

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

_____ А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**Моделирование динамики камня, движущегося по льду при игре
в керлинг**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.03.03_03 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5030103/90301

М. А. Шилов

Руководитель

д.ф.-м.н., профессор ВШТМиМФ

Е. А. Иванова

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

**на выполнение выпускной квалификационной
работы**

студенту Шилову Михаилу Александровичу, гр. 5030103/90301

1. Тема работы: Моделирование динамики камня, движущегося по льду при игре в керлинг
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): математическое моделирование движения твердого тела, соприкасающегося с шероховатой поверхностью в трех точках; математическое моделирование движения камня по льду при игре в керлинг; создание программы на языке Python для численного расчета траектории камня, а также его поступательной и угловой скорости; исследование кривизны траектории камня и расстояния, пройденного им до остановки.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания 27.02.2023

Руководитель ВКР _____ Е.А. Иванова, профессор ВШТМиМФ, д. ф-м. н.

Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент _____ М.А. Шилов

РЕФЕРАТ

На 44 с., 18 рисунков, 1 таблица

ПЕББЛ, СВИПИНГ, ЗАВИСИМОСТЬ ПЕННЕРА, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ ТРЕНИЯ, ЧИСЛО ГЮМБЕЛЯ

В данной работе рассматривается задача динамики камня, движущегося по льду при игре в керлинг.

Данная задача является частным случаем задачи о движении твердых тел по льду, являющейся открытой задачей в науке.

На основе исследования задачи движения плоского кольца и цилиндра, контактирующих с шероховатой поверхностью в трех точках, описаны два различных подхода к решению этого вопроса, которые вводят асимметрию тех или иных физических величин.

Показано, что в случае рассмотрения модели плоского кольца объяснить искривление траектории камня для керлинга можно введением коэффициента усиления трения для задней части кольца (по отношению к поступательному движению). Проведено исследование влияния угловой скорости, величины коэффициента усиления трения и свипинга на траекторию, а также сравнение с экспериментальными данными.

Также показано, что в случае рассмотрения модели цилиндра введение линейной модели распределения нормального давления и линейной зависимости коэффициента трения от числа Гюмбеля позволяет объяснить отклонение лишь на качественном уровне, количественно же результаты далеки от реальности.

ABSTRACT

44 pages, 18 figures, 1 table

PEBBLE, SWEEPING, PENNER'S LAW, FRICTION MAGNIFICATION FACTOR, GUMBEL PARAMETER

In this work the problem of the dynamics of a curling stone moving on ice is considered.

This problem is a particular case for the problem of motion of solid bodies on ice which is an open problem in science.

Based on the study of the problem of motion of a flat ring and a cylinder which are in contact with a rough surface at three points, two different approaches to solving the curling stone problem are described using the asymmetry of different physical quantities.

It is shown that in the case of the flat ring model, the curvature of the trajectory of a curling stone can be explained by introducing the friction magnification factor for the rear part of the ring (with respect to translational motion). A study of the influence of angular velocity, friction magnification factor and sweeping on the trajectory was carried out. Also, a comparison with experimental data was made.

It is also shown that in the case of cylinder model, the linear model of the normal pressure and the linear model of the friction coefficient based on the Gumbel parameter make it possible to explain the curvature of the trajectory but only at a qualitative level while quantitatively the results do not match reality.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	8
1.1. Параметры камня	8
1.2. Уравнения движения и уравнения равновесия	9
1.3. Моделирование трения.....	10
ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ КОЛЬЦЕ И ЦИЛИНДРЕ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ТРЕХ ТОЧКАХ.....	12
2.1. Задача о плоском кольце, контактирующем с шероховатой поверхностью в трех точках	12
2.1.1 Преобразование уравнений движения и уравнений равновесия	13
2.1.2 Влияние расположения точек.....	13
2.1.3 Влияние смещения центра масс	15
2.2. Задача о цилиндре, контактирующем с шероховатой поверхностью в трех точках.....	17
2.2.1 Преобразование уравнений движения и уравнений равновесия	17
2.2.2 Влияние высоты центра масс над шероховатой поверхностью.....	18
2.2.3 Влияние расположения точек и смещения центра масс	19
2.3. Выводы по задачам	21
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАМНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИММЕТРИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ	22
3.1. Введение асимметрии коэффициента трения	22
3.2. Исследование влияния угловой скорости и свипинга на траекторию ..	23
3.2.1 Влияние начальной угловой скорости.....	23
3.2.2 Влияние свипинга	25
3.2.3 Влияние коэффициента усиления трения	26
3.3. Сравнение с экспериментальными данными	28

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАМНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ	32
4.1. Введение закона распределения нормального давления и модели коэффициента трения	32
4.2. Преобразование уравнений движения и уравнений равновесия	33
4.3. Анализ системы для различных значений коэффициентов μ_0 и μ_1	35
4.3.1 Случай $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 > 0$	35
4.3.2 Случай $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 < 0$	36
4.3.3 Случай $\mu_0 < 0$ и $\mu_1 > 0$	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	39
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	41

ВВЕДЕНИЕ

Керлинг – командная спортивная игра, возникшая около 500 лет назад в Шотландии и в настоящее время являющаяся олимпийским видом спорта.

В начале XIX века были утверждены правила, которые дошли до сегодняшних дней и не претерпели почти никаких изменений.

Во время игры участники запускают по ледяной площадке специальные снаряды, называемые камнями, в мишень – так называемый дом. Игрокам разрешается натирать лед перед движущимся камнем специальной щеткой, чтобы оказать влияние на его динамику. Этот процесс называется свипингом. В зависимости от текущей тактической задачи игроки могут свиповать как камни своей команды, так и камни противников.

Перед началом игры лед проходит специальную подготовку. На него при температуре около -5°C разбрызгиваются капельки воды, на поверхности льда превращающиеся в выступы, называемые пибблами.

Наличие пибблов и процесс свипинга вносят куда больший вклад в зрелищность игры, чем может показаться на первый взгляд, так как оказывают существенное влияние на динамику движения камня по льду [9].

Огромное влияние оказывает и природа самого льда. При вращении камня против часовой стрелки наблюдается отклонение его траектории влево, в то время как твердое тело, движущееся по стеклу и вращающееся против часовой стрелки, отклоняется вправо. Смещение камня в поперечном по отношению к поступательному движению направлении обычно порядка 1 м при продольном смещении от 25 до 30 м (соответствует расстоянию до мишени).

Исследованию динамики камня для керлинга посвящено огромное количество работ, однако многие специалисты сходятся во мнении, что до сих пор не существует точной модели, описывающей происходящее в игре даже на качественном уровне.

Задачу динамики камня для керлинга можно рассматривать как частный случай более общей задачи – динамики твердого тела, движущегося по поверхности льда, на данный момент являющейся открытой задачей в науке [11]. В этом состоит актуальность рассматриваемой в данной дипломной работе задачи.

В качестве целей настоящей дипломной работы можно выделить следующие.

1) Поставить задачу движения осесимметричного твердого тела по шероховатой поверхности.

2) Рассмотреть задачу движения тонкого плоского кольца, контактирующего с шероховатой поверхностью в трех точках, и задачу движения цилиндра, контактирующего с шероховатой поверхностью в трех точках, равноудаленных от оси цилиндра.

3) От задач, описанных в предыдущем пункте, перейти непосредственно к моделированию динамики камня, движущегося по льду при игре в керлинг.

4) По результатам моделирования сделать выводы об уместности той или иной модели на основе экспериментальных данных.

Численное моделирование производится с использованием языка программирования Python.

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Параметры камня

Для игры в керлинг применяются снаряды, имеющие следующие параметры.

Стандарт для диаметра камня составляет 29.2 см, для высоты – 11.4 см, для веса – 19.96 кг.

Камень соприкасается с ледовой поверхностью по кольцевой поверхности, видной на рисунке 1 [16], к параметрам которой не предъявляется каких-либо строгих требований со стороны правил. Обычно ее диаметр составляет 13 см, толщина – 13 мм.



Рисунок 1. Камень для керлинга

Приведенные параметры используются далее в настоящей работе.

1.2. Уравнения движения и уравнения равновесия

Движение камня по льду подчиняется законам баланса количества движения (ниже он записан в форме теоремы о движении центра масс) и момента количества движения:

$$m\dot{\underline{v}}_C = \underline{F}, \quad (1.1)$$

$$\left(\underline{I}^C \cdot \underline{\omega} \right)' = \underline{M}^C, \quad (1.2)$$

где m – масса камня, \underline{v}_C – скорость его центра масс, \underline{F} – суммарная сила, действующая на камень, \underline{I}^C – тензор инерции камня, вычисленный относительно центра масс камня, $\underline{\omega}$ – угловая скорость камня, \underline{M}^C – суммарный момент, действующий на камень и вычисленный относительно центра масс камня.

При этом

$$\dot{\underline{r}}_C = \underline{v}_C, \quad (1.3)$$

$$\dot{\underline{\phi}} = \underline{\omega}, \quad (1.4)$$

где \underline{r}_C – радиус-вектор центра масс в актуальной конфигурации, ϕ – угол, на который повернулся камень относительно своего первоначального положения.

Запишем уравнения (1.1) и (1.2) в проекциях на оси x , y и z в предположениях плоскопараллельного характера движения и осесимметричности камня:

$$m\dot{v}_{Cx} = F_x, \quad (1.5)$$

$$m\dot{v}_{Cy} = F_y, \quad (1.6)$$

$$F_z = 0, \quad (1.7)$$

$$M_x^C = 0, \quad (1.8)$$

$$M_y^C = 0, \quad (1.9)$$

$$I_{zz}^c \dot{\omega} = M_z^c. \quad (1.10)$$

Таким образом, получены три уравнения движения: (1.5), (1.6) и (1.10) – и три уравнения равновесия: (1.7), (1.8) и (1.9).

На камень действуют сила тяжести mg , где g – ускорение свободного падения, силы нормального давления со стороны льда и силы трения [4], выражения для которых отличаются в зависимости от текущих задач и целей.

1.3. Моделирование трения

Существует великое множество моделей, описывающих трение в какой-либо точке контакта твердого тела с шероховатой поверхностью [6], в том числе – камня для керлинга с ледяной площадкой.

Далее в работе используется закон трения Амонтона-Кулона [2]:

$$\underline{F}_{\text{тр}}(A) = -\mu(A) \frac{v(A)}{v(A)} P(A), \quad (1.11)$$

где $\underline{F}_{\text{тр}}(A)$ – сила трения, возникающая в произвольной точке A контакта твердого тела и шероховатой поверхности, $\mu(A)$ – коэффициент трения в этой точке, $\underline{v}(A)$ – скорость этой точки как точки твердого тела, $P(A)$ – сила нормального давления, возникающая в этой точке.

Разнообразие моделей трения обеспечивается разнообразием способов задания коэффициента трения $\mu(A)$.

