ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

(СПБПУ Петра Великого)

Институт прикладной математики и механики

Кафедра теоретической механики

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Магистерская работа студента

дневного отделения

Антонова Ильи Денисовича

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор **Порубов А.В.**

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

Введение

В последнее время в разных областях науки наблюдается рост интереса к изучению динамики нелинейных волн. Что же такое *нелинейные* волны? *Нелинейность* противопоставляется *линейности*, то есть подразумевается, что нелинейные волны должны обладать рядом определяющих их свойств, не присущих линейным волнам.

С физической точки зрения, когда говорится о нелинейности, подчеркиваются *физические* свойства нелинейных волн. Так, волны достаточно малой амплитуды, то есть линейные волны, при распространении в среде не искажаются и не взаимодействуют друг с другом[1]. В то же время волны большей амплитуды — нелинейные — обладают другими свойствами: скорость их начинает зависеть от амплитуды, а также между волнами может осуществляться взаимодействие. Подчеркивается, что для линейных волн, в отличие от нелинейных, выполняется принцип суперпозиции.

С математической же точки зрения, когда говорится о нелинейности, подчеркиваются свойства нелинейных дифференциальных уравнений, которыми описываются процессы в рассматриваемых динамических системах. Для линейных дифференциальных уравнений разработаны и хорошо изучены методы получения их решения [2] [3]. С другой стороны, для нелинейных уравнений нет общего метода их поиска. Получение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений представляет собой более трудную и творческую задачу [4] [5].

Нелинейные волны и колебания играют очень важную роль роль в современной науке. В самом деле, все реальные динамические системы нелинейны. Их можно считать линейными лишь в случае рассмотрения в них волн достаточной малости — линейных волн. Таким образом, говоря о нелинейности, обязательно подразумевается некое сравнение линейностью, при этом имеются в виду что-то более сложное и обобщенное, математически описываемое нелинейными дифференциальными уравнениями.

Исследование нелинейных волн — бурно развивающаяся и перспективная область науки. Изучение нелинейных волн началось с их открытия на поверхности воды Джоном Скоттом Расселом [6] и с последующей основополагающей работы Стокса [7] более ста лет назад. Описание задач в нелинейной постановке позволяет предсказывать и объяснять эффекты и явления, не доступные при рассмотрении задачи в линейной постановке. Например, нелинейная постановка задач механики позволяет описывать локализацию волн на поверхности воды или волн деформации в стержнях [8, 9]. В нелинейной оптике описано взаимодействие лучей при распространении в нелинейной среде, при котором один луч может изменять траекторию другого [10]. Число таких нелинейных проблем, решенных в различных разделах физики, непрерывно возрастает.

Одно из фундаментальных важнейших достижений в области исследования нелинейных волновых процессов — успех в изучении солитонов. Солитоны — бегущие с постоянной скоростью уединенные устойчивые волны, взаимодействующие как частицы [11]. Взаимодействуя друг с другом или с некоторыми другими возмущениями, они способны сохранять свою структуру и продолжать свое движение, перенося в среде существенную энергию. Такое свойство солитонов позволяет использовать их для передачи информации на большие расстояния без потерь. Устойчивость солитонов объясняется противодействием двух процессов: нелинейным взаимодействием со средой, приводящим к «опрокидыванию» волны, с дисперсией или диссипацией в системе, которая приводит к расплыванию профиля волны в пространстве и не дает волне опрокинуться.

Существует множество математических моделей, допускающих существование солитонов в решении. В том числе [1], уравнение Кортевега-де Фриза, впервые описавшее поведение солитона, нелинейное уравнение Шредингера, Клейна-Гордона и др.. При этом каждое из этих модельных уравнений может описывать движение солитонов в разных средах. Например, нелинейное уравнение Шредингера может, с одной стороны, описывать движение огибающей волнового пакета в виде солитона в среде с дисперсией и кубической нелинейностью, а с другой, — распространение света в нелинейных кристаллах с дисперсией.

Среди таких дифференциальных нелинейных уравнений в частных производных, точными решениями которых являются локализованные волны, можно выделить знаменитое уравнение синус-Гордона, находящее применение в самых разных областях физики [12–14]. Модель Френкеля-Конторовой [14], в которой учитывается две цепочки атомов, являющихся приближением двух слоев атомов, описывает движение дислокации в кристалле уравнением синус-Гордона. Также уравнение синус-Гордона может описывать [14] расплетания цепочки ДНК при репликации и динамики протяженных молекул, распространения границ доменов ферромагнитных и ферроэлектрических материалов и другие явления [15–17].

Существует простая механическая интерпретация уравнения синус-Гордона — модель Скотта [18] — механическая система, представляющая из себя маятниковую решетку, в которой распространяются крутильные волны. Теоретически такую систему можно использовать для демонстрации солитонных решений уравнения синус-Гордона. Математически для этого необходимо, чтобы профиль формы и скорости волны в начальный момент времени был задан в виде одного из точных решений уравнения синус-Гордона. На практике точно реализовать такую ситуацию довольно сложно и, соответственно, сложно получить и поддерживать в среде солитон желаемой формы и скорости. При этом поддержание волны в виде солитона представляет собой серьезный научный интерес, так как солитоны могут переносить довольно большую энергию, способную разрушать материал, а так же передавать информацию на большие расстояния. Возникает вопрос: можно ли каким-нибудь способом восстанавливать форму волны и поддерживать в виде солитона для механических структур, описываемых нелинейными уравнениями, такими как уравнение синус-Гордона?

В этих целях могут применяться методы теории управления [19]. Данная работа посвящена изучению и разработке современных методов управления локализованными нелинейными волнами в механических системах.

В первой части работы описывается алгоритм распределенного управления волнами в механической среде, поведение которых описывается уравнениями, подобными уравнению синус-Гордона. Для подобного уравнения уже было показано в работах [20–22], что распределенное управление можно успешно применять для поддержания локализованных волн в случае, если начальные условия не соответствуют точному решению уравнения. Однако в этих работах поддерживаемые управлением волны задавались в виде точных решений уравнения синус-Гордона. К тому же, алгоритм управления тестировался на математической модели, не привязанной к конкретной физической задаче. Одной из целей данной работы был поиск механической задачи, решение которой описывается модельными уравнениями, схожими с уравнением синус-Гордона. Помимо этого, было показано, что в качестве цели управления необязательно должен выбираться солитон, являющийся точным решением уравнения синус-Гордона.

Вторая часть работы посвящена исследованию распределенного управления связанными нелинейными волнами движущихся дефектов[23–25] в двухатомных кристаллах. В данном случае распространение связанной локализованной волны может быть нарушено, например, неточным соответствием положений начальных форм каждой из волн[26–28]. Алгоритм управления в таком случае может быть применен для достижения и поддержания обеими волнами форм точного решения связанной системы уравнений. В частности, алгоритм может устранить осцилляции и другие дефекты в профилях распространяющихся волн, вызванных несоответствием положений максимумов связанных волн в момент генерации. Исследовался случай введения управления в одно из связанных уравнений.

Работа структурирована следующим образом:

В первой главе описывается постановка механической задачи: на верхнюю границу плоского упругого слоя, нижняя граница которого погружена в морозный грунт, действует распределенная нагрузка. В определенных приближениях выводится модельное уравнение для слабо-поперечных волн смещений.

Во второй главе, во-первых, обосновывается работа распределенного алгоритма управления, введенного в уравнение синус-Гордона. Показывается, что при задании распределенной нагрузки в виде целевой функции в поставленной задаче, ее модельное приводится к уравнению синус-Гордона с управлением. Во-вторых, рассматривается обобщенная задача, которая описывается двойным уравнением синус-Гордона с управлением. Также по аналогии составляется модельное уравнение дисперсионного уравнения синус-Гордона с управлением.

В третьей главе приведены результаты исследований: численные решения приведенных во второй главе уравнений с управлением при определенных параметрах, а также исследованы возможные цели управления. Главный результат проведенных исследований — алгоритм управления работает корректно, при этом целевые функции управления *не обязаны* быть точными решениями рассмотренных уравнений.

В четвертой главе приведены результаты исследования работы алгоритма распределенного управления при его обобщении на связанные уравнения, которые описывают движение дефектов в двухатомных кристаллах.

В заключении подведены итоги, отмечены основные выводы и главные результаты проделанной работы.

Глава 1

Механическая система, в которой реализуется распределенный алгоритм управления

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим упругий изотропный слой в нелинейной постановке задачи, нижняя граница которого погружена в морозный грунт, взаимодействие с которым описывается моделью Керра [29], а на верхнюю его границу действует поперечная и продольная нагрузки.

Для получения уравнений движения и граничных условий используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, положив равной нулю вариацию функционала действия[9, 19]:

$$\delta S = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{-h}^{h} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} L\, dx + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0, \tag{1.1}$$

где $L = K - \Pi$ — объемная плотность Лагранжиана, A — работа внешних сил.

Интегрирование производится в начальный момент времени при $t = t_0$. Объемная плотность кинетической энергии слоя K выражается через компоненты вектора смещения $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = (u(x, y, t), v(x, y, t)),$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} - \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ — вектор начального положения частицы слоя, определяющий отсчетную конфигурацию, а $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, задающий актуальную конфигурацию, в которую частица смещается под действием внешних сил.

$$K = \frac{\rho}{2}(u_t^2 + w_t^2).$$

Здесь ρ — плотность слоя.

