ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Высшая школа теоретической механики
Институт прикладной математики и механики

Асимптотика дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры в двумерном диссипативном гармоническом кристалле при действии точечного источника тепла

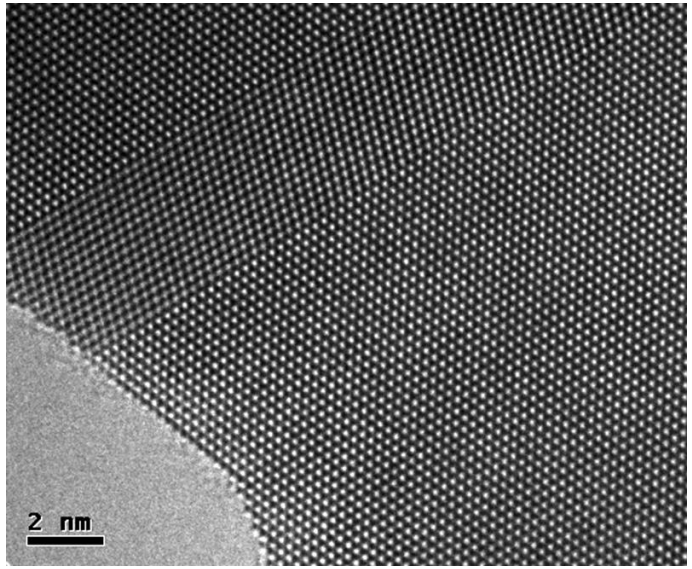
Иващенко Андрей Тарасович

Научный руководитель:

Гаврилов Сергей Николаевич, профессор ВШТМ, д.ф.-м.н.

Санкт-Петербург, 2020г

Распространение тепла в микроструктурах: Закон Фурье выполняется не всегда



Снимок кристаллической решетки

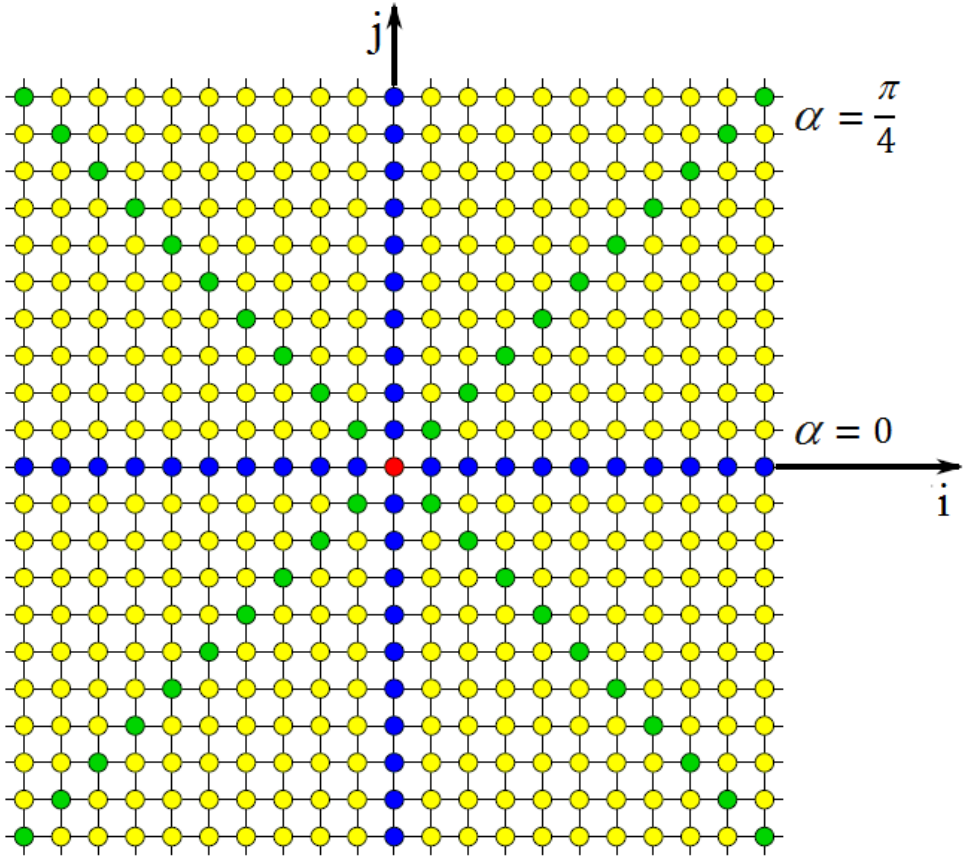
- 1967г. Теоретическое обнаружение баллистической теплопроводности для одномерного гармонического кристалла.

- С начала 2000-х: множество экспериментальных подтверждении наличия аномальной теплопроводности в наноструктурах.

Феномен аномального распространения тепла имеет большое значение для микроэлектроники.

2-D гармоническая диссипативная натянутая решетка

В недавней статье[1] была исследована система:



Натянутая квадратная решетка. Красным цветом обозначена точка нагрева.

$$\begin{cases} dv_{i,j} = F_{i,j}dt + \delta_{i;0}\delta_{j;0}b\,dW \\ du_{i,j} = v_{i,j}dt \end{cases},$$

$$F_{i,j} = \omega_0{}^2 L_{i,j}u_{i,j} - \eta v_{i,j}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}},$$

$$dW = \rho\sqrt{dt},$$

$$L_i u_{i,j} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j},$$

$$L_{i,j}u_{i,j} = L_i u_{i,j} + L_j u_{i,j}$$

В силу симметрии, задача рассматривается в секторе $0 \le \alpha \le \pi/4$.

Рассматриваются поперечные колебания натянутой решетки.

[1] Gavrilov S. N., Krivtsov A. M. “Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source”, (2019).