Наиболее простой способ его задания [1]:

$$\mu(A) = \text{const}. \quad (1.12)$$

По предположениям Шегельского [15], коэффициент трения следует вычислять по следующей формуле:

$$\mu(A) = \mu_0(1 - f_0 \cos \theta(A)), \quad (1.13)$$

где μ_0, f_0 – некоторые константы, $\theta(A)$ – угол между вектором, проведенным из геометрического центра кольца и направлением его скорости.

Существует также модель коэффициента трения, зависящего от числа Гюмбеля – отношения абсолютной величины скорости к величине нормального давления в какой-либо точке [13]:

$$\mu(A) = \mu \left(\frac{v(A)}{P(A)} \right). \quad (1.14)$$

По совокупности экспериментальных и теоретических данных было получено следующее выражение для коэффициента трения, включающее в себя зависимость коэффициента трения от давления, температуры и скорости в рассматриваемой точке [10]:

$$\mu(A) = \mu_0 \left(\frac{P(A)}{P_0} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{T_M - T(A)}{T_0} \right) \left(\frac{v(A)}{v_0} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.15)$$

где μ_0, P_0, T_0, v_0 – некоторые константы, T_M – температура плавления льда, $T(A)$ – температура в рассматриваемой точке.

Стоит обратить внимание, что коэффициент трения уменьшается с ростом давления, температуры и скорости.

Частным случаем выражения (1.15) является экспериментальная зависимость, полученная Пеннером [14]:

$$\mu(A) = 0.008(v(A))^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.16)$$

Формула (1.16) будет использоваться в настоящей работе для моделирования коэффициента трения (за исключением специально оговоренных случаев), так как соответствует условиям реальной игры в керлинг, в частности, используемым в игре скоростям, по абсолютной величине меньшим, чем 5 м/с [12].

ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ КОЛЬЦЕ И ЦИЛИНДРЕ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ТРЕХ ТОЧКАХ

2.1. Задача о плоском кольце, контактирующем с шероховатой поверхностью в трех точках

Далее для удобства предполагается, что три точки контакта располагаются на одной окружности с центром в центре кольца и радиусом, равным радиусу кольца и равным 6.5 см (соответствует реальным размерам камня для керлинга).

Таким образом, теперь, чтобы определить положение точки в отсчетной конфигурации, необходимо задать угол φ между горизонтальной осью и радиусом, проведенным из геометрического центра кольца в эту точку, как показано на рисунке 2.

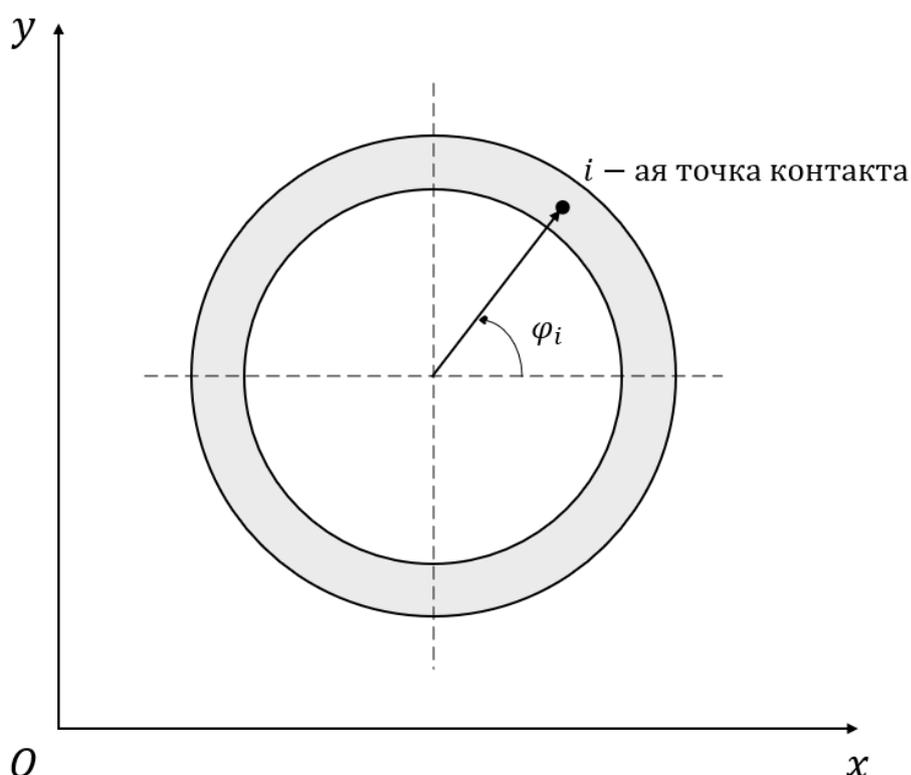


Рисунок 2. Определение положения точки контакта

Также следует учесть, что в общем случае положение геометрического центра кольца не совпадает с положением центра масс.

2.1.1 Преобразование уравнений движения и уравнений равновесия

Введем нумерацию точек (по возрастанию угла φ) и станем обозначать величины, относящиеся к конкретной точке, соответствующим индексом. Тогда уравнения (1.5)–(1.10) примут следующий вид:

$$m\dot{v}_{Cx} = - \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{v_{ix}}{v_i} P_i, \quad (2.1)$$

$$m\dot{v}_{Cy} = - \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{v_{iy}}{v_i} P_i, \quad (2.2)$$

$$-mg + \sum_{i=1}^3 P_i = 0, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^3 (r_{iy} - r_{Cy}) P_i = 0, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^3 (r_{ix} - r_{Cx}) P_i = 0, \quad (2.5)$$

$$I_{zz}^C \dot{\omega} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i P_i}{v_i} \left((r_{iy} - r_{Cy}) v_{ix} - (r_{ix} - r_{Cx}) v_{iy} \right), \quad (2.6)$$

где r_{ix} и r_{iy} – компоненты радиус-вектора i -ой точки в актуальной конфигурации, r_{Cx} и r_{Cy} – компоненты радиус-вектора центра масс в актуальной конфигурации.

2.1.2 Влияние расположения точек

Расположение трех точек, как уже было замечено, определяется углом φ . Для удобства предполагается, что центр масс совпадает

с геометрическим центром кольца (влияние смещения центра масс из геометрического центра кольца будет рассмотрено ниже).

В качестве начальных условий были выбраны следующие (соответствующие поступательной и угловой скорости, реально применяемым в игре; величины приведены в системе СИ):

$$\underline{r}_C(0) = 0, \underline{\dot{r}}_C(0) = 2\underline{j}, \underline{\varphi}(0) = 0, \underline{\dot{\varphi}}(0) = 2\underline{k}, \quad (2.7)$$

где \underline{j} и \underline{k} – орты осей y и z соответственно.

На рисунке 3 приведены результаты, полученные для следующих случаев расположения трех точек:

1) $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}, \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}$ (точки образуют равносторонний треугольник);

2) $\varphi_1 = \frac{7\pi}{16}, \varphi_2 = \frac{9\pi}{16}, \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}$ (точки образуют равнобедренный треугольник);

3) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{5\pi}{12}, \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}$ (произвольное расположение).

Стоит отметить, что расположение точек сколь угодно произвольное, лишь бы центр масс оставался внутри треугольника, образованного ими.

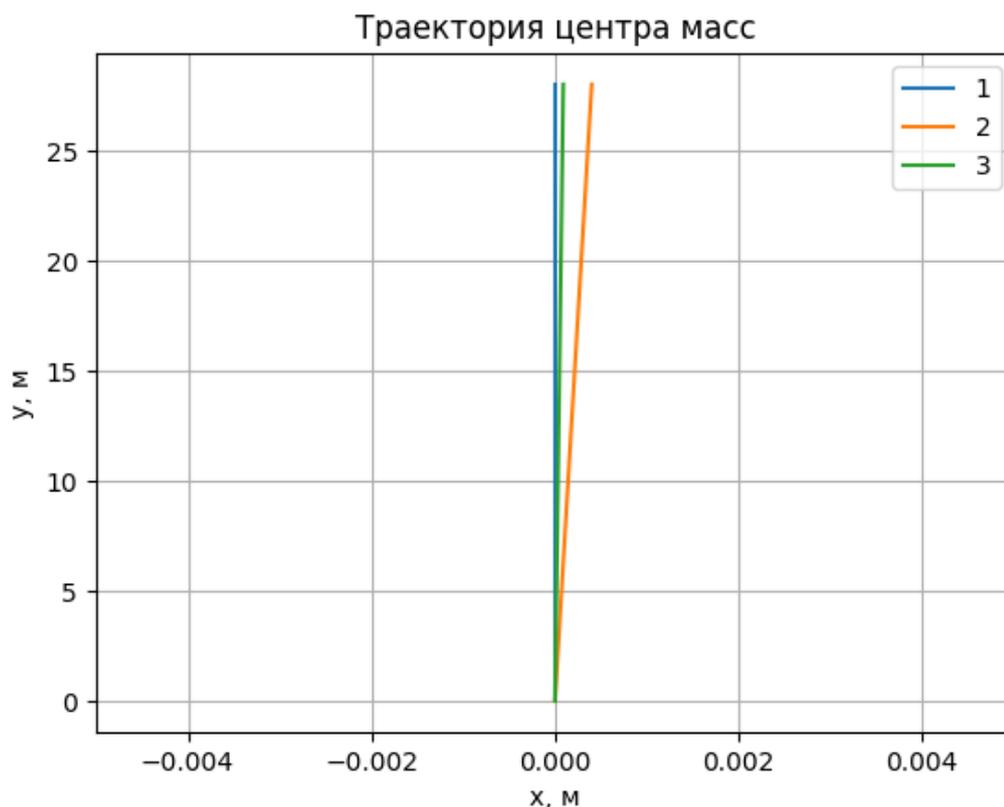


Рисунок 3. Влияние расположения трех точек на траекторию в задаче о плоском кольце

Как можно видеть, неравномерное по окружности распределение точек оказывает несущественное влияние на отклонение траектории, качественно и количественно далекое от ситуации, наблюдаемой в реальной игре.

2.1.3 Влияние смещения центра масс

Смещение центра масс определяется ненулевым значением разности $(r_c - r_o)$, где r_o – радиус-вектор геометрического центра кольца. Для удобства предполагается, что точки образуют равносторонний треугольник (соответствует первому случаю при исследовании влияния расположения точек). Ограничение состоит, как и в случае исследования влияния расположения точек, в необходимом условии попадания центра масс в треугольник, образованный тремя точками.

В качестве начальных условий были выбраны условия (2.7).

На рисунке 4 приведены результаты для следующих случаев смещения центра масс относительно геометрического центра кольца (входящие величины приведены в системе СИ):

1) $\underline{r}_C(0) - \underline{r}_O(0) = 0.03\underline{j}$ (вектор, проведенный из геометрического центра в центр масс, в отсчетной конфигурации сонаправлен с вертикальной осью);

2) $\underline{r}_C(0) - \underline{r}_O(0) = -0.04\underline{j}$ (вектор, проведенный из геометрического центра в центр масс, в отсчетной конфигурации противоположно направлен вертикальной оси);

3) $\underline{r}_C(0) = 0.02\underline{i} + 0.02\underline{j}$, где \underline{i} – орт оси x (вектор, проведенный из геометрического центра в центр масс, имеет как горизонтальную, так и вертикальную составляющие).

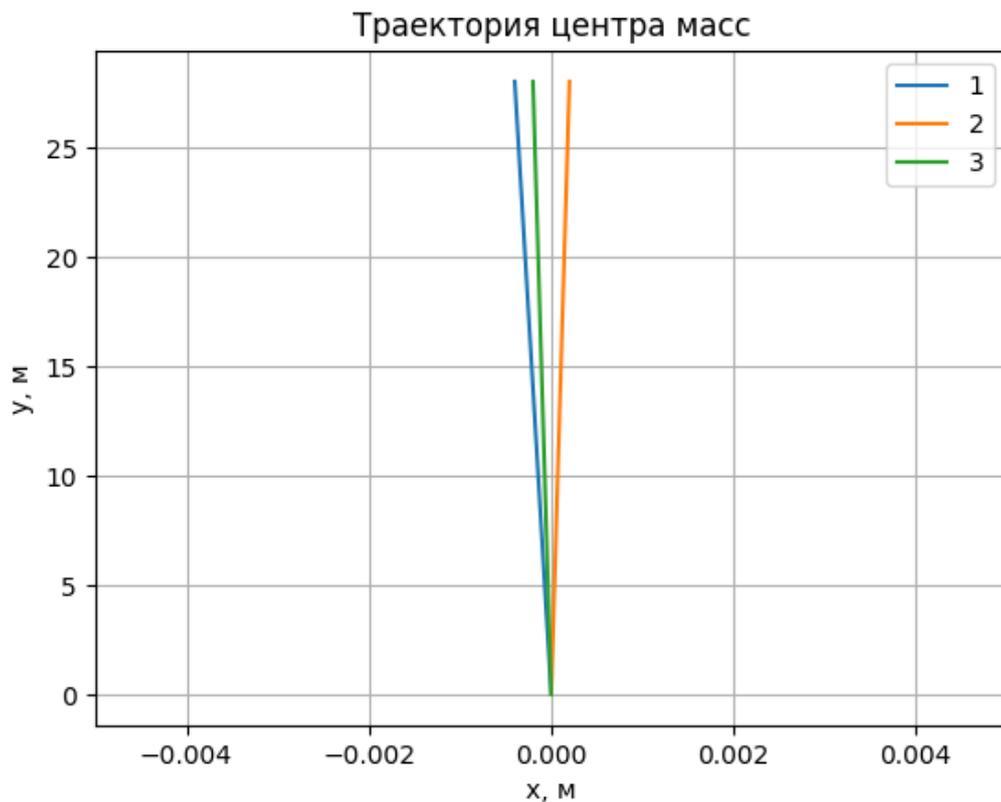


Рисунок 4. Влияние смещения центра масс на траекторию в задаче о плоском кольце

Как можно видеть, влияние смещения центра масс не приводит результаты к соответствующим реальной игре отклонениям траектории движения тела.

2.2. Задача о цилиндре, контактирующем с шероховатой поверхностью в трех точках

Далее для удобства предполагается, что три точки контакта располагаются на одной окружности с радиусом, равным 6.5 см (соответствует реальным размерам камня для керлинга). Стоит обратить внимание, что центр окружности может и не лежать на оси цилиндра.

Помимо расположения трех точек вдоль окружности, а также положения центра масс относительно ее геометрического центра, которые определяются так же, как и в задаче плоского кольца, в этой задаче присутствует дополнительный параметр – высота h центра масс над шероховатой поверхностью.

2.2.1 Преобразование уравнений движения и уравнений равновесия

Введем нумерацию точек аналогично задаче с плоским кольцом. Уравнения движения и равновесия (1.5)–(1.10) примут вид:

$$m\dot{v}_{Cx} = - \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{v_{ix}}{v_i} P_i, \quad (2.8)$$

$$m\dot{v}_{Cy} = - \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{v_{iy}}{v_i} P_i, \quad (2.9)$$

$$-mg + \sum_{i=1}^3 P_i = 0, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left((r_{iy} - r_{cy})P_i - h\mu_i \frac{v_{iy}}{v_i} P_i \right) = 0, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left((r_{ix} - r_{cx})P_i - h\mu_i \frac{v_{ix}}{v_i} P_i \right) = 0, \quad (2.12)$$

$$I_{zz}^C \dot{\omega} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i P_i}{v_i} \left((r_{iy} - r_{cy})v_{ix} - (r_{ix} - r_{cx})v_{iy} \right), \quad (2.13)$$

Как можно видеть, отличие от задачи плоского кольца состоит в наличии дополнительных слагаемых в уравнениях равновесия: для выполнения условия плоскопараллельности движения момент сил нормального давления должен уравновешивать плоскую составляющую момента сил трения (в противном случае тело опрокинется).

2.2.2 Влияние высоты центра масс над шероховатой поверхностью

Для удобства предполагается, что точки контакта образуют равносторонний треугольник, центр которого лежит на оси цилиндра, и что центр масс также лежит на оси цилиндра.

В качестве начальных условий были выбраны условия (2.7).

На рисунке 5 приведены результаты для следующих случаев расположения центра масс над шероховатой поверхностью (величины приведены в системе СИ):

- 1) $h = 0.06$ (примерно половина высоты камня для керлинга);
- 2) $h = 0.12$;
- 3) $h = 0.24$.

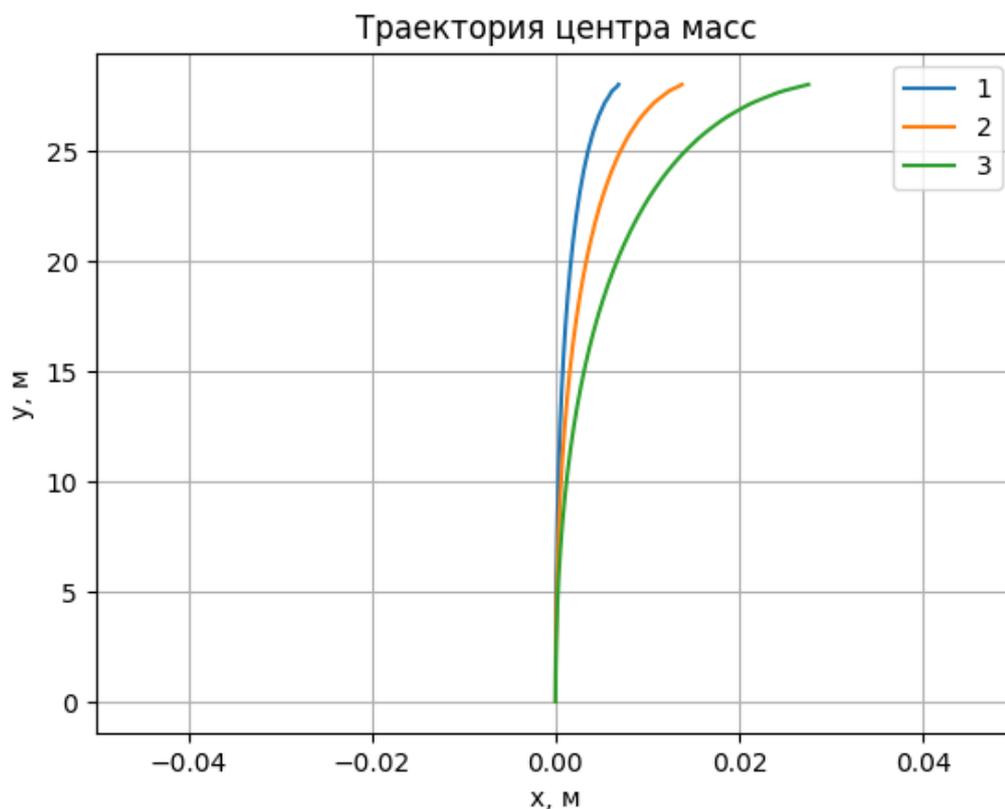


Рисунок 5. Влияние высоты центра масс над шероховатой поверхностью

Как можно видеть, высота центра масс над шероховатой поверхностью оказывает существенное по сравнению с предыдущими рассмотренными случаями влияние на искривление траектории. Однако наблюдается качественное несоответствие реальным траекториям в керлинге, которые характеризуются отклонением траектории влево, как уже было замечено ранее. Количественное же совпадение достигается на значениях высоты, в 5-10 раз большей, чем половина высоты камня для керлинга.

2.2.3 Влияние расположения точек и смещения центра масс

Можно убедиться в том, что при ненулевом значении высоты центра масс над шероховатой поверхностью распределение точек контакта по окружности и смещение центра масс относительно геометрического центра окружности не оказывают почти никакого влияния на кривизну траектории.

Так, на рисунке 6 приведены результаты для следующих случаев (при этом высота центра масс принята равной 0.12 м):

1) $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}, \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}; \quad \underline{r}_C(0) - \underline{r}_O(0) = 0$ (точки образуют равносторонний треугольник, а смещение центра масс отсутствует);

2) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{5\pi}{12}, \varphi_3 = \frac{5\pi}{4}; \quad \underline{r}_C(0) - \underline{r}_O(0) = 0$ (точки образуют произвольный треугольник, а смещение центра масс отсутствует);

3) $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}, \varphi_3 = \frac{3\pi}{2}; \quad \underline{r}_C(0) = 0.02\underline{i} + 0.02\underline{j}$ (точки образуют равносторонний треугольник и есть смещение центра масс).

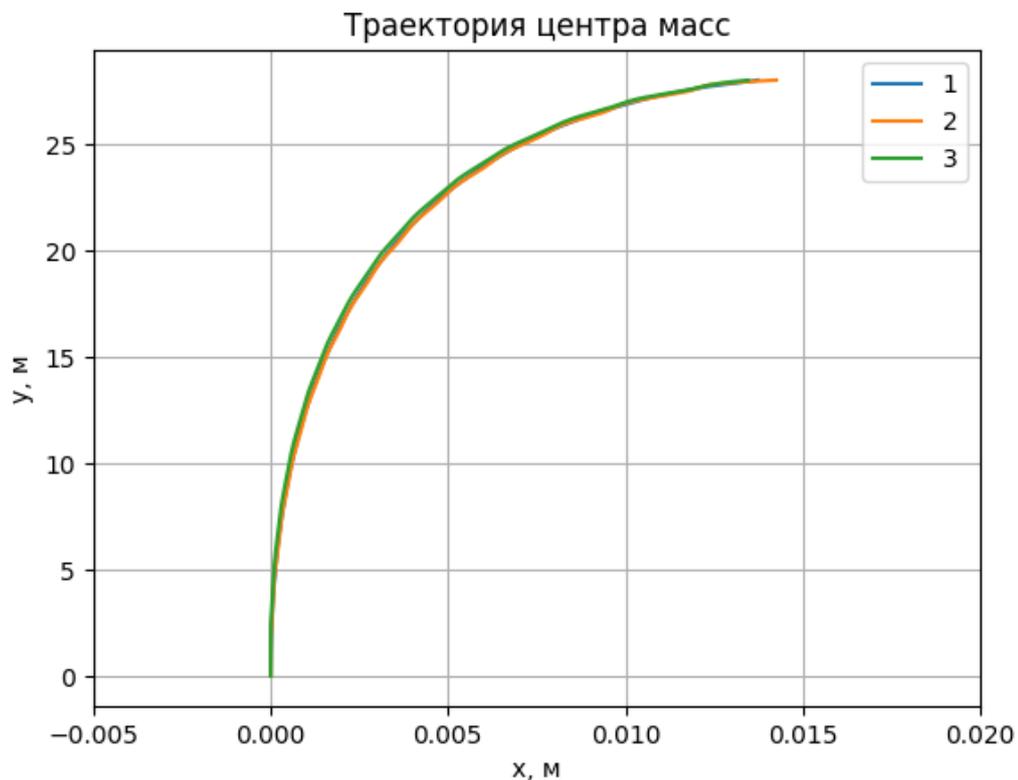


Рисунок 6. Исследование влияния положения точек и смещения центра масс в задаче с цилиндром

Таким образом, высота центра масс над шероховатой поверхностью приобретает решающее значение и оказывает более сильное влияние на кривизну траектории, чем распределение точек контакта и смещение центра масс.