Физическая нелинейность зависит от структуры выражения потенциальной энергии Π, которую введем следующим образом:

$$\Pi = \Pi_l + \Pi_{nl}, \tag{1.2}$$

Первое слагаемое , Π_l, — есть выражение потенциальной энергии по модели Мурнагана [30, 31], в котором учтены только линейные члены разложения по инвариантам тензора деформаций:

$$\Pi_l = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - 2\mu I_2,$$

Здесь λ, μ — параметры Лямэ. I_1, I_2 — инварианты тензора деформаций Коши-Грина [30, 32], не зависящие от системы координат.

$$I_1(\mathbf{C}) = tr\mathbf{C} = C_{xx} + C_{yy}$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \frac{(tr\mathbf{C})^2 - tr\mathbf{C}^2}{2} = C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2$$

$$C_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial r_k} + \frac{\partial V_k}{\partial r_i}\right)$$

$$I_1 = u_x + w_y, \quad I_2 = u_x w_y - \frac{1}{4}(u_y + w_x)^2.$$

Пусть слой описывается моделью Френкеля и Конторовой [14], учитывающей взаимодействие между дислокациями в кристалле. В длинноволновом приближении эта модель описывается уравнением синус-Гордона. Тогда Π_{nl} — нелинейная поправка в потенциальную энергию вводится следующим образом:

$$\Pi_{nl} = \tilde{F}\sin^2\left(\frac{\sqrt{u^2 + w^2}}{h}\right),$$

Учтем граничные условия задачи. По модели Керра [29] взаимодействие между слоем и мерзлым грунтом при $y = -h$ описывается следующими уравнениями:

$$y = -h: \begin{cases} \sigma_y = \alpha_1 w + \alpha_2 w_t, \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

Где σ_y, τ_{xy} — нормальное и касательное напряжения.

На верхнюю границу слоя при $y = h$ действуют произвольные напряжения, описываемые функциями $f_N(x,t)$ и $f_\tau(x,t)$:

$$y = h: \begin{cases} \sigma_y = \bar{f}_N, \\ \tau_{xy} = \bar{f}_\tau \end{cases}$$

Тогда уравнение Гамильтона-Остроградского (1.1) принимает вид:

$$\delta \left[\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (K - \Pi_l - \Pi_{nl})\ dtdydx \right] + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta A_1 dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta A_2 dt = 0, \tag{1.3}$$

где A_1 и A_2 — элементарные работы внешних сил на верхней $y = h$ и нижней $y = -h$ границах соответственно:

$$\delta A_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_N \delta w\, dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_\tau \delta u\, dx$$

$$\delta A_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 w + \alpha_2 w_t) \delta w\, dx$$

Так как $\delta t = 0$, $\delta y = 0$, $\delta x = 0$, операции варьирования и интегрирования коммутативны. Следовательно, вне границ слоя:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\delta K - \delta\Pi_l - \delta\Pi_{nl})\, dtdydx = 0,$$

Отдельно рассмотрим вариации от каждого из слагаемых. Сначала варьируем слагаемое Π_{nl}:

$$\delta\Pi_{nl} = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{F} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{u^2+w^2}}{h} \right) \, dtdydx =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\tilde{F} \sin \left(\frac{\sqrt{u^2+w^2}}{h} \right) \, \cos \left(\frac{\sqrt{u^2+w^2}}{h} \right) \, \delta \frac{\sqrt{u^2+w^2}}{h} \, dtdydx =$$

$$= - \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}}{h} \sin \left(\frac{2\sqrt{u^2+w^2}}{h} \right) \, \frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}} \left(2u\delta u + 2w\delta w \right) \, dtdydx$$

Варьируем K:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{2} (u_t^2 + w_t^2) dtdxdy = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho (u_{tt}\delta u + w_{tt}\delta w) dtdxdy$$

Варьируем Π_l:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)(u_x+w_y)^2 - 2\mu(u_x w_y - \frac{1}{4}(u_y+w_x)^2) dtdxdy =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{-h}^{h} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\delta u((\lambda+2\mu)u_{xx} + \mu u_{yy} + (\lambda+\mu)w_{xy}) +$$

$$+ \delta w((\lambda+2\mu)w_{yy} - \mu w_{xx} - (\lambda+\mu)u_{xy})] dtdxdy$$

Объединяя слагаемые при δw и δu, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda+2\mu)u_{xx} - \mu u_{yy} - (\lambda+\mu)w_{xy} + F\frac{u}{\sqrt{u^2+w^2}} \sin \frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2} = 0, \\ \rho w_{tt} - (\lambda+2\mu)w_{yy} - \mu w_{xx} - (\lambda+\mu)u_{xy} + F\frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}} \sin \frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2} = 0 \end{cases}$$

Здесь $F = \frac{\tilde{F}}{h}$. Выражения для напряжений σ_y, τ_{xy} на границах при $y = -h$, $y = h$:

$$\begin{cases} \sigma_y = (\lambda+2\mu)w_y + \mu u_x, \\ \tau_{xy} = \mu(u_y + w_x) \end{cases}$$

1.2. Асимптотическое решение в длинноволновом пределе

Построим приближенное решение полученной системы уравнений, основываясь на асимптотическом методе, описанном в [9].

Исходную двумерную задачу асимптотически редуцируем к одномерному модельному уравнению. Для этого будем рассматривать длинные слабопоперечные волны $\varepsilon = \frac{h}{L}$, L – масштаб для x, h – масштаб для y, при этом $w = W, u = \varepsilon W$. Положим $F \sim \varepsilon^2$. Обезразмерим уравнение и будем искать неизвестные компоненты вектора смещения в виде степенных рядов по параметру ε. Искать решение будем в приближении ε^2:

$$w = w_0 + \varepsilon^2 w_1 + ...$$

$$u = u_0 + \varepsilon^2 u_1 + ...$$

Обезразмерим задачу:

$$w = \bar{w}W, \quad x = \bar{x}L, \quad y = \bar{y}h, \quad u = \bar{u}\varepsilon W, \quad t = \bar{t} \cdot \frac{L\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}$$

Для удобства сразу после обезразмеривания вернемся к старым обозначениям, переименовывая $w = \bar{w}, u = \bar{u}, t = \bar{t}, x = \bar{x}$. Приведем преобразование периодического слагаемого при δw. После сокращения на W в приближении ε^2:

$$F\,\frac{u}{u^2+w^2}\sin\frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2} = F\,\frac{u\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2u^2+w^2}}\sin\frac{2}{h}\sqrt{\varepsilon^2u^2+w^2} \simeq$$

$$\simeq F\,\frac{\sin w\,\frac{2}{h}(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\varepsilon^2)}{w(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\varepsilon^2)}u\varepsilon \simeq$$

$$\simeq F\,\frac{u}{w}\left(1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\varepsilon^2\right)\cdot\left(\sin\frac{2}{h}w+\cos\frac{2}{h}w\varepsilon^2\right)\varepsilon \simeq F\,\frac{u}{w}\sin\frac{2}{h}w\cdot\varepsilon \sim \varepsilon^3 = 0$$

Приведем преобразование периодического слагаемого первого уравнения. После сокращения на W в приближении ε^2:

$$F\,\frac{w}{u^2+w^2}\sin\frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2} = F\,\frac{w}{\sqrt{\varepsilon^2u^2+w^2}}\sin\frac{2}{h}\sqrt{\varepsilon^2u^2+w^2} \simeq$$
$$\simeq F\,\frac{\sin w\,\frac{2}{h}(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\varepsilon^2)}{\sqrt{1+\frac{u^2}{w^2}\varepsilon^2}} \simeq F\,\left(\sin\frac{2}{h}w + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\varepsilon^2\,\cos\frac{2}{h}w\right) \simeq F\,\sin\frac{2}{h}w \sim \varepsilon^2$$

Тогда обезразмеренная система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{L^2}\rho\varepsilon u_{tt} - \frac{\mu}{h^2}\varepsilon u_{yy} - \frac{\lambda+\mu}{hL}w_{xy} - \frac{\lambda+2\mu}{L^2}\varepsilon u_{xx} = 0 \\ \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{L^2}\rho w_{tt} - \frac{\mu}{L^2}w_{xx} - \frac{\lambda+\mu}{hL}\varepsilon u_{xy} - \frac{\lambda+2\mu}{h^2}w_{yy} + F\sin\frac{2}{h}w = 0 \end{cases} \quad |\cdot\frac{h^2}{\mu},$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_{tt} - u_{yy} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}w_{xy} - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\varepsilon^2 u_{xx} = 0 \\ \varepsilon^2 w_{tt} - \varepsilon^2 w_{xx} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\varepsilon^2 u_{xy} - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}w_{yy} + \frac{h^2}{\mu}F\sin\frac{2}{h}w = 0 \end{cases}.$$

Примем порядок малости у $\bar{f}_\tau = \varepsilon^2 f_\tau$, $\bar{f}_N = \varepsilon^2 f_N$. Тогда граничные условия:

$$y=-1: \quad \begin{cases} \mu(u_y+w_x) = 0 \\ (\lambda+2\mu)w_y + \mu\varepsilon^2 u_x = \alpha_1 h w + \alpha_2\frac{h}{L}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho}}w_t \end{cases},$$
$$y=1: \quad \begin{cases} \mu(u_y+w_x) = \varepsilon^2 f_\tau \\ (\lambda+2\mu)w_y + \mu\varepsilon^2 u_x = \varepsilon^2 f_N \end{cases}.$$

