

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.4.33](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.33)

УДК 539.3: 539.4

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ОДНОМЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

О.С. Лобода^{1,2}, Е.А. Подольская^{2,1}, Д.В. Цветков¹, А.М. Кривцов^{1,2}¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассматриваются нестационарные тепловые процессы в низкоразмерных структурах. Понимание теплопередачи на микроуровне необходимо для получения связи между микро- и макроскопическим описанием твердых тел. На макроскопическом уровне распространение тепла описывается законом Фурье. Однако на микроуровне аналитические, численные и экспериментальные исследования показывают существенные отклонения от этого закона. В работе используется созданная ранее модель теплопереноса на микроуровне, имеющая баллистический характер. Изучается влияние не ближайших соседей на тепловые процессы в дискретных средах, а также рассматривается распространение тепла в многоатомных решетках. Для описания эволюции начального теплового возмущения проведен анализ дисперсионных характеристик и групповых скоростей в одномерном кристалле для двухатомной цепочки с чередующимися массами или жесткостями и одноатомной цепочки с учетом взаимодействия со вторыми соседями. Получено и исследовано фундаментальное решение задачи распространения тепла для соответствующих моделей кристаллов. Фундаментальное решение позволяет получить описание волн, бегущих от точечного источника, и служит основой для построения всех остальных решений. Для обеих цепочек решение состоит из двух фронтов, двигающихся друг за другом с различными скоростями и характеристиками интенсивности. Приведены количественные оценки коэффициентов интенсивности фронта тепловой волны, проанализирована динамика изменения скоростей и интенсивностей волн в зависимости от параметров задачи. Выявлено два механизма эволюции фронта тепловых волн в одномерных дискретных системах. Представленные результаты могут быть использованы для корректной интерпретации экспериментов по нестационарному баллистическому теплопереносу в кристаллах.

Ключевые слова: тепловые процессы, кинетическая температура, одномерный кристалл, фундаментальное решение, баллистическое распространение тепла, групповая скорость

ON THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE HEAT TRANSFER PROBLEM IN ONE-DIMENSIONAL HARMONIC CRYSTALS

O.S. Loboda^{1,2}, E.A. Podolskaya^{2,1}, A.M. Krivtsov^{1,2} and D.V. Tsvetkov¹¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation²Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russian Federation

Unsteady thermal processes in low-dimensional structures are considered. Understanding the heat transfer at the micro-level is necessary to obtain a link between micro- and macroscopic descriptions of solids. At the macroscopic level, heat propagation is described by the Fourier law. However, at the microscopic level, analytical, numerical and experimental studies show significant deviations from this law. The previously created model of heat transfer at the microlevel, which has a ballistic character, is used in the work. The influence of non-nearest neighbors on the thermal processes in discrete media is studied, as well as the heat distribution in polyatomic lattices is considered. To describe the evolution of the initial thermal perturbation, the analysis of dispersion characteristics and group velocities in a one-dimensional crystal for a diatomic chain with alternating masses or stiffnesses and a monoatomic chain with regard for interaction with second neighbors is carried out. The fundamental solution of the heat propagation problem for the corresponding crystal models is obtained and studied. The fundamental solution allows us to obtain a description of the waves running from a point source and to use it as a basis for the construction of all other solutions. For both chains, the solution consists of two fronts moving one after another with different velocities and intensity characteristics. Quantitative estimations of the thermal wavefront intensity coefficients are given, and the dynamics of changes in speeds and intensities of the waves depending on the parameters of the problem is analyzed. Two mechanisms of evolution of the heat wavefront in one-dimensional discrete systems are revealed. The presented results can be used for correct interpretation of experiments on unsteady ballistic heat transfer in crystals.

Key words: thermal processes, kinetic temperature, one-dimensional crystal, fundamental solution, ballistic heat transfer, group velocity

1. Введение

На макроскопическом уровне распространение тепла в большинстве материалов описывается законом Фурье, который предполагает линейную зависимость между тепловым потоком и градиентом температуры с коэффициентом пропорциональности, определяемым как коэффициент теплопроводности. Однако на небольших временных и пространственных масштабах наблюдаются заметные отклонения от закона Фурье [1, 2]. Для понимания теплообмена на микроуровне важно получить связь между микро- и макроскопическим описанием процессов в твердых телах. Одним из мощных инструментов для изучения механических процессов на микро- и макроуровне является подход, в основе которого лежит динамика кристаллической решетки [3–14]. Известно [15–17], что в простейших дискретных системах, таких как одномерный гармонический кристалл (цепочка материальных точек,

с линеаризованными по деформациям силами) распространение тепла не подчиняется закону Фурье. Основная причина состоит в том, что, в отличие от макроуровня, где преобладает диффузионная (Фурье) теплопроводность, на микроуровне доминирует баллистический перенос тепла. Аномалии, связанные с баллистической теплопередачей, наиболее заметны для модели гармонического кристалла.

В настоящее время проблема описания нестационарных тепловых процессов на молекулярном уровне имеет точное аналитическое решение только для ограниченного класса систем. Значительный прогресс достигнут для гармонических кристаллов [17–24]. Аналитический подход к описанию баллистического теплообмена в гармонических решетках представлен в работах [25–29], где используется понятие кинетической температуры как величины, пропорциональной сумме кинетических энергий частиц в элементарной ячейке. В одномерном некантовом случае получено макроскопическое уравнение теплопроводности и соответствующий закон аномальной теплопроводности (альтернатива закону Фурье). Этот закон предсказывает конечную скорость тепловых фронтов и независимость теплового потока от длины кристалла. С применением корреляционного анализа начальная стохастическая задача для отдельных частиц сводится к детерминированной задаче для статистических характеристик кристалла. Расширение этого подхода на распространение тепла в многомерных системах представлено в работах [18, 23, 24, 29]. Отметим, что используемое в данной группе работ определение температуры не связано с конкретными длинами волн: в кинетическую температуру дает вклад весь спектр частот.

Важным вопросом представляется изучение влияния не ближайших соседей на процессы в дискретных средах, а также на процессы в многоатомных решетках. Динамические особенности дискретных систем с дополнительными соседними взаимодействиями исследовались в [30–32]. В работах [33, 34] проведен анализ дисперсионных характеристик и групповых скоростей, для систем: двухатомной цепочки с чередующимися массами или жесткостями и одноатомной цепочки с учетом взаимодействия со вторыми соседями. Показано, что в таких системах образуются две тепловые волны, которые распространяются с различными скоростями и интенсивностями. Рассмотрены начальные тепловые возмущения в виде функции Хевисайда и прямоугольного импульса, получены численные решения, отвечающие эволюции начального теплового возмущения. Определены скорости распространения тепловых волн.

