b}_m = \mathbf{b}_m\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}_m);$

7) $\mathrm{tr}(\mathbf{b}\times\mathbf{E}\times\mathbf{c}) = -2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c};$

Вычислить след от соотношения 1.6. пункта 1.6.

8) $\mathrm{tr}\left(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{C})\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,\mathrm{tr}\mathbf{C}.$

Вычислить след от соотношения 1.6. пункта 1.6.

1.8. Векторный инвариант. Сопутствующий вектор

Векторным инвариантом тензора $\mathbf{A} = \mathbf{a}_m\mathbf{b}_m$, называется вектор $\mathbf{A}_\times$, вычисляемый по правилу $\mathbf{A}_\times = \mathbf{a}_m\times\mathbf{b}_m$.

Свойства векторного инварианта:

1) $\left(\mathbf{A}^S\right)_\times = 0;$

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_\times = \mathbf{A}_\times+\mathbf{B}_\times, \qquad (\alpha\,\mathbf{A})_\times = \alpha\,\mathbf{A}_\times;$

3) $\mathbf{A}_\times = \mathbf{A}\cdot\!\times\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\!\times\mathbf{A} = -\mathbf{A}\times\!\cdot\,\mathbf{E};$

4) $(\mathbf{c}\times\mathbf{E})_\times = -2\mathbf{c}$

$(\mathbf{c}\times\mathbf{E})_\times = (\mathbf{c}\times\mathbf{e}_k)\times\mathbf{e}_k = -\left(\mathbf{c}\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k\mathbf{c}\cdot\mathbf{e}_k\right) = -3\mathbf{c}+\mathbf{c} = -2\mathbf{c};$

5) $(\mathbf{c}\times\mathbf{A})_\times = \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} - \mathbf{c}\,\mathrm{tr}\mathbf{A}$

$(\mathbf{c}\times\mathbf{A})_\times = -\mathbf{b}_m\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}_m) = -\mathbf{c}\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_m + \mathbf{a}_m\mathbf{b}_m\cdot\mathbf{c} = -\mathbf{c}\mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = -2\mathbf{c};$

Теорема. Для любого антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ найдется такой вектор $\boldsymbol{\omega}$, что тензор $\mathbf{A}$ можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}, \tag{1.3}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется сопутствующим вектором тензора $\mathbf{A}$.

Доказательство. Согласно формуле 1.6. пункта 1.6., для произвольного вектора $\mathbf{x}$ и антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$. Обозначив $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{y}$ из соотношения $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$, получим, что $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, где вектор $\boldsymbol{\omega}$ произволен. Таким образом, получили равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x},\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}$.

Взяв в качестве $\mathbf{x}$ базисные векторы и просуммировав получившиеся соотношения, придем к (1.3)

Для нахождения сопутствующего вектора по исходному тензору $\mathbf{A}$, вычислим векторные инварианты от обоих частей равенства (1.3). Учитывая свойство 1.8., найдем: $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}_\times = \frac{1}{2}\mathbf{A} \times\!\cdot\, \mathbf{E}$.

1.9. Линейные отображения

Рассмотрим векторную функцию векторного аргумента $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, переводящую $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$. Отображение называется линейным, если

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \text{где } \alpha, \beta\text{— числа.}$$

Любое линейное отображение представимо в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{A}$ — тензор второго ранга, называемый тензором линейного отображения. Действительно, в базисе $\mathbf{e}_k$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k)x_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},;$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3.$$

Поскольку $\mathbf{A}$ — сумма трех диад, то это тензор второго ранга.

1.10. Определитель тензора. Обратный тензор.

Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — линейно независимая тройка векторов, $\mathbf{a}'_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_k$ — линейные отображения исходных векторов. Линейная независимость векторов эквивалентна условию $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 \neq 0$.

Напомним, что модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Определителем тензора называется отношение

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}_1' \times \mathbf{a}_2') \cdot \mathbf{a}_3'}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3} \tag{1.5}$$

Значение определителя не зависит от выбора исходных векторов. В самом деле, для произвольных линейно независимых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' = (A_{mn} a_n \mathbf{e}_m \times A_{kl} b_l \mathbf{e}_k) \cdot A_{pt} c_t \mathbf{e}_p = A_{mn} A_{kl} A_{pt} a_n b_l c_t \varepsilon_{mkp} =$$
$$= \det(A_{mn}) a_n b_l c_t \varepsilon_{nlt} = \det(A_{mn}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Таким образом, определитель тензора, введенный формулой (1.5), совпадает с определителем матрицы координат тензора в ортонормированном базисе.

Свойства определителя:

1) $\det \mathbf{E} = 1$;

2) $\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^3 \det \mathbf{A}$;

3) $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$;

4) $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A})$.
Обозначим $\mathbf{a}_k'' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_k' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_k$, тогда

$$\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \frac{(\mathbf{a}_1'' \times \mathbf{a}_2'') \cdot \mathbf{a}_3''}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3} = \frac{(\mathbf{a}_1'' \times \mathbf{a}_2'') \cdot \mathbf{a}_3''}{(\mathbf{a}_1' \times \mathbf{a}_2') \cdot \mathbf{a}_3'} \frac{(\mathbf{a}_1' \times \mathbf{a}_2') \cdot \mathbf{a}_3'}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3} = \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A})$$

Приведем еще одно полезное тождество, справедливое для любого невырожденного $\mathbf{A}$ и для любой пары векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Домножив (1.5) на $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3$, и учтя произвольность вектора $\mathbf{a}_3$, получим

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_2) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T} \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2). \tag{1.6}$$

Тензор второго ранга определитель, которого не равен нулю, называется неособым или невырожденным. Как показано в [3], линейная независимость отображений исходных векторов эквивалентна условию обратимости (1.4).

Пусть тензор $\mathbf{A}$ невырожденный, тогда существует, причем единственный, обратный тензор $\mathbf{A}^{-1}$, такой что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \tag{1.7}$$

Свойства обратного тензора:

1) $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

   Для доказательства вычислим определитель (1.7) $\det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$;

2) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

   Доказательство получается прямой проверкой;

3) $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}$,

   $\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^T = \mathbf{E}$.

Степень тензора $\mathbf{A}^n$ определяется как n-кратное умножение тензора $\mathbf{A}$ на себя

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{n}.$$

Аналогично,

$$\mathbf{A}^{-n} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}^{-1}}_{n}.$$

Вычисление обратного тензора может быть проведено разными способами. Один из них основан на *тождестве Кэли-Гамильтона*. Произвольный тензор второго ранга $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению

$$-\mathbf{A}^3 + I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 - I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_3(\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{1.8}$$

где $I_1(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}\mathbf{A}$, $\quad I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\right)$, $\quad I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$.