Переобозначим коэффициенты:

$$\alpha_1\,h = \varepsilon^2\bar{\alpha}_1$$
$$\alpha_2\,\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho}} = \varepsilon\bar{\alpha}_2$$
$$F\,\frac{h^2}{\mu} = \varepsilon^2\bar{F}$$

В нулевом приближении с учетом граничных условий выражения для u, w:

$$\begin{cases} w_0 = w(x,t) \\ u_0 = -(y-h)w_x(x,t) \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда, с учетом (1.4) приближении ε^2 система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \mu u_{0,tt} - \mu u_{1,yy} - (\lambda+\mu) w_{1,xy} - (\lambda+2\mu) u_{0,xx} = 0 & (1.5) \\ \mu w_{0,tt} - \mu w_{0,xx} - (\lambda+\mu) u_{0,xy} - (\lambda+2\mu) w_{1,yy} + \bar{F} \sin \frac{2}{h} w_0 = 0 & (1.6) \\ u_{1,y} + w_{1,y} = 0, \qquad y = -1 & (1.7) \\ \mu(u_{1,y} + w_{1,y}) = f_\tau, \qquad y = 1 & (1.8) \\ (\lambda+2\mu) w_{1,y} + \mu u_{0,x} = \bar{\alpha_1} w_0 + \bar{\alpha_2} w_{0,t}, \quad y = -1 & (1.9) \\ (\lambda+2\mu) w_{1,y} + \mu u_{0,x} = \varepsilon^2 f_N, \quad y = 1 & (1.10) \end{cases}$$

Подставим (1.4) в (1.6) :

$$w_{1,yy} = \mu w_{0,tt} - \mu w_{0,xx} - (\lambda+\mu) u_{0,xy} + \bar{F} \sin \frac{2}{h} w_0$$

$$w_1 = \frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{(y-h)^2}{2} \left(\mu w_{tt} - \lambda w_{xx} + \bar{F} \sin \frac{2}{h} w \right) + Ay + B$$

Из (1.9) и (1.10):

$$(\lambda+2\mu)\, A = f_N \quad \Rightarrow \quad A = \frac{f_N}{\lambda+2\mu}$$

Из (1.9):

$$-2h(\mu w_{tt} - \lambda w_{xx} + \bar{F} \sin \frac{2}{h} w) + f_N + 2\mu h w_{xx} - \bar{\alpha_1} w - \bar{\alpha_2} w = 0$$

Преобразуя последнее выражение, приходим к итоговому виду модельного уравнения для смещения w:

$$\mu w_{tt} - (\lambda+\mu) w_{xx} + \bar{F} \sin \frac{2}{h} w = \frac{1}{2h} (f_N - (\alpha_1 w + \alpha_2 w_t)). \qquad (1.11)$$

Легко заметить, что если приравнять правую часть (1.11) к нулю, то уравнение принимает одномерный вид знаменитого уравнения синус-Гордона. В правой части уравнения остается произвольной функция f_N. Возникает вопрос, можно ли ее каким-нибудь образом использовать для управления нелинейными волнами в уравнении (1.11).

Глава 2

Управление в нелинейных уравнениях

2.1. Управление

Теория управления — наука о принципах и методах управления различными системами и процессами. Её суть — построение некоторой математической модели, которая позволит системе или процессу достигать состояния, которое требуется целями управления. В том числе, известны и разработаны методы управления системами и процессами, описываемыми нелинейными уравнениями. Интересующее нас уравнение — уравнение синус-Гордона.

Метод скоростного градиента[33] — один из способов управления процессами, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Применим его для уравнения синус-Гордона:

$$U_{tt} + \sin(U) - U_{xx} + u(x,t) = 0. \tag{2.1}$$

В уравнение вводится управляющая функция $u(x,t)$, которая по схеме скоростного градиента устремляет решение уравнения к целевой функции U^*. Для уравнения синус-Гордона эту функцию целесообразно выбирать, например, в виде солитона желаемой формы, которую мы стремимся сохранить при его движении в среде. Управляющая функция $u(x,t)$ согласно методу скоростного градиента выражается следующим образом:

$$u(x,t) = \gamma\epsilon(x,t), \tag{2.2}$$

$$\epsilon(x,t) = \alpha e(x,t) + \alpha_1 e_t(x,t),$$

$$e(x,t) = U(x,t) - U^*(x,t),\ e_t(x,t) = U_t(x,t) - U_t^*(x,t).$$

где γ, α и α_1 — постоянные параметры алгоритма. Приведем доказательство того, что функция $u(x,t)$, выраженная как (2.2) и введенная таким образом в уравнение действительно будет управляющей. Целевой функционал определяется[33] следующим образом:

$$Q(u) = \frac{1}{2}(\alpha e(x,t) + \alpha_1 e_t(x,t))^2. \tag{2.3}$$

Чтобы осуществить управление в нашем случае, необходимо минимизировать производную по времени от целевого функционала:

$$Q_t(u) = (\alpha e(x,t)+\alpha_1 e_t(x,t))(\alpha e_t(x,t)+\alpha_1 e_{tt}(x,t)) = \epsilon(x,t)(\alpha e_t(x,t)+\alpha_1(...-u)) \tag{2.4}$$

где ... — члены, не зависящие от u. Минимизация по u такого функционала дает в качестве u выражение, пропорциональное ϵ, то есть в точности (2.2). Что и требовалось доказать.

2.2. Введение управления в уравнение синус-Гордона для упругого слоя

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.11). Выполним для него масштабное преобразование $x = L_1 \cdot t$. Тогда оно примет вид:

$$w_{tt} - \frac{\lambda+\mu}{\mu L_1^2} w_{xx} + \frac{\bar{F}}{\mu}\sin\frac{2}{h}w = \frac{1}{\mu}\frac{1}{2h}(f_N - (\alpha_1 w + \alpha_2 w_t)). \tag{2.5}$$

Введем новый масштаб для функции смещения w, и перепишем уравнение для новой функции W:

$$W = \frac{2}{h}w \tag{2.6}$$

$$W_{tt} - \frac{\lambda+\mu}{\mu L_1^2} W_{xx} + \frac{2}{h}\frac{\bar{F}}{\mu}\sin W = \frac{1}{\mu}\frac{1}{2h}(f_N - (\alpha_1 W + \alpha_2 W_t)). \tag{2.7}$$

Примем $L_1^2 = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$ в силу произвола в выборе L_1, $\frac{2}{h}\frac{\bar{F}}{\mu} = 1$ в силу произвола выборе $\bar{F}$, а выражение в правой части $\left(\frac{1}{\mu}\frac{1}{2h}\right)$ внесем в произвольную функцию f_N и в параметры α_1, α_2. Тогда уравнение принимает вид:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W = f_N - (\alpha_1 W + \alpha_2 W_t) \tag{2.8}$$

Выбор функции нормальной нагрузки f_N все ещё остается произвольным. Переопределим f_N:

$$f_N = \alpha_1 W^*(x,t) + \alpha_2 W_t^*(x,t),$$

где $W^*(x,t)$ — произвольная функция тогда

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W = \alpha_1 (W^* - W) + \alpha_2 (W_t^* - W_t). \tag{2.9}$$

Заметим, что выбрав в качестве $f_N = \alpha_1 W^*(x,t) + \alpha_2 W_t^*(x,t)$ получаем уравнение, в точности совпадающее с уравнением синус-Гордона с управлением, где $W * (x,t)$ — целевая функция управления. Это означает, что задавая нагрузку на верхней границе рассмотренного упругого слоя, можно управлять поведением слабо-поперечных волн смещения, которые в нем распространяются. Следующая задача — численно исследовать работу алгоритма управления.

2.3. Введение управления в двойное уравнение синус-Гордона с управлением

Перед непосредственной проверкой работы алгоритма управления вернемся к постановке задачи. Рассмотрим более обобщенный вариант задачи, в котором поведение локализованных волн будет описываться уравнением с периодическим членом следующего порядка — двойным уравнением синус-Гордона. Более обобщенной постановке соответствует выбор потенциальной энергии в виде:

$$\Pi = \Pi_l + \Pi_{nl} + \Pi_{2nl}$$

$$\Pi_{2nl} = \tilde{F}_1 \sin^2\left(\frac{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}{h}\right)$$

Модельное уравнение двойного уравнения синус-Гордона с управлением выводится аналогичным образом. Исключением является учет нового члена потенциальной энергии Π_{2nl}.