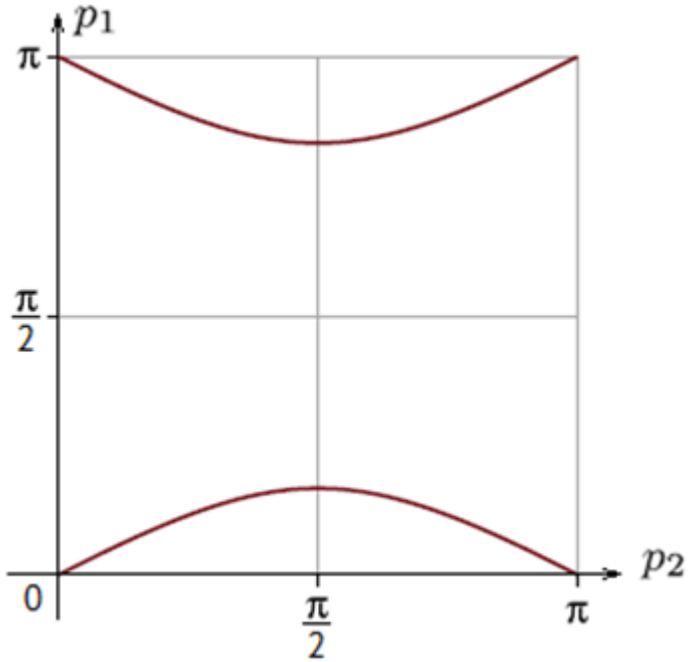
Стационарное распределение кинетической температуры в 2-D гармонической диссипативной решетке при действии точечного источника тепла[1]

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\bar{\chi}_0}{4\pi^2|x_1|}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{\pi}\frac{\exp\left(-\eta\left|\frac{x_1}{C_0\left(p_1, p_2^{(j)}\right)\sin(p_1)}\right|\right)}{C_0(p_1, p_2^{(j)})\sqrt{1-\tan^2(\alpha)\sin^2(p_1)}}\,dp_1$$

$$C_0\left(p_1, p_2^{(j)}\right) = \frac{c}{2\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{p_2^{(j)}}{2}\right)^2}}$$

p_2 выражается через p_1 и α неоднозначно:

$$p_2^{(1)} = \operatorname{Arcsin}\big(\tan(\alpha)\sin(p_1)\big),$$
$$p_2^{(2)} = \pi - \operatorname{Arcsin}\big(\tan(\alpha)\sin(p_1)\big).$$



Решение построено для $p_1 > 0$ и $\alpha \in [0; \pi/4)$

x_1 – пространственная континуальная, координата вдоль оси i

$p_1, p_2^{(j)}$ – волновые числа, соответствующие дискретному волновому числу Фурье-образа функции T

[1] Gavrilov S. N., Krivtsov A. M. “Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source”, (2019).

Постановка задачи

Моя задача - получить асимптотику дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры в двумерном диссипативном гармоническом кристалле при действии точечного источника тепла.

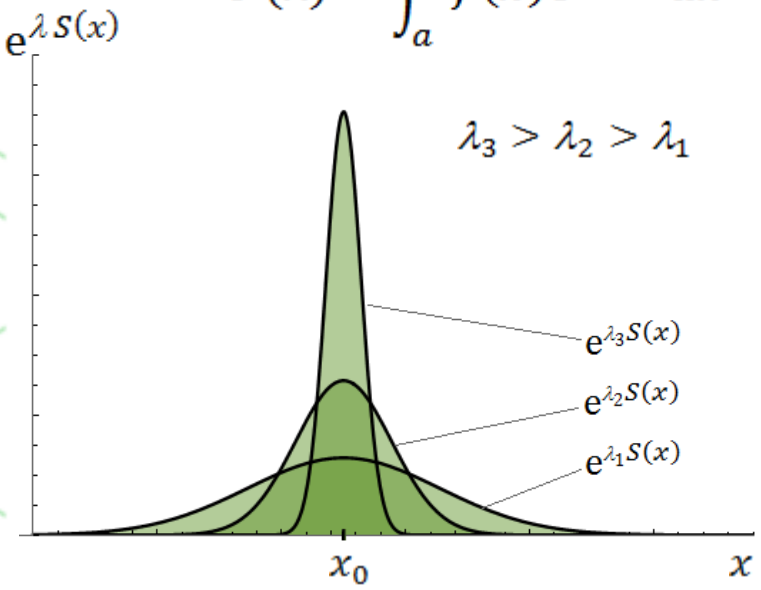
Объект исследования: двумерный гармонический диссипативный кристалл.

Предмет исследования: распределение температуры в интегральном представлении, полученное в [1].

[1] Gavrilov S. N., Krivtsov A. M. “Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source”, (2019).

Метод Лапласа

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx$$



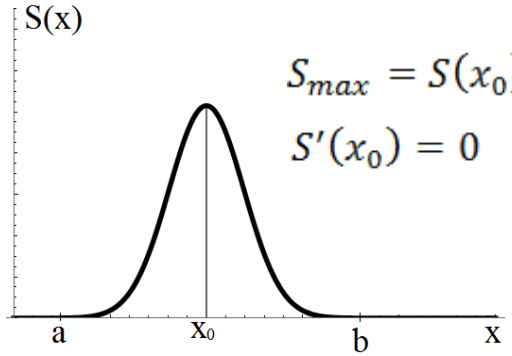
При достаточно больших λ, в окрестности точки локального максимума x_0:

$f(x) \approx f(x_0)$,

$S(x) - S(x_0) \approx 1/2\, S''(x_0)\,(x - x_0)^2$ (случай I,II),

$S(x) \approx S(a) - S'(a)\,(x - a)$ (случай III).

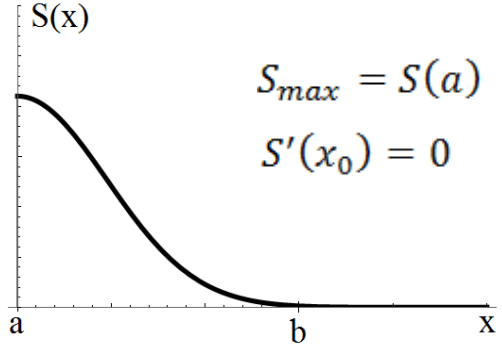
I



$$S_{max} = S(x_0)$$
$$S'(x_0) = 0$$

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\, e^{\lambda S(x_0)} \left[f(x_0) + O(\lambda^{-1})\right]$$