Данная работа посвящена исследованию интенсивности фронта тепловых волн. В рамках ранее разработанного подхода к описанию баллистической теплопроводности построено и проанализировано фундаментальное решение задачи распространения тепла в динамических системах с различными свойствами: в одномерном кристалле для двухатомной цепочки с чередующимися массами или жесткостями и одноатомной цепочки с учетом взаимодействия со вторыми соседями. Фундаментальное решение позволяет описывать волны, распространяющиеся от точечного источника, и может служить основой для построения всех остальных решений. Приведены количественные оценки интенсивности фронта тепловой волны, выявлена динамика изменения скоростей и коэффициентов интенсивностей волн в зависимости от параметров задачи.

2. Постановка задачи

В работе [18] показано, что эволюция начального температурного поля $T_0(x)$ в одноатомной цепочке представляется формулой:

$$T(x, t) = T_F + T_S, \\ T_F = \frac{T_0(x)}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\Omega t) d(Ka), \tag{1} \\ T_S = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (T_0(x + c_g(Ka)t) + T_0(x - c_g(Ka)t)) d(Ka),$$

где $T(x, t)$ — кинетическая температура, K — волновое число, a — расстояние между соседними частицами, Ω — частота, c_g — групповая скорость волн в цепочке атомов. То есть на больших временах t , когда быстрые процессы, характеризуемые температурой T_F , затухают, температурное поле T_S представляет собой суперпозицию волн, движущихся с групповыми скоростями c_g , и имеет форму начального распределения тепла T_0 . Уравнение (1) получается в результате применения корреляционного анализа с целью сведения исходной стохастической задачи к детерминированной для статистических характеристик кристалла и отражает баллистический характер теплообмена.

Далее ограничимся рассмотрением только задачи теплопереноса, то есть $T(x, t) \approx T_S$. Для цепочки, состоящей из атомов нескольких типов, формулу (1) перепишем в виде [31, 33]:

$$T(x, t) \approx T_s = \frac{1}{8\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^N \left(T_0(x + c_{g_j}(Ka)t) + T_0(x - c_{g_j}(Ka)t) \right) d(Ka), \quad (2)$$

где N — количество типов атомов, a — расстояние между элементарными ячейками, c_{g_j} — соответствующие групповые скорости ($j=1, \dots, N$). Вычисление температуры с использованием уравнения (2) требует знания групповой скорости, которая определяется конкретной задачей.

3. Алгоритм построения приближенного фундаментального решения

Построим приближенное фундаментальное решение задачи теплопереноса. Пусть в начальный момент времени задано тепловое возмущение в виде дельта-функции:

$$T_0(x) = T_0 \delta(x), \quad (3)$$

где T_0 — амплитуда начального теплового возмущения. Тогда после выравнивания кинетической и потенциальных энергий формула (2) примет вид:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{8\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^N \left(\delta(x + c_{g_j}(Ka)t) + \delta(x - c_{g_j}(Ka)t) \right) d(Ka). \quad (4)$$

Учитывая свойство дельта-функции $\delta(\lambda x) = \delta(x)/|\lambda|$, будем иметь:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{8\pi N t} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^N \left(\delta\left(\frac{x}{t} + c_{g_j}(Ka)\right) + \delta\left(\frac{x}{t} - c_{g_j}(Ka)\right) \right) d(Ka). \quad (5)$$

Кроме того, интеграл от дельта-функции можно представить как (см. [36])

$$\int \delta(f(z)) dz = \sum_i \frac{\delta(z - z_i)}{|f'(z_i)|}, \quad f(z_i) = 0, \quad (6)$$

где суммирование проводится по вещественным корням уравнения $f(z) = 0$, так что формула (5) переписется в виде:

$$T(x, t) = \frac{T_0}{4\pi N t} \sum_j \sum_i \frac{1}{|c'_{g_j}(K_i a)|}, \quad (7)$$

где K_i — решения уравнений

$$|c_{g_j}(K_i a)| = |x|/t. \quad (8)$$

Для того чтобы количественно оценить интенсивность фронта на границе, можно построить аппроксимацию функции (7) вблизи ее особых точек, то есть корней знаменателя. В случае одноатомной цепочки решение будет иметь простой вид. Действительно, введем переменную $\zeta = x/t$ и рассмотрим функцию:

$$\Phi = \frac{1}{\xi}, \quad \xi = |c'(Ka)|, \quad |c(Ka)| = |\zeta|. \quad (9)$$

Учитывая, что фронт распространяется с максимальной групповой скоростью, в особых точках имеем:

$$\xi = 0 \Rightarrow K = K_*, \quad \zeta = \zeta_*, \quad c'(K_* a) = 0, \quad c''(K_* a) < 0, \quad (10)$$

а вблизи особых точек запишем

$$\xi \neq 0, \quad Ka = K_* a + Z. \quad (11)$$

Ограничимся положительными значениями координаты x и разложим групповую скорость и ее производную в ряд Тейлора в окрестности K_* :

$$\begin{aligned} \xi &= |c'(K_*a+Z)| \approx |c'(K_*a) + c''(K_*a)Z|, \\ \zeta &= |c(K_*a+Z)| \approx \left| c(K_*a) + c'(K_*a)Z + \frac{1}{2}c''(K_*a)Z^2 \right|. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (9) перепишем (12) в виде:

$$\xi = |c''(K_*a)||Z|, \quad \zeta = \zeta_* - \frac{1}{2}|c''(K_*a)|Z^2 \Rightarrow |Z| = \sqrt{\frac{2(\zeta_* - \zeta)}{|c''(K_*a)|}}, \quad (13)$$

что в итоге дает:

$$\Phi = \frac{1}{\xi} = \frac{A}{\sqrt{\zeta_* - \zeta}}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2|c''(K_*a)|}}, \quad (14)$$

где A — коэффициент, характеризующий интенсивность волнового фронта; далее будем называть его коэффициентом интенсивности.

В следующих частях работы будет построена аппроксимация для двух систем: двухатомной цепочки с чередующимися массами или жесткостями (Пример 1) и одноатомной цепочки с учетом взаимодействия с дальними соседями (Пример 2).

4. Пример 1: цепочка из частиц с чередующимися массами/жесткостями

Рассмотрим одномерный двухатомный гармонический кристалл с чередующимися массами или жесткостями (Рис. 1) [33].

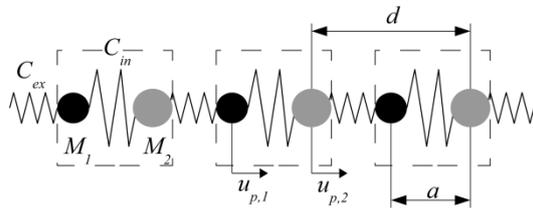


Рис. 1. Модель одномерного двухатомного гармонического кристалла (пунктирными линиями выделены элементарные ячейки)

Уравнения динамики частиц будут иметь вид:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{u}_{p,1} &= C_{ex}(u_{p-1,2} - u_{p,1}) + C_{in}(u_{p,2} - u_{p,1}), \\ M_1 \ddot{u}_{p,2} &= C_{ex}(u_{p+1,1} - u_{p,2}) + C_{in}(u_{p,1} - u_{p,2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь: $u_{p,1}, u_{p,2}$ — перемещения левой частицы массой M_1 и правой частицы массой M_2 в p -й элементарной ячейке; C_{in} и C_{ex} — жесткости связи между частицами в ячейке и между ячейками соответственно. Следуя [37], введем равновесные расстояния между частицами: a — внутри ячейки, $(d-a)$ — между ячейками; таким образом, «длина» элементарной ячейки будет равна d . Пусть для определенности $C_{in} = C_{ex} = C$, тогда уравнение динамики можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{p,1} &= \omega_1^2 (u_{p-1,2} - 2u_{p,1} + u_{p,2}), \\ \ddot{u}_{p,2} &= \omega_2^2 (u_{p,1} - 2u_{p,2} + u_{p+1,1}), \end{aligned}$$

где $\omega_1 = \sqrt{C/M_1}$ и $\omega_2 = \sqrt{C/M_2}$. Отметим, что из соображений симметрии в этом случае $d = 2a$.