Приведем вариацию слагаемого Π_{2nl}:

$$\delta\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{F}_1\sin^2\left(\frac{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}{h}\right)dtdydx =$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}2\tilde{F}_1\sin\left(\frac{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}{h}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}{h}\right)\cdot$$
$$\cdot\,\delta\frac{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}{h}\,dtdydx =$$
$$=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4\tilde{F}_1}{h}\sin\left(\frac{2\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}{h}\right)\frac{1}{2\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}(2u\delta u+2w\delta w)\;dtdydx$$

Система уравнений, полученная после варьирования и объединения слагаемых при δu и δw:

$$\begin{cases}\rho u_{tt}-(\lambda+2\mu)u_{xx}-\mu u_{yy}-(\lambda+\mu)w_{xy}+F\frac{u}{\sqrt{u^2+w^2}}\sin\frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2}+\\ \qquad +2F_1\frac{2u}{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}\sin\frac{2}{h}\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}=0,\\ \rho w_{tt}-(\lambda+2\mu)w_{yy}-\mu w_{xx}-(\lambda+\mu)u_{xy}+F\frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}}\sin\frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2}+\\ \qquad +2F_1\frac{w}{\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}}\sin\frac{2}{h}\sqrt{(2u)^2+(2w)^2}=0\end{cases},$$

где $F_1=\frac{\tilde{F}_1}{h}$. Применим к полученной системе ту же асимптотическую процедуру для получения решения в виде уравнения, аналогичного (2.10). Для $F\,\frac{h^2}{\mu}=\varepsilon^2\bar{F}$ получим аналогичное (2.10) уравнение для смещения w:

$$\mu w_{tt}-(\lambda+\mu)w_{xx}+\bar{F}\sin\frac{2}{h}w+2\bar{F}_1\sin\frac{2}{h}(2w)=\frac{1}{2h}(f_N-(\alpha_1 w+\alpha_2 w_t)).\quad(2.10)$$

Перепишем уравнение для функции W(2.6). Получим

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + q \sin 2W = f_N - (\alpha_1 W + \alpha_2 W_t), \tag{2.11}$$

где $q = 2\frac{2}{h}\frac{\bar{F}_1}{\mu}$. Здесь снова в качестве f_N выберем функцию

$$f_N = \alpha_1 W^*(x,t) + \alpha_2 W_t^*(x,t).$$

,

где W^* — целевая функция управления. Таким образом, уравнение для рассматриваемой задачи в обобщенном случае сводится к двойному уравнению синус-Гордона с управлением:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + q \sin 2W = \alpha_1 (W^* - W) + \alpha_2 (W_t^* - W_t). \tag{2.12}$$

Для данного уравнения также будем исследовать работу алгоритма управления. В частности, выясним, для каких значений q он будет корректно работать, и распространение каких форм локализованных волн можно поддерживать управлением для данного уравнения.

2.4. Дисперсионное уравнение синус-Гордона с управлением

При рассмотрении задачи Френкеля-Конторовой в континуальном пределе одномерное модельное уравнение принимает вид

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + bW_{xxxx} = 0, \tag{2.13}$$

которое именуется дисперсионным уравнением синус-Гордона. В уравнение синус-Гордона и в двойное уравнение синус-Гордона управление вводится, в конечном счете, путем добавления комбинации $\alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t)$. По аналогии грубо добавим эту управляющую комбинацию в правую часть дисперсионного уравнения синус-Гордона и получим дисперсионное уравнение синус-Гордона с управлением:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + bW_{xxxx} = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t). \tag{2.14}$$

Для данного уравнения также будем исследовать работу алгоритма управления. В частности, выясним, для каких значений b он будет корректно работать, и распространение каких форм локализованных волн можно поддерживать управлением для данного уравнения.

Глава 3

Реализация алгоритма управления

Необходимо исследовать работу управления для трех обозначенных в предыдущей главе уравнений.

Двойное уравнение синус-Гордона с управлением:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + q \sin 2W = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t). \tag{3.1}$$

Дисперсионное уравнение синус-Гордона с управлением:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + bW_{xxxx} = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t). \tag{3.2}$$

Уравнение синус-Гордона с управлением по сути является частным случаем представленных уравнений при $b = 0$ или $q = 0$. Поэтому имеет смысл начать тестирование алгоритма именно с него, так как оно является самым простым и, предположительно, менее требовательным к параметрам алгоритма.

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t). \tag{3.3}$$

Решения уравнений, их визуализацию и анализ будем проводить в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Необходимо сразу отметить, что при численном решении уравнений в данном математическом пакете предусмотрена функция автоматического выбора сетки (шаг по координате и времени), обеспечивающая оптимальную точность решения. В цель работы не входило исследование сходимости алгоритма управления по сетке, поэтому в ходе работы эта функция активно использовалась. Таким образом, далее в расчетах подразумевается, что сетка выбрана автоматически.

3.1. Уравнение синус-Гордона с управлением

Исследуем работу управления в уравнении (3.3).

Точное решение уравнения синус-Гордона (УСГ) для произвольной фазовой скорости волны V и точки локализации x_0 показано на Рис. 3.1 выглядит следующим образом:

$$W(x,t) \; = \; 4\arctan\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{(1-V^2)}}(x-Vt-x_0)\right)\right) \tag{3.4}$$

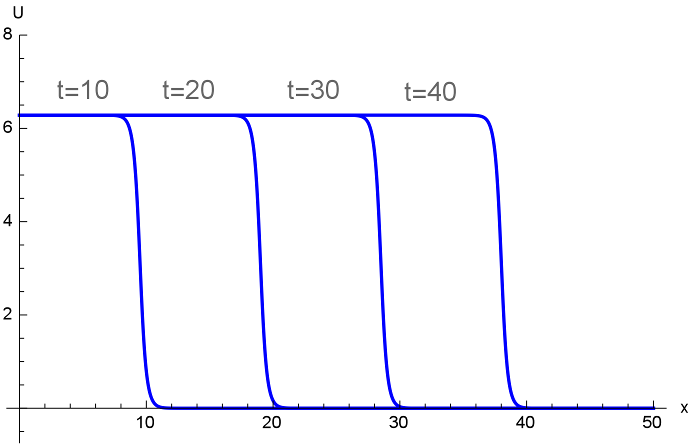

Рис. 3.1. Точное решение УСГ в разные моменты времени, $V = 0.95$.

Так как в работах [20–22] уже была исследована работа управления в случае, если целевые функции являются точными решениями, в этой работе в качестве целевой функции $W^*(x,t)$ выбираются функции, не являющиеся частными точными решениями уравнения СГ. Для тестирования будем рассматривать две целевых функции $W^*(x,t)$ разного вида.

Итак, первая из них:

$$W^*(x,t) \; = \pi(1-\tanh(k(x-V_1 t)))+A\,\mathrm{sech}^2(k(x-V_1 t+1))-0.5A\,\mathrm{sech}^2(k(x-V_1 t-2)), \tag{3.5}$$

где V_1 — постоянная фазовая скорость. Эта функция представляет собой бегущий кинк с дополнительными «горбом» и «впадиной». Таким образом, мы хотим добиться управлением, чтобы в среде, а именно в рассмотренном в первой главе упругом слое, распространялась не та слабо-продольная волна-кинк

(3.4), которая должна, а похожая волна (3.5), но с «горбом» наверху и «впадиной» снизу (Рис. 3.2, красная линия) и со скоростью V_1.

Начальные условия взяты в виде точного решения в нулевой момент времени:

$$W(x,0) = 4\arctan\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{(1-V^2)}}(x-x_0)\right)\right),$$

$$W_t(x,0) = \frac{2V\ \mathrm{sech}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{(1-V^2)}}\right)}{\sqrt{(1-V^2)}},$$

$$W \to 2\pi \quad \text{at } x \to -\infty, \quad W \to 0 \quad \text{at } x \to \infty. \tag{3.6}$$

Выполним расчет в математическом пакете для указанных начальных условий, принимая следующие значения параметров:

$$V = 0.95,\ k = 0.5,\ A = 3\ , x_0 = 0, V_1 = 1.1$$

Интервал счета:

$$-10 < x < 75,\ 0 < t < 50.$$

Параметры управления:

$$\alpha_1 = 50, \alpha_2 = 40,$$

Время включения управления $t_b = 5$. Чтобы осуществить «включение» управления в модельном уравнении, управляющую комбинацию $u(x,t) = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t)$ в правой части уравнения преобразуем следующим образом:

$$u(x,t) = (\alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t)) * H(t - t_b),$$

где $H(t)$ — функция Хэвисайда.

На Рис. 3.2 представлены результаты расчета. В разные моменты времени: сплошной синей — результат численного расчета, штриховой красной — желаемая форма волны W^*. Видно, что перед фронтом желаемой волны есть яма,

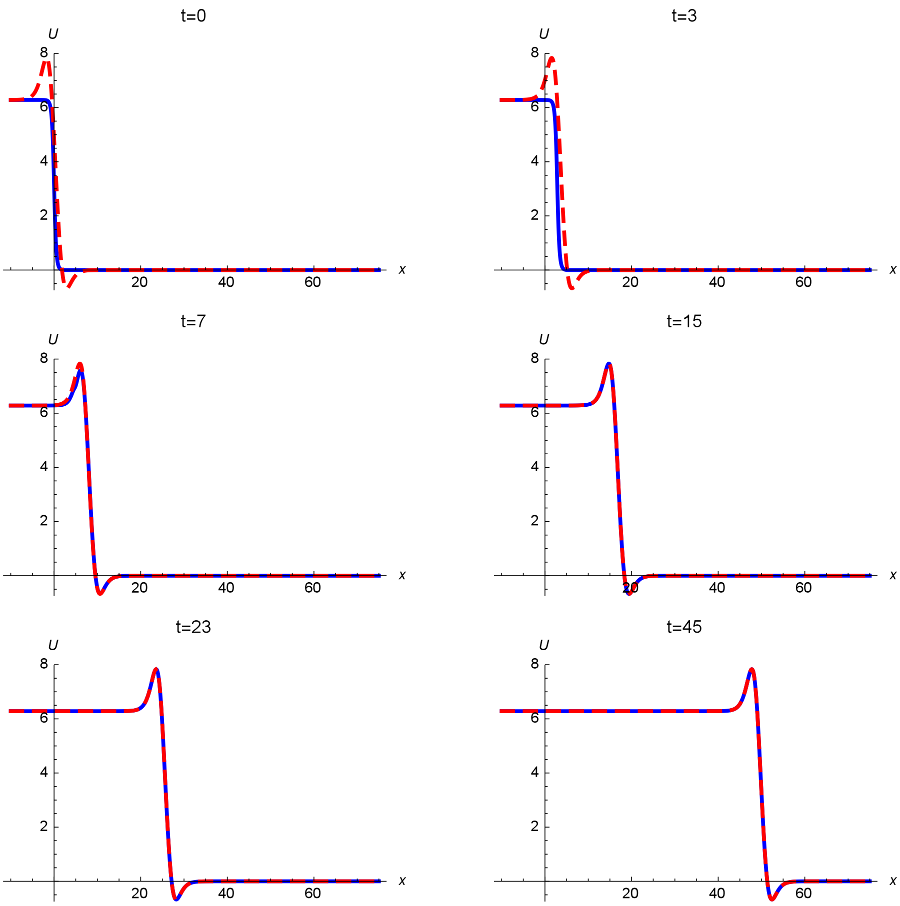

Рис. 3.2. Управление формой и скоростью волны, описываемой (3.5), показанной штриховой линией.

а позади фронта — горб. После включения управления исходная форма волны принимает форму целевой функции и начинает двигаться со скоростью желаемой волны (3.5). Таким образом, управление работает корректно для данной целевой функции в данном уравнении.

Рассмотрим теперь вторую функцию:

$$W^*(x,t) \ = A\,\mathrm{sech}^2(k(x-Vt+1)), \tag{3.7}$$

где V — постоянная фазовая скорость. Эта функция представляет собой солитон, и она не является точным решением УСГ.

Параметры управления выберем те же, а начальные и граничные условия в виде:

$$W(x,0) \ = \ A\,\mathrm{sech}^2(k(x-V_1t+1)),\ W_t(x,0) \ = \ 0, \tag{3.8}$$

$$W \to 0 \quad \text{при } x \to -\infty, \quad W \to 0 \quad \text{при } x \to \infty. \tag{3.9}$$

$$-20 < x < 75, \; 0 < t < 50.$$

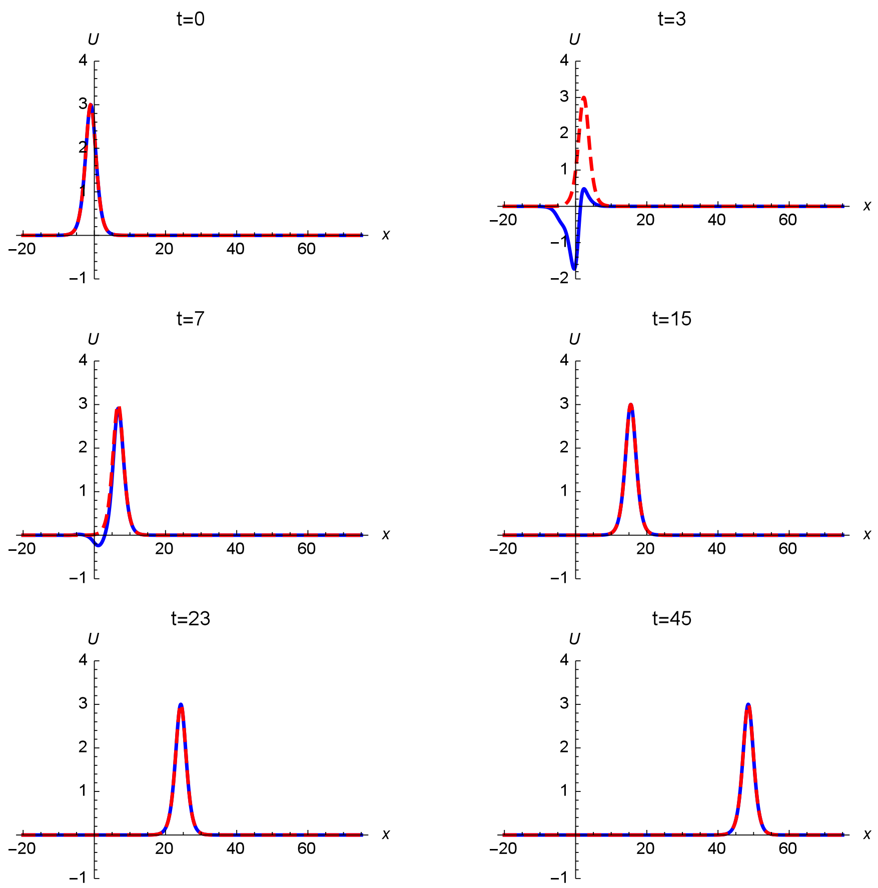

Рис. 3.3. Управление формой и скоростью волны, описываемой (3.7), показанной штриховой линией.

На Рис. 3.3 показаны в разные моменты времени: сплошной синей численный счет, штриховой красной — желаемая форма волны W^*. Параметры управления, начального условия и времени включения остаются прежними. Необходимо заметить, что в данном случае и начальное условие не является решением УСГ, при этом управление работает исправно.

Таким образом, было проверено две разных формы целевых функций для уравнения УСГ с управления. Для обеих функций был получен положительный результат, что говорит о корректности введения управления в уравнение.

Необходимо привести некоторые *промежуточные* результаты исследования алгоритма, а именно касающиеся выбора параметров α_1 и α_2. Как и ожидалось, не при любых их значениях при численном счете удается достичь желаемой формы или скорости волны. Если параметр α_2 выбрать недостаточно большим (например, меньше 1), численное решение не будет «успевать» за желаемой формой волны по скорости. Аналогично с параметром α_1 — при слишком малых его значениях желаемая форма может достигаться либо медленно, либо неточно. Чем больше разница между скоростью целевой функции V_1 и скоростью начального условия V, тем большим следует выбирать α_2 и отношение $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Для рассматриваемых случаев значений больших 20 для обоих параметров будет достаточно. От параметров A и k выбор α_1 и α_2 зависит очень слабо.

3.2. Двойное уравнение синус-Гордона с управлением

Теперь рассмотрим работу управления для одного из модифицированных вариантов УСГ — двойного уравнения синус-Гордона с управлением.

В этом случае, как было показано, в уравнение новый периодический член — $q\sin(2W)$. Напомним вид уравнения:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + q\sin 2W = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t). \tag{3.10}$$

Его точное решение в виде колоколообразного солитона (Рис. 3.4):

$$W(x,t) = 2\arctan\left(k\sqrt{V^2-1}sech\left[k\left(x - \frac{\sqrt{-1+k^2-2q}}{k}t\right)\right]\right), \tag{3.11}$$

где k, V — свободные параметры.

Точное решение в виде кинка показано на Рис. 3.5:

$$W(x,t) = 2\arctan\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4k^2(V^2-1)^2}}{2(V^2-1)}}\tanh\left[k\left(x - \sqrt{\frac{4q^2+8k^2q-1}{k\sqrt{8q}}}t\right)\right]\right) \tag{3.12}$$

где k, V — свободные параметры. Сначала аналогично рассмотрим в качестве

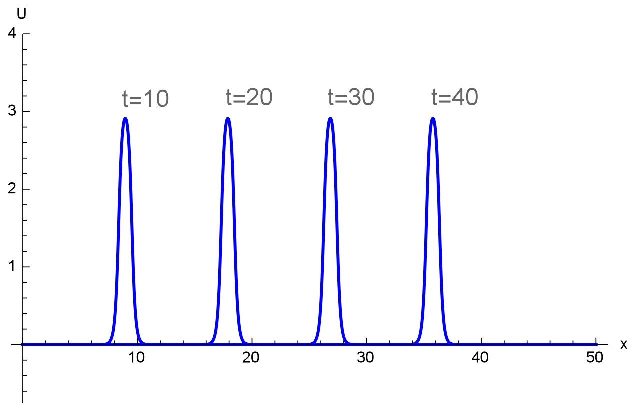

Рис. 3.4. Точное решение уравнения (3.10) в виде солитона, $V = 2, k = 5, q = 2$

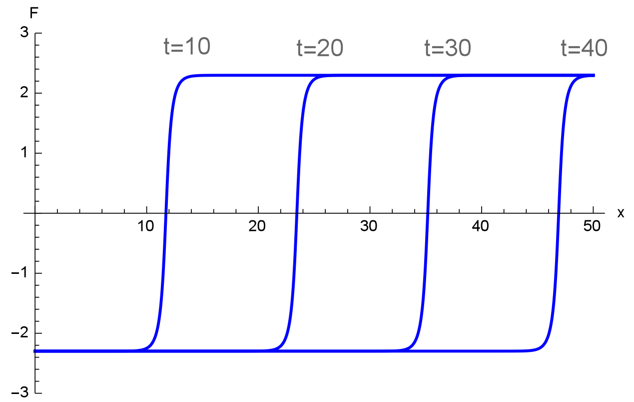

Рис. 3.5. Точное решение уравнения (3.10) в виде кинка, $V = 1.1, k = 1, q = 1$

целевой функции бегущий кинк с горбом и впадиной (3.5). Параметры управления, начального условия и времени включения взяты те же, что были выбраны для тестирования УСГ с управлением.

На Рис. 3.6 и Рис. 3.7 показаны в разные моменты времени: сплошной синей численный счет, штриховой красной — желаемая форма волны W^*. Видно, что до включения управления в обоих примерах волна распадается и теряет свою форму, а после включения — восстанавливает форму целевой функции. Таким образом, управление корректно работает для двойного УСГ с управлением при выборе целевой функции в виде модифицированного кинка с горбом и впадиной.

Аналогично проверим работу управления для целевой функции в виде солитона. Параметры управления, начального условия и времени включения взя-

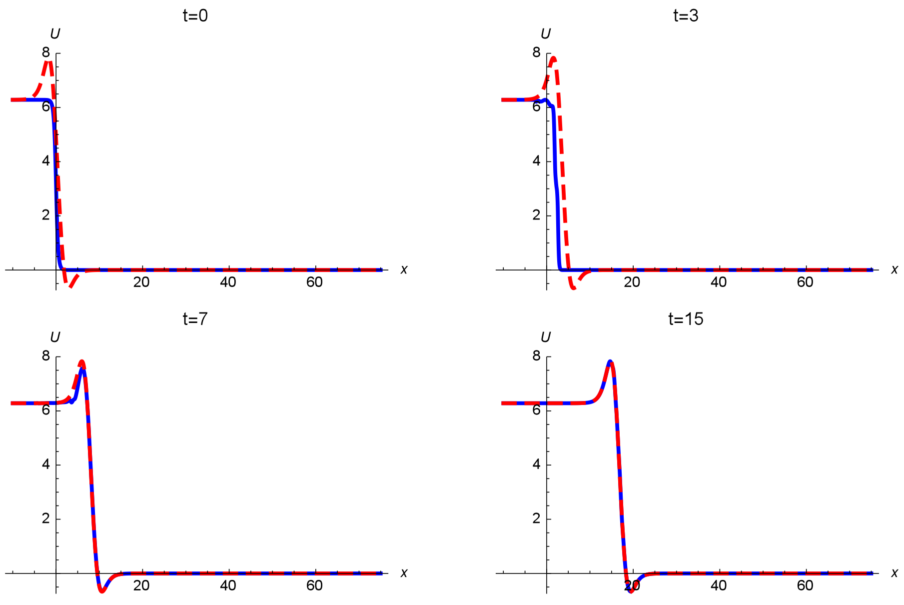

Рис. 3.6. Управление формой и скоростью волны для уравнения (3.10), $q = 10$.

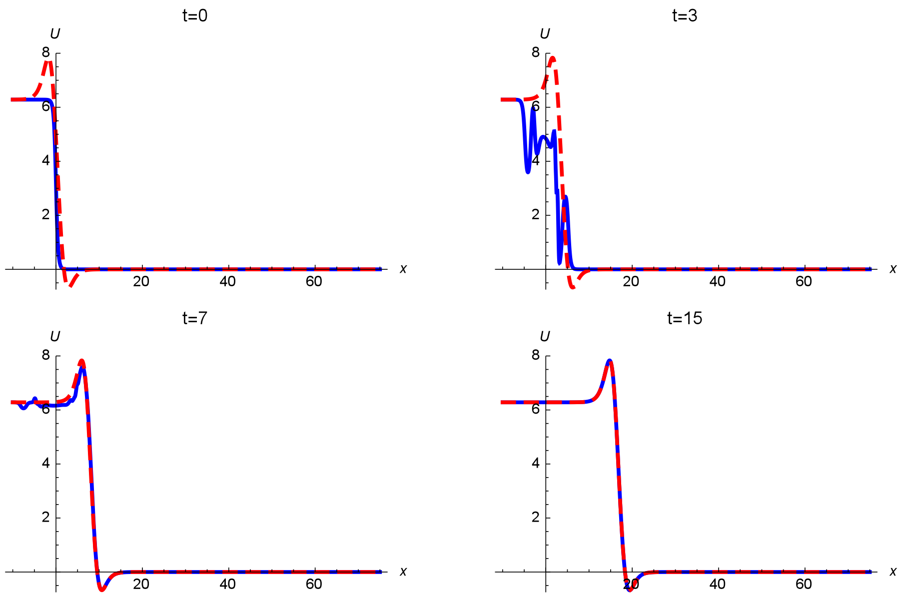

Рис. 3.7. Управление формой и скоростью волны для уравнения (3.10), $q = -10$.

ты те же, что и в предыдущих примерах.

Интервал счета:

$$-20 < x < 75, \ 0 < t < 50.$$

На Рис. 3.8 и Рис. 3.9 показаны в разные моменты времени: сплошной синей численный счет, штриховой красной — желаемая форма волны W^*. Для рассмотрения солитона в качестве целевой функции в случае двойного уравне-

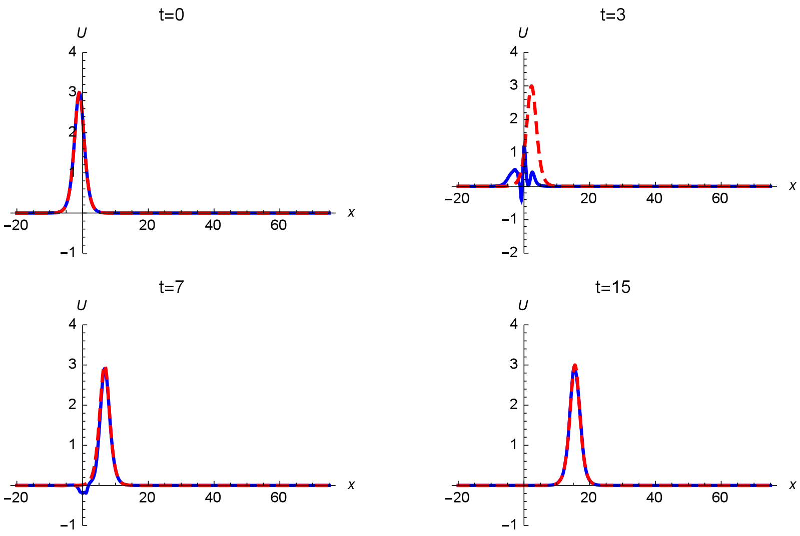

Рис. 3.8. Управление формой и скоростью волны для уравнения (3.10), $q = 2$.

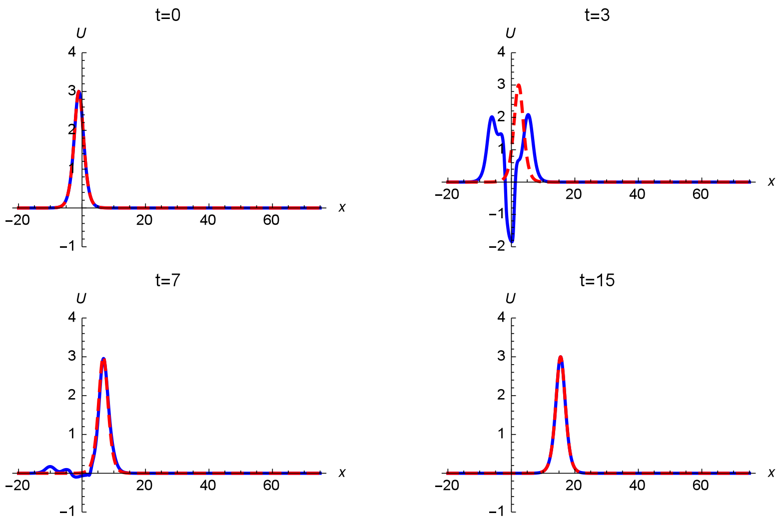

Рис. 3.9. Управление формой и скоростью волны для уравнения (3.10), $q = -2$.

ния синус-Гордона с управлением можно сделать аналогичные выводы, которые были сделаны при рассмотрения модифицированного кинка.

Таким образом, управление в новом рассмотренном уравнении, которое описывает поставленную ранее задачу в обобщенном случае, работает корректно. При этом корректность работы не меняется при смене знака параметра q. И главное — в качестве целевых функций могут быть выбраны локализованные волны достаточно произвольной формы, не являющиеся точными решениями двойного уравнения синус-Гордона.

3.3. Дисперсионное уравнение синус-Гордона с управлением

Теперь рассмотрим работу управления для другого модифицированного варианта УСГ — дисперсионного уравнения синус-Гордона с управлением.

В этом случае, как было показано, в уравнение новый дисперсионный член W_{xxxx}. Напомним вид уравнения:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin W + bW_{xxxx} = \alpha_1(W^* - W) + \alpha_2(W_t^* - W_t). \qquad (3.13)$$

Для точного решения данного уравнения уже нет такой свободы выбора параметров:

$$W(x,t) = 4\arctan\exp\left[\sqrt[4]{\frac{4}{a^2}}\left(x - \frac{\sqrt[4]{\frac{4}{a^2}}\sqrt{3a^2-1}}{\sqrt{3}}t\right)\right], b = -\frac{a^2}{12}. \qquad (3.14)$$

Для $a = 1$ решение выглядит следующим образом:

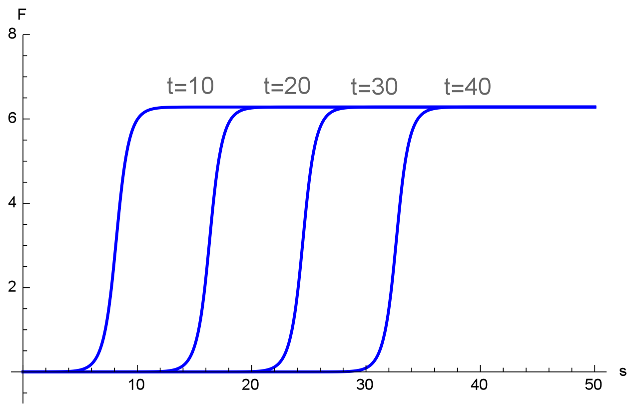

Рис. 3.10. Точное решение уравнения (3.13) в виде кинка

Тем не менее, для строгости исследования, выбирать в качестве целевых функций будем те же, что были рассмотрены ранее. Параметры управления, начального условия и времени включения взяты те же, что и в предыдущих примерах, за исключением выбора левой границы интервала расчёта: $-25 < x < 75$.

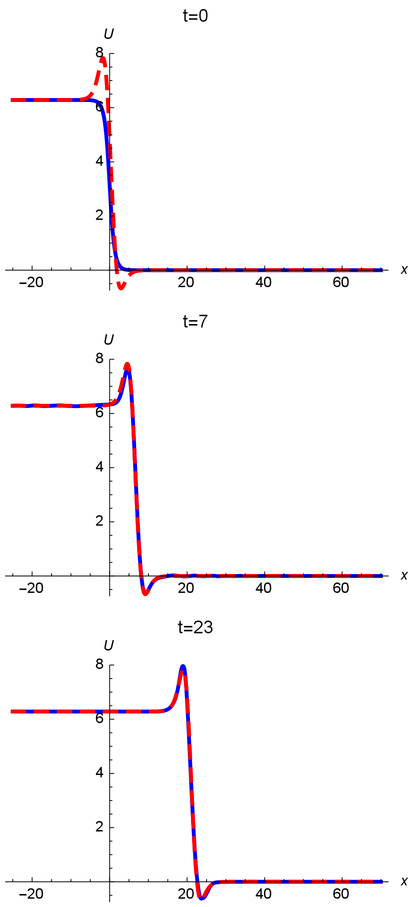

Рис. 3.11. Управление формой и скоростью волны для уравнения (3.13), $b = 3$.

На Рис. 3.11 показаны в разные моменты времени: сплошной синей численный счет, штриховой красной — желаемая форма волны W^*. Видно, что до включения управления кинк распадается на гармоники из-за введенной дисперсии, а после включения восстанавливает форму целевой функции. Таким образом, управление работает и для модельного уравнения (3.13) с целевой функцией в виде кинка с горбом и впадиной.

Аналогично проверим работу управления для целевой функции в виде того же солитона. Параметры управления, начального условия и времени включения, опять же, взяты все те же, что и в предыдущих примерах. Область расчёта:

$$-50 < x < 75, \ 0 < t < 50.$$

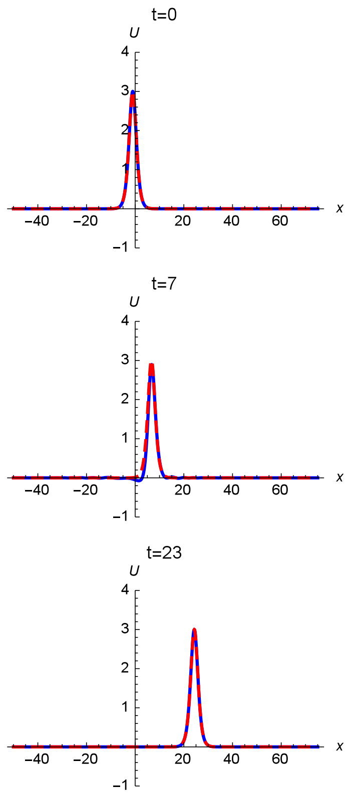

Рис. 3.12. Управление формой и скоростью волны для уравнения (3.13), $b = 2$.

На Рис. 3.12 показаны в разные моменты времени: сплошной синей численный счет, штриховой красной — желаемая форма волны W^*. Для солитона в случае добавления в уравнение члена U_{xxxx} можно сделать аналогичные выводы, которые были сделаны для выбора в качестве целевой функции модифицированного кинка.

Таким образом, представленный алгоритм управления работает и в дисперсионном УСГ, однако только для положительных значений b.

3.4. Выводы

Итак, были исследованы три уравнения на применимость предложенного во второй главе алгоритма управления нелинейными волнами. Для всех трех уравнений были получены положительные результаты. Таким образом, управление нелинейными волнами смещения в рамках постановки задачи, описанной в первой главе, действительно возможно. При этом показано, что выбор целевых функций и начальных условий остается довольно произвольный, то есть мы можем использовать управления не только для локализации точных решений, но и для генерации локализованных волн смещения достаточно произвольного вида. Численный эксперимент это доказал.

Глава 4

Управление в связанных уравнениях

4.1. Связанные нелинейные уравнения и их точные решения

Интерес также представляет исследование работы алгоритма управления для связанных уравнений, а именно описывающих сильно нелинейные динамические процессы в двухатомных решетках в континуальном приближении[23–25]:

$$v_{tt} - c_L^2 v_{xx} = \frac{S}{\rho}(\cos u)_{xx}$$
$$u_{tt} - c_l^2 u_{xx} = \frac{1}{\mu}(Sv - P)\sin u$$

Здесь v — продольное напряжение, а u — микросмещение, характеризующее движение дефектов в двухатомных решетках, либо влияние дополнительной степени свободы в атомной цепочке.

Точные решения системы в виде пары связанных солитонов выглядят следующим образом:

$$v = \frac{A}{Q\cosh(k(x - Vt - x_{11})) + 1}$$
$$u = \cos^{-1}\left(\frac{\rho v\left(V^2 - cL^2\right)}{S} + 1\right)$$

$$Q = -\frac{-c0^2 + cL^2 - V^2}{c0^2 + cL^2 - V^2}, k = 2\sqrt{\frac{P}{cl^2 - V^2}}, A = \frac{4S}{\rho\left(c0^2 + cL^2 - V^2\right)}$$

4.2. Управление с целью локализации волн

Допустим, что начальное условие в начальный момент времени локализовано не точно и в начальный момент времени $t = 0 : v = v_0 2, u = u_0$, то есть:

$$v_{01} = \frac{A}{Q\cosh(k(x - Vt - x_{11})) + 1}, v_{02} = \frac{A}{Q\cosh(k(x - Vt - x_{12})) + 1}$$

$$u_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\rho v_{01}\left(V^2 - cL^2\right)}{S} + 1\right)$$

Тогда получается, что волна в виде точного решения в начальный момент времени, соответствующая функции u смещена от v на $x_{11} - x_{12}$. Тогда в силу неточного соблюдения начальных условий, связанные волны не будет распространяться в виде точных решений. Продемонстрируем это численным расчетом в Wolfram Mathematica (Рис. 4.1):

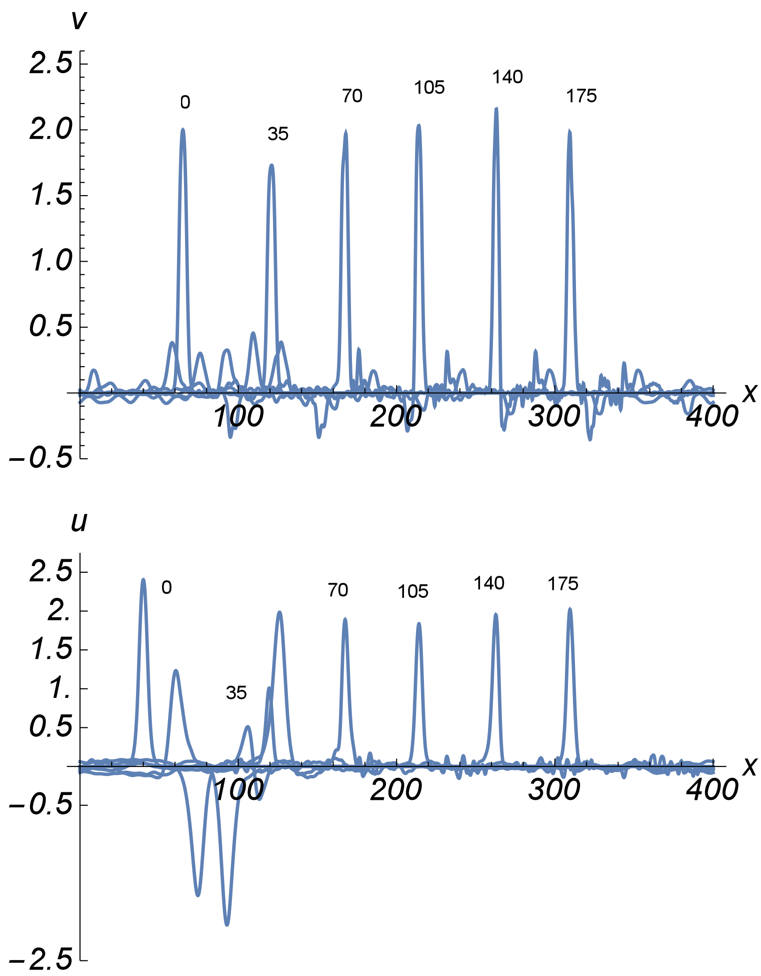

Рис. 4.1. Связанные волны при несоблюдении начальных условий в разные моменты времени

Здесь параметры выбраны следующим образом: $c_L = 1.6, c_l = 2, c_0 = 1, S = 1, P = 1, \rho = 1; x_{12} = 40, x_{11} = 65, V = 1.3$.