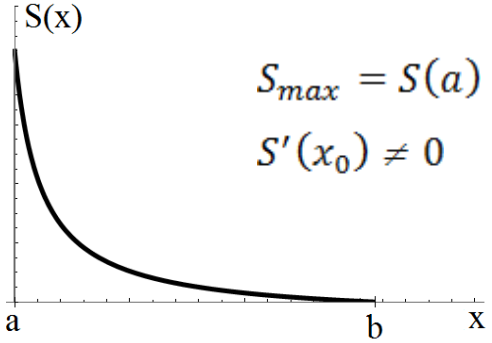
II



$$S_{max} = S(a)$$
$$S'(x_0) = 0$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\, e^{\lambda S(a)} \left[f(a) + O(\lambda^{-1})\right]$$

III



$$S_{max} = S(a)$$
$$S'(x_0) \neq 0$$

$$F(\lambda) = -\frac{e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \left[f(a) + O(\lambda^{-1})\right]$$

Лемма Ватсона: $\phi(\lambda) = \int_0^a \exp(-\lambda t^{\alpha})\, t^{\beta-1} f(t)\, dt, \quad \hat{\phi}(\lambda) \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{-(n+\beta)}{\alpha}}\, \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$

Асимптотика при $\alpha = 0$

Для нулевого угла решение в работе [1] было получено в более простом виде:

$$T_1 = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2 |x_1| c}\left(\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right) - \frac{\eta|x_1|}{c} E_1\left(\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\right), \quad E_1(z) = \int_1^\infty \frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma z)\, d\gamma, \quad Re(z) > 0$$

$$T_2 = \frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2 |x_1| c}\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2} + 1}\ \exp\left(-\frac{2\eta|x_1|\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2} + 1}}{c\sin p_1}\right) dp_1$$

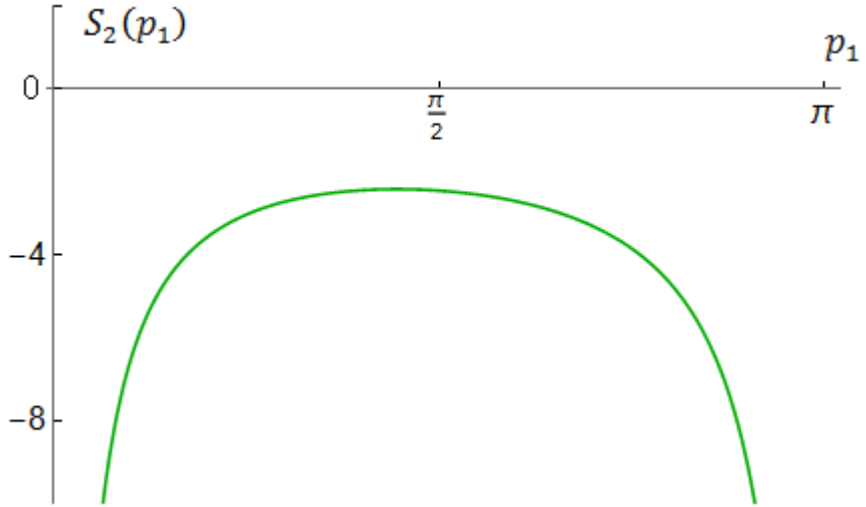
Для слагаемых T_1 и T_2 мною получены главные члены асимптотик:

$$\hat{T}_1(x_1, 0) = \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2 \eta\, |x_1|^2} + O(|x_1|^{-3})\right),$$

$$\hat{T}_2(x_1, 0) = \exp\left(-(1+\sqrt{2})\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\bar{\chi}_0\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi^3 |x_1|^{\frac{3}{2}}\, \eta\, c}} + O\left(|x_1|^{-\frac{5}{2}}\right)\right).$$

Показатель экспоненты в слагаемом T_1 является линейной функцией. Для получения асимптотики по методу Лапласа T_1 подходит асимптотическая формула **III**.

Для получения асимптотики по методу Лапласа слагаемого T_2 подходит асимптотическая формула **I** (см. рис. ниже).



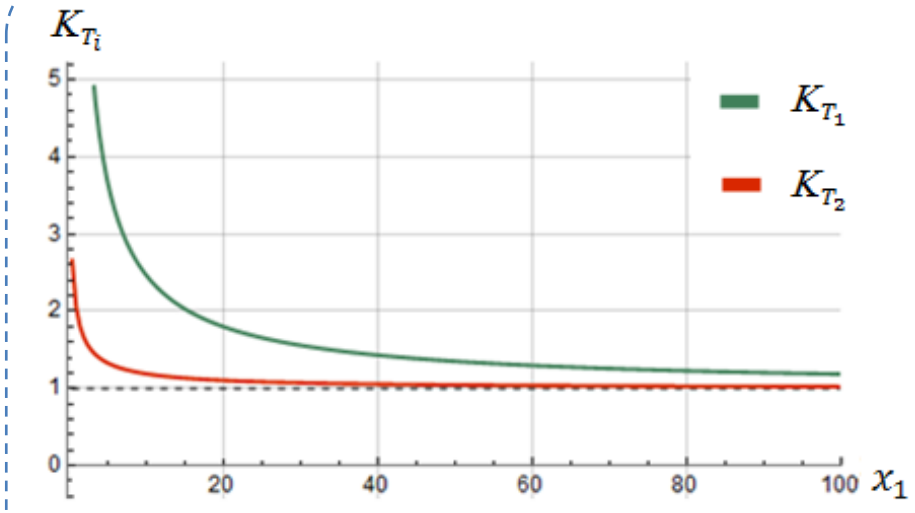
[1] Gavrilov S. N., Krivtsov A. M. “Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source”, (2019).

Асимптотика при $\alpha = 0$

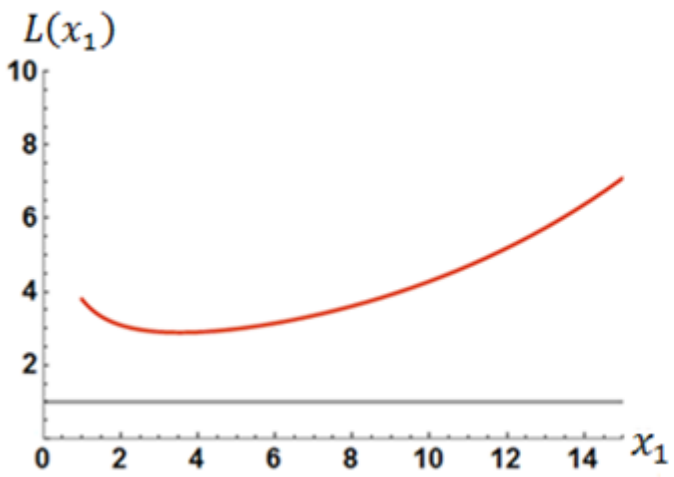
$$\hat{T}_1(x_1,0) \sim C_1 \frac{1}{|x_1|^2}\, exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right)$$

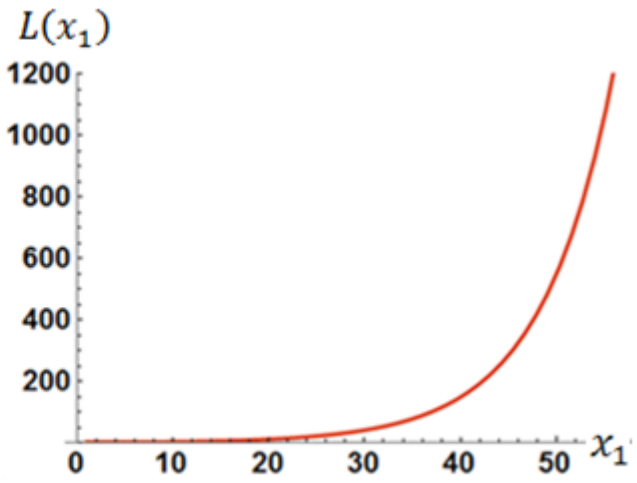
$$\hat{T}_2(x_1,0) \sim C_2 \frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}}\, exp\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\eta|x_1|}{c}\right)$$

Абсолютное значение показателя экспоненты в асимптотике T_2 больше, чем в T_1.



$$K_{T_1} = \frac{\hat{T}_1(x_1,0)}{T_1(x_1,0)}, \quad K_{T_2} = \frac{\hat{T}_2(x_1,0)}{T_2(x_1,0)}.$$





$$T(x_1,0) = \hat{T}_1(x_1,0)\left(1+o(1)\right)$$

Поведение функции $L(x_1) = \dfrac{\hat{T}_1(x_1,0)}{\hat{T}_2(x_1,0)}$ при $C_1 \approx 0.51$, $C_2 \approx 0.15$

Во всех численных расчетах параметры принимают следующие значения:

$c = 1$

$\eta = 0.1$

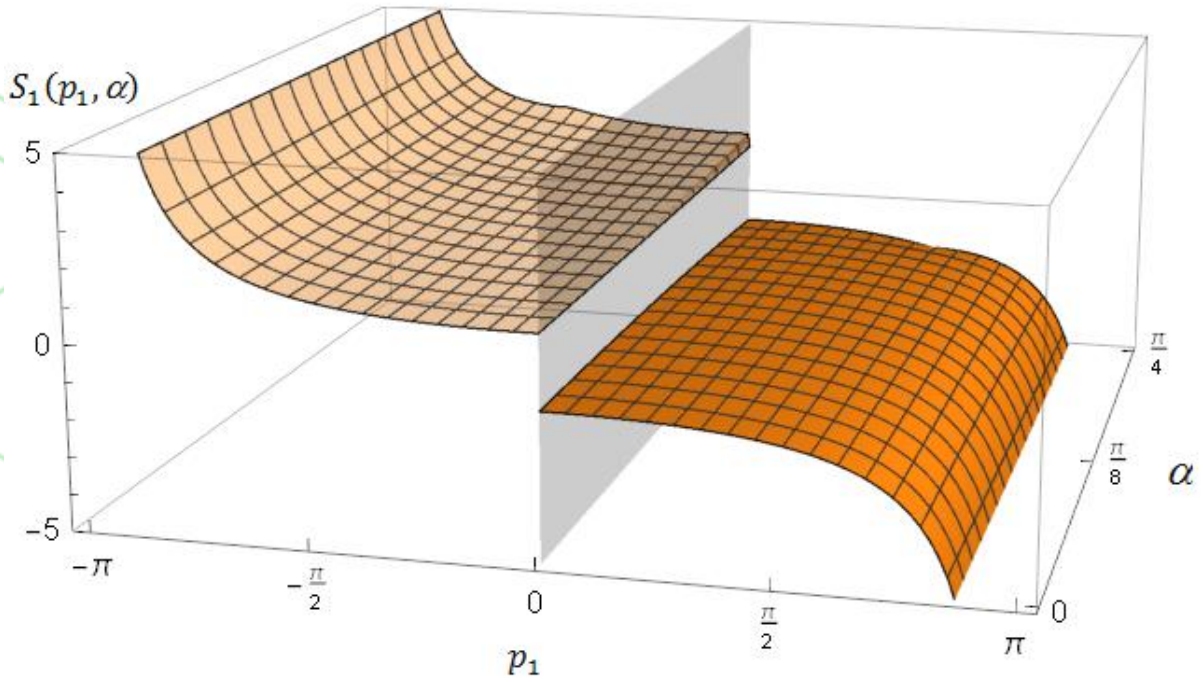
$\bar{\chi}_0 = 0.5$

Слагаемые T_1 и T_2 при произвольном α в интегральном представлении

$$T_1 = \frac{\bar{\chi}_0\, c}{2\pi^2 |x_1|} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)\,\sin^2(p_1)}} \exp\left(-\frac{2\,\eta\,|x_1|}{c}\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}}{|\sin(p_1)|}\right) dp_1$$

$$T_2 = \frac{\bar{\chi}_0\, c}{2\pi^2 |x_1|} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi - \mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}}{\sqrt{1-\tan^2(\alpha)\,\sin^2(p_1)}} \exp\left(-\frac{2\,\eta\,|x_1|}{c}\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi - \mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}}{|\sin(p_1)|}\right) dp_1$$

Асимптотика T_1 при произвольном α



Поверхность, образованная показателем экспоненты $S_1(p_1, \alpha)$ в слагаемом $T_1(x_1, a)$. Участок $p_1 \in [0;\ \pi]$ позволяет понять, что происходит в плоскости $p_1 = 0$.