Обратный тензор получается после умножения (1.8) на $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}\left(\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{E}\right).$$

Тождество Кэли-Гамильтона также может быть использовано для нахождения определителя тензора:

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6}\left(\mathrm{tr}^3\mathbf{A} - 3\,\mathrm{tr}\mathbf{A}\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 + 2\,\mathrm{tr}\mathbf{A}^3\right).$$

1.11. Ортогональное отображение

Ортогональным отображением называется линейное отображение, не меняющее длину векторов, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}$, т.е. тензор $\mathbf{Q}$ должен удовлетворять условию

$$\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{E}. \tag{1.9}$$

Ортогональным тензором называется тензор второго ранга, удовлетворяющий условию (1.9). Таким образом, транспонированный ортогональный тензор совпадает с обратным к нему. Поскольку транспонированный тензор существует всегда, то любой ортогональный тензор является невырожденным и, следовательно, обратимым.

Вычислим определитель ортогонального тензора:

$$\det(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}) = (\det\mathbf{Q})^2 = \det\mathbf{E} = 1 \quad \Rightarrow \det\mathbf{Q} = \pm 1.$$

Ортогональные тензоры с определителем равным единице называются собственно ортогональными, ортогональные тензоры с определителем равным минус единице называются несобственно ортогональными. В соответствии с формулой (1.5) собственно ортогональные тензоры, не меняя длин векторов и углов между ними, переводят правую тройку векторов в правую, а левую — в левую, т.е. осуществляют поворот исходной тройки векторов, как жесткого целого. Поэтому собственно ортогональный тензор также носит название тензора поворота. Несобственно ортогональный тензор переводит правую тройку векторов в левую и наоборот. В этом случае исходные и преобразованные тройки векторов невозможно совместить только поворотами, нужна дополнительная операция — инверсия, определяемая тензором $-\mathbf{E}$.

Множество ортогональных тензоров образуют группу. В самом деле, этому множеству принадлежит единичный тензор, для любого элемента группы существует, причем единственный, обратный тензор и множество ортогональных тензоров замкнуто относительно операции скалярного умножения, поскольку из ортогональности тензоров $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ следует ортогональность тензора $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$. Действительно,

$$(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) \cdot (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2)^T = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2^T \cdot \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{E}.$$

Совокупность всех ортогональных тензоров называется полной ортогональной группой. Множество собственно ортогональных тензоров называется собственно ортогональной группой и является подгруппой полной ортогональной группы.

Формулы с ортогональным тензором

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \qquad (1.10)$$

Из (1.6) следует, учитывая, что $\mathbf{Q}^{-T} = \mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}. \qquad (1.11)$$

Перепишем предыдущую формулу в виде $((\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b}$. В силу произвольности вектора $\mathbf{b}$ получаем равенство

$$(\det(\mathbf{Q}) \, ((\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}).$$

Откуда, после умножения обоих частей равенства справа на $\mathbf{Q}^T$ следует (1.11).

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}.$$

Доказывается аналогично.

1.12. Тензор поворота

Одним из наиболее простых представлений тензора поворота является следующее. Введем два ортонормированных базиса: исходный $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и новый $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Тогда тензор поворота $\mathbf{P}$, переводящий исходный базис в новый, имеет вид: $\mathbf{P} = \mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3\mathbf{e}_3$.

Рассмотрим действие тензора поворота на вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_m a_m) = a_m \mathbf{e}'_m, \tag{1.12}$$

$\mathbf{a}'$ носит название повернутого вектора. Скалярная характеристика вектора, которая не меняется при ортогональных преобразованиях, называется инвариантом вектора. Из (1.12) видно, что координаты вектора $\mathbf{a}'$ в новом базисе имеют те же значения, что и координаты исходного вектора в старом, т.е. модуль вектора является его инвариантом.

Аналогично, повернутый тензор определяется соотношением:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}'\mathbf{b}' + ... + \mathbf{c}'\mathbf{d}' = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{ab} + ... + \mathbf{cd}) \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T$$

или $\mathbf{A}' = (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_k) \cdot (A_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \cdot (\mathbf{e}'_s \mathbf{e}_s)^T = A_{ks} \mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_s$.

Термин “повернутый тензор” можно распространить и на тензоры более высокого ранга

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}' ... \mathbf{b}' + ... + \mathbf{c}' ... \mathbf{d}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} ... \mathbf{P} \cdot \mathbf{b} + ... + \mathbf{P} \cdot \mathbf{c} ... \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}.$$

Инвариантную (т.е. не связанную с выбором базиса) форму записи тензора поворота дает следующая теорема.

Теорема Эйлера. Произвольный тензор поворота $\mathbf{P}$, отличный от $\mathbf{E}$, допускает единственное представление:

$$\mathbf{P} = \mathbf{mm} + \cos\theta(\mathbf{E} - \mathbf{mm}) + \sin\theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \qquad -\pi < \theta < \pi,$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}$ и определяет прямую в пространстве, называемую осью поворота; θ называется углом поворота и считается положительным, если поворот при взгляде с конца вектора $\mathbf{m}$ происходит против хода часовой стрелки. Доказательство теоремы приведено, например, в [3].

Теорема Эйлера дает простой способ вычисления угла поворота θ и неподвижного вектора $\mathbf{m}$: $\mathrm{tr}\mathbf{P} = 1 + 2\cos\theta, \quad \mathbf{P}_\times = -2\sin\theta \mathbf{m}$.

1.13. Проекторы и тензоры отражений

Тензор $\mathbf{\Pi}$, рассматриваемый как линейный оператор в пространстве векторов, называется проектором, если выполнены условия: $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T$, $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}$. Примерами проекторов являются тензоры $\mathbf{nn}$, $\mathbf{mm} + \mathbf{nn}$, где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ — единичные ортогональные векторы.

Результатом действия таких линейных операторов на произвольный вектор $\mathbf{a}$ является в первом случае проекция вектора на прямую, натянутую на вектор $\mathbf{n}$, во втором случае — проекция вектора на плоскость, натянутую на векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$.

Проекция вектора $\mathbf{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$, получается в результате действия на вектор $\mathbf{a}$ тензора вида $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} - \mathbf{nn}$. Результатом действия на вектор $\mathbf{a}$ тензора $\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{nn}$ является отражение вектора $\mathbf{a}$ от плоскости перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$. Проекции исходного и отраженного векторов на эту плоскость совпадают, а проекции этих векторов на вектор $\mathbf{n}$ равны по модулю и противоположны по направлению. Тензор $\mathbf{Q}$ называется тензором зеркального отражения и является несобственно ортогональным тензором.

1.14. Инварианты тензора

Скалярная функция $f(\mathbf{A})$ тензора $\mathbf{A}$ называется инвариантом тензора, если она выражается одинаковым образом в разных базисах и не зависит от выбора базиса. Иными словами, для нее справедливо равенство $f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) = f(\mathbf{A})$, где $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор.

Примерами инвариантов тензора $\mathbf{A}$ являются $\mathrm{tr}\mathbf{A}$, $\mathrm{tr}\mathbf{A}^n$, $\det \mathbf{A}$.