Введем управляющую функцию в первое уравнение аналогичным образом, как она вводилась ранее в уравнения синус-Гордона с управлением:

$$
\begin{gathered}
v_{tt} - c_L^2 v_{xx} = \frac{S}{\rho}(\cos u)_{xx} + w(x,t) \\
u_{tt} - c_l^2 u_{xx} = \frac{1}{\mu}(Sv - P)\sin u \\
w(x,t) = -(\alpha_1(v^* - v) + \alpha_2(v_t^* - v_t))
\end{gathered}
$$

В качестве целевой функции выберем точное решение связанного уравнения. Таким образом, мы стремимся восстановить точное решение после неточного задания начальных условий.

$$
v^* = \frac{A}{Q\cosh(k(x - Vt - x_{11})) + 1}
$$

Параметры управления выбираем следующим образом:

$$
\alpha_1 = 0.25, \alpha_2 = 8.
$$

Приведем результаты расчета 4.2:

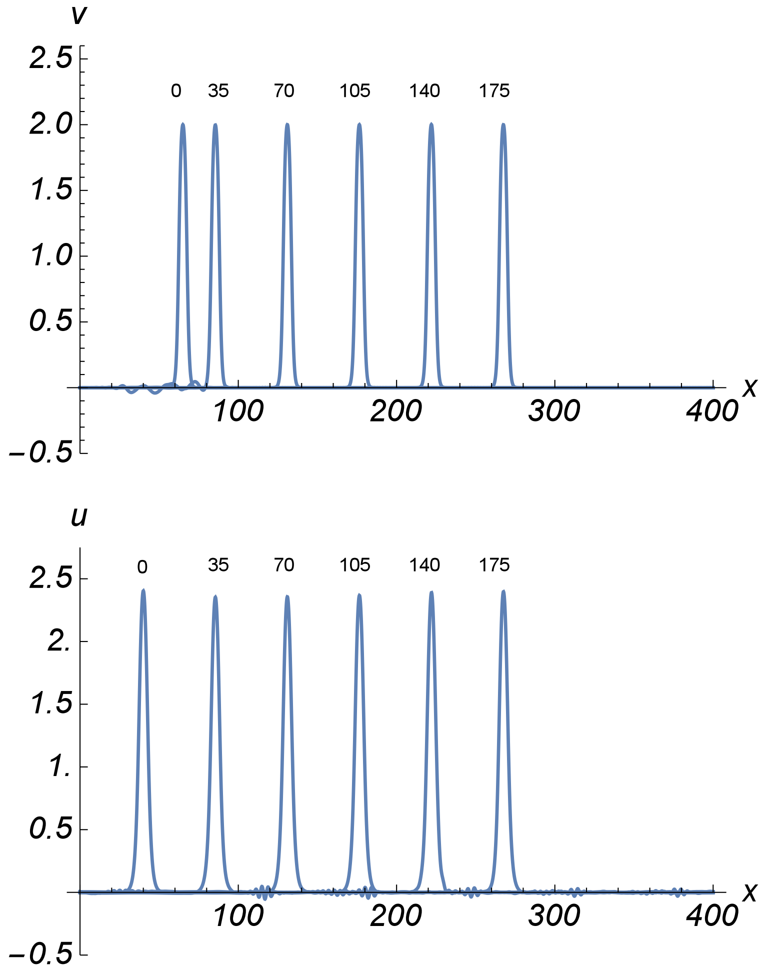

Рис. 4.2. Результат расчета с управлением в разные моменты времени

Таким образом, управление полностью восстанавливает до точного решения функцию v, и с определенной точностью может поддерживать близкой к форме точного решения функцию u. Вывод: предложенный алгоритм управления достаточно универсально работает для нелинейных локализованных волн, в том числе, может быть применен для управления связанными волнами.

Заключение

Результаты проделанной работы условно можно разделить на математические и физические.

Математические результаты.

Успешно разработан алгоритм управления нелинейными волнами на основе метода скоростного градиента. Алгоритм был протестирован на одиночных уравнениях трех типов: уравнении синус-Гордона, двойного уравнения синус-Гордона и дисперсионного уравнения синус-Гордона; а также на системе связанных уравнений. В качестве целевых функций управления выбирались не только точные решения в виде солитонов, но и локализованные волны достаточно произвольной формы. Для связанных уравнений средствами удалось восстановить вид точного решения при несоответствии положений волн, отвечающих разным уравнениям, в начальный момент времени.

Физические результаты

Успешно была поставлена механическая задача, а именно задача о плоском упругом слое, нижняя граница которого погружена в морозный грунт, а на верхней границе которого задана произвольная нагрузка. Построено асимптотическое решение поставленной задачи и, таким образом, выведено модельное уравнение для слабо-поперечных волн смещения. Показано, что выбирая нагрузку на верхней границе слоя определенным образом, модельное уравнение принимает вид уравнения синус-Гордона с управлением, и, следовательно, в рассмотренном слое можно осуществлять управление слабо-поперечными волнами смещения. Более того, поставленная задача была рассмотрена в обобщенном случае, в котором также возникает возможность управления волнами.

Таким образом, работа выполнена успешно, выполнены все поставленные цели. Получены результаты, которые могут найти применение как в области физики, так и в области математики.

Список литературы

1. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. 1973. Vol. 604.
2. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 1974. Vol. 328.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2000. Vol. 368.
4. Додд Р.., Эйлбек Дж.., Гиббон Дж.., Моррис Х.. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. 1988.
5. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Жуков А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. 2005.
6. Дж. Ск Рассел. Report on Waves // Made to the Meetings of the British Association in 1842-43. 1845.
7. G. G Stokes. On the theory of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8. 1847. P. 441.
8. Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. 2002. Vol. 208.
9. Порубов А. В. Локализация нелинейных волн деформации. 2009. Vol. 207.
10. Цернике А., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. 1976.
11. N. J Zabuvsky, M. D Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys.Rev.Lett., 15. 1965.
12. Bour E. Theorie de la deformation des surfaces // J. Ecole Imperiale Polytechnique. 19. 1862. P. 1—-48.
13. Шамсутдинов М. А., Назаров В. Н., Ломакина И. Ю. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. 2009. Vol. 356.
14. Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения. 2008. Vol. 519 с.
15. P. J Caudrey, J. C Eilbeck, J. D Eilbeck. The sine-Gordon equation as a model

classical field theory // II Nuovo Cimento B Series 25(2). 1975. P. 497–512.
16. A. C Давыдов. Солитоны в квазиодномерных молекулярных структурах // УФН 138. 1982. P. 603–643.
17. B. D Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling // Phys. Lett. 1(7). 1962. P. 251—253.
18. A. C Scott. A Nonlinear Klein-Gordon Equation // American Journal of Physics 37(1). 1969. P. 52–61.
19. Лурье А. И., Постников В. Н. О теории устойчивости систем управления. 1944.
20. A.V Porubov, A.L Fradkov, B.R Andrievsky. Feedback control for some solutions of the sine-Gordon equation // Applied Mathematics and Computation 269. 2015. P. 17–22.
21. A.V Porubov, A.L Fradkov, R.S Bondarenkov. Localization of the sine- Gordon equation solutions Commun // Nonlinear Sci Numer Simulat 39. 2016. P. 29–37.
22. A.V Porubov, A.L Fradkov, B.R Andrievsky. Feedback control of the sine- Gordon antikink Wave Motion // Wave Motion 65. 2016. P. 147–155.
23. M.K Sayadi, J Pouget. Soliton dynamics in a microstructured lattice model // Phys. A: Math. Gen. 24. 1991. P. 2151.
24. A.V Porubov, E. L Aero, G. A Maugin. Two approaches to study essentially nonlinear and dispersive properties of the internal structure of materials // Phys. Rev. E 79 046608. 2009.
25. E. L Aero, A. N Bulygin. Strongly nonlinear theory of nanostructure formation owing to elastic and nonelastic strains in crystalline solids // Mechanics of Solids 42. 2007. P. 807–822.
26. A.V Porubov, B.R Andrievsky. Influence of coupling on nonlinear waves localization // Commun. Nonlinear Sci Numer Simulat 16. 2011. P. 3964.
27. A.V Porubov, B.R Andrievsky, G.A Maugin. Solitary wave interactions and reshaping in coupled systems // Wave Motion, 48 (8). 2011. P. 773–781.
28. A.V Porubov, B.R Andrievsky. Kink and solitary waves may propagate togeth-

er // Phys. Rev. E 85 046604. 2011.

29. A. D Kerr. Elastic and Viscoelastic Foundation Models // Journal of Applied Mechanics. 1964. P. 491.
30. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. 1980. P. 512.
31. F. D Murnaghan. Finite Deformations of an Elastic Solid // J. Willey. 1951.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Косевич А. М., Питаевский Л. П. Теория упругости. 1987. P. 248.
33. Б. Р Андриевский, А. А Стоцкий, А. Л Фрадков. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации // Автомат. и телемех. 1988. P. 3–39.