Введем параметризацию:

$$\begin{aligned} M_1 &= M \tan(\pi/4 + \beta), \quad M_2 = \frac{M}{\tan(\pi/4 + \beta)}, \quad \omega = \sqrt{C/M}, \\ \omega_1 &= \frac{\omega}{\sqrt{\tan(\pi/4 + \beta)}}, \quad \omega_2 = \omega \sqrt{\tan(\pi/4 + \beta)}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tan(\pi/4 + \beta). \end{aligned} \quad (16)$$

Параметр β может изменяться в диапазоне от $-\pi/4$ до $+\pi/4$. Значения $\beta = \pm\pi/4$ отвечают случаям, когда одна из масс много больше другой. Из симметрии определения (16) следует, что достаточным является рассмотрение интервала $\beta \in (-\pi/4; 0)$. При $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то есть при $\beta = 0$, получаем одноатомную цепочку с «длиной» элементарной ячейки $a = d/2$.

Найдем спектр частот одномерной двухатомной цепочки [38]. С учетом параметризации (16) имеем:

$$\Omega_{1,2} = \frac{\Omega^0}{\sqrt{2 \cos 2\beta}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\beta (1 - \cos(Kd))}}, \quad (17)$$

где $\Omega^0 = 2\omega$ — максимальное значение частоты для соответствующей одноатомной цепочки ($\beta = 0$). Отметим, что такое дисперсионное соотношение имеет место и при $C_{in} \neq C_{ex}$, $M_1 = M_2 = M$ и том же соотношении между частотами: $\omega_2/\omega_1 = \tan(\pi/4 + \beta)$. Очевидно, что $d = 2a$ только в случае $\beta = 0$.

Групповые скорости вычислим как производную от (17) по волновому вектору:

$$c_{g_{1,2}} \frac{d\Omega_{1,2}}{dK} = \mp \text{sign}(Kd) \frac{c_g^0 \Omega^0 \cos 2\beta \sin(Kd)}{4\Omega_{1,2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\beta (1 - \cos(Kd))}}, \quad (18)$$

где $c_g^0 = d\omega/2$ — максимальное значение групповой скорости для соответствующей одноатомной цепочки ($\beta = 0$).

На рисунке 2 приведены групповые скорости для двухатомной цепочки при разных значениях параметра β . При $\beta = 0$ (черная кривая) получаем две кривые для одноатомной цепочки с частотой $\omega = \sqrt{C/M}$, межатомным расстоянием $a = d/2$ и периодом $2\pi/a$ [37]. Кривые сдвинуты относительно друг друга на 2π ; появление второй кривой связано с тем, что по-прежнему решается система (15) из двух уравнений динамики для двух соседних частиц.

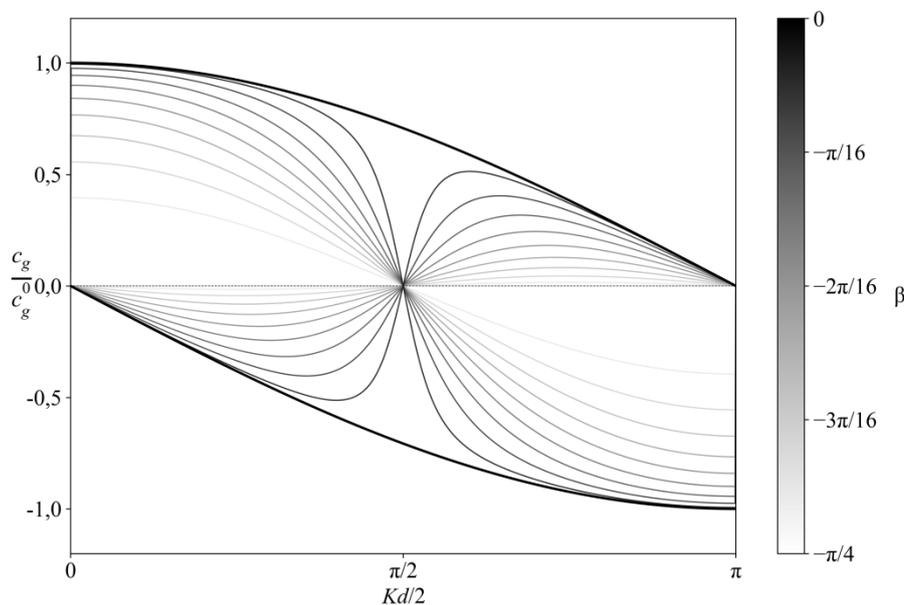


Рис. 2. Групповая скорость волн в цепочке из частиц с разными массами при различных значениях β

Определим зависимость экстремумов групповых скоростей от параметра β . Максимальная групповая скорость, отвечающая акустической ветке, будет, равна $c_{g_2} \Big|_{K=0}$ при любом значении β . Максимальная групповая скорость для оптической ветки будет достигаться в интервале $Kd/2 \in (\pi/2; \pi)$.

Зависимость $c_{g_2}^{max}$ от β легко получить, устремив K к нулю в формуле (18):

$$c_{g_2}^{max} = c_g^0 \sqrt{\cos 2\beta}. \tag{19}$$

Видим, что при $\beta \in (-\pi/4; 0)$ максимальная групповая скорость меняется в пределах от 0 до c_g^0 .

Отдельный интерес представляет значение $c_{g_1}^{max}$ при $\beta=0$, достигаемое при $Kd/2 \rightarrow \pi/2$. В случае $\beta=0$ функция c_{g_1} в интервале $Kd/2 \in (\pi/2; \pi)$ имеет вид

$$c_{g_1} \Big|_{\beta=0} = - \frac{2c_g^0 \sin(Kd)}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos(Kd)}} \sqrt{2 + 2\cos(Kd)}} \tag{20}$$

и терпит разрыв в точке $Kd/2 = \pi/2$. Искомое значение $c_{g_1}^{max}$ при $\beta = 0$ является пределом при стремлении $Kd/2$ к $\pi/2$ справа:

$$c_{g_1}^{max} \Big|_{\beta=0} = \lim_{Kd/2 \rightarrow \pi/2+} c_{g_1} \Big|_{\beta=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} c_g^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{g_2}^{max} \Big|_{\beta=0}. \tag{21}$$

Таким образом, можно заключить, что при стремлении величин масс частиц в цепочке друг к другу скорость распространения тепла, отвечающая оптической ветке, будет оставаться конечной вплоть до достижения массами точного равенства, то есть вплоть до этого момента будут существовать два фронта, находящихся друг от друга на конечном расстоянии.

Обратимся к состоянию системы, когда $\beta \rightarrow -\pi/4$. Максимальная групповая скорость, соответствующая акустической ветке, будет вести себя как

$$c_{g_2}^{max} \approx \sqrt{2} c_g^0 \sqrt{\beta + \pi/4} + O\left((\beta + \pi/4)^{5/2}\right). \tag{22}$$

Видим, что при $\beta \rightarrow -\pi/4$ максимальная групповая скорость, соответствующая акустической ветке, убывает как $\sqrt{\beta + \pi/4}$.

Максимальное значение $c_{g_1}^{max}$ при $\beta \rightarrow -\pi/4$ достигается при $Kd/2 = 3\pi/4$:

$$c_{g_1}^{max} \Big|_{Kd/2=3\pi/4} \approx \frac{c_g^0}{\sqrt{2}} (\beta + \pi/4)^{3/2} + O\left((\beta + \pi/4)^{7/2}\right), \tag{23}$$

то есть оно будет убывать быстрее, чем $c_{g_2}^{max}$.

Обратимся к рисунку 2. Нетрудно видеть, что единственной особой точкой групповой скорости c_{g_2} (акустическая ветка) является $K_* = 0$. Корней уравнения $c'_{g_1} = 0$ в интервале $(\pi/2; \pi)$ два, причем эти корни равны по модулю. Таким образом, обеим особым точкам, относящимся к оптической ветке, соответствуют одинаковые по модулю значения ζ_* и $c''(K_*, a)$ (см. формулы (9)–(14)), следовательно, оба коэффициента интенсивности также одинаковы.

С учетом высказанных соображений формула (7) для двухатомной цепочки может быть записана в виде:

$$\frac{T}{T_0} \approx \begin{cases} \frac{A_1}{\sqrt{\zeta_{1*} - \zeta}} + \frac{A_2}{\sqrt{\zeta_{2*} - \zeta}}, & 0 < \zeta < \zeta_{1*}, \\ \frac{A_2}{\sqrt{\zeta_{2*} - \zeta}}, & \zeta_{1*} < \zeta < \zeta_{2*}, \\ 0, & \zeta_{2*} < \zeta, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2\pi t \sqrt{2|c_{g_1}''(K_{1^*}d)|}}, & c_{g_1}'(K_{1^*}d) &= 0, & x_{1^*} &= |c_{g_1}(K_{1^*}d)|, \\
 A_2 &= \frac{1}{4\pi t \sqrt{2|c_{g_2}''(K_{2^*}d)|}}, & c_{g_2}'(K_{2^*}d) &= 0, & x_{2^*} &= |c_{g_2}(K_{2^*}d)|.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Введем следующие обозначения для коэффициентов интенсивности фронтов:

$$a_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}, \quad a_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}.
 \tag{26}$$

На рисунке 3 приведены зависимости скоростей фронтов от β . Толщина линий (см. заливку серым цветом) соответствует значениям коэффициентов (26) в один и тот же момент времени t . На выносках показаны результаты численного решения для начального теплового возмущения в виде узкого прямоугольного импульса [31]. Таким образом, видим, что фундаментальное решение задачи распространения теплового возмущения в цепочке из частиц с чередующихся массами/жесткостями всегда будет состоять из двух фронтов,двигающихся друг за другом со скоростями $c_{g_2}^{max}$ и $c_{g_1}^{max}$.

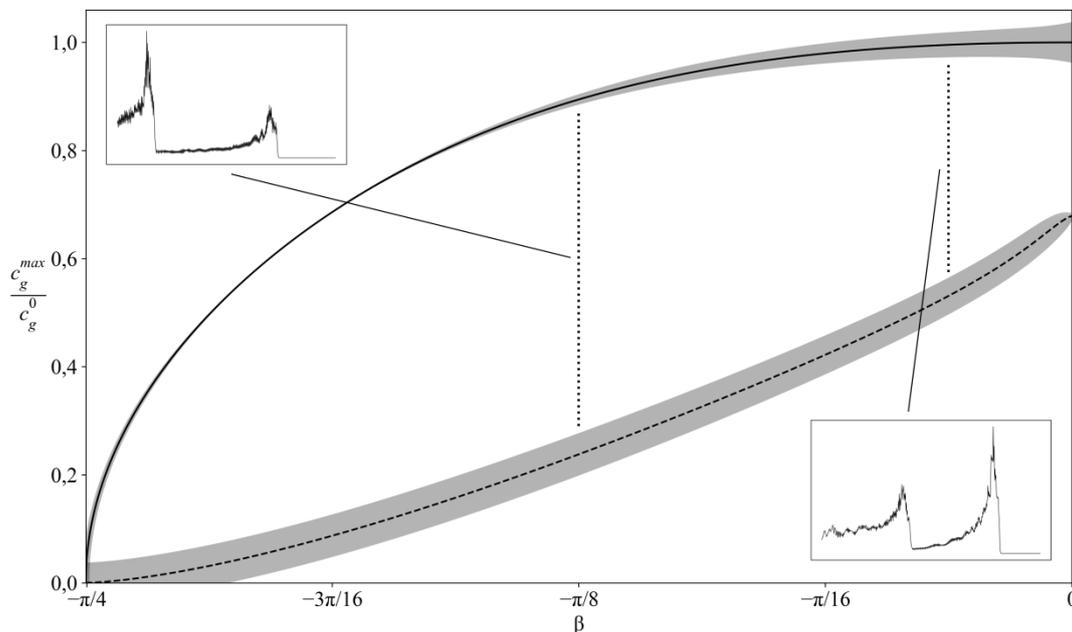


Рис. 3. Зависимости скорости фронтов от β для цепочки из частиц с разными массами

Таблица 1. Скорости и коэффициенты интенсивности фронтов в предельных случаях для цепочки из частиц с разными массами

Параметр β	$-\pi/4$	0
Скорость основной волны ($c_{g_2}^{max}$)	$o(\sqrt{\beta + \pi/4})$	c_g^0
Коэффициент интенсивности основной волны (a_2)	0	1
Скорость второй волны ($c_{g_1}^{max}$)	$o((\beta + \pi/4)^{3/2})$	$c_g^0/\sqrt{2}$
Коэффициент интенсивности второй волны (a_1)	1	0

Обратимся к предельным случаям (см. Рис. 3 и Табл. 1). Когда $\beta \rightarrow -\pi/4$, то есть одна масса много больше другой, интенсивность оптического фронта много больше интенсивности акустического фронта. При этом скорости фронтов являются бесконечно малыми величинами разных порядков. Этот результат в другом временном масштабе можно интерпретировать как основной «медленный» фронт,

распространяющийся со скоростью $c_{g_1}^{max}$, и «быстрый» фронт $c_{g_2}^{max}$ с малыми параметрами интенсивности. С ростом β коэффициент интенсивности акустического фронта увеличивается, оптического — уменьшается, и при $\beta \approx -\pi/32$ их значения уравниваются. Когда же массы частиц отличаются мало ($\beta \rightarrow 0$), коэффициент интенсивности акустического фронта максимален, а оптический фронт, продолжая движение со скоростью, отличной от нуля, затухает.

5. Пример 2: цепочка с учетом второй координационной сферы

Рассмотрим цепочку, состоящую из частиц одинаковой массы с учетом взаимодействия со вторыми соседями [34].

Уравнения динамики частиц будут иметь вид:

$$M\ddot{u}_p = C_1(u_{p+1} - 2u_p + u_{p-1}) + C_2(u_{p+2} - 2u_p + u_{p-2}), \quad (27)$$

где u_p — перемещение частицы с номером p , C_1 — жесткость связи между соседними частицами, C_2 — жесткость связи между частицами второй координационной сферы. Отметим, что C_2 может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Введем обозначение,

$$C_0 = C_1 + 4C_2, \quad (28)$$

тогда уравнение динамики примет вид

$$4M\ddot{u}_p = C_0(u_{p+2} - 2u_p + u_{p-2}) - C_1(u_{p+2} - 4u_{p+1} + 6u_p - 4u_{p-1} + u_{p-2}). \quad (29)$$

Дисперсионное соотношение станет следующим:

$$\Omega^2 = 4 \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right) \left(\omega_0^2 \cos^2\left(\frac{Ka}{2}\right) + \omega_1^2 \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right) \right), \quad (30)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + 4C_2}{M}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{M}}. \quad (31)$$

Введем параметризацию, аналогичную (16):

$$\omega_0 = \omega\sqrt{2} \sin(\pi/4 + \beta), \quad \omega_1 = \omega\sqrt{2} \cos(\pi/4 + \beta) \Rightarrow \tan(\pi/4 + \beta) = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \sqrt{\frac{C_1 + 4C_2}{C_1}}. \quad (32)$$

Параметр β в данной задаче также изменяется в пределах от $-\pi/4$ до $\pi/4$, причем его знак совпадает со знаком жесткости C_2 . При $\beta = 0$ жесткость связи со второй координационной сферой обращается в нуль, что соответствует одномерной гармонической цепочке частиц с одинаковыми массами и жесткостями. При $\beta = \pi/4$ жесткость связи с первой координационной сферой становится пренебрежимо малой по сравнению с жесткостью со второй координационной сферой: получаем цепочку с удвоенным расстоянием между частицами. Значение $\beta = -\pi/4$ отвечает предельному значению отрицательной жесткости: $C_2 = -C_1/4$, когда цепочка остается устойчивой.

Дисперсионное соотношение окончательно будет иметь вид:

$$\Omega = \frac{\Omega^0}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \sin 2\beta \cos(Ka))(1 - \cos(Ka))}, \quad (33)$$

а групповую скорость найдем как производную от (33) по волновому вектору:

$$c_g = \frac{d\Omega}{dK} = \frac{c_g^0 \Omega^0}{2\Omega} \sin(Ka) (1 + \sin 2\beta (2 \cos(Ka) - 1)). \quad (34)$$

Здесь также используются характеристики одноатомной цепочки: $\Omega^0 = 2\omega$ и $c_g^0 = a\omega$.

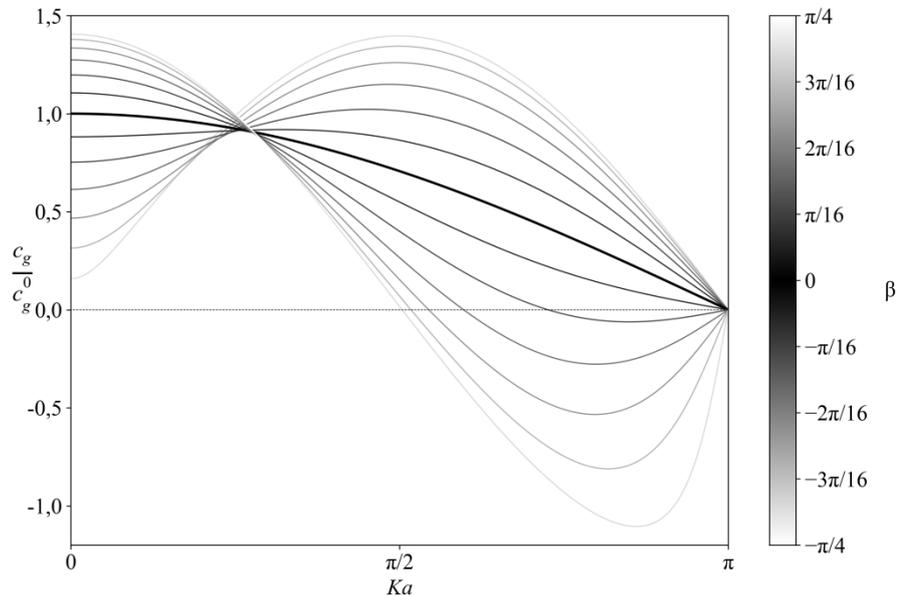


Рис. 4. Групповая скорость волн в цепочке при учете взаимодействия со вторыми соседями и различных значениях β

На рисунке 4 приведены групповые скорости для рассматриваемой цепочки при разных значениях параметра β . При $\beta = 0$ (черная кривая) получаем кривую для одноатомной цепочки с частотой $\omega_0 = \omega_1 = \omega$ и межатомным расстоянием a .

На рисунке 5 демонстрируются зависимости экстремумов групповой скорости от параметра β . Сплошная линия соответствует максимальной скорости распространения основной тепловой волны, пунктирная линия — скорости распространения второй тепловой волны. Изображенная серой заливкой толщина линий отвечает коэффициентам (26) в один и тот же момент времени t . На выносках показаны результаты численного решения для начального теплового возмущения в виде узкого прямоугольного импульса [34].