Можно построить сколь угодно много функций, являющихся инвариантами тензора, однако не все они будут функционально независимыми. Можно показать, что симметричный тензор второго ранга имеет не более трех независимых инвариантов. Все остальные инварианты могут быть выражены через выбранные независимые инварианты. Инварианты $I_1(\mathbf{A})$, $I_2(\mathbf{A})$ и $I_3(\mathbf{A})$, входящие в тождество Кэли-Гамильтона, обычно называют главными инвариантами тензора. В общем случае тензор второго ранга (несимметричный) имеет шесть независимых инвариантов.

1.15. Спектральное и полярное разложение тензоров

Действие тензора на вектор приводит к повороту исходного вектора и изменению его длины. Однако, для каждого тензора второго ранга существуют такие векторы, действие тензора на которые сводится только к изменению их длины, т.е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}. \tag{1.13}$$

Такие векторы называются собственными векторами тензора $\mathbf{A}$, а числа λ — собственными числами или собственными значениями тензора $\mathbf{A}$. Поскольку наряду с вектором $\mathbf{m}$ равенству (1.13) удовлетворяет любой вектор $\alpha\mathbf{m}$, то для определенности считаем, что $\mathbf{m}$ — единичный вектор.

Собственные числа тензора определяются из уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0, \tag{1.14}$$

где I_i — главные инварианты тензора $\mathbf{A}$. Уравнение (1.14) называется характеристическим уравнением для тензора $\mathbf{A}$. Справедливы следующие теоремы о собственных значениях и собственных векторах симметричного тензора.

1. Собственные значения симметричного тензора вещественны.

2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам тензора, ортогональны.

В случае кратных собственных чисел ортогональность собственных векторов сохраняется в том смысле, что из множества этих векторов можно выбрать ортогональные. Доказательство этих теорем на языке прямого тензорного исчисления приведено в [13].

Если собственные векторы взять в качестве базиса, то справедливо представление

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2 + \lambda_3 \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_3. \tag{1.15}$$

Это представление носит название спектрального разложения симметричного тензора. Координатные оси, орты которых соответствуют собственным векторам тензора $\mathbf{A}$, называют иногда главными осями этого тензора, а представление (1.15) называется тогда записью тензора в главных осях.

Если два собственных числа совпадают ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), то представление (1.15) для симметричного тензора имеет вид

$$\mathbf{A} = \lambda_3 \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_3 + \lambda(\mathbf{E} - \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_3).$$

Видно, что любой вектор, ортогональный $\mathbf{m}_3$, является собственным для $\mathbf{A}$. Множество этих векторов образует плоскость, ортогональную $\mathbf{m}_3$.

Если все три собственных числа равны между собой, то тензор $\mathbf{A}$ является шаровым тензором $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}$. Любой вектор является собственным для шарового тензора.

Любое ортогональное преобразование сохраняет собственные значения тензора и поворачивает/отражает его главные оси. Покажем, что $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_k$ являются собственными векторами тензора $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$. Действительно, учитывая что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$ (не суммировать по k), получим

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T\right) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_k) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k) \\ = \mathbf{Q} \cdot (\lambda_k \mathbf{x}_k) = \lambda_k (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_k),\end{aligned}$$

т.е. собственные числа являются инвариантами тензора.

В нелинейной теории упругости широко используется обратное утверждение: два симметричных тензора с одинаковыми собственными числами отличаются только поворотом.

Симметричный тензор второго ранга называется положительно определенным, если для любого вектора $\mathbf{a} \neq 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} > 0.$$

Используя спектральное разложение тензора, можно показать, что симметричный тензор $\mathbf{A}$ положительно определен тогда и только тогда, когда его собственные числа положительны.

Для положительно определенного тензора можно определить дробные степени тензора: $\mathbf{A}^\alpha = \lambda_1^\alpha \mathbf{m}_1\mathbf{m}_1 + \lambda_2^\alpha \mathbf{m}_2\mathbf{m}_2 + \lambda_3^\alpha \mathbf{m}_3\mathbf{m}_3$

Для невырожденных несимметричных тензоров часто используется следующая теорема.

Теорема о полярном разложении. Любой невырожденный тензор второго ранга $\mathbf{A}$ представим в виде разложений $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ — ортогональный тензор, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — симметричные положительно определенные тензоры. Данное представление единственно.

$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T\right)^{1/2}, \qquad \mathbf{U} = \left(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}\right)^{1/2}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Подробное доказательство теоремы о полярном разложении приведено в [13].

Связь между тензорами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^T, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.14), видно, что собственные значения тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ равны, а собственные векторы повернуты друг относительно друга.

1.16. Разложение тензора на шаровую часть и девиатор

Шаровым тензором называется тензор вида $\alpha\mathbf{E}$, где α — вещественное число. Любому тензору $\mathbf{A}$ можно однозначно сопоставить шаровой тензор по правилу $\mathbf{A}_b = 1/3\,\mathrm{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{E}$.

Девиатором тензора называется разность между тензором и его шаровой частью. Таким образом, произвольный тензор можно представить в виде разложения на шаровую часть и девиатор: $\mathbf{A} = I_1/3\,\mathbf{E} + \mathrm{Dev}\,\mathbf{A}$.

Используя спектральное разложение девиатора, легко показать, что главные оси девиатора и исходного тензора совпадают, а собственные числа девиатора выражаются через собственные числа исходного тензора: $d_k = \lambda_k - I_1/3$

Вычислим главные инварианты девиатора:

$$I_1\left(\mathrm{Dev}\,\mathbf{A}\right) = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathrm{Dev}\,\mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot\cdot \left(\mathbf{A} - \frac{I_1}{3}\mathbf{E}\right) = I_1 - I_1 = 0;$$

$$I_2\left(\mathrm{Dev}\,\mathbf{A}\right) = \frac{1}{2}\left(I_1^2(\mathrm{Dev}\,\mathbf{A}) - I_1((\mathrm{Dev}\,\mathbf{A})^2)\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Dev}\,\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathrm{Dev}\,\mathbf{A} \le 0;$$

$$I_3\left(\mathrm{Dev}\,\mathbf{A}\right) = d_1 d_2 d_3.$$

Равенство нулю первого инварианта является отличительной особенностью девиатора, откуда следует, что девиатор от девиатора равен самому девиатору.

В заключение данного раздела приведем еще одну полезную формулу для двойной свертки тензоров:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B} = \frac{1}{3} I_1(\mathbf{A}) I_1(\mathbf{B}) + \mathrm{Dev}(\mathbf{A}) \cdot\cdot\, \mathrm{Dev}(\mathbf{B}).$$

1.17. Симметрия тензоров

Классические теории симметрии применимы только для полярных (эвклидовых) векторов и тензоров [6,12]. Однако, существуют векторные величины другого типа, называемые псевдовекторами, или аксиальными векторами, направление которых зависит от дополнительно принятого соглашения, характеризующего ориентацию системы отсчета. Например, результат векторного произведения двух полярных векторов является аксиальным вектором, который в правоориентированной системе отсчета образует с исходными векторами правую тройку векторов, а в левой

– левую. Другими примерами аксиального вектора являются вектор поворота или вектор угловой скорости. Аксиальным объектом может быть не только вектор, но и скаляр (например, смешанное произведение полярных векторов $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$), а также тензор любого ранга (например, диада векторов, в которой один вектор полярный, а второй аксиальный). При изменении ориентации системы отсчета аксиальные объекты умножаются на (-1). Более подробное описание ориентации системы отсчета и введения аксиальных величин можно найти в книге [3].

Применение классической теории к аксиальным объектам ведет к ошибочным результатам. Поэтому П.А.Жилиным было предложено следующее понятие ортогонального преобразования.

Определение. Ортогональными преобразованиями скаляра, вектора и тензора второго ранга называются величины $a' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, a$, $\mathbf{a}' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{A}' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^{T}$, где $\alpha = 0$ для полярных объектов и $\alpha = 1$ для аксиальных объектов. Данное определение легко распространяется на тензоры высших рангов [4, 5].

Предложенное определение ортогонального преобразования совпадает с классическим для полярных объектов и позволяет естественным образом распространить его на аксиальные объекты.

Группой симметрии называется совокупность ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$, для которых ортогональное преобразование объекта совпадает с исходным объектом.

Например, группа симметрии полярного скаляра совпадает с полной ортогональной группой, а группой симметрии аксиального скаляра является собственно ортогональная группа. Группа симметрии полярного вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и отражений от плоскостей, проходящих через $\mathbf{a}$. Для аксиального вектора группа симметрии состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и отражений от плоскостей, ортогональных $\mathbf{a}$. Подробнее о группах симметрии разных объектов можно прочитать в [4].

Если группа симметрии тензора произвольного ранга совпадает с полной ортогональной группой, то такой тензор называется изотропным. Примером изотропного тензора второго ранга является шаровой тензор $\lambda\mathbf{E}$. Действительно, $\mathbf{Q}\cdot(\lambda\mathbf{E})\cdot\mathbf{Q}^T = \lambda\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}^T = \lambda\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T = \lambda\mathbf{E},\ \forall\mathbf{Q}$.

Изотропным тензором третьего ранга является аксиальный тензор Леви-Чивита. Поскольку ${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_s)\mathbf{e}_s$, то с учетом (1.10) получим

$$-\lambda\det\mathbf{Q}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{Q}^T) =$$
$$-\lambda(\det\mathbf{Q})^2(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{Q}^T)\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{Q}^T) = -\lambda\mathbf{E}\times\mathbf{E}, \qquad \forall\mathbf{Q}.$$

Отметим, что в общепринятом определении ортогонального преобразования тензор Леви-Чивита не является изотропным, поскольку в этом случае его группа симметрии совпадает только с собственно ортогональной группой, т.е. его координаты не изменяются при произвольных поворотах и меняют знак при отражениях.

Существуют три типа изотропных тензоров четвертого ранга:

$${}^4\mathbf{I}_1 = \mathbf{E}\mathbf{E}, \qquad {}^4\mathbf{I}_2 = \mathbf{e}_k\mathbf{E}\mathbf{e}_k, \qquad {}^4\mathbf{I}_3 = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s. \tag{1.16}$$

Таким образом, любой изотропный тензор четвертого ранга может быть записан в виде [19]: $\alpha\,{}^4\mathbf{I}_1 + \beta\,{}^4\mathbf{I}_2 + \gamma\,{}^4\mathbf{I}_3$.

Поскольку изотропные тензоры вида (1.16) широко используются при описании изотропных материалов, выпишем результат двойной свертки этих тензоров с произвольным тензором второго ранга $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{I}_1 \cdot\cdot\, \mathbf{A} &= \mathbf{E}\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k \cdot\cdot\, A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = (\mathrm{tr}\mathbf{A})\,\mathbf{E};\\ {}^4\mathbf{I}_2 \cdot\cdot\, \mathbf{A} &= \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k \cdot\cdot\, A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathbf{A};\\ {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{A} &= \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s \cdot\cdot\, A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = A_{mn}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m = \mathbf{A}^T. \end{aligned} \tag{1.17}$$

В заключение данного раздела отметим, что предложенная Жилиным расширенная трактовка ортогонального преобразования, позволяющая естественным образом распространить теорию симметрии на аксиальные объекты, имеет принципиальное значение при построении моделей различных мультиполярных сред: среды Коссера, среды Кельвина, теории стержней,теории пластин и оболочек, а также при построении моделей пьезоупругих, магнитоупругих и прочих сред, в которых учитываются вращательные степени свободы.

2. ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ

Тензорной функцией $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ называется отображение, ставящее в соответствие нескольким тензорам различных рангов тензор ранга p.

Например:

1) $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{X}; \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{L}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_k, \quad p = k - 1;$

2) $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X}; \qquad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2, \quad p = 0;$

3) $f_3(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2; \qquad \mathbf{X}_1 \in \mathcal{T}_m, \quad \mathbf{X}_2 \in \mathcal{T}_n, \quad p = m + n;$

4) $f_4(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^2; \qquad \mathbf{X} \in \mathcal{T}_k, \quad p = 2k - 2.$

Совокупность ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$, для которых значение функции на ортогональных преобразованиях аргументов совпадает с ортогональным преобразованием функции, называется группой симметрии тензорной функции $\mathbf{Y}' = f(\mathbf{X}')$.

Тензорная функция, группа симметрии которой совпадает с полной ортогональной группой, называется изотропной функцией.

Например,

1) $f(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$. Примем для определенности, что $\mathbf{x}_1$ – полярный, а $\mathbf{x}_2$ – аксиальный вектора. Тогда $f(\mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2)$ будет аксиальным вектором:
$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_1,\, \det\mathbf{Q}\,\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_2) = \det\mathbf{Q}\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_2 = \det\mathbf{Q}\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2;$$

2) $f(\mathbf{X}_1,\, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_i$ – полярные:
$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Q}^T,\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}^T;$$

3) $f(\mathbf{X}) = \mathrm{tr}\mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ – полярный:
$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{E} \cdot\cdot\, (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot\cdot\, \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = \mathrm{tr}\mathbf{X}.$$

В заключение этого раздела приведем без доказательств ряд теорем об общих представлениях изотропных тензорных функций.

Изотропная скалярно-значная функция одного векторного аргумента является функцией длины своего аргумента.

Изотропная скалярно-значная функция симметричного тензора второго ранга является функцией его главных инвариантов.

Изотропная скалярно-значная функция нескольких аргументов является функцией совместных инвариантов этих аргументов. При этом нахождение числа независимых совместных инвариантов и их определение является отдельной задачей. Подробное обсуждение этой проблемы можно найти в [4].

Если тензорная функция $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, аргумент и значение которой симметричные тензоры, изотропна, то главные оси тензоров $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ совпадают.

Изотропная тензорная функция $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, аргумент и значение которой симметричные тензоры второго ранга, может быть представлена в виде $\mathbf{Y} = f_0\mathbf{E}+f_1\mathbf{X}+f_2\mathbf{X}^2$, где $f_0,\ f_1,\ f_2$ – функции главных аргументов тензора $\mathbf{X}$.

2.1. Операции дифференцирования

2.1.1. Дифференцирование тензора по скалярному аргументу

Дифференцирование тензора по скалярному аргументу осуществляется с помощью обычного правила Лейбница дифференцирования произведения:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{a}_k(t)\mathbf{b}_k(t)\right) = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{a}_k(t)\right)\mathbf{b}_k(t) + \mathbf{a}_k(t)\frac{d}{dt}\mathbf{b}_k(t)$$

2.1.2. Дифференцирование скалярно-значной функции

Принятое в анализе определение производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента необобщаемо на функцию тензорного аргумента. Поэтому при определении производной функции по тензору исходят из определения производной как линейной составляющей ее полного приращения. Скалярно-значная функция тензорного аргумента $f(\mathbf{X})$ является функцией девяти координат тензора $\mathbf{X}$. По определению производной функции нескольких переменных запишем:

$$df(X_{mn}) = \frac{\partial f}{\partial X_{mn}} dX_{mn} = \frac{\partial f}{\partial X_{ks}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \cdot\cdot\, \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m dX_{mn} = f'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T. \tag{2.1}$$

Считая $d\mathbf{X}$ приращением тензорного аргумента, назовем линейную часть дифференциала $f'_{\mathbf{X}} = \dfrac{\partial f}{\partial X_{ks}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s$ производной скаляра по тензорному аргументу.

Отметим, что представление (2.1) справедливо только в том случае, если координаты тензора X_{mn} независимы. Например, если $\mathbf{X}$ — симметричный тензор второго ранга, то функция f зависит уже не от девяти, а только от шести независимых аргументов. В этом случае представим координаты функции в виде $f(X_{mn}) = f\left(1/2\left(X_{mn} + X_{nm}\right)\right)$ и после дифференцирования по каждой из девяти компонент учтем, что $X_{mn} = X_{nm}$. В результате получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial X_{mn}} (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m)$$

откуда следует, что производная функции по симметричному тензору — симметричный тензор.

Выражение (2.1) представляет производную по тензорному аргументу в ортогональном базисе. Для инвариантного представления производной введем дифференциал Гато (или слабый дифференциал):

$$df = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})\bigg|_{\varepsilon \to 0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) - f(\mathbf{X})}{\varepsilon} = f'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T$$

для любого не обязательно бесконечно малого тензора $d\mathbf{X}$.

В качестве примера рассмотрим нахождение производной функции $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X}$ двумя способами.

1) Координатное представление: $\mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = X_{km}X_{mk}$,

$$f'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial X_{km}X_{mk}}{\partial X_{ij}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (X_{mk}\delta_{ki}\delta_{mj} + X_{km}\delta_{mi}\delta_{kj})\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 2X_{km}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k = 2\mathbf{X}^T$$

2) Инвариантное представление:

$$f'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \left.\frac{\partial(\mathbf{X}+\varepsilon d\mathbf{X}) \cdot\cdot\, (\mathbf{X}+\varepsilon d\mathbf{X})}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} =$$
$$= \mathbf{X} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = 2\mathbf{X} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} = 2\mathbf{X}^T \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T.$$

$$\frac{\partial \mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{X}^T. \tag{2.2}$$

Для скалярно-значной функции тензорного аргумента справедливы формальные правила дифференцирования суммы и произведения:

$$\frac{\partial(\phi+\varphi)}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{X}}, \qquad \frac{\partial(\phi\varphi)}{\partial\mathbf{X}} = \varphi\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{X}} + \phi\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{X}}. \tag{2.3}$$

Дифференцирование главных инвариантов тензора второго ранга

Найдем производные от главных инвариантов тензора второго ранга, пользуясь инвариантным представлением и учитывая соотношения (2.3) и (2.2).

1) Первый инвариант $f(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X}$;

$$f'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \left.\frac{\partial\mathbf{E} \cdot\cdot\, (\mathbf{X}+\varepsilon d\mathbf{X})}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T;$$
$$\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{E}.$$

2) Второй инвариант $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}^2\mathbf{X} - \mathrm{tr}\mathbf{X}^2\right)$;

$$f'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\left(2\,\mathrm{tr}\mathbf{X}\,(\mathrm{tr}\mathbf{X})'_{\mathbf{X}} - (\mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X})'_{\mathbf{X}}\right) = \mathrm{tr}\mathbf{X}\,\mathbf{E} - \mathbf{X}^T.$$

3) Третий инвариант $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\mathbf{X}^3 - I_1\mathrm{tr}\mathbf{X}^2 + I_2\mathrm{tr}\mathbf{X}\right)$;

Аналогично (2.2) найдем

$$\left(\mathrm{tr}\mathbf{X}^3\right)'_{\mathbf{X}} = \left(\mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^3\right)'_{\mathbf{X}} = 3\left(\mathbf{X}^2\right)^T;$$

$$f'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{3}\left(3\,\left(\mathbf{X}^2\right)^T - 2I_1\mathbf{X}^T - \mathrm{tr}\mathbf{X}^2\mathbf{E} + I_2\mathbf{E} + \mathrm{tr}\mathbf{X}\left(\mathrm{tr}\mathbf{X}\mathbf{E} - \mathbf{X}^T\right)\right) =$$
$$\left(\mathbf{X}^2 - I_1\mathbf{X} + I_2\mathbf{E}\right)^T.$$

Откуда, используя теорему Кэли Гамильтона, окончательно получим
$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}} = I_3\mathbf{X}^{-T}.$$

Как уже говорилось, любая скалярно-значная изотропная функция симметричного тензорного аргумента является функцией главных инвариантов своего аргумента $f(\mathbf{X}) = f(I_1, I_2, I_3)$. Таким образом, производная изотропной функции f по $\mathbf{X}$ записывается в следующем виде:
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{X}} = \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial f}{\partial I_2}\right)\mathbf{E} - \frac{\partial f}{\partial I_2}\mathbf{X} + I_3\frac{\partial f}{\partial I_3}\mathbf{X}^{-1}.$$

2.1.3. Дифференцирование тензорных функций по тензорному аргументу

Аналогично производной скалярно-значной функции для функции $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, переводящей тензор второго ранга в тензор второго ранга, определим производную $\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}$ как специальный случай производной Гато:
$$\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathbf{F}(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})\bigg|_{\varepsilon\to 0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathbf{F}(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) - \mathbf{F}(\mathbf{X})}{\varepsilon}.$$

В координатной форме: $\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \dfrac{\partial F_{ks}}{\partial X_{mn}}\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$.

Для симметричного тензора $\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$: $\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F_{ks}}{\partial X_{mn}}\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n\mathbf{e}_m)$.

Аналогичным образом определяется производная тензорной функции любого ранга.

Например:

1) $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$,
$$\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathbf{F}(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})\bigg|_{\varepsilon\to 0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})\bigg|_{\varepsilon\to 0} = d\mathbf{X},$$

Откуда, учитывая (1.78), найдем $\dfrac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = {}^4\mathbf{I}_3$;

2) $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T = X_{mn}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m$,

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial X_{mn}}{\partial X_{ij}}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{mi}\delta_{nj}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = {}^4\mathbf{I}_1$$

Производная произведения скаляра на тензор

Найдем дифференциал $f(\mathbf{X})\mathbf{F}(\mathbf{X})$:

$$d(f\mathbf{F}) = \mathbf{F}df + fd\mathbf{F} = (\mathbf{F}f'_{\mathbf{X}} + f\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}) \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T, \quad (f\mathbf{F})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{F}f'_{\mathbf{X}} + f\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}.$$

Например,

$$\frac{\partial I_1\mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{X}} + I_1\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{E} + I_1\,{}^4\mathbf{I}_3.$$

Производная произведения тензоров

$$d(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2) = d\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1\cdot d\mathbf{F}_2 = \left(\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T\right)\cdot\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1\cdot\left(\mathbf{F}'_{2\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T\right).$$

С помощью (1.17.) представим: $d\mathbf{X}^T = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T$, что позволяет перенести $d\mathbf{X}^T$ в первом слагаемом вправо:

$$\left(\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T\right)\cdot\mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m)\cdot\mathbf{F}_2(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T).$$

Окончательно найдем:

$$\frac{\partial(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2)}{\partial \mathbf{X}} = (\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m)\cdot\mathbf{F}_2\,\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}'_{2\mathbf{X}}.$$

Например:

$$1)\ (\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\cdot{}^4\mathbf{I}_3, \qquad (\mathbf{X}\cdot\mathbf{A})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k;$$

$$2)\ (\mathbf{X}\cdot\mathbf{X})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}\cdot{}^4\mathbf{I}_3 + {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{X}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k =$$
$$= \mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{X}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k = (\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{X})\,\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k.$$

Замена переменной

Пусть тензор $\mathbf{Z}$ зависит от тензора $\mathbf{Y}$, который, в свою очередь, зависит от тензора $\mathbf{X}$. Тогда дифференциал $\mathbf{Z}$ может быть записан через приращения тензоров $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{X}$:

$$d\mathbf{Z} = \mathbf{Z}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, d\mathbf{Y}^T. \tag{2.4}$$

В свою очередь, дифференциал $\mathbf{Y}$ может быть записан как:

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T, \qquad d\mathbf{Y}^T = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, d\mathbf{Y} = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T.$$

Подставив $d\mathbf{Y}^T$ в (2.4) и приравняв множители при $d\mathbf{X}^T$, найдем

$$\mathbf{Z}'_{\mathbf{X}} = \mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} = (\mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}})^T_{34} \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} = \mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, (\mathbf{Y}'_{\mathbf{X}})^T_{12}\,.$$

$\left({}^4\mathbf{A}\right)^T_{mn}$ — обозначает перестановку векторов, стоящих в тензором произведении на позициях m и n.

Для скалярно-значной функции $f(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))$:

$$f'_{\mathbf{X}} = f'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot {}^4\mathbf{I}_1 \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} = (f'_{\mathbf{Y}})^T \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}}.$$

3. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

3.1. Криволинейные ортогональные координаты

Введем в трехмерном евклидовом пространстве систему криволинейных координат q_1, q_2 и q_3. Положение точки в пространстве задается радиус-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{3.1}$$

Полагаем, что радиус-вектор это однозначная непрерывная векторфункция, имеющая, по крайней мере, три непрерывные производные.

Если зафиксировать какие-нибудь две криволинейные координаты, то выражение (3.1) будет описывать в пространстве координатную линию, соответствующую изменяющейся координате q_k. Векторы, касательные к координатным линиям, находятся по формуле

$$\mathbf{r}_k = \partial\mathbf{r}/\partial q_k. \tag{3.2}$$

Длина этих векторов H_k называется коэффициентами Ламе. Коэффициент Ламе — это коэффициент пропорциональности между приращением координаты и приращением длины дуги линии, соответствующей этой координате. Триэдр единичных векторов

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{H_k}\mathbf{r}_k \qquad \text{(не суммировать по } k\text{)}, \tag{3.3}$$

касательных к координатным линиям и направленных в сторону возрастания q_k, представляет собой векторный базис в принятой системе криволинейных координат. Для ортогональной криволинейной системы координат выполняются условия $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{sk}$.

Простейшими и наиболее употребительными криволинейными ортогональными системами координат являются цилиндрическая и сферическая системы.

Введение криволинейных координат соответствует переходу к изучению поля — сравнению величин (скаляров, векторов, тензоров) в различных точках пространства. Вектор $d\mathbf{r}$, определяющий переход из данной точки в бесконечно близкую к ней, определяется формулой:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k = \mathbf{r}_k \, dq_k. \tag{3.4}$$

Более подробное описание теории криволинейных координат можно найти, например, в [9, 13].

3.2. Набла-оператор Гамильтона

Если каждой точке пространства, определяемой радиус вектором $\mathbf{r}$, ставится в соответствие определенный вектор $\mathbf{u}$, то говорят, что в пространстве задано векторное поле $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Рассматривая $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ как функцию координат радиус вектора и учитывая (3.4), запишем дифференциал $\mathbf{u}$ в виде

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k} \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_k}. \tag{3.5}$$

Введя в рассмотрение символический вектор $\nabla = \mathbf{e}_k \dfrac{1}{H_k} \dfrac{\partial}{\partial q_k}$, называемый набла-оператором Гамильтона, можно переписать (3.5) в виде

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{u}); \tag{3.6}$$

тензор второго ранга $\nabla \mathbf{u}$ называется градиентом вектора $\mathbf{u}$.

Формулу (3.6) также можно переписать в виде $d\mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u})^T \cdot d\mathbf{r}$.

Следует иметь в виду, что в зарубежной литературе, например в [18], градиентом называется $(\nabla \mathbf{u})^T$. $(\nabla \mathbf{u})^T$ также называют производной вектора $\mathbf{u}$ по направлению $\mathbf{r}$: $\dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} = (\nabla \mathbf{u})^T$.

Результатом применения операции градиента к тензорному полю $\mathbf{U}$ является тензор, ранг которого на единицу больше ранга исходного тензора.

Важно отметить, что применение набла-оператора к тензорному полю, заданному в криволинейных координатах, усложняется необходимостью учета изменения базисных векторов, направление которых меняется от точки к точке. Таким образом, операция градиента тензорного поля $\mathbf{U}$ в криволинейной системе координат записывается как

$$\nabla \mathbf{U} = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k} \frac{\partial U_{m\ldots n} \mathbf{e}_m \ldots \mathbf{e}_n}{\partial q_k} =$$
$$= \frac{\mathbf{e}_k}{H_k} \left(\frac{\partial U_{m\ldots n}}{\partial q_k} \mathbf{e}_m \ldots \mathbf{e}_n + U_{m\ldots n} \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial q_k} \ldots \mathbf{e}_n + \cdots + U_{m\ldots n} \mathbf{e}_m \ldots \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial q_k} \right).$$

Здесь появились производные ортов $\mathbf{e}_s$ по q_k, определяемые деривационными формулами. Их значения можно найти прямым вычислением или с помощью кинематической интерпретации, известной под названием “метод подвижного триедра” [9].