Слагаемое $T_1(x_1, \alpha)$ подходит под случай **II**, но при попытке воспользоваться асимптотической формулой оказывается, что функция $f_1(p_1^*(\alpha), \alpha)$ вырождена:

$$T_1(x_1, a) \approx f_1(p_1^*(\alpha), \alpha)\,\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\pi c}{\eta|x_1|\,S_1''(p_1^*(\alpha), \alpha)}}\;e^{\frac{2\eta|x_1|}{c}S_1(p_1^*(\alpha),\alpha)}$$

$$p_1^*: \qquad S_{\max}(p_1, \alpha) = S(p_1^*, \alpha)$$

$$\lim_{p_1 \to 0} \frac{\partial S_1(p_1, \alpha)}{\partial p_1} = 0.$$

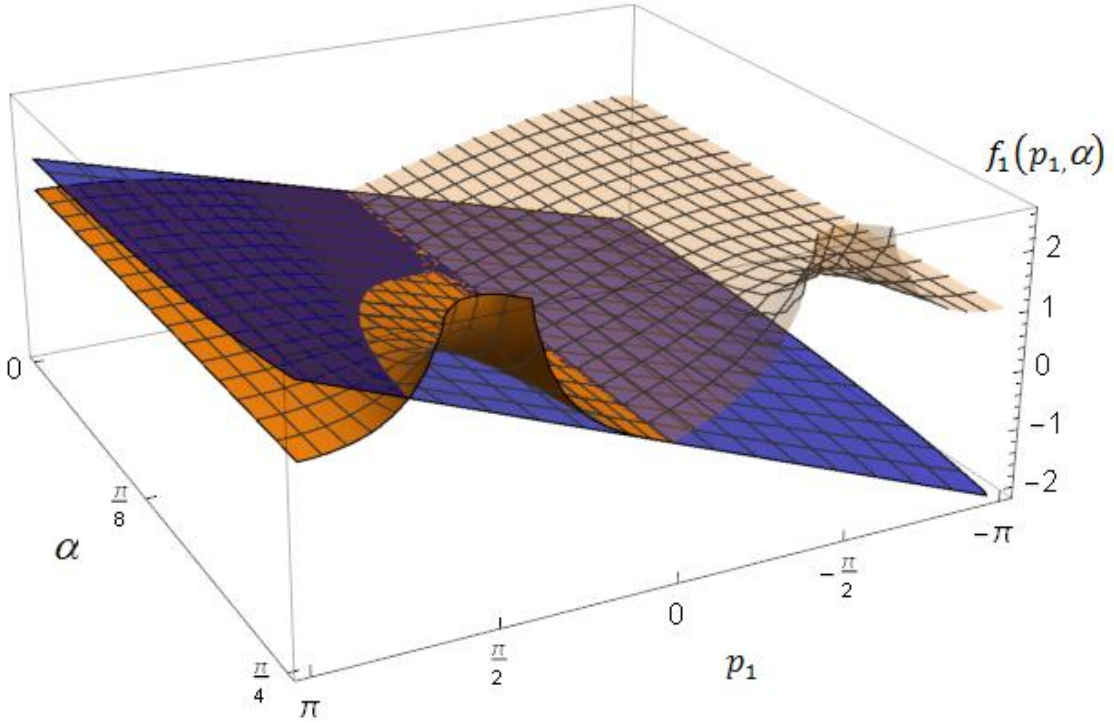
$$p_1^* = 0 \quad \forall\, \alpha \quad => \; f_1(0, \alpha) = 0$$

Функции $f_1(p_1, \alpha)$, $S_1(p_1, \alpha)$ раскладываются в ряд Тейлора до главных членов в окрестности $p_1 = 0$, затем применяется лемма Ватсона.

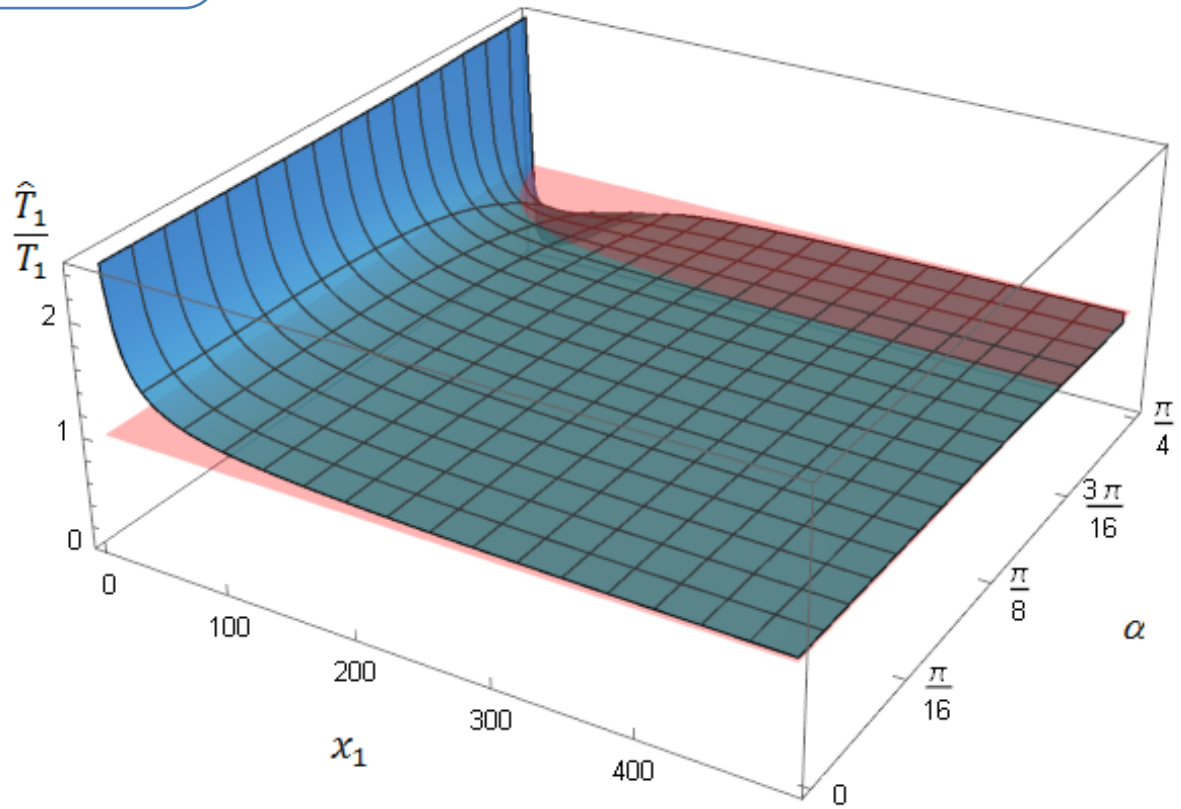
Асимптотика T_1 при произвольном α

$$\hat{T}_1(x_1,\alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta|x_1|^2}\,\frac{\sec^2\alpha}{1+\tan^4\alpha}\exp\left(-\sec(\alpha)\,\frac{\eta\,|x_1|}{c}\right) + O(|x_1|^{-3})$$

Полученная асимптотика слагаемого $T_1\,(x_1,\,\alpha)$ хорошо аппроксимирует дальнее поле.

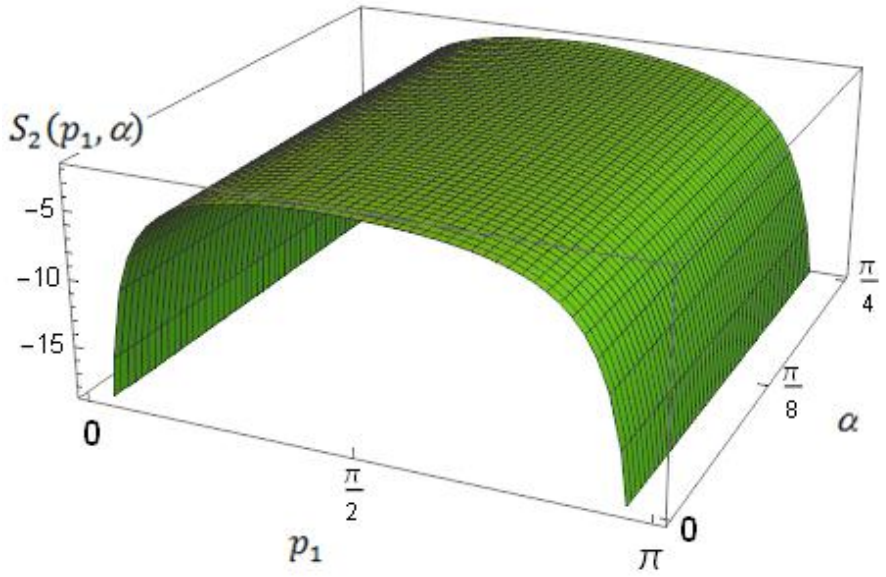


Оранжевым цветом показана функция $f_1(p_1,\alpha)$.
Синим цветом – ее аппроксимация $\hat{f}_1(p_1,\alpha)$.



Синяя поверхность показывает поведение функции $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1,\alpha)$,
Розовая плоскость соответствует значению $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1,\alpha) = 1$.

Асимптотика T_2 при произвольном α

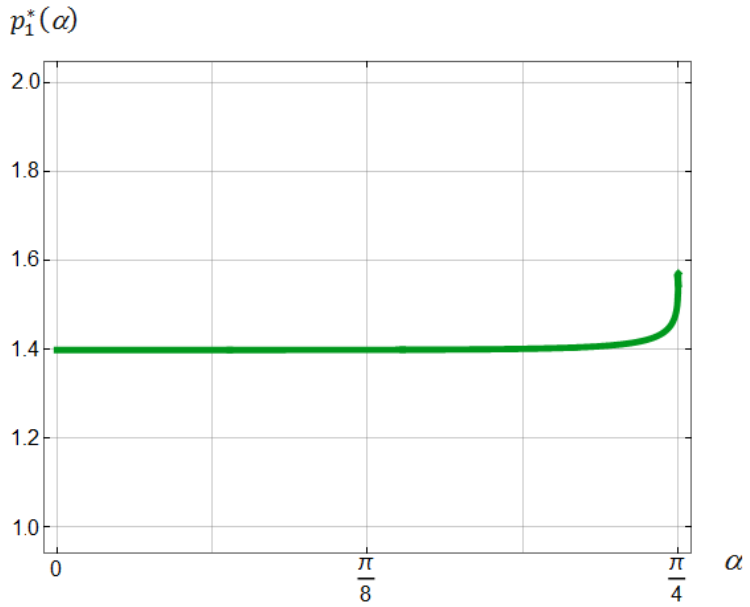


Поверхность, образованная показателем экспоненты S_2 (p_1, α) в слагаемом T_2 (x_1, α) .

Асимптотика T_2 (x_1, α) получена в полуаналитическом виде.

Слагаемое T_2 (x_1, α) подходит под случай **I**, но при попытке воспользоваться асимптотической формулой оказывается, что $f_2(p_1^*(\alpha), \alpha)$, $S_2(p_1^*(\alpha), \alpha)$, $S_2''(p_1^*(\alpha), \alpha)$ нельзя аналитически выразить как функции от одного аргумента a, так как $p_1^*(\alpha)$ является неявной функцией.

$$T_2(x_1, a) \approx f_2(p_1^*(\alpha), \alpha) \sqrt{-\frac{\pi c}{\eta |x_1| \, S_2''(p_1^*(\alpha), \alpha)}} \, e^{\frac{2\eta |x_1|}{c} S_2(p_1^*(\alpha), \alpha)}$$



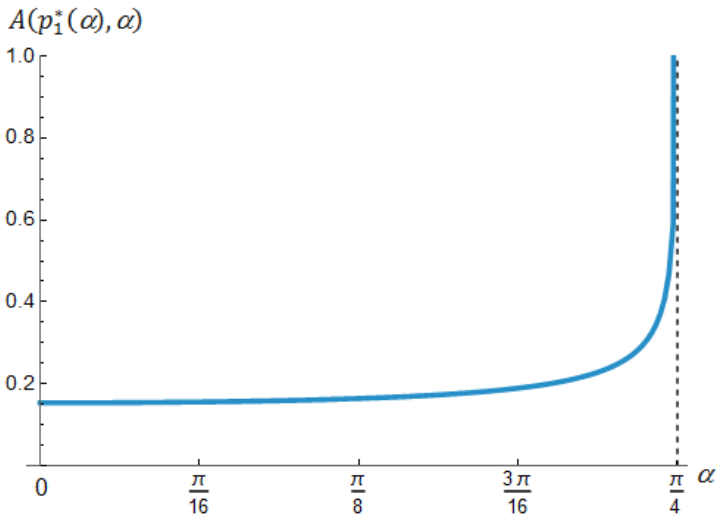
Зависимость точки максимума p_1^* показателя экспоненты S_2 (p_1, α) от угла α.

Асимптотика T_2 при произвольном α

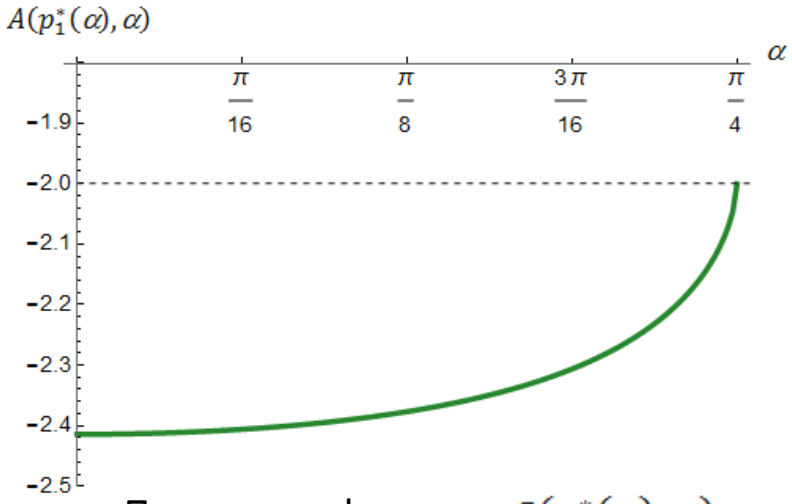
$$\hat{T}_2(x_1,\alpha) = A(p_1^*(\alpha),\alpha)\,\frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}}\,\exp\left(S(p_1^*(\alpha),\alpha)\,\frac{\eta|x_1|}{c}\right),$$

$$A(p_1^*(\alpha),\alpha) = \bar{\chi}_0\sqrt{-\frac{1}{S''(p_1^*(\alpha),\alpha)\,2\,\pi^3\,\eta\,c}}\,f(p_1^*(\alpha),\alpha).$$

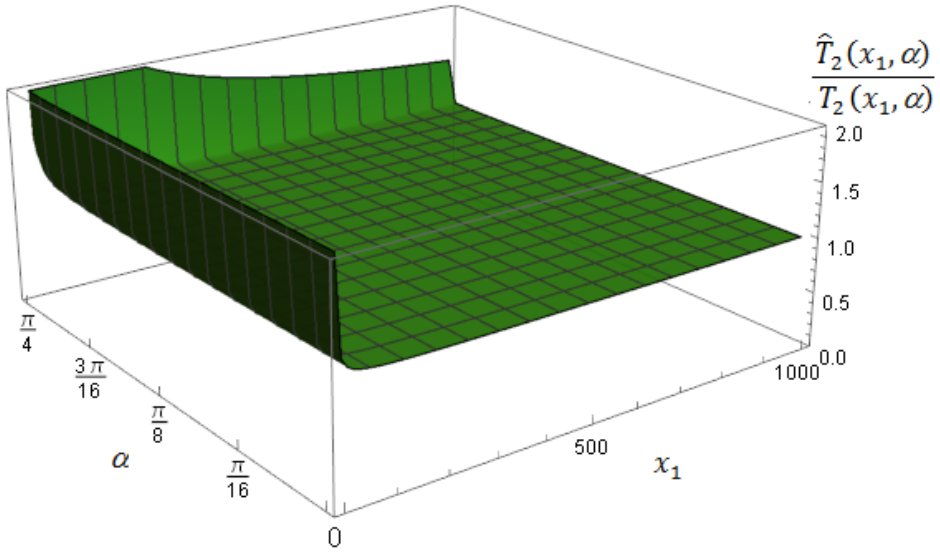
Полученная асимптотика слагаемого $T_2\,(x_1,\,\alpha)$ хорошо аппроксимирует дальнее поле вне окрестности $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



Поведение функции $A(p_1^*(\alpha),\alpha)$.



Поведение функции $S(p_1^*(\alpha),\alpha)$.



Зеленая поверхность показывает поведение функции $\frac{\hat{T}_2}{T_2}(x_1,\alpha)$.

$$A(p_1^*(\alpha),\alpha) \in [0.15;+\infty),\quad S(p_1^*(\alpha),\alpha) \in \left[-2;-\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

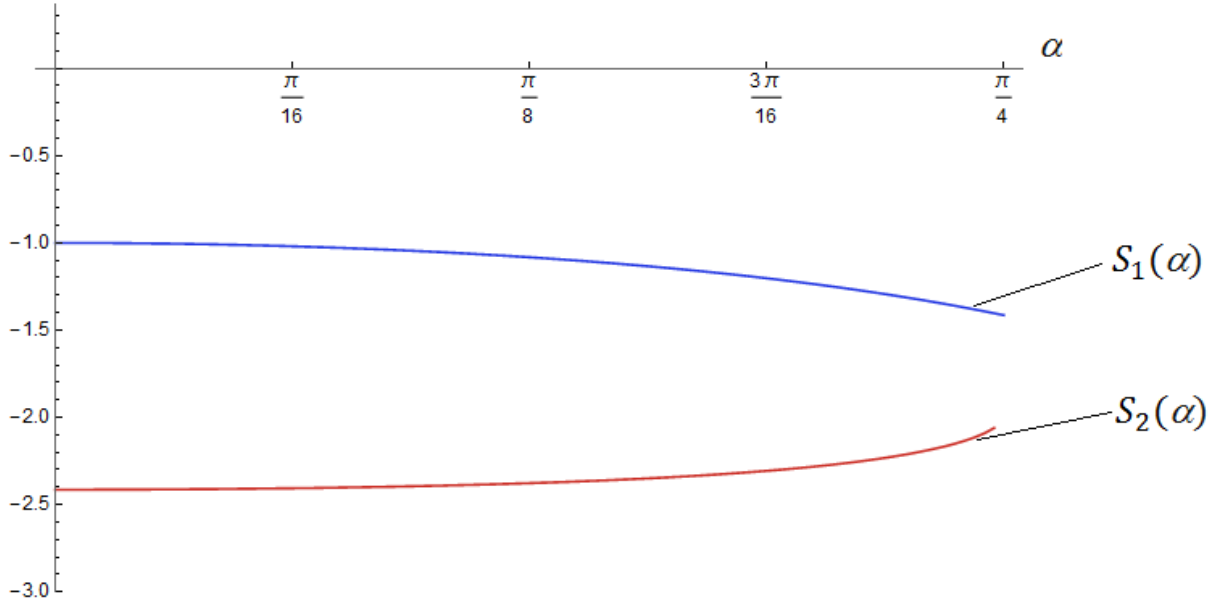
Вклад слагаемых T_1 и T_2 в температурное поле

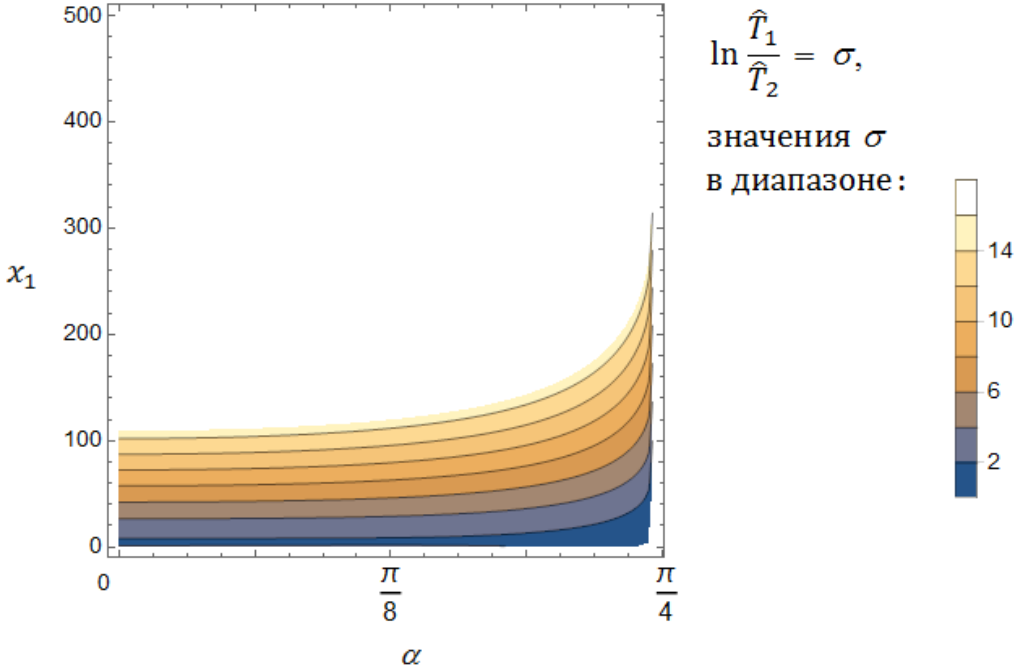
$$\hat{T}_1(x_1,\alpha) \sim C_1 \frac{1}{|x_1|^2} \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c} S_1(\alpha)\right),$$

$$\hat{T}_2(x_1,\alpha) \sim C_2 \frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c} S_2(\alpha)\right).$$

$$T(x_1,\alpha) = \hat{T}_1(x_1,\alpha)\big(1+o(1)\big)$$

На дальнем поле слагаемое $\hat{T}_2(x_1,\alpha)$ асимптотически мало, по сравнению со слагаемым $\hat{T}_1(x_1,\alpha)$.





Сравнение показателей экспонент в полученных асимптотиках:

$S_1(\alpha) \in [-\sqrt{2}; -1)$, $S_2(\alpha) \in [-(1+\sqrt{2}); -2)$.

(синяя линяя) (красная линяя)

Чем светлее область на графике, тем меньше влияние слагаемого $\hat{T}_2(x_1,\alpha)$, по сравнению с $\hat{T}_1(x_1,\alpha)$.

Результаты

- Получена асимптотика дальнего поля для компонент $T_1(x_1, 0)$ и $T_2(x_1, 0)$ кинетической температуры T при $\alpha = 0$ в аналитическом виде:

$$\hat{T}_1(x_1, 0) = \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta\,|x_1|^2} + O(|x_1|^{-3})\right),$$

$$\hat{T}_2(x_1, 0) = \exp\left(-(1+\sqrt{2})\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\bar{\chi}_0\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi^3|x_1|^{\frac{3}{2}}\eta\, c}} + O\left(|x_1|^{-\frac{5}{2}}\right)\right).$$

- При $\alpha = 0$ $T_1(x_1, 0)$ является главным членом асимптотики дальнего поля: $T(x_1, 0) = \hat{T}_1(x_1, 0)\big(1 + o(1)\big)$.

- При произвольном α, для слагаемого $T_1(x_1, \alpha)$ получена асимптотика дальнего поля в аналитическом виде:

$$\hat{T}_1(x_1, \alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta|x_1|^2}\,\frac{\sec^2\alpha}{1+\tan^4\alpha}\exp\left(-\sec(\alpha)\,\frac{\eta\,|x_1|}{c}\right) + O(|x_1|^{-3}).$$

- Для слагаемого $T_2(x_1, \alpha)$ получена асимптотика дальнего поля в полуаналитическом виде:

$$\hat{T}_2(x_1, \alpha) = A(p_1^*(\alpha), \alpha)\,\frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}}\exp\left(S(p_1^*(\alpha), \alpha)\,\frac{\eta|x_1|}{c}\right),$$

где множители $A(p_1^*(\alpha), \alpha)$ и $S(p_1^*(\alpha), \alpha)$ вычисляются численно.

- $T_1(x_1, \alpha)$ является главным членом асимптотики дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры $T(x_1, \alpha)$ вдоль произвольной прямой, включающей источник тепла: $T(x_1, \alpha) = \hat{T}_1(x_1, \alpha)\big(1 + o(1)\big)$.