2.3. Выводы по задачам

В задаче о цилиндре, характеризующейся наличием ненулевого значения высоты центра масс над шероховатой поверхностью, в случае, когда точки образуют равносторонний треугольник, а центр масс не смещен, сила нормального давления не может быть равномерно распределенной по трем точкам из-за вклада сил трения в плоскую составляющую момента.

В задаче же плоского кольца неравномерность давления обеспечивается неравномерным распределением трех точек по окружности или смещением центра масс, однако это не дает достаточно больших отклонений траектории.

Также стоит обратить внимание, что количество точек контакта камня для керлинга с ледяной площадкой оценивается 40–100 штуками, потому что именно такое количество пемблов приходится на кольцевую площадку в каждый момент времени.

Наличие точек контакта в количестве более трех штук не позволяет решить задачу с использованием только законов баланса, так как количество неизвестных в этом случае превышает количество уравнений.

В связи с этим можно выделить два подхода к дальнейшему моделированию динамики камня для керлинга.

Первый подход заключается в использовании модели плоского кольца и равномерным распределением нормальных давлений по кольцу. В этом случае асимметрия вносится в распределение коэффициента трения по кольцевой поверхности. Этому подходу посвящена глава 3.

Второй подход заключается в использовании модели цилиндра, однако модель нормальных напряжений описывается уже некоторым непрерывным распределением – в самом простом случае линейным распределением. Однако использование формулы (1.16) не дает желаемого качественного отклонения траектории, поэтому в коэффициент трения включает еще и зависимость от нормальной нагрузки. Этому подходу посвящена глава 4.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАМНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИММЕТРИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ

3.1. Введение асимметрии коэффициента трения

Как уже было замечено, при использовании модели плоского кольца достичь отклонения траектории можно внесением асимметрии в коэффициент трения. При этом центр масс считается совпадающим с геометрическим центром кольца.

Ранее упоминалось, что количество пемблов, с которыми контактирует камень в каждый момент времени, оценивается 40–100 штуками [7]. При этом какие-то из них, а именно находящиеся в задней по отношению к поступательному движению части камня, уже контактировали с передней частью, после чего процесс испарительного охлаждения пемблов [10] увеличил коэффициент трения в задней части согласно формуле (1.15).

Данное объяснение не является достоверным и в настоящее время является одной из гипотез в попытках объяснить не решенную до сих пор проблему природы льда.

Формальное введение передней и задней части камня (скорее, кольцевой поверхности контакта) заключается во введении подвижной системы координат $x_1 O y_1$, ось y_1 которой сонаправлена со скоростью центра масс, а начало координат совпадает с центром масс системы.

Положение каждого пембла определяется по углу φ (как и ранее в задаче плоского кольца, в соответствии с рисунком 2; единственная разница состоит в том, что ранее под точками контакта не подразумевались именно пемблы). Введение нумерации пемблов подчиняется правилу: φ_i тем больше, чем больше порядковый номер i пембла.

В дальнейшем считается, что распределение пемблов по кольцу равномерное, тогда в каждом пембле в силу симметрии и в силу использования

модели плоского кольца нормальное давление в каждом пембле будет вычисляться следующим образом:

$$P_i = \frac{mg}{J}, \quad (3.1)$$

где J – общее количество пемблов, приходящееся на кольцевую поверхность в данный момент времени. Для удобства далее принято, что пемблы по ледяной площадке распределены с равномерностью, достаточной для того, чтобы считать J постоянным на всем пути камня.

При описанном распределении пемблам передней части соответствуют номера $i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}J$ или $i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(J + 1)$ для четного и нечетного J соответственно, где J – общее количество пемблов.

Далее вводится $A_{\text{тр}}$ – коэффициент усиления трения, который считается с учетом эмпирических данных следующим образом [11]:

$$A_{\text{три}} = 1 + 0.264 \sqrt{\frac{\sin \varphi_i}{v_i}}, \quad (3.2)$$

где i – номер пемблы задней части. Для пемблов передней части $A_{\text{три}}$ считается равным 1.

Тогда коэффициент трения высчитывается по следующей формуле:

$$\mu_i = 0.008 A_{\text{три}} v_i^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

3.2. Исследование влияния угловой скорости и свипинга на траекторию

3.2.1 Влияние начальной угловой скорости

Количество пемблов принимается равным 40, а начальные условия – следующими:

$$\underline{r}_C(0) = 0; \underline{\dot{r}}_C(0) = 2\underline{j}; \varphi(0) = 0; \underline{\dot{\varphi}}(0) = 0.5\underline{k}, \underline{k}, 2\underline{k}. \quad (3.4)$$

Результаты численного эксперимента приведены на рисунке 7.

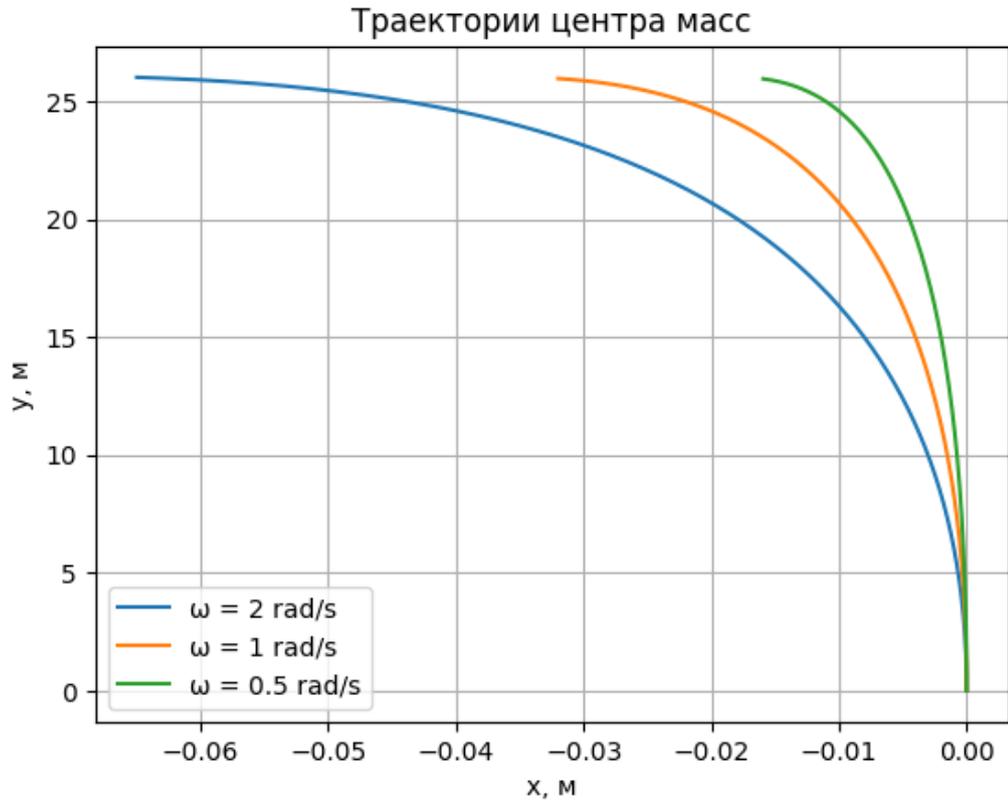


Рисунок 7. Траектория центра масс в зависимости от начальной угловой скорости (вращение против часовой стрелки)

В случае вращения по часовой стрелке (что соответствует изменению знака вектора угловой скорости на противоположный) происходящее демонстрирует рисунок 8.

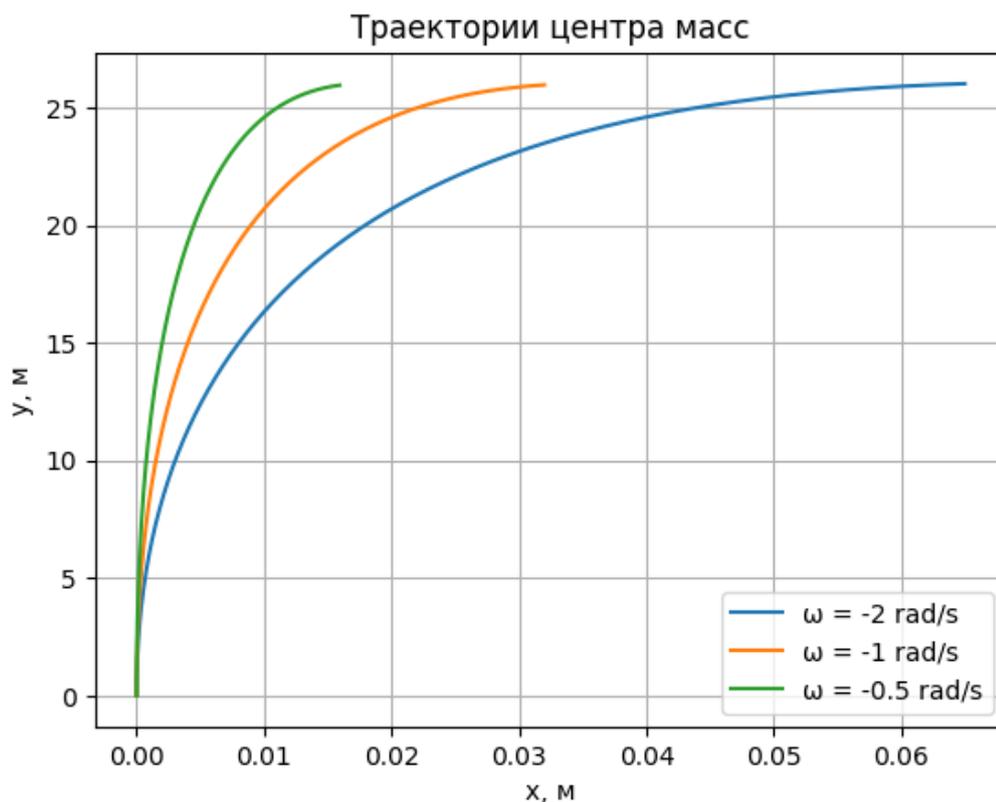


Рисунок 8. Траектория центра масс в зависимости от начальной угловой скорости (вращение по часовой стрелке)

Как можно видеть, результат оказался положительным: отклонение траектории происходит влево при вращении камня против часовой стрелки и вправо при вращении по часовой. Поперечное смещение на один порядок меньше смещения в реальной игре [7].