Градиент радиус-вектора

$$\nabla \mathbf{r} = \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \mathbf{r}_k = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \mathbf{E}.$$

Дивергенцией тензорного поля $\mathbf{U}$ называется величина, обозначаемая $\nabla \cdot \mathbf{U}$ или $\operatorname{div} \mathbf{U}$, понижающая ранг тензорного поля на единицу:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{1}{H_k} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q_k}.$$

Например, дивергенция вектора

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}_k \cdot \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} (u_m \mathbf{e}_m) = \frac{1}{H_k} \frac{\partial u_k}{\partial q_k}.$$

Дивергенция радиус-вектора: $\nabla \cdot \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = 3$.

Ротором тензорного поля $\mathbf{U}$ называется величина, обозначаемая $\nabla \times \mathbf{U}$ или $\operatorname{rot}\mathbf{U}$, и вычисляемая по формуле

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{e}_k \times \frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q_k}.$$

Ротор радиус-вектора $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k = 0$.

Поскольку любой антисимметричный тензор $\mathbf{A}^A$, выражается через сопутствующий вектор $\mathbf{A}^A = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^A = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{e}_s \frac{1}{H_k}\frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} = \mathbf{e}_k \times \frac{1}{H_k}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_k} = \nabla \times \boldsymbol{\omega};$$

$$\nabla \times \mathbf{A}^A = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) = \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m \frac{1}{H_k}\frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} =$$

$$(\mathbf{e}_s \delta_{km} - \mathbf{e}_m \delta_{ks})\mathbf{e}_m \frac{1}{H_k}\frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} = \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k \frac{1}{H_k}\frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} - \mathbf{E}\frac{1}{H_k}\frac{\partial \omega_k}{\partial q_k} = \boldsymbol{\omega}\nabla - \mathbf{E}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Откуда следует, что $I_1(\nabla \times \mathbf{A}^A) = -2\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$; $I_1(\nabla \times \mathbf{A}^s) = 0$.

3.3. Дифференциальные операции над произведением

Известное правило дифференцирования произведения напрямую распространяется на градиент скалярных величин: $\nabla(\varphi\phi) = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi$. Градиенты произведения скаляра на вектор и скалярного произведения векторов вычисляются аналогично:

$$\nabla(\varphi\mathbf{a}) = (\nabla\varphi)\mathbf{a} + \varphi(\nabla\mathbf{a}); \qquad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}.$$

Дивергенция произведения скаляра на вектор:

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}) = \varphi\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\nabla\varphi).$$

Дивергенция векторного произведения векторов:

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}).$$

Ротор векторного произведения векторов:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a}\nabla) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b}\nabla) \cdot \mathbf{a}.$$

Следует обратить внимание, что сначала выполняется операция дифференцирования в скобках и только потом скалярное умножение на соответствующий вектор.

Дивергенция диады: $\nabla \cdot (\mathbf{ab}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}\nabla)$.

Ротор диады: $\nabla \times (\mathbf{ab}) = (\nabla \times \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a} \times (\nabla \mathbf{b})$.

Градиент скалярного умножения тензора на вектор:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b}) \cdot \mathbf{A}^T.$$

Дивергенция скалярного умножения тензора на вектор:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A} \cdot\cdot\, (\mathbf{b}\nabla).$$

Дивергенция векторного произведения тензора на радиус-вектор:

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}), \qquad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — сопутствующий вектор антисимметричной части тензора $\mathbf{A}$.

Ротор векторного произведения тензора на радиус-вектор:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{r} + \mathbf{A}^T - \mathrm{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{E}.$$

Дивергенция скалярного умножения тензоров:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \cdot\cdot\, (\nabla \mathbf{B}).$$

3.4. Двухкратное дифференцирование

Операции дивергенции и градиента используются для введения оператора Лапласа: $\Delta \mathbf{U} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U}) = \nabla^2 \mathbf{U}$.

В декартовой системе координат он представим в виде $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$.

Лапласиан произведения скаляра на вектор определяется формулой

$$\Delta(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \Delta \mathbf{a} + \mathbf{a} \Delta \varphi + 2\nabla \varphi \cdot \nabla \mathbf{a}.$$

Для любого дважды дифференцируемого тензорного поля справедливы следующие соотношения: $\nabla \times (\nabla \mathbf{U}) = 0$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) = 0$, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{U})$.

В следующих разделах приводятся основные формулы для наиболее часто используемых систем координат — декартовой, цилиндрической и сферической. Их подробное описание и вывод соответствующих деривационных формул можно найти, например, в [13].

3.4.1. Декартова система координат

В прямоугольной декартовой системе координат за обобщенные координаты принимаются x_1, x_2, x_3. Радиус-вектор имеет стандартное представление: $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$, где $\mathbf{i}_k$ — орты осей координат.

Координатные линии в декартовой системе координат параллельны координатным осям. Векторы, касательные к ним, определяются по формуле (3.2) $\mathbf{r}_k = \mathbf{i}_k$. Откуда, с учетом (3.3), находим коэффициенты Ламе и базисные орты: $H_k = 1,\ \mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k$.

Набла-оператор Гамильтона и оператор Лапласса в декартовой системе координат записываются в виде:

$$\nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Delta = \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Примеры:

$$1) \quad \nabla|\mathbf{r}| = \nabla|\mathbf{r}| = \mathbf{e}_k \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_k} = \mathbf{e}_k \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|};$$

$$2) \quad \nabla\left(|\mathbf{r}|^n\right) = n|\mathbf{r}|^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = n|\mathbf{r}|^{n-2}\mathbf{r};$$

$$3) \quad \nabla \cdot (\mathbf{r}\mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{r}) = 3\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 4\mathbf{r}.$$

3.4.2. Цилиндрическая система координат

В качестве криволинейных координат берутся радиус, азимутальный угол и высота (Рис.1): $q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z, \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$. Координатными линиями служат радиально направленные лучи, окружности и прямые параллельные оси OZ.

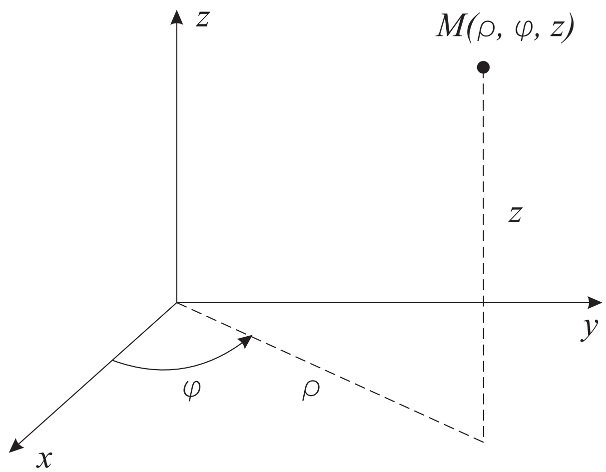

Рис. 1. Цилиндрическая система координат

Радиус вектор точки представляется выражением $\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\mathbf{i}_1 + \rho\sin\varphi\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3$.

Отсюда следует, что касательные векторы и коэффициенты Ламе имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_\rho, \quad H_1 = |\mathbf{r}_1| = 1;$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\mathbf{i}_1 + \rho\cos\varphi\mathbf{i}_2 = \rho\mathbf{e}_\varphi, \quad H_2 = |\mathbf{r}_2| = \rho;$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_z, \qquad H_3 = |\mathbf{r}_3| = 1.$$

Базисные векторы $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{z}$ имеют направления радиусов окружностей, касательных к окружностям и оси концентрических цилиндров.

Радиус-вектор в цилиндрической системе координат записывается в форме $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$.

Набла-оператор Гамильтона в цилиндрической системе координат:

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Деривационные формулы. Отличны от нуля только следующие производные: $\dfrac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi$, $\dfrac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\rho$.

Лапласиан в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Пример:

$$\mathbf{u} = f(z)\mathbf{e}_z + g(\varphi)\mathbf{e}_\varphi;$$

$$1) \quad \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{\rho}\left(g'_\varphi \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi - g\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho\right) + f'_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z;$$

$$2) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} g'_\varphi + f'_z; \qquad 3) \quad \nabla \times \mathbf{u} = \frac{g}{\rho}\mathbf{e}_z.$$

3.4.3. Сферическая система координат

В качестве криволинейных координат берутся радиус сферы, зенитный и азимутальный углы (рис.2): $q_1 = R, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi, \quad 0 < R < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

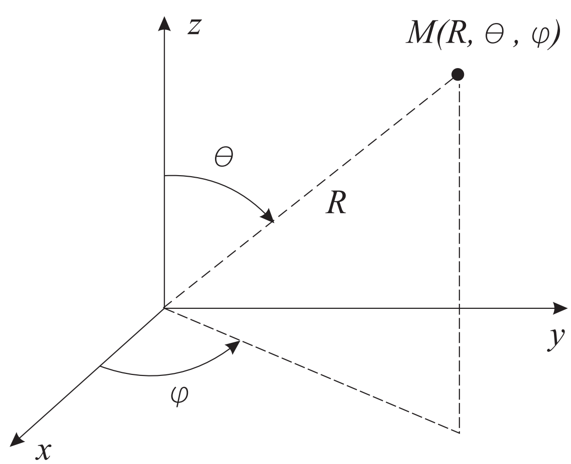

Рис. 2. Сферическая система координат

Радиус-вектор в сферической системе координат имеет крайне простую форму: $\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R$.

Формулы преобразования координат: $x = R\sin\theta\cos\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta$.

Тогда

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial R} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + \cos\theta\,\mathbf{i}_3;$$
$$\mathbf{r}_2 = R\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + R\cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 - R\sin\theta\,\mathbf{i}_3;$$
$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -R\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + R\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_2.$$

Коэффициенты Ламе равны:

$$H_1 = H_R = 1, \qquad H_2 = H_\theta = R, \qquad H_3 = H_\varphi = R\sin\theta.$$

Набла-оператор Гамильтона в сферической системе координат:

$$\nabla = \mathbf{e}_R\,\frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi\,\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Деривационные формулы.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial R} = 0; \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi; \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta;$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_R - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial R} = 0; \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi; \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_R.$$

Лапласиан в сферических координатах записывается в виде

$$\triangle = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).$$

3.5. Теорема о дивергенции

Рассмотрим некоторый объем V, ограниченный поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$. Считаем, что во всем объеме задано непрерывно дифференцируемое тензорное поле $\mathbf{U}$. Известная формула Гаусса – Остроградского может быть обобщена на случай тензорное поле:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{U}\,dV = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{U}\,dS. \tag{3.7}$$

Утверждение о справедливости (3.7) называют теоремой о дивергенции. Также можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\int \nabla \mathbf{U}\, dV = \int_S \mathbf{n}\mathbf{U}\, dS; \qquad \int_V \nabla \times \mathbf{U}\, dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{U}\, dS.$$

Структура приведенных формул очевидна — набла-оператор Гамильтона в объемном интеграле заменяется на вектор нормали в поверхностном.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Векуа И.Н.** Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И.Н. Векуа. — М.: Наука, 1978. — 296 с.

2. **Димитриенко Ю.И.** Тензорное исчисление / Ю.И. Димитриенко.— М.: Высш. шк., 2001. — 575 с.

3. **Жилин П.А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А. Жилин. — СПб.: Нестор, 2001. — 276 с.

4. **Жилин П.А.** Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / П.А. Жилин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 584 с.

5. **Жилин П.А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек / П.А. Жилин // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 386. - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 1982. — С.29-46.

6. **Л.М.Зубов, М.И.Карякин**. Тензорное исчисление / Л.М. Зубов, М.И. Карякин. — М.: Вузовская книга, 2006. — 120с.

7. **Коренев Г.В**. Тензорное исчисление / Г.В. Коренев. — М.: Изд-во МФТИ, 1995. — 240 с.

8. **Кочин Н.Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

9. **Лурье А.И.** Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 940 с.

10. **Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1980. — 512 с.

11. **Мак-Коннел А.Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А.Дж. Мак-Коннел. — М.: Физматгиз, 1963. — 411 с.

12. **Никабадзе М.У.** Некоторые вопросы тензорного исчисления. Часть II / М.У. Никабадзе. –Џ М.: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова. 2007. — 93 с.

13. **Пальмов В.А.** Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: учебное пособие / В.А. Пальмов. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 108 с.

14. **Победря Б.Е.** Лекции по тензорному анализу / Б.Е. Победря. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 264 с.

15. **Рашевский П.К.** Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. — М.: Наука, 1964. — 664 с.

16. **Речкалов В.Г.** Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников: учеб. пособие / В.Г. Речкалов. –Џ Челябинск: ИИУМЦ "Образование 2008. –Џ 140 с.

17. **Сокольников И.С.** Тензорный анализ /И.С. Сокольников. — М.: Наука, 1971. — 376 с.

18. **Трусделл К.** Первоначалльный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. — М.: Наука, 1975. –Ч 592 с.

19. **Jeffreys H.** Cartesian Tensors / H. Jeffreys. — Cambridge University Press, Cambridge, UK.—1931.— p.92.

20. **Lebedev L., Cloud M., Eremeyev V.** Tensor analysis with applications in mechanics.// World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 2010. — p. 363.

Вильчевская Елена Никитична

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Редактор *М.Б. Шишкова*
Технический редактор *А.И.Колодяжная*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. . Тираж 100. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,
в типографии Издательства Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.