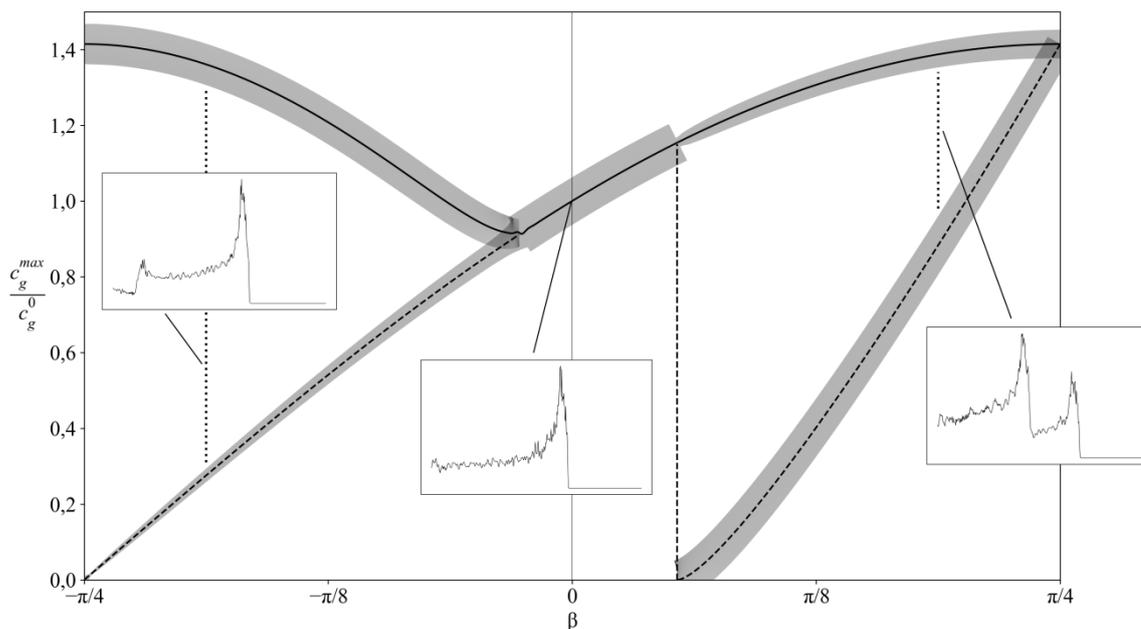


Рис. 5. Зависимость максимальной групповой скорости от β для цепочки с учетом второй координационной сферы

Фундаментальное решение задачи распространения теплового возмущения в цепочке с учетом второй сферы, так же, как и в предыдущей задаче, состоит из двух фронтов,двигающихся друг за другом со скоростями $c_{g_1}^{max}$ и $c_{g_2}^{max}$ соответственно. В случае некоторого положительного значения β возникает второй тепловой фронт, имеющий коэффициент интенсивности, превосходящий аналогичный параметр основной волны, но меньшую скорость. При значении $\beta = \pi/4$ коэффициенты интенсивности и скорости двух фронтов совпадают (см. Табл. 2). В случае отрицательных β второй тепловой фронт возникает при некотором значении параметра с коэффициентом интенсивности, равным коэффициенту интенсивности основной волны. При значении $\beta = -\pi/4$ коэффициент интенсивности и скорость второй волны уходят в нуль.

Таблица 2. Скорости и коэффициенты интенсивности фронтов в предельных случаях для цепочки с учетом второй координационной сферы

Параметр β	$-\pi/4$	0	$\pi/4$
Скорость основной волны ($c_{g_1}^{max}$)	$\sqrt{2}c_g^0$	c_g^0	$\sqrt{2}c_g^0$
Коэффициент интенсивности основной волны (a_1)	1	1	$\sqrt{2}/2$
Скорость второй волны ($c_{g_2}^{max}$)	0	–	$\sqrt{2}c_g^0$
Коэффициент интенсивности второй волны (a_2)	0	0	$\sqrt{2}/2$

6. Заключение

Рассмотрен процесс распространения тепла на моделях одномерного двухатомного кристалла с чередующимися массами или жесткостями (Пример 1) и одноатомного гармонического кристалла с учетом взаимодействия со вторыми соседями (Пример 2). В обоих случаях удается перейти к одному безразмерному параметру $\beta \in (-\pi/4; \pi/4)$, изменение которого охватывает весь класс систем. Значение $\beta = 0$ соответствует одномерной гармонической цепочке частиц с одинаковыми массами и жесткостями.

Для описания эволюции начального теплового возмущения в задаче теплопереноса проведен анализ дисперсионных характеристик и групповых скоростей для моделей из Примеров 1 и 2. Построено и исследовано фундаментальное решение задачи распространения тепла в рассмотренных кристаллах. Приведены количественные оценки интенсивности фронта тепловой волны, выявлена динамика изменения скоростей и коэффициентов интенсивностей волн в зависимости от параметров задачи.

Показано, что в обоих Примерах решение состоит из двух фронтов,двигающихся друг за другом с различными скоростями и интенсивностями. При этом в Примере 1, в силу симметрии задачи относительно замены β на $-\beta$, рассматривается лишь диапазон $\beta \in (-\pi/4; 0)$. Всегда существует два фронта, один из которых соответствует акустической ветви решения, а другой — оптической. С увеличением β коэффициент интенсивности акустического фронта увеличивается, оптического — уменьшается, и при $\beta \approx -\pi/32$ коэффициенты становятся равными. В случае, когда массы частиц отличаются мало ($\beta \rightarrow 0$), коэффициент интенсивности акустического фронта максимален, а оптический фронт затухает, продолжая движение со скоростью, отличной от нуля.

В Примере 2 система при положительных и отрицательных значениях β ведет себя по-разному. При некотором положительном β возникает второй тепловой фронт с интенсивностью, превосходящей интенсивность основной волны, но с меньшей скоростью. При значении $\beta = \pi/4$ коэффициенты интенсивности и скорости двух фронтов совпадают. В случае отрицательных β второй тепловой фронт возникает при некотором значении параметра β с интенсивностью, равной интенсивности основной волны. При значении $\beta = -\pi/4$ скорость и коэффициент интенсивности второй волны уходят в нуль.

Таким образом, выявлено два механизма эволюции фронта тепловых волн в одномерных дискретных системах. Полученные результаты могут быть использованы для корректной интерпретации экспериментов по нестационарному баллистическому теплопереносу в кристаллах.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.А. Кузькину и А.В. Порубову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №17-71-10212, Е.А. Подольская, грант №18-11-00201, А.М. Кривцов) и РФФИ (проект №17-01-00230-а, О.С. Лобода).

Литература

1. *Peierls R.E.* Quantum theory of solids. Oxford University Press, 1965. 238 p.
2. *Ziman J.M.* Electrons and phonons. The theory of transport phenomena in solids. Oxford University Press, New York, 1960. 566 p.
3. *Askar A.* Lattice dynamical foundations of continuum theories. Word Scientific, 1985. 190 p.
4. *Maugin G.A.* Nonlinear waves in elastic crystals. Oxford University Press, 1999. 323 p.
5. *Askes H., Metrikine A.V.* Higher-order continua derived from discrete media: continualisation aspects and boundary conditions // *Int. J. Solid. Struct.* 2005. Vol. 42. P. 187-202. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.04.005>
6. *Индейцев Д.А., Сергеев А.Д.* Корреляция между свойствами частот и форм свободных колебаний твердотельной цепочки с моментными связями // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.* 2017. № 2. С. 281-290. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.212>
7. *Морозов Н.Ф., Муратиков К.Л., Семенов Б.Н., Индейцев Д.А., Вавилов Д.С.* О термоакустике проводящих материалов при лазерном воздействии // *ДАН.* 2019. Т. 485, № 4. С. 438-441. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524854438-441>
8. *Metrikine A.V., Askes H.* An isotropic dynamically consistent gradient elasticity model derived from a 2D lattice // *Phil. Mag.* 2006. Vol. 86. P. 3259-3286. <https://doi.org/10.1080/14786430500197827>
9. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Gorshkov K.A., Maugin G.A.* Nonlinear interactions of solitary waves in a 2D lattice // *Wave Motion.* 2001. Vol. 34. P. 83-96. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(01\)00061-0](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(01)00061-0)
10. *Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A.* A 2D granular medium with rotating particles // *Int. J. Solid. Struct.* 2006. Vol. 43. P. 6194-6207. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.012>
11. *Golovnev I.F., Golovneva E.I., Fomin V.M.* Investigation of thermal instability in nano-dimensional systems by molecular dynamics method // *AIP Conference Proceedings.* 2018. Vol. 2027. 030143. <https://doi.org/10.1063/1.5065237>
12. *Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E.* Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // *Int. J. Solid. Struct.* 2005. Vol. 42. P. 6245-6260. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.041>
13. *Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E.* Multi-field approach in mechanics of structured solids // *Int. J. Solid. Struct.* 2010. Vol. 47. P. 510-525. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.10.016>
14. *Ле-Захаров А.А., Кривцов А.М.* Исследование процесса теплопроводности в кристаллах с дефектами методом молекулярной динамики // *ДАН.* 2008. Т. 420, № 1. С. 46-49. (English version <https://doi.org/10.1134/S1028335808050066>)
15. *Chandrasekharaiiah D.S.* Thermoelasticity with second sound: A review // *Appl. Mech. Rev.* 1986. Vol. 39. P. 355-376. <https://doi.org/10.1115/1.3143705>
16. *Poletkin K.V., Gurzadyan G.G., Shang J., Kulish V.* Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films // *Appl. Phys. B.* 2012. Vol. 107. P. 137-143. <https://doi.org/10.1007/s00340-011-4862-z>
17. *Rieder Z., Lebowitz J.L., Lieb E.* Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state // *J. Math. Phys.* 1967. Vol. 8. P. 1073-1078. <https://doi.org/10.1063/1.1705319>
18. *Kuzkin V.A., Krivtsov A.M.* Fast and slow thermal processes in harmonic scalar lattices // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2017. Vol. 29. 505401. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa98eb>
19. *Dhar A.* Heat transport in low-dimensional systems // *Adv. Phys.* 2008. Vol. 57. P. 457-537. <https://doi.org/10.1080/00018730802538522>
20. *Thermal transport in low dimensions. From statistical physics to nanoscale heat transfer / Ed. S. Lepri.* Springer International Publishing, 2016. 422 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-29261-8>
21. *Гузев М.А.* Закон Фурье для одномерного кристалла // *ДВМЖ.* 2018. № 1. С. 34-38.
22. *Соколов А.А., Кривцов А.М., Müller W.H.* Локализованные тепловые возмущения в одномерном гармоническом кристалле: решения уравнения аномальной теплопроводности // *Физ. мезомех.* 2017. Т. 20, № 3. С. 63-68. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959917030067>)
23. *Кузькин В.А., Кривцов А.М.* Высокочастотные тепловые процессы в гармонических кристаллах // *ДАН.* 2017. Т. 472, № 5. С. 529-533. <https://doi.org/10.7868/S0869565217050103>
24. *Кузькин В.А., Кривцов А.М.* Аналитическое описание переходных тепловых процессов в гармонических кристаллах // *ФТТ.* 2017. Т. 59, № 5. С. 1023-1035. <https://doi.org/10.21883/FTT.2017.05.44396.240>
25. *Кривцов А.М.* Колебания энергий в одномерном кристалле // *ДАН.* 2014. Т. 458, № 3. С. 279-281. <https://doi.org/10.7868/S0869565214270097>
26. *Кривцов А.М.* Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле // *ДАН.* 2015. Т. 464, № 2. С. 162-166. <https://doi.org/10.7868/S0869565215260102>
27. *Krivtsov A.M.* The ballistic heat equation for a one-dimensional harmonic crystal // *Dynamical processes in generalized continua and structures / Ed. H. Altenbach, A. Belyaev, V. Eremeyev, A. Krivtsov, A. Porubov.* Springer, 2019. P. 345-358. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1_19
28. *Gavrilov S.N., Krivtsov A.M.* Thermal equilibration in a one-dimensional damped harmonic crystal // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100. 022117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.022117>
29. *Berinskii I.E., Kuzkin V.A.* Equilibration of energies in a two-dimensional harmonic graphene lattice // *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.* 2019. Vol. 378. 20190114. <https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0114>
30. *Kosevich A.M., Savotchenko S.E.* Peculiarities of dynamics of one-dimensional discrete systems with interaction extending beyond nearest neighbors and the role of higher dispersion in soliton dynamics // *Low Temp. Phys.* 1999. Vol. 25. P. 550-557. <https://doi.org/10.1063/1.593783>
31. *Michelitsch T.M., Collet B., Wang X.* Nonlocal constitutive laws generated by matrix functions: Lattice dynamics models and their continuum limits // *Int. J. Eng. Sci.* 2014. Vol. 80. P. 106-123. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.029>
32. *Porubov A.V., Krivtsov A.M., Osokina A.E.* Two-dimensional waves in extended square lattice, available online // *Int. J. Non Lin. Mech.* 2018. Vol. 99. P. 281-287. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.12.008>

33. Podolskaya E.A., Krivtsov A.M., Tsvetkov D.V. Anomalous heat transfer in one-dimensional diatomic harmonic crystal // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 40. P. 172-180. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_5
34. Loboda O., Krivtsov A., Porubov A., Tsvetkov D. Thermal processes in a one-dimensional crystal with regard for the second coordination sphere // *ZAMM*. 2019. Vol. 99. e201900008. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900008>
35. Kuzkin V.A. Thermal equilibration in infinite harmonic crystals // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2019. Vol. 31. P. 1401-423. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00758-2>
36. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. 471 с.
37. Ashcroft N., Mermin N. *Solid state physics*. Saunders college Publishing, 1976. 848 p.
38. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Т. IV. Лекции по колебаниям. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 512 с.

References

1. Peierls R.E. *Quantum theory of solids*. Oxford University Press, 1965. 238 p.
2. Ziman J.M. *Electrons and phonons. The theory of transport phenomena in solids*. Oxford University Press, New York, 1960. 566 p.
3. Askar A. *Lattice dynamical foundations of continuum theories*. World Scientific, 1985. 190 p.
4. Maugin G.A. *Nonlinear waves in elastic crystals*. Oxford University Press, 1999. 323 p.
5. Askes H., Metrikine A.V. Higher-order continua derived from discrete media: continualisation aspects and boundary conditions. *Int. J. Solid. Struct.*, 2005, vol. 42, pp. 187-202. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.04.005>
6. Indeitsev D.A., Sergeev A.D. Correlation between the properties of eigenfrequencies and eigenmodes in a chain of rigid bodies with torque connections. *Vestnik St. Petersburg. Univ. Math.*, 2017, vol. 50, pp. 166-172. <https://doi.org/10.3103/S1063454117020066>
7. Morozov N.F., Muratkov K.L., Semenov B.N., Indeitsev D.A., Vavilov D.S. Thermoacoustics of conductive materials under laser action. *Dokl. Phys.*, 2019, vol. 64, pp. 169-172. <https://doi.org/10.1134/S1028335819040037>
8. Metrikine A.V., Askes H. An isotropic dynamically consistent gradient elasticity model derived from a 2D lattice. *Phil. Mag.*, 2006, vol. 86, pp. 3259-3286. <https://doi.org/10.1080/14786430500197827>
9. Potapov A.I., Pavlov I.S., Gorshkov K.A., Maugin G.A. Nonlinear interactions of solitary waves in a 2D lattice. *Wave Motion*, 2001, vol. 34, pp. 83-96. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(01\)00061-0](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(01)00061-0)
10. Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A. A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. Solid. Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 6194-6207. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.012>
11. Golovnev I.F., Golovneva E.I., Fomin V.M. Investigation of thermal instability in nano-dimensional systems by molecular dynamics method. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2027, 030143. <https://doi.org/10.1063/1.5065237>
12. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations. *Int. J. Solid. Struct.*, 2005, vol. 42, pp. 6245-6260. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.0411>
13. Vasiliev A.A., Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E. Multi-field approach in mechanics of structured solids. *Int. J. Solid. Struct.*, 2010, vol. 47, pp. 510-525. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.10.016>
14. Le-Zakharov A.A., Krivtsov A.M. Molecular dynamics investigation of heat conduction in crystals with defects. *Dokl. Phys.*, 2008, vol. 53, pp. 261-264. <https://doi.org/10.1134/S1028335808050066>
15. Chandrasekharaiah D.S. Thermoelasticity with second sound: A review. *Appl. Mech. Rev.*, 1986, vol. 39, pp. 355-376. <https://doi.org/10.1115/1.3143705>
16. Poletkin K.V., Gurzadyan G.G., Shang J., Kulish V. Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films. *Appl. Phys. B*, 2012, vol. 107, pp. 137-143. <https://doi.org/10.1007/s00340-011-4862-z>
17. Rieder Z., Lebowitz J.L., Lieb E. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. *J. Math. Phys.*, 1967, vol. 8, pp. 1073-1078. <https://doi.org/10.1063/1.1705319>
18. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Fast and slow thermal processes in harmonic scalar lattices. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2017, vol. 29, 505401. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa98eb>
19. Dhar A. Heat transport in low-dimensional systems. *Adv. Phys.*, 2008, vol. 57, pp. 457-537. <https://doi.org/10.1080/00018730802538522>
20. *Thermal transport in low dimensions. From statistical physics to nanoscale heat transfer*, ed. S. Lepri. Springer International Publishing, 2016. 422 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-29261-8>
21. Guzev M.A. The Fourier law for a one-dimensional crystal. *VMZh – Far Eastern Mathematical Journal*, 2018, no. 1, pp. 34-38.
22. Sokolov A.A., Krivtsov A.M., Muller W.H. Localized heat perturbation in harmonic 1D crystals: Solutions for the equation of anomalous heat conduction. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 305-130. <https://doi.org/10.1134/S1029959917030067>
23. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. High-frequency thermal processes in harmonic crystals. *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, pp. 85-89. <https://doi.org/10.1134/S1028335817020070>
24. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. An analytical description of transient thermal processes in harmonic crystals. *Phys. Solid State*, 2017, vol. 59, pp. 1051-1062. <https://doi.org/10.1134/S1063783417050201>
25. Krivtsov A.M. Energy oscillations in a one-dimensional crystal. *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, pp. 427-430. <https://doi.org/10.1134/S1028335814090080>
26. Krivtsov A.M. Heat transfer in infinite harmonic one-dimensional crystals. *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, pp. 407-411. <https://doi.org/10.1134/S1028335815090062>
27. Krivtsov A.M. The ballistic heat equation for a one-dimensional harmonic crystal. *Dynamical processes in generalized continua and structures*, ed. H. Altenbach, A. Belyaev, V. Eremeyev, A. Krivtsov, A. Porubov. Springer, 2019. P. 345-358. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1_19
28. Gavrilov S.N., Krivtsov A.M. Thermal equilibration in a one-dimensional damped harmonic crystal. *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 100, 022117. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.022117>

29. Berinskii I.E., Kuzkin V.A. Equilibration of energies in a two-dimensional harmonic graphene lattice. *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.*, 2019, vol. 378, 20190114. <https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0114>
30. Kosevich A.M., Savotchenko S.E. Peculiarities of dynamics of one-dimensional discrete systems with interaction extending beyond nearest neighbors and the role of higher dispersion in soliton dynamics. *Low Temp. Phys.*, 1999, vol. 25, pp. 550-557. <https://doi.org/10.1063/1.593783>
31. Michelitsch T.M., Collet B., Wang X. Nonlocal constitutive laws generated by matrix functions: Lattice dynamics models and their continuum limits. *Int. J. Eng. Sci.*, 2014, vol. 80, pp. 106-123. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.02.029>
32. Porubov A.V., Krivtsov A.M., Osokina A.E. Two-dimensional waves in extended square lattice, available online. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2018, vol. 99, pp. 281-287. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.12.008>
33. Podolskaya E.A., Krivtsov A.M., Tsvetkov D.V. Anomalous heat transfer in one-dimensional diatomic harmonic crystal. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 40, pp. 172-180. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_5
34. Loboda O., Krivtsov A., Porubov A., Tsvetkov D. Thermal processes in a one-dimensional crystal with regard for the second coordination sphere. *ZAMM*, 2019, vol. 99, e201900008. <https://doi.org/10.1002/zamm.201900008>
35. Kuzkin V.A. Thermal equilibration in infinite harmonic crystals. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2019, vol. 31, pp. 1401-423. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00758-2>
36. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions*. Vol. 1: Properties and Operations. AMS Chelsea Publishing, 1964. 450 p.
37. Ashcroft N., Mermin N. *Solid state physics*. Saunders college Publishing, 1976. 848 p.
38. Mandel'shtam L.I. *Polnoye sobraniye trudov. T. IV. Lektsii po kolebaniyam* [Complete Works. Vol. IV: Lectures on Oscillations]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1955. 512 p.

Поступила в редакцию 11.10.2019; после доработки 02.12.2019; принята к опубликованию 06.12.2019

Сведения об авторах

Лобода Ольга Сергеевна, кфмн доц., Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ), 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29; e-mail: loboda_o@mail.ru

Подольская Екатерина Александровна, кфмн, нс, Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН), 199178, г. Санкт-Петербург, В. О., Большой проспект, 61.; e-mail: katepodolskaya@gmail.com

Цветков Денис Валерьевич, б/с, асс., СПбПУ; e-mail: hedgehogks@yandex.ru

Кривцов Антон Мирославович, дфмн, член-корр. РАН, дир., Высшая школа теоретической механики СПбПУ; e-mail: akrivtsov@bk.ru