Величина поперечного смещения увеличивается с ростом начальной угловой скорости, что соответствует экспериментальным данным [8].

3.2.2 Влияние свипинга

Используются следующие начальные условия:

$$\underline{r}_c(0) = 0; \underline{\dot{r}}_c(0) = 2\underline{j}; \underline{\varphi}(0) = 0; \underline{\dot{\varphi}}(0) = 2\underline{k}. \quad (3.5)$$

Свипинг подразумевает увеличение температуры льда в районе его натирания, а значит, уменьшение коэффициента трения. Изменения температуры не превышают 1 °С.

Далее применена формула

$$\mu_i = \mu_0 A_{\text{три}} v_i^{-\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

с коэффициентом $\mu_0 = 0.008$ (формула, применяемая ранее; отсутствие свипинга), $\mu_0 = 0.007$ и $\mu_0 = 0.006$, которые соответствуют -5 °С, -4.5 °С, -4 °С соответственно.

Результаты численного моделирования приведены на рисунке 9.

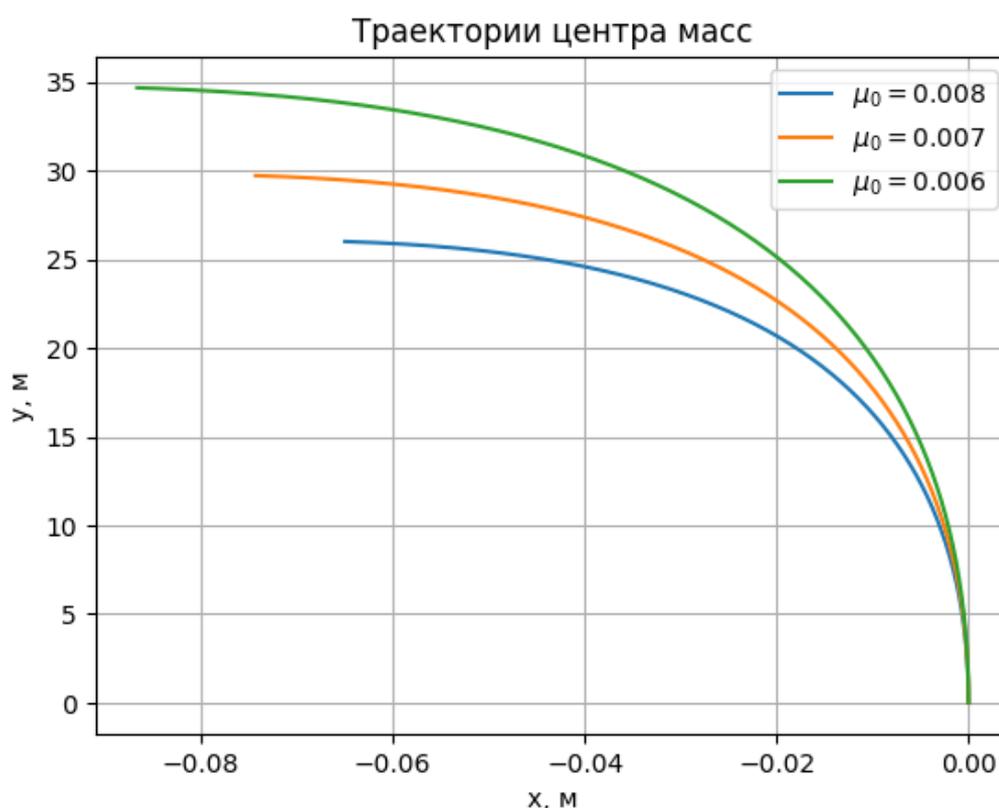


Рисунок 9. Влияние свипинга на траекторию камня

Как можно видеть, увеличение температуры льда способствует дальности пути камня и большему смещению камня в поперечном направлении.

3.2.3 Влияние коэффициента усиления трения

Выражение (3.2), как уже было замечено, составлено на основе экспериментальных данных. Однако эта формула учитывает лишь механизм

испарительного охлаждения. Предполагается, что существенное влияние на описываемый коэффициент оказывает также деформация пембблов передней частью, поэтому ожидаются бóльшие значения коэффициента усиления трения [5].

На рисунке 10 приведены результаты численных экспериментов для различных значений этого коэффициента. В качестве начальных условий использовались условия (2.7).

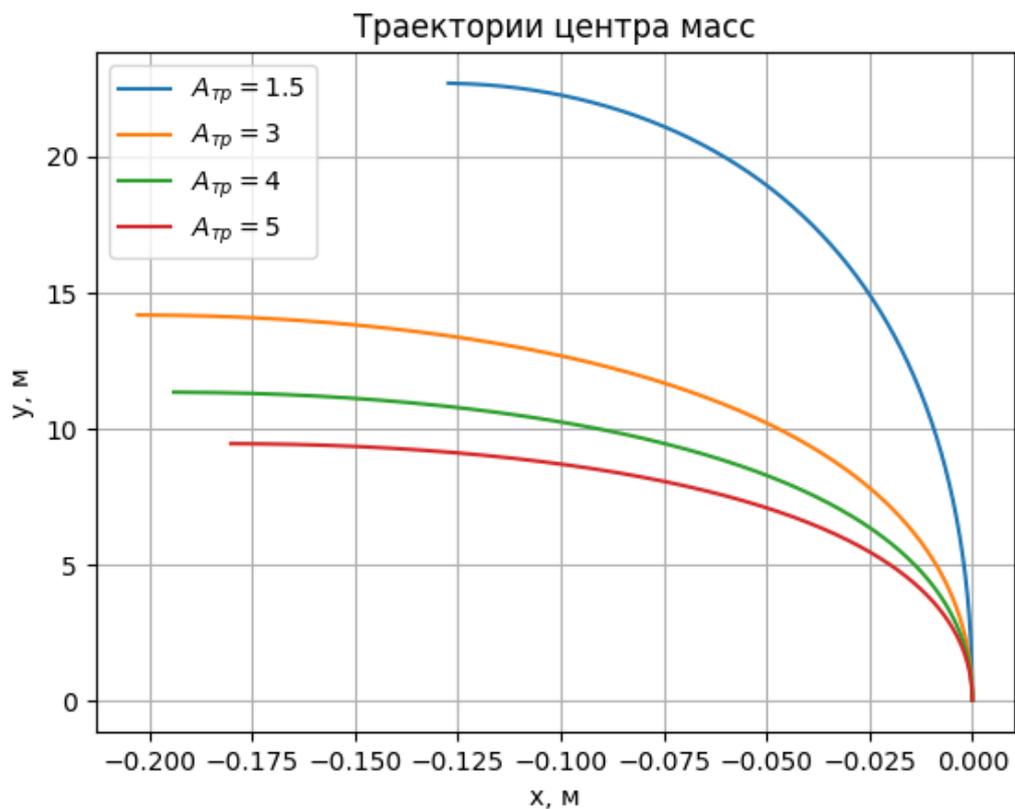


Рисунок 10. Влияние коэффициента усиления трения на траекторию

Как можно видеть, с увеличением коэффициента усиления трения смещение камня в поперечном направлении все больше и больше доминирует над смещением в продольном направлении, так как увеличиваются горизонтальные составляющие сил трения. При этом траектория становится короче, так как камень быстрее начинает тормозить. По приведенным результатам понятно, что не следует брать коэффициент усиления больше 1.5–2, так как в противном случае нивелируется смещение в продольном направлении.

3.3. Сравнение с экспериментальными данными

В качестве начальных условий в эксперименте использовались следующие:

$$\underline{r}_c(0) = 0, \underline{\dot{r}}_c(0) = 2.26\underline{j}, \underline{\varphi}(0) = 0, \underline{\dot{\varphi}}(0) = 1.6\underline{k}. \quad (3.7)$$

Значение коэффициента усиления трения было принято равным 1.5.

В таблице 1 приведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными [8]. В качестве параметров для сравнения используются продольное смещение Δy (вдоль оси y), поперечное смещение Δx (вдоль оси x , величина отклонения), количество оборотов N_{rot} , время в пути t .

Таблица 1. Сравнение экспериментальных и численных данных по параметрам траектории

Параметр	Эксперимент	Численное моделирование	Относительная погрешность
Δy , м	34.63	30.74	11.23 %
Δx , м	1.21	0.12	90.08 %
N_{rot}	4.25	5.70	25.44 %
t , с	21.9	22.54	2.92 %

Как можно увидеть, результат для смещения в поперечном направлении оказался очень плохим, что говорит о том, что данная модель все-таки не способна в полной мере реализовать реальные траектории камня для керлинга.

Также на рисунках 11–14 приведено сравнение экспериментальных данных с результатами численных экспериментов по характеру изменения вертикальной составляющей скорости, по характеру изменения смещения в продольном направлении, по характеру изменения угловой скорости и по характеру изменения угла поворота.

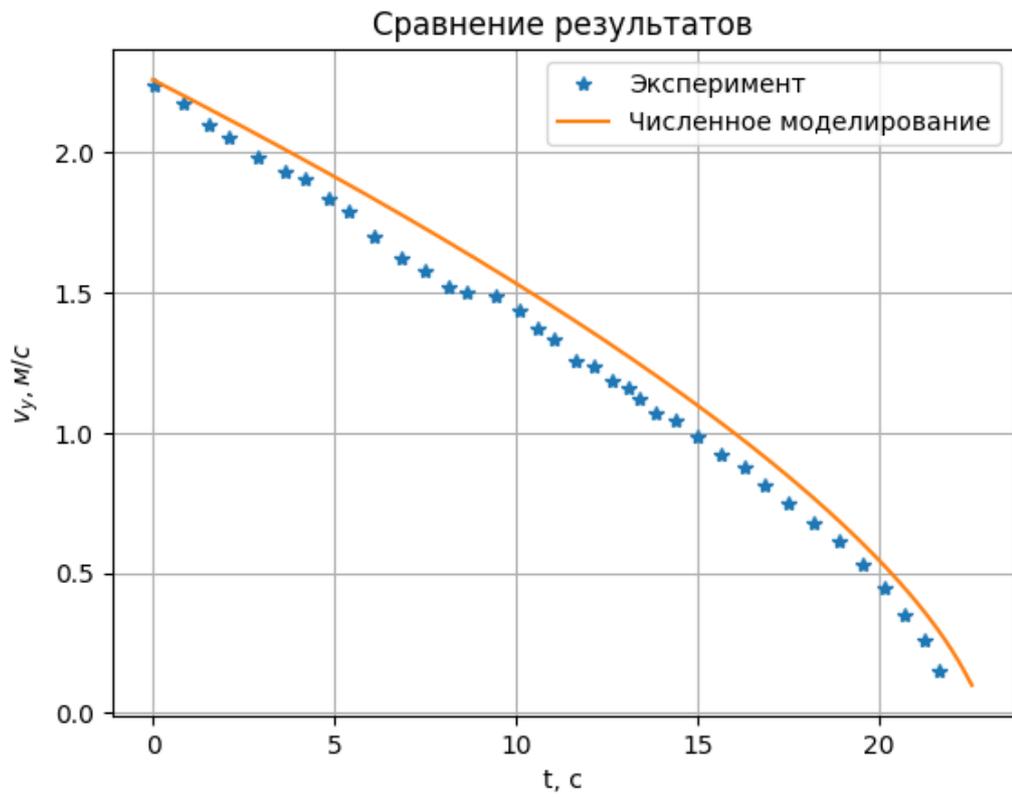


Рисунок 11. Сравнение по вертикальной составляющей скорости

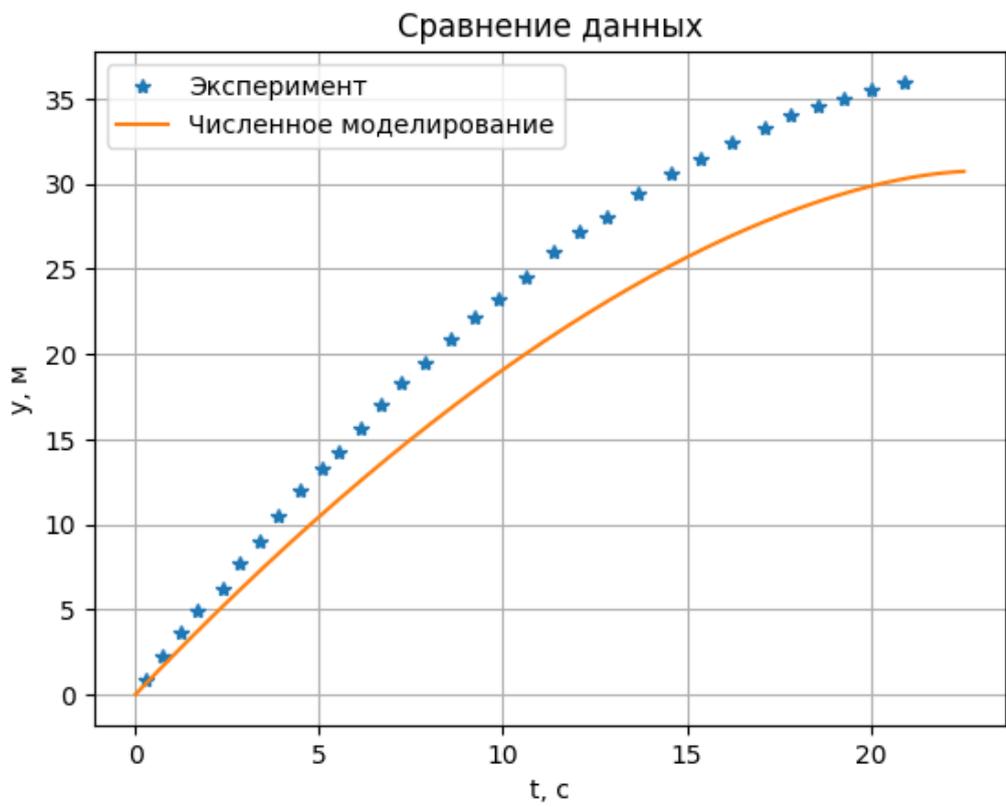


Рисунок 12. Сравнение по продольному смещению

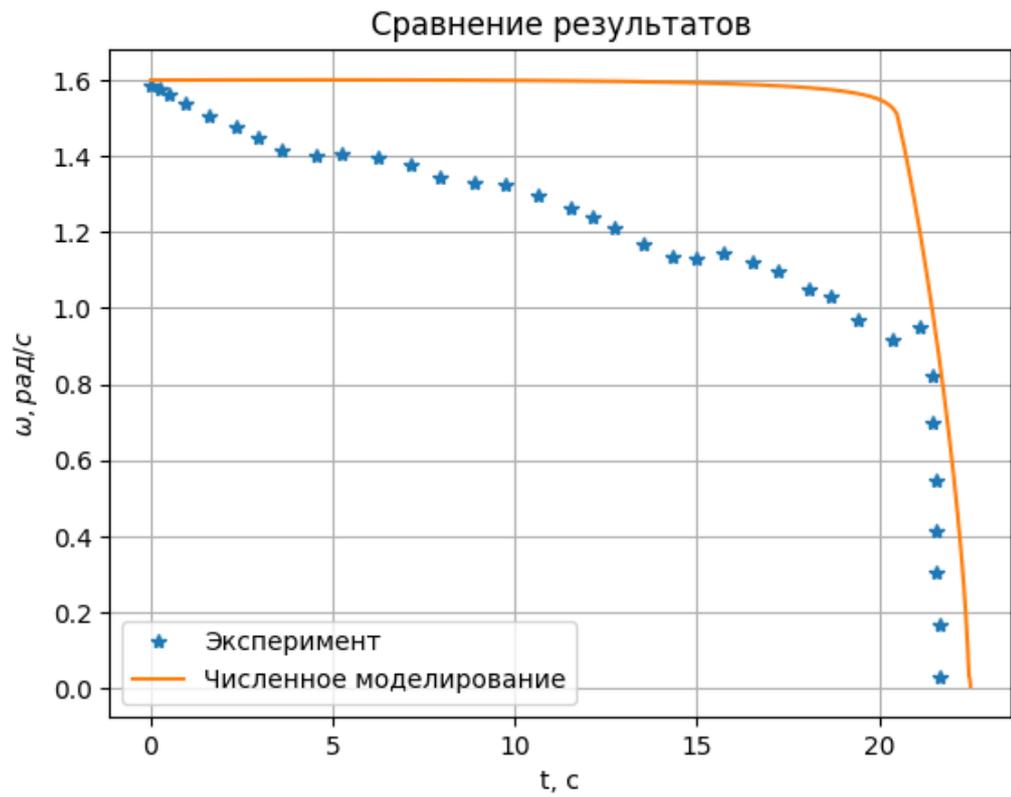


Рисунок 13. Сравнение по угловой скорости

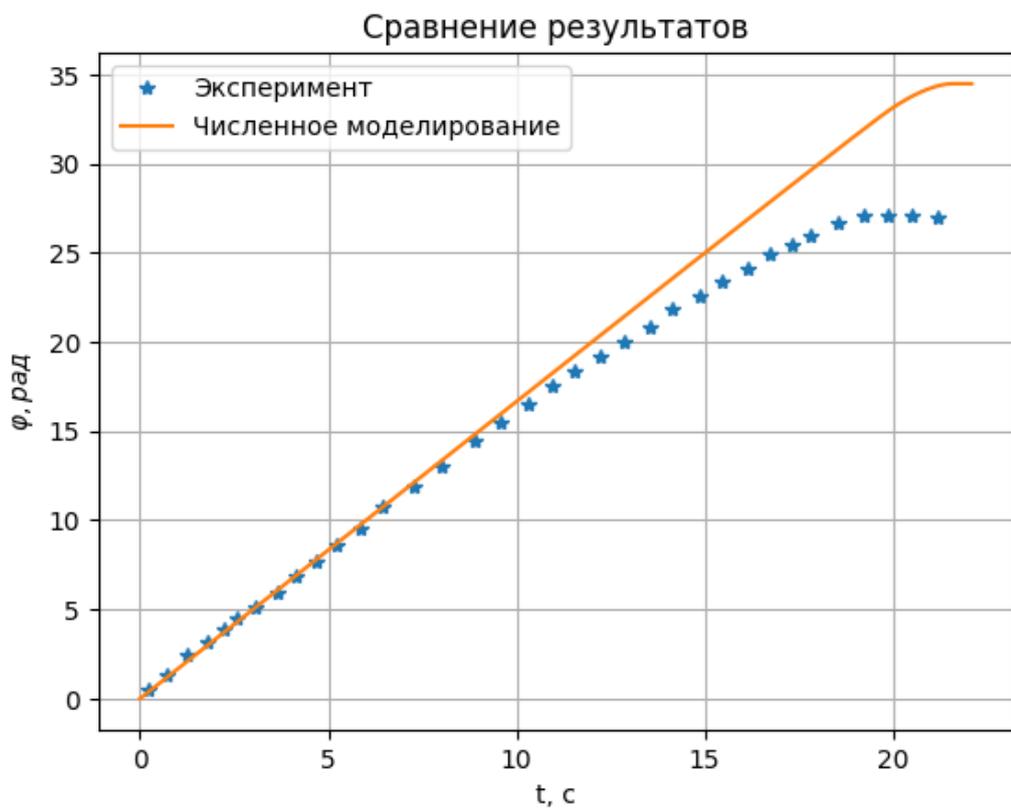


Рисунок 14. Сравнение по углу поворота

Как можно видеть, качественно графики повторяют друг друга. Среди особенностей можно отметить следующее: поступательная скорость убывает более плавно, чем угловая, в поведении которой можно отметить резкое убывание по прошествии бóльшей части времени пути.

Таким образом, наблюдается хорошее качественное и количественное воспроизведение большинства динамических величин. Серьезные отличия экспериментальных данных и численной реализации касаются только значений величины смещения камня в поперечном направлении.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАМНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

4.1. Введение закона распределения нормального давления и модели коэффициента трения

Как уже было отмечено, точек, в которых камень для керлинга контактирует с ледяной площадкой, существенно больше, чем 3, поэтому при использовании только законов баланса нужно следить за тем, чтобы количество неизвестных, отвечающих распределению нормального давления, было равно 3.

В литературе применяют линейную модель нормальных напряжений [3]:

$$p(x_1, y_1) = p_0 + p_1 x_1 + p_2 y_1, \quad (4.1)$$

где p_0 , p_1 и p_2 – некоторые коэффициенты, нахождение которых и требуется на каждом шаге, x_1 и y_1 – координаты рассматриваемой точки в подвижной системе координат.

Суммарная сила нормальной реакции тогда вычисляется как интеграл по площади кольца:

$$P = \iint_S (p_0 + p_1 x_1 + p_2 y_1) dx_1 dy_1. \quad (4.2)$$

Модель (4.1) описывает непрерывное распределение давления, однако ничего не мешает перейти к дискретной модели, сохраняя предположение о том, что камень контактирует с ледяной площадкой в конечном количестве точек (далее считается равным количеству пемблов $J = 40$). Тогда выражение для силы нормальной реакции в какой-либо точке кольца:

$$P(x_1, y_1) = P_0 + P_1 x_1 + P_2 y_1, \quad (4.3)$$

где P_0 , P_1 и P_2 – некоторые коэффициенты, нахождение которых требуется на каждом шаге.

Также переход от непрерывной модели к дискретной можно интерпретировать как работу с интегральными суммами (приближенное вычисление интегралов методами численного интегрирования).

Распределение пемблов по кольцевой поверхности считается, как и ранее, равномерным.

Также используется модель (1.14) коэффициента трения, зависящего от числа Гюмбеля.

Линейная функция числа Гюмбеля выглядит следующим образом [13]:

$$\mu(x_1, y_1) = \mu_0 + \mu_1 \frac{v(x_1, y_1)}{P(x_1, y_1)}, \quad (4.4)$$

где μ_0 и μ_1 – некоторые коэффициенты (заранее определяемые исследователем). Далее предполагается, что $\mu_0 \neq 0$ и $\mu_1 \neq 0$.

4.2. Преобразование уравнений движения и уравнений равновесия

Далее уравнения (1.5)–(1.10) приведены с учетом формул (4.3) и (4.4) и в подвижной системе координат $x_1 O y_1$.

$$m\dot{v}_{cx} = - \sum_{i=1}^J \mu_i(x_{1i}, y_{1i}) \frac{v_{ix1}(x_{1i}, y_{1i})}{v_i(x_{1i}, y_{1i})} P_i(x_{1i}, y_{1i}), \quad (4.5)$$

$$m\dot{v}_{cy} = - \sum_{i=1}^J \mu_i(x_{1i}, y_{1i}) \frac{v_{iy1}(x_{1i}, y_{1i})}{v_i(x_{1i}, y_{1i})} P_i(x_{1i}, y_{1i}), \quad (4.6)$$

$$-mg + \sum_{i=1}^J P_i(x_{1i}, y_{1i}) = 0, \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=1}^J \left(y_{1i} P_i(x_{1i}, y_{1i}) - h\mu_i(x_{1i}, y_{1i}) \frac{v_{iy1}(x_{1i}, y_{1i})}{v_i(x_{1i}, y_{1i})} P_i(x_{1i}, y_{1i}) \right) = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^J \left(x_{1i} P_i - h\mu_i(x_{1i}, y_{1i}) \frac{v_{ix1}(x_{1i}, y_{1i})}{v_i(x_{1i}, y_{1i})} P_i(x_{1i}, y_{1i}) \right) = 0, \quad (4.9)$$

$$I_{zz}^C \dot{\omega} = \sum_{i=1}^J \frac{\mu_i(x_{1i}, y_{1i}) P_i(x_{1i}, y_{1i})}{v_i(x_{1i}, y_{1i})} (y_{1i} v_{ix1} - x_{1i} v_{iy1}), \quad (4.10)$$

где x_{1i} и y_{1i} – координаты i -ой точки контакта в подвижной системе координат, v_{ix1} и v_{iy1} – компоненты скорости i -ой точки в подвижной системе координат, которые выражаются через модуль скорости центра масс и угловую скорость следующим образом:

$$v_{ix1} = -\omega y_{1i}, \quad (4.11)$$

$$v_{iy1} = v + \omega x_{1i}, \quad (4.12)$$

где v – модуль скорости центра масс в данный момент времени.

В соответствии с выражениями (4.11) и (4.12) и с учетом симметрии расположения точек относительно осей подвижной системы координат (распределение пемблов считается равномерным) уравнения равновесия приобретают следующий вид:

$$-mg + JP_0 = 0, \quad (4.13)$$

$$P_2 \sum_{i=1}^J y_{1i}^2 - h\mu_0 P_0 \sum_{i=1}^J \frac{v_{1y}}{v_i} - h\mu_0 P_1 \sum_{i=1}^J \frac{x_{1i} v_{1y}}{v_i} - h\mu_1 v J = 0, \quad (4.14)$$

$$P_1 \sum_{i=1}^J x_{1i}^2 + h\mu_0 \omega P_2 \sum_{i=1}^J \frac{y_{1i}^2}{v_i} = 0. \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13)–(4.15) образуют линейную систему уравнений относительно P_1 , P_2 и P_3 .

4.3. Анализ системы для различных значений коэффициентов

μ_0 и μ_1

Совершенно очевидно, что оба эти коэффициента не могут быть меньше нуля одновременно (в противном случае коэффициент трения был бы отрицательным).

4.3.1 Случай $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 > 0$

Согласно [1] данный случай соответствует отклонению траектории вправо (при вращении тела против часовой стрелки).

В качестве начальных условий используются условия (2.7). Высота центра масс считается равной 0.06 м.

На рисунке 15 приведены результаты численного моделирования при фиксированном $\mu_0 = 0.00002$, на рисунке 16 – при фиксированном $\mu_1 = 0.05$.

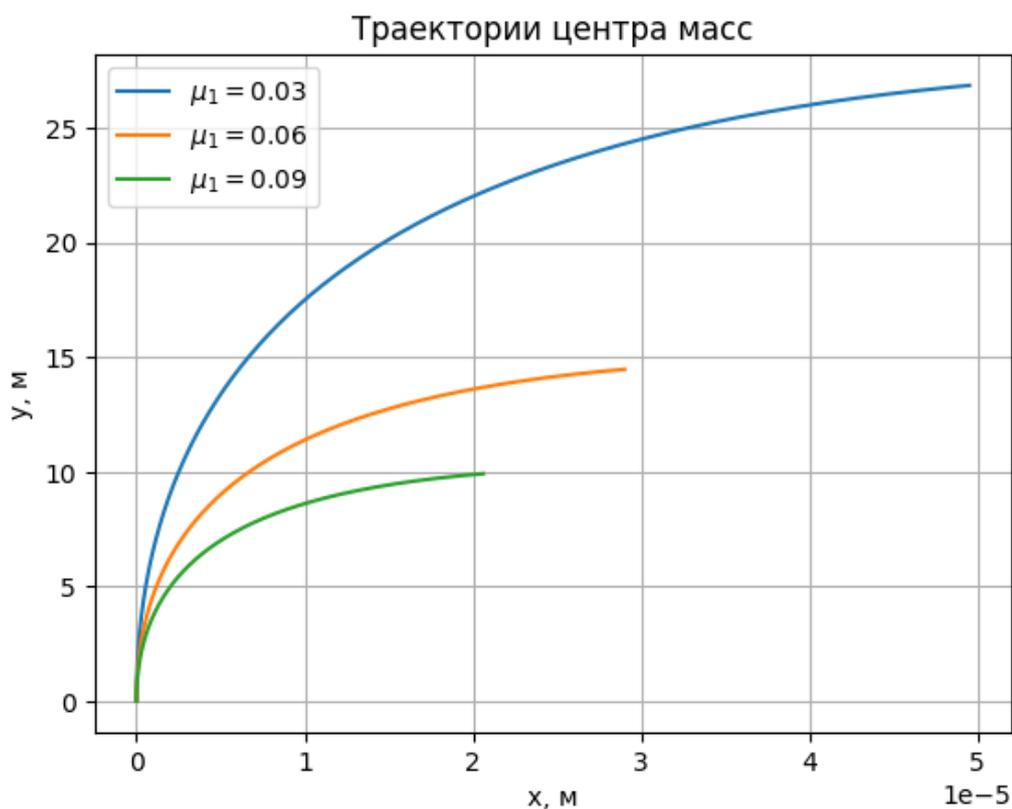


Рисунок 15. Влияние коэффициента μ_1 на траекторию

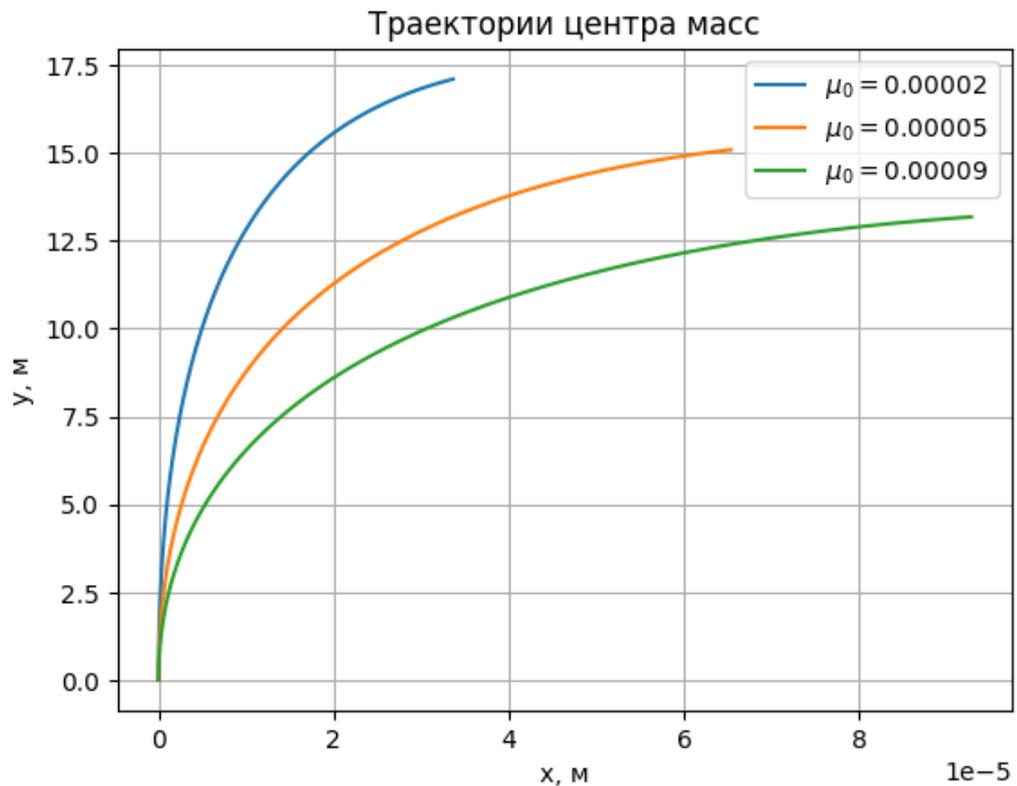


Рисунок 16. Влияние коэффициента μ_0 на траекторию

Как можно видеть, при фиксированном μ_0 с увеличением μ_1 уменьшается смещение камня в продольном направлении и уменьшается в поперечном. При фиксированном μ_1 с увеличением μ_0 уменьшается в продольном и увеличивается в поперечном. Однако отклонения траектории имеют общий недостаток: смещение в поперечном направлении не соответствует даже порядку отклонений в реальной игре (даже в случае $\mu_0 = 0.00002$, $\mu_1 = 0.03$, в котором продольное смещение соответствует обычной дистанции камня при игре в керлинг).

4.3.2 Случай $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 < 0$

Согласно [1] данный случай соответствует нефизичным результатам – увеличению линейной скорости, поэтому этот случай здесь рассмотрен не будет.

4.3.3 Случай $\mu_0 < 0$ и $\mu_1 > 0$

Согласно [1] данный случай соответствует отклонению траектории влево при вращении против часовой стрелки.

В качестве начальных условий используются условия (2.7). Высота центра масс считается равной 0.06 м.

На рисунке 17 приведены результаты численного моделирования при фиксированном $\mu_0 = -0.00002$, на рисунке 18 – при фиксированном $\mu_1 = 0.05$.

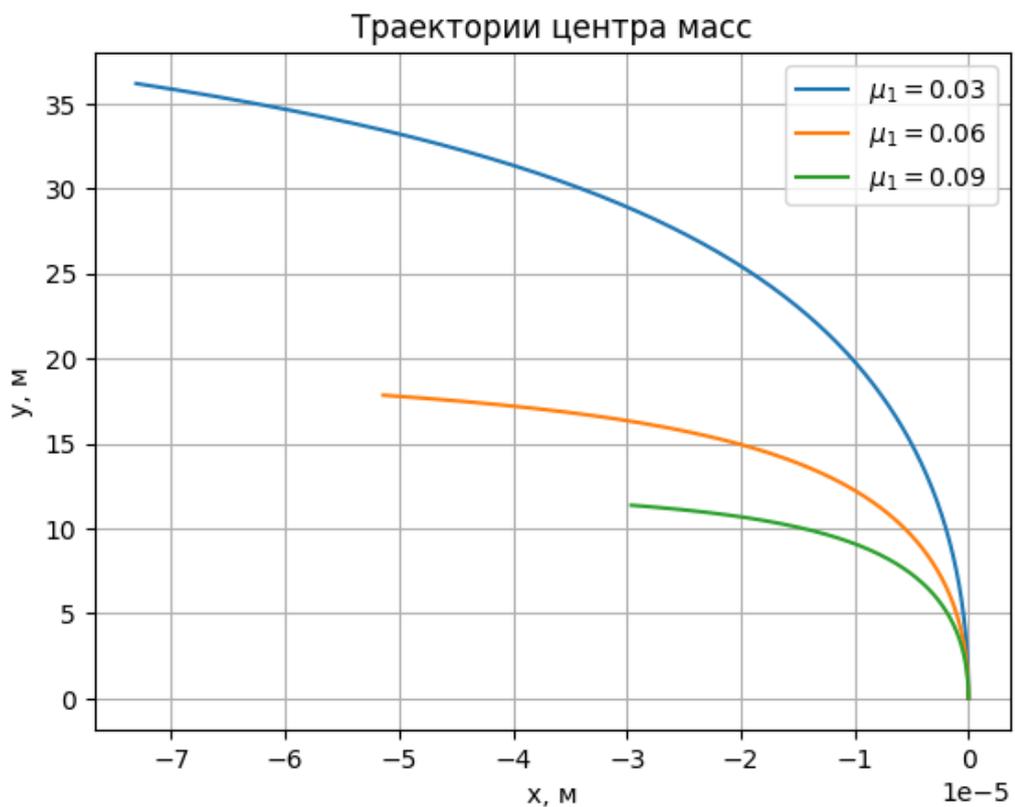


Рисунок 17. Влияние коэффициента μ_1 на траекторию

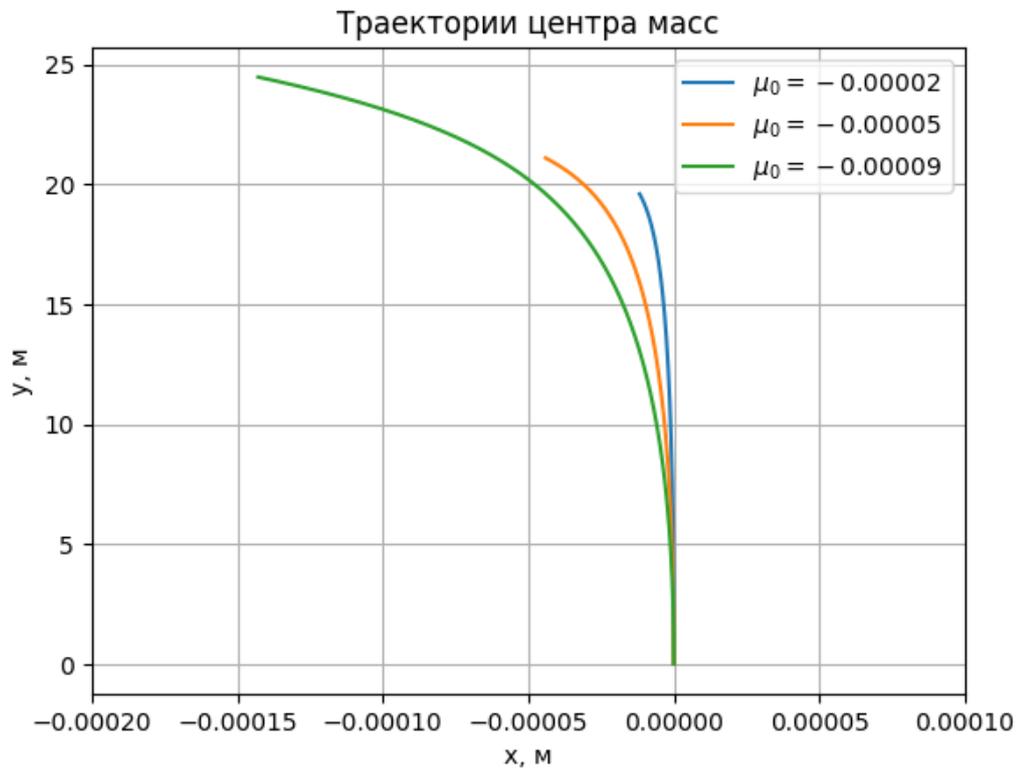


Рисунок 18. Влияние коэффициента μ_0 на траекторию

Можно сделать те же качественные выводы относительно влияния коэффициентов μ_0 и μ_1 . Главное качественное отличие – отклонение траектории влево, что соответствует реальной игре, однако порядок отклонения все равно ей не соответствует.

Стоит отметить, что подбор коэффициентов μ_0 и μ_1 – отдельный нетривиальный вопрос, выходящий за рамки данной работы.

Сравнение результатов с экспериментальными данными в данном случае лишено смысла: по приведенным графикам и так видны сильные расхождения с реальностью.

Введение линейной зависимости коэффициента трения от числа Гюмбеля позволило лишь на качественном уровне продемонстрировать эффекты керлинга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе поставлена задача моделирования динамики камня, движущегося по льду при игре в керлинг.

Показано, что имеют место быть два принципиально разных подхода к решению этого вопроса на основе рассмотрения задачи о движении плоского кольца и задачи о движении цилиндра, контактирующих с шероховатой поверхностью в трех точках. Получено, что решающее влияние на искривление траектории в рассмотренных постановках оказывает значение высоты центра масс тела над шероховатой поверхностью.

Сделаны выводы о мотивах внесения асимметрии в коэффициент трения в случае задачи о плоском кольце и использовании законов распределения сил нормальной реакции в случае задачи о цилиндре.

Для моделирования динамики камня для керлинга как плоского кольца было использовано введение коэффициента усиления трения, имеющего отличное от единицы значение в задней по отношению к поступательному движению части кольцевой поверхности. Изучено влияние на траекторию камня величины угловой скорости, значения коэффициента усиления трения и процесса свипинга, оказывающего влияние на коэффициент трения. Произведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными и получены достаточно хорошие качественные и количественные результаты по характеру убывания поступательной скорости, угловой скорости, по характеру возрастания величины смещения в продольном направлении и возрастания угла поворота. Серьезные количественные расхождения наблюдаются для величины смещения в поперечном направлении.

Для моделирования динамики камня для керлинга как цилиндра ненулевой высоты введены линейные модели распределения силы нормального давления и коэффициента трения, зависящего от числа Гюмбеля. Показано, что с использованием этой модели удастся добиться качественно

верного отклонения траектории, однако количественно ситуация также далека от реальной игры.

В процессе анализа становится ясно, что оба эти подхода используют асимметрию в том или ином виде. Первый подход использует формально введенный коэффициент усиления трения, но не учитывает неравномерность распределенной нагрузки за счет использования модели плоского кольца. Второй же подход более физичен с точки зрения распределения нормальных нагрузок, однако вынужден использовать законы распределения для возможности решения задачи с использованием законов баланса.

По результатам, полученным в ходе решения, понятно, что оба подхода нуждаются в доработке и модификациях.

На данный момент задача моделирования динамики камня, движущегося по льду при игре в керлинг, является частным случаем открытой в науке задачи движения твердого тела по льду, которая, в свою очередь, является частным случаем фундаментальной задачи механики о движении твердого тела по шероховатой поверхности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Иванов А. П. Основы теории систем с трением // М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011, 302 с.
2. Akkok M., Ettles CMMcC, Calabrese SJ. Parameters affecting the kinetic friction of ice // ASME J Tribol, 2015, vol. 109, pp. 127–155.
3. Bowden FP, Hughes TP. The mechanism of sliding on ice and snow // Proc Royal Soc Lond, 1939, pp. 280–298.
4. Bradley JL. The sport science of curling: a practical review // J Sports Sci Med, 2012, vol. 8, pp. 495–500.
5. Denny M. Curling rock dynamics // Canadian J. Phys., 1998, vol. 76, pp. 295–304.
6. Evans DCB, Nye JF, Cheeseman KJ. The kinetic friction of ice // Proc Royal Soc Lond, 1976, pp. 493–512.
7. Harrington E. L. An experimental study of the motion of curling stones // Trans. Royal Soc. Canada, 1924, vol. 8, pp. 247–259.
8. Jensen E. T., Shegelski M. R. A. The motion of a curling rock: Experimental investigation and semi-phenomenological description // Canadian J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 791–809.
9. Johnston G. W. The dynamics of a curling stone // Canadian Aeronautics and Space J., 1981, vol. 27, pp. 144–160.
10. Maeno N., Arakawa. Adhesion shear theory of ice friction at low sliding velocities, combined with ice sintering // J Appl Phys 95(1), 2004, pp. 134–139.
11. Maeno N. Curl mechanism of a curling stone on ice pebbles // Bull Glaciol Res, 2010, vol. 28, pp. 1–6.
12. Nittono T., Kadowaki K., Komagome T., Tokumoto M., Hattori K., Maeno N. Measurements of ice friction coefficient and curl ratio of a curling stone // Proc Symp Sports Hum Dyn, 2012, pp. 205–209.
13. Oksanen P., Keinonen J. The mechanism of friction of ice // Wear, 1982, vol. 78, pp. 315–324.

14. Penner A. R. The physics of sliding cylinders and curling rocks // Amer. J. Phys., 2001, vol. 69, no. 3, pp. 332–339.

15. Shegelski M. R. A., Niebergall R., Walton M. A. The motion of a curling rock // Canadian J. Phys., 1996, vol. 74, pp. 663–670.

16. Curlingshop [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://curlingshop.ru/stonesandhandles/kays_stones (дата обращения: 02.04.2023).