

Санкт-Петербургский государственный политехнический  
университет

Физико-механический факультет  
Кафедра “Теоретическая механика”

Диссертация допущена к защите  
Зав. кафедрой

А.М. Кривцов  
2011г.

“ ”

## ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени

## МАГИСТРА

Тема: Отражение упругих волн на границе раздела дискретной и  
сплошной сред

Направление: 010900 — “Механика”

Выполнил студент гр. 60510/10:

А.М. Кударова

Научные руководители:

д.ф.-м.н., проф. А. В. Метрикин

д.ф.-м.н., проф. А.М. Кривцов

Консультант по вопросам охраны труда:

к.т.н., доц. В. В. Монашков

Санкт-Петербург

2011

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Отражение волн от границы раздела одномерной цепочки и континуума</b>	<b>8</b>
2.1	Дискретно-континуальное соответствие в длинноволновом приближении . . . . .	9
2.2	Отражение волн на границе с классическим континуумом . . . . .	10
2.3	Отражение волн на границе с градиентным континуумом . . . . .	11
2.4	Численное моделирование . . . . .	15
2.5	Заключение . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Распространение волн в квадратной решетке</b>	<b>17</b>
3.1	Дискретно-континуальное соответствие . . . . .	18
3.2	Дисперсионное соотношение . . . . .	19
3.3	Энергия распространяющихся волн . . . . .	22
3.4	Групповая скорость . . . . .	23
3.5	Заключение . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Отражение волн от границы решетки</b>	<b>24</b>
4.1	Коэффициенты отражения . . . . .	28
4.2	Отражение от границы . . . . .	28
4.2.1	Свободная граница . . . . .	28
4.2.2	Линейно-вязкая граница . . . . .	29
4.2.3	Жестко закрепленная граница . . . . .	31
4.3	Отражение от границы раздела двух решеток с разными свойствами. . . . .	32
4.4	Заключение . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Отражение от границы раздела решетки и классического континуума</b>	<b>35</b>
5.1	Смещения в континууме, вызываемые падающей волной . . . . .	36
5.2	Удовлетворение условию непрерывности смещений на границе . . . . .	39
5.3	Коэффициенты отражения . . . . .	44
5.4	Заключение . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Отражение от границы раздела решетки и градиентного континуума</b>	<b>47</b>

6.1	Уравнения движения и их решение . . . . .	47
6.2	Дисперсионные характеристики . . . . .	49
6.3	Коэффициенты отражения . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>52</b>
<b>А</b>	<b>Вычисление интегралов по контурам</b>	<b>53</b>
<b>Б</b>	<b>Охрана труда при выполнении работы</b>	<b>56</b>
Б.1	Введение . . . . .	56
Б.2	Микроклимат рабочей зоны . . . . .	57
Б.3	Шумовые воздействия . . . . .	57
Б.4	Освещенность . . . . .	58
Б.5	Пожарная безопасность . . . . .	59
Б.6	Эргономические требования . . . . .	59
Б.6.1	Напряженность трудового процесса . . . . .	60
Б.7	Заключение . . . . .	60

# 1 Введение

Работа посвящена изучению отражения гармонических волн на границе раздела одномерной цепочки и континуума, классического и градиентного [1], а также плоских гармонических волн на плоской границе квадратной решетки. Квадратная решетка может иметь как свободную или закрепленную границу, так и границу с другой решеткой, либо со сплошной средой, моделируемой с помощью уравнений движения для классического или градиентного [2] континуумов.

В то время как отражение волн на границе раздела двух сплошных сред подробно изучено и описано в книгах [3]–[6], отражение волн на границе дискретной решетки и континуума еще не было систематически изучено. Целью данной работы является внесение вклада в изучение этого вопроса.

Сшивание дискретной и континуальной областей применяется при многомасштабном моделировании, когда необходимо в некоторой области учесть дискретную структуру материала. Дискретные модели наряду с континуальными широко применяются в механике разрушения и других задачах о моделировании деформирования материала [7]–[10]. Однако учет дискретной структуры проводится в ограниченной области, остальную же часть материала обычно моделируют сплошной средой для уменьшения длительности вычислительного процесса. При этом вводится граница между областями, которая должна пропускать волны, падающие из дискретной области, не вызывая отражений, не существующих в реальности. Обычно сплошную среду моделируют уравнениями для классического континуума. Однако это не позволяет избежать отражения коротких волн, длина которых сравнима с периодом решетки. Дело в том, что классический континуум не обладает дисперсионными свойствами, присущими дискретной системе. В длинноволновом приближении [11] можно подобрать параметры континуума таким образом, чтобы он соответствовал решетке, и отражение в этом случае минимально. Поэтому границу между областями приходится располагать таким образом, чтобы до нее доходили только низкочастотные колебания.

Моделирование сплошной среды также и с помощью уравнений движения градиентного континуума [1]–[2] проводится в данной работе для изучения возможности увеличения диапазона частот колебаний, доходящих до границы и не вызывающих ложных отражений. Если удастся увеличить этот диапазон частот, то появится возможность уменьшить зону с более точным моделированием и сэкономить временные затраты на вычисления. Градиентный континуум, в отличие от классического, обладает дисперсией, и можно ожидать качествен-

ного изменения в картине отраженных волн. Описание различных градиентных моделей и распространения волн в них можно найти в книге [12].

В последнее время появилось много методов сшивания дискретной и континуальной областей, нацеленных также на уменьшение отражения волн на границе. Глобально эти методы можно разделить на последовательные и параллельные. В последовательных методах набор вычислений на малом масштабном уровне используется как входные данные для оценки параметров феноменологической модели, описывающей систему на больших масштабных уровнях. Примером такого метода является метод квазиконтинуума [13], где определяющие уравнения для описания материала на высокомасштабном уровне выводятся из вычислений на атомарном уровне. Этот метод был развит и дополнен для различных приложений, и описание метода, а также его усовершенствований можно найти в обзорной статье [14]. В параллельных методах физика разных областей описывается разными моделями, соединенными набором граничных условий. Информация передается динамически между областями.

Также используемые подходы можно разделить на две категории, различающиеся методами численного моделирования континуальной области. Первая категория работает с континуальной областью, дискретизированной с применением метода конечных элементов. У многих методов из этой категории общая схема моделирования: есть область с описанием на атомарном уровне, где взаимодействие между атомами определяется межатомными потенциалами, и область с конечноэлементной сеткой, узлы которой обычно находятся в местах положения атомов в решетке, но не все местоположения атомов являются местоположением узлов. При удалении от дискретной области в сторону континуальной узлы сетки становятся реже, элементы больше. Между этими областями вводится переходная область, где есть псевдоатомы, перекрывающие пространство с конечноэлементной сеткой. Некоторые из псевдоатомов совпадают с узлами, некоторые находятся внутри элемента. Эта область помогает учесть нелокальные взаимодействия между атомами, чтобы атомы на границе имели полный набор соседей, и сшивание было более гладким. В разных методах различается использование этих атомов и описание их положения. Примерами таких методов являются [13], [15] – [16]. Также в рамках этой категории широко известны метод CDMG (Coarse-Grained Molecular Dynamics) [17] и BDM (Bridging Domain Method) [18]. В первом методе предлагается уменьшать степени свободы дискретной системы, основываясь на статистическом описании зернистой структуры. Вторым методом является дополнение метода BSD (Bridging Scale Decomposition) [19], где для атомов на границе используется

уравнение типа Ланжевена, и работоспособность которого продемонстрирована в одномерном случае. Он основан на введении перекрывающихся подобластей, в которых гамильтониан представляет собой линейную комбинацию гамильтонианов молекулярной и континуальной моделей. В этом методе можно использовать разные шаг по времени для разных областей. Метод продемонстрирован на распространении волн и трещин в двухмерном случае. Результаты моделирования показали, что чем больше размер перекрестной области, тем меньше энергии отражается от границы. В работе [20] численно моделировалось распространение упругих волн в дискретно-континуальной системе, где для описания дискретной области использовался метод подвижных клеточных автоматов, а континуальная область моделировалась конечно-разностным методом решения системы уравнений механики сплошной среды. Расчеты показали, что существенного искажения волновых фронтов на границе не происходит.

Подходы из вышеописанной первой категории нацелены на описание конечных областей материала и неэффективны при моделировании достаточно больших областей. Вторая категория методов основана на применении функций Грина континуума. Эти методы предпочтительней, если континуальная область в модели большая или бесконечна в одном или нескольких направлениях, однако они менее подходят для моделирования нелинейного поведения континуума. Идея методов, относящихся ко второй категории, по существу такая же, что и в методах граничных элементов, с той лишь разницей, что граничные элементы вводятся на границе с дискретной моделью, а не с другим континуумом. Для случая границ со сложной геометрией можно применять непрямой метод граничных элементов [21].

В работе [22] предлагаются граничные условия для сшивания двух областей, однородной и содержащей неоднородности, взаимодействие между которыми линейно, выведенные на основании вычисленного отклика однородной системы на возмущения со стороны неоднородной. Численное моделирование проведено для одномерной цепочки и квадратной решетки, в которой частицы совершают колебания перпендикулярно плоскости решетки. Подход с использованием функций Грина также применялся в [23]. В работе [24] вводятся модифицированные уравнения движения для граничных элементов, содержащие весовые функции, которые подбираются из условия отсутствия отражения в одномерном случае.

Более полное описание существующих методов можно найти в обзорной статье [25], а также в книгах [26]–[27].

К сожалению, большинство подходов имеют свои нюансы, ограничивающие

их применение, либо просто сложны в реализации и не обеспечивают желаемого переноса энергии через границу на всех частотах. К тому же отражение волн во многих работах изучено только в одномерном случае, и используемые методы не всегда можно распространить на многомерные случаи. Поэтому новые исследования в данной области представляют интерес.

Подход, применяемый в данной работе, можно отнести ко второй категории. В первой части работы (Глава 2) отражение плоских гармонических волн изучается на границе одномерной цепочки, состоящей из масс и упругих пружин, и соответствующего континуума, который моделируется с помощью классических или градиентных уравнений движения. Подбирается соответствие между параметрами континуума и цепочки в длинноволновом приближении. Получены аналитические формулы для коэффициентов отражения в случае сшивания с классическим и с градиентным континуумами, которые найдены как абсолютные значения отношений комплексных амплитуд падающей и отраженной волн. Для градиентного континуума найдены значения параметров, существенно снижающие отражение по сравнению с результатами для классического континуума. Проведено численное моделирование, подтверждающее результаты, полученные аналитически.

Вторая часть работы (Главы 3–4) посвящена изучению распространения плоских гармонических волн в регулярной квадратной решетке и их отражения от плоской свободной, закрепленной, или линейно-вязкой границы этой решетки. Частицы в решетке совершают колебания в плоскости решетки. Предполагается, что плоская гармоническая волна распространяется в решетке и падает на границу. Энергетические коэффициенты отражения порожденных ею волн найдены как функции частоты и угла распространения падающей волны. Также изучается отражение плоских гармонических волн от границы двух регулярных квадратных решеток с разными свойствами. Для этого решена задача о нахождении отклика второй решетки на возбуждения со стороны первой, и для получения зависимости коэффициентов отражения от частоты и угла падающей волны удовлетворены граничные условия.

Третья часть работы (Главы 5–6) посвящена изучению отражения плоских гармонических волн от границы контакта регулярной квадратной решетки и континуума, моделируемого уравнениями движения классической сплошной среды, а также градиентной. В длинноволновом приближении предполагается соответствие параметров решетки и континуума. Решается задача о поиске отклика континуума на падающую из решетки волну. Коэффициенты отражения также найдены как функции частоты и угла распространения падающей волны.

## 2 Отражение волн от границы раздела одномерной цепочки и континуума

Рассмотрим одномерную модель, изображенную на Рисунке 1. Модель состоит из регулярной цепочки из  $N$  масс и  $N - 1$  пружин, соединенной с одномерным континуумом. Для учета краевых эффектов массы на концах цепочки отличаются от массы внутри цепочки. Свободный конец цепочки подвержен воздействию силы  $F(t)$ , в то время как на границе контакта цепочки и континуума предполагается непрерывность смещений и сил. Рассмотрены две модели континуума, классическая и градиентная. Последняя описана в соответствии с [1].

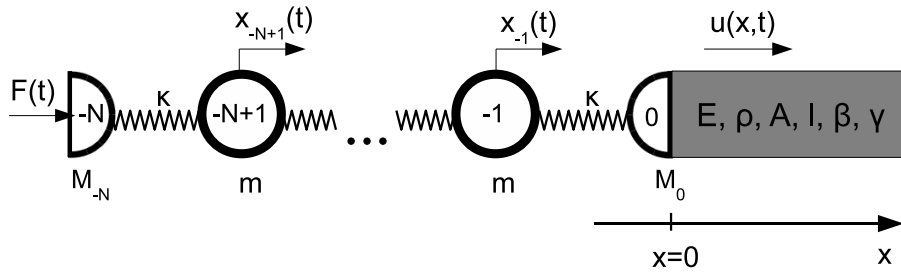


Рис. 1: Одномерная модель

Запишем уравнения движения, определяющие линейные колебания цепочки, включая уравнения для граничных масс:

$$M_{-N}\ddot{x}_{-N} + \kappa(x_{-N} - x_{-N+1}) = F(t), \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_n + \kappa(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) = 0, \quad -N < n < 0, \quad (2)$$

$$M_0\ddot{x}_0 + \kappa(x_0 - x_{-1}) = F_{cont}(t). \quad (3)$$

Классическая и высокоградиентная модели континуума описаны, соответственно, следующими уравнениями:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - l^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (5)$$

На границе  $x = 0$  требуется выполнение условий непрерывности смещений

$$x_0(t) = u(0, t) \quad (6)$$



и непрерывности сил, что обеспечивается следующими выражениями для  $F_{cont}(t)$  из (3):

$$F_{cont}(t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \text{для классического континуума и} \quad (7)$$

$$F_{cont}(t) = \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} + l^2 \beta \left( \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - EA \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (8)$$

для градиентного континуума. На границе с градиентным континуумом требуется дополнительное условие в случае  $\gamma \neq 0$ . В соответствии с [1], это условие можно записать так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad (9)$$

что физически означает отсутствие напряжений высокого порядка.

В уравнениях (1)–(8) использованы обозначения:  $M_{-N}$ ,  $m$  и  $M_0$  — массы конечной частицы в цепочке, внутренней и граничной, соответственно,  $\kappa$  — жесткость пружин в цепочке,  $x_n(t)$  — смещение массы с номером  $n$  в цепочке относительно ее положения равновесия,  $u(x, t)$  — осевое смещение сечения одномерного континуума,  $E$ ,  $A$  и  $\rho$  — модуль Юнга, площадь поперечного сечения и массовая плотность континуума,  $l$  — равновесное расстояние между соседними массами в цепочке, а также параметр длины в уравнениях градиентного континуума,  $F(t)$  — внешняя сила, приложенная к концу цепочки,  $F_{cont}(t)$  — внутренняя сила, с которой континуум действует на граничную массу,  $\beta$  и  $\gamma$  — безразмерные параметры, характеризующие дисперсионные свойства высокоградиентного континуума.

## 2.1 Дискретно-континуальное соответствие в длинноволновом приближении

Дискретная цепочка и континуум должны описывать один и тот же материал, только на разных масштабных уровнях. В длинноволновом приближении эти описания должны совпадать. Этого можно достичь, введя надлежащие соответствия между параметрами цепочки и континуума. Для этого необходимо континуализировать уравнения (2). Сопоставим смещению частицы с номером  $n$  в решетке  $x_n(t)$  смещение среды  $u(x, t)$  в точке  $x = nl$ . Смещения соседних частиц  $x_{n\pm 1}(t)$  представим в виде разложения в ряд Тейлора относительно положения частицы  $n$ :

$$x_n(t) = u(x, t)|_{x=nl}, \quad x_{n\pm 1}(t) = \left\{ u(x, t) \pm l \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right\} \Big|_{x=nl}. \quad (10)$$

С точностью до  $l^2$  подстановка (10) в (2) дает следующий классический результат:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \kappa l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

Сравнивая приведенное выше уравнение с уравнением (4), можно установить следующие соотношения между параметрами:

$$\rho A = \frac{m}{l}, \quad \kappa l = EA. \quad (12)$$

Эти соотношения также задают соответствие между скоростью распространения продольных волн в классическом континууме и собственной частотой цепочки:

$$c = \omega_0 l, \quad c = \sqrt{E/\rho}, \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}. \quad (13)$$

Как будет показано в следующем параграфе, установленные соотношения обеспечивают безотражательную границу в длинноволновом приближении при условии надлежащего выбора граничной массы.

## 2.2 Отражение волн на границе с классическим континуумом

Для анализа отражения от границы рассмотрена гармоническая падающая волна:

$$x_n^{inc}(t) = A^{inc} e^{i\omega t} e^{-iknl}, \quad (14)$$

где  $\omega$  — угловая частота волны,  $k$  — ее волновое число,  $A^{inc}$  — ее комплексная амплитуда. Дисперсионное уравнение для цепочки, которое связывает частоту  $\omega$  с волновым числом  $k$ , может быть получено после подстановки (14) в (2). Результатом этой подстановки является выражение

$$-m\omega^2 + 4\kappa \sin^2\left(\frac{kl}{2}\right) = 0. \quad (15)$$

Введем безразмерную частоту  $\Omega = \omega/\omega_0$ . Выразим из уравнения (15) соотношения, которые пригодятся в дальнейшем:

$$\cos(kl) = 1 - \frac{1}{2}\Omega^2, \quad \sin(kl) = \Omega \sqrt{1 - \frac{1}{4}\Omega^2}. \quad (16)$$

На границе с континуумом падающая волна (14) частично отражается и частично проходит. Поле смещений в решетке и в континууме, описывающее этот процесс, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_n &= A^{inc} e^{i\omega t - iknl} + A^{ref} e^{i\omega t + iknl}, \\ u(x, t) &= A^{tr} e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}x}, \end{aligned} \quad (17)$$

где комплексные амплитуды  $A^{inc}$ ,  $A^{ref}$  и  $A^{tr}$  соответствуют падающей, отраженной и прошедшей волне, соответственно. Подставим приведенные выше уравнения в уравнения (3) и (6), принимая во внимание (7). Воспользуемся также

соотношениями между параметрами, полученными в предыдущем параграфе, и соотношениями (16). Получим два линейных алгебраических уравнения с двумя неизвестными, а именно  $A^{ref}$  и  $A^{tr}$ :

$$\begin{aligned} A^{ref} \left( -\frac{M_0}{m} \Omega^2 + \frac{\Omega^2}{2} - i\Omega \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}} \right) + A^{tr} i\Omega &= A^{inc} \left( \frac{M_0}{m} \Omega^2 - \frac{\Omega^2}{2} - i\Omega \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}} \right), \\ A^{ref} + A^{inc} &= A^{tr}. \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициент отражения найден как абсолютное значение отношения комплексных амплитуд отраженной и падающей волн:

$$R = \left| \frac{A^{ref}}{A^{inc}} \right| = \left| \frac{-\frac{M_0}{m} + \frac{1}{2} - i\Omega^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}} - 1 \right)}{\frac{M_0}{m} - \frac{1}{2} - i\Omega^{-1} \left( \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}} + 1 \right)} \right|. \quad (19)$$

Из уравнения (19) видно, что для отсутствия отражений в длинноволновом приближении масса на границе должна равняться половине массы внутри цепочки, то есть  $2M_0 = m$  (это соотношение и будет использоваться в дальнейшем). С учетом этого соотношения выражения для коэффициента отражения приводятся к виду

$$R = \left| \frac{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}} + 1} \right|. \quad (20)$$

Из приведенного выражения видно, что коэффициент отражения на границе с классическим континуумом равен нулю только когда  $\Omega \rightarrow 0$ . На всех остальных частотах коэффициент отражения не равен нулю. Зависимость коэффициента отражения от частоты будет показана в следующем параграфе вместе с результатами для градиентного континуума. На данном этапе важно подчеркнуть еще раз, что классический континуум способен обеспечить безотражательную границу только на низких частотах, которые соответствуют пространственным масштабам, намного большим, чем расстояние между частицами в цепочке.

### 2.3 Отражение волн на границе с градиентным континуумом

Проведем аналогичное исследование для случая границы с градиентными континуумом, описанным согласно уравнению (5). Волна (14), падающая на границу, порождает следующее поле смещений в решетке и в континууме :

$$\begin{aligned} x_n &= A^{inc} e^{i\omega t - iknl} + A^{ref} e^{i\omega t + iknl}, \\ u(x, t) &= A_1^{tr} e^{i\omega t - ik_1 x} + A_2^{tr} e^{i\omega t - ik_2 x}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь, в отличие от предыдущего случая, в континууме возбуждаются две волны, одна из которых экспоненциально затухает с удалением от границы при увеличении координаты  $x$ . Решение уравнения движения для градиентного континуума (5) можно найти в виде  $u(x, t) = Ae^{i\omega t - ikx}$ . Подстановка этого решения в уравнение (5) с использованием соотношения между параметрами континуума и решетки приводит к дисперсионному уравнению

$$-\Omega^2 + (kl)^2 - \beta(kl)^2\Omega^2 + \beta\gamma(kl)^4 = 0. \quad (22)$$

Волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  являются решениями этого уравнения:

$$\begin{aligned} k_1 l &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\beta\gamma)^{-1} \left( -1 + \beta\Omega^2 + \sqrt{1 - 2\beta\Omega^2 + \beta^2\Omega^4 + 4\beta\gamma\Omega^2} \right)}, \\ k_2 l &= \frac{1}{2} \sqrt{2(\beta\gamma)^{-1} \left( -1 + \beta\Omega^2 - \sqrt{1 - 2\beta\Omega^2 + \beta^2\Omega^4 + 4\beta\gamma\Omega^2} \right)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Волновое число  $k_1$  соответствует распространяющимся от границы волнам, а  $k_2$  — затухающим при удалении от границы волнам (действительная часть  $k_2$  равна нулю). Неизвестные комплексные амплитуды в уравнениях (21) могут быть найдены с помощью подстановки этих уравнений в уравнения (3), (6), (9) и с использованием уравнения (8), а также соотношений между параметрами. Как и в предыдущем случае, получаем систему линейных алгебраических уравнений, только теперь с тремя неизвестными:  $A^{ref}$ ,  $A_1^{tr}$ ,  $A_2^{tr}$ .

$$\begin{aligned} A^{ref} \left( 1 - \frac{\Omega^2}{2} - z_1 \right) + A_1^{tr} i k_1 l (1 + \beta\gamma(k_1 l)^2 - \beta\gamma^2) + A_2^{tr} i k_2 (1 + \beta\gamma(k_2 l)^2 - \beta\gamma^2) &= \\ = A^{inc} \left( \frac{\Omega^2}{2} + z_2 - 1 \right), \\ A_1^{tr} + A_2^{tr} - A^{ref} &= A^{inc}, \\ A_1^{tr} (k_1 l)^2 + A_2^{tr} (k_2 l)^2 &= 0, \\ z_2 = \frac{1}{2} \left( 2 - \Omega^2 + \Omega \sqrt{\Omega^2 - 4} \right), \quad z_1 = z_2^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Комплексную амплитуду отраженной волны можно выразить через комплексную амплитуду падающей, решив систему (24). Коэффициент отражения, который характеризует отражение волн от границы дискретной цепочки и градиентного континуума, можно получить, взяв абсолютное значение отношения амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей. Частотная зависимость коэффициента отражения показана на Рисунке 2. Этот рисунок содержит три графика: (1) коэффициент отражения из (19), характеризующий отражение от границы с классическим континуумом (линия, отмеченная крестовидными символами); (2) коэффициент отражения от границы с градиентным континуумом,

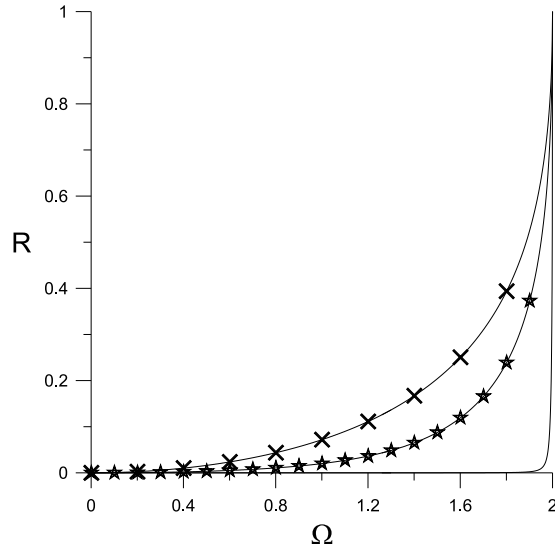


Рис. 2: Коэффициент отражения

где взяты параметры континуума  $\beta = 1/7$  и  $\gamma = 5/12$  (линия отмечена звездочками); (3) коэффициент отражения от границы с градиентным континуумом, где взяты параметры континуума  $\beta = 0.25$  и  $\gamma = 0.0001$  (простая линия). Из Рисунка 2 видно, что отражение от границы с градиентным континуумом меньше, чем от границы с классическим. Более того, похоже, что градиентный континуум с параметрами  $\beta = 0.25$  и  $\gamma = 0.0001$  обеспечивает почти идеальную безотражательную границу на всех частотах, кроме частот, очень близких к пороговой частоте цепочки  $\Omega = 2$ , выше которой волны в ней не распространяются. Принимая во внимание этот факт, интересно посмотреть, что происходит, если  $\beta = 0.25$  и  $\gamma = 0$ . В этом случае дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее градиентный континуум, сводится от уравнения четвертого порядка по пространственной координате к уравнению второго порядка (остается смешанная производная четвертого порядка по времени и координате).

Для визуализации дисперсионных свойств рассматриваемых сред на Рисунке 3 изображены дисперсионные характеристики. Характеристика синего цвета соответствует классическому континууму, для которого  $\Omega = kl$ . Характеристика черного цвета соответствует цепочке, согласно одному из соотношений (16). Она периодична, ее период равен  $kl_p = 2\pi$ , первой зоне Бриллюэна [28] соответствуют значения  $-\pi < kl < \pi$  (на данном рисунке изображены лишь положительные значения  $kl$ , для наглядности взят отрезок от 0 до  $2\pi$ ). Характеристика коричневого цвета соответствует градиентному континууму с параметрами  $\beta = 1/7$

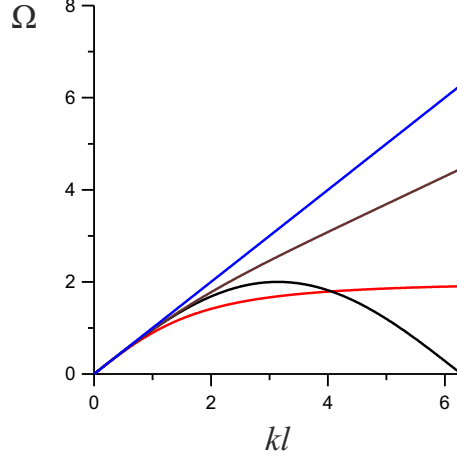


Рис. 3: Дисперсионные характеристики

и  $\gamma = 5/12$ , красного — континууму с параметрами  $\beta = 0.25$  и  $\gamma = 0$  (согласно уравнению (22)). Первая из них лучше аппроксимирует характеристику цепочки на низких частотах, вторая выходит на асимптоту, которая соответствует пороговой частоте цепочки.

Решим задачу об отражении для градиентного континуума с параметрами  $\beta = 0.25$  и  $\gamma = 0$ . Отраженное и прошедшее поля смещений в этом случае могут быть найдены с использованием следующих выражений:

$$\begin{aligned} x_n &= A^{inc} e^{i\omega t - ikn l} + A^{ref} e^{i\omega t + ikn l}, \\ u(x, t) &= A^{tr} e^{i\omega t - ik_1 x}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $k_1 = \Omega / \sqrt{1 - \beta\Omega^2}$  — волновое число, определенное из дисперсионного уравнения для градиентного континуума (22) с параметром  $\gamma = 0$ . Подставляя уравнения (25) в (3), (6) и (8), взятое при  $\gamma = 0$ , можно найти комплексную амплитуду отраженной волны, что приводит к следующему выражению для коэффициента отражения (масса на границе предполагается равной половине массы внутри цепочки):

$$R = \left| \frac{\sqrt{1 - \beta\Omega^2} - \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}}}{\sqrt{1 - \beta\Omega^2} + \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{4}}} \right|. \quad (26)$$

Из приведенного выражения видно, что коэффициент отражения обращается в ноль на *всех* частотах, если  $\beta = 0.25$ . Таким образом, высокоградиентный континуум с параметрами  $\beta = 0.25$  и  $\gamma = 0$  обеспечивает идеальную безотражательную границу на всем диапазоне частот, в котором распространяются волны в цепочке.

## 2.4 Численное моделирование

В этом параграфе переходные процессы возбуждения, распространения и отражения волн от границы визуализированы для системы, изображенной на Рисунке 1. Система уравнений движения, уравнения (1)-(9), рассмотрены при наличии внешней силы  $F(t)$ , которая задана уравнением

$$F(t) = F_0 \sin(\theta t) H(2\pi/\theta - t). \quad (27)$$

Для решения задачи применяется интегральное преобразование Лапласа с нулевыми начальными условиями. С использованием этого преобразования и введением динамической жесткости  $K(s)$ , которая описывает реакцию континуума, можно записать постановку задачи в области Лапласа следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{-N}(\omega_0^2 + s^2 \frac{M-N}{m}) - \omega_0^2 X_{1-N} &= \tilde{F}(s), \\ X_n(s^2 + 2\omega_0^2) - \omega_0^2 (X_{n-1} + X_{n+1}) &= 0, \quad N < n < 0, \\ X_0(\frac{s^2}{2} + \omega_0^2 + \frac{K(s)}{m}) - \omega_0^2 X_{-1} &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$X_n(s) = \int_0^\infty x_n(t) e^{-st} dt, \quad \tilde{F}(s) = \frac{F_0}{\kappa} \frac{\theta \left( e^{\frac{2\pi s}{\theta}} - 1 \right) e^{-\frac{2\pi s}{\theta}}}{s^2 + \theta^2}. \quad (29)$$

Динамическая жесткость  $K(s) = \tilde{F}_{cont}(s)X(s)$  для классического континуума может быть найдена как  $K(s) = \kappa \tilde{s}$ , где  $\tilde{s} = s/\omega_0$ , в то время как для градиентного континуума динамическая жесткость описывается выражением

$$\begin{aligned} K(s) &= -\frac{(1+\beta\tilde{s}^2)(q_1 q_2 - 2\tilde{s}^2) + \beta\gamma(q_1^2 q_2^2 + 2\tilde{s}^2(q_1 q_2 + q_1^2 + q_2^2))}{q_1 + q_2} \kappa, \\ q_1 &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\beta\gamma(1+\beta\tilde{s}^2 - \sqrt{1+2\beta\tilde{s}^2 + \beta^2\tilde{s}^4 - 4\beta\gamma\tilde{s}^2})}}{\beta\gamma}, \\ q_2 &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\beta\gamma(1+\beta\tilde{s}^2 + \sqrt{1+2\beta\tilde{s}^2 + \beta^2\tilde{s}^4 - 4\beta\gamma\tilde{s}^2})}}{\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (30)$$

Система линейных алгебраических уравнений (28) может быть решена численно для получения решения в области Лапласа. Численное применение обратного преобразования Лапласа к полученному результату дает решение во временной области. Для получения численного решения взяты следующие параметры:

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{\kappa} &= 1, & \frac{\theta}{\omega_0} &= 1, & \beta &= 0.25, & \gamma &= 0.0001, \\ \frac{s}{\omega_0} &= 0.02 + i\Omega, & \Omega_{maximum} &= 50, & M_{-N} &= 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Результат численного моделирования показан на Рисунке 4. На левом рисунке показано возбуждение и распространение импульса вдоль цепочки, а также отраженный импульс. Последний гораздо меньше, чем падающий, как для классического континуума, так и для градиентного. Поэтому нижняя линия, отвечающая  $\omega_0 = 140$ , выглядит плоской на левом рисунке. На правом рисунке отраженный импульс увеличен, в каждый момент времени представлены два поля смещений: одно соответствует классическому континууму (сплошная линия), другой — градиентному (пунктирная линия). На правом рисунке видно, что в то время как классический континуум отражает обратно в решетку, градиентный континуум может служить как почти идеальная безотражательная граница.

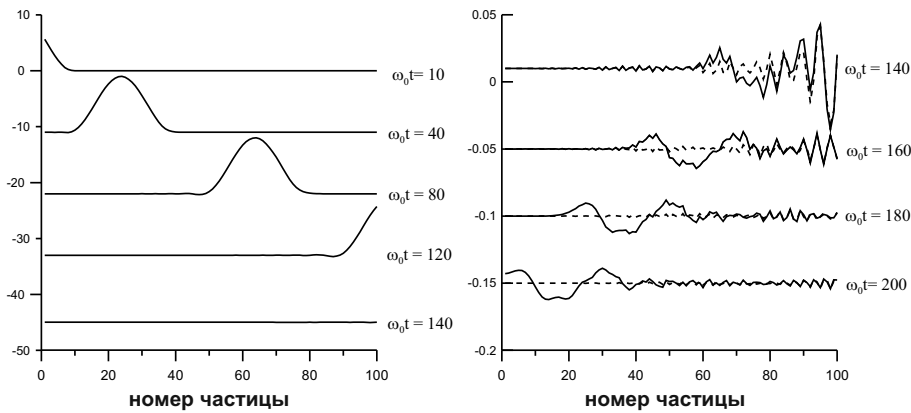


Рис. 4: Смещения в цепочке

## 2.5 Заключение

Проведенное в одномерном случае исследование показало, что градиентный континуум имеет в этом случае преимущество перед классическим для построения безотражательной границы. На основании этого результата интересно изучить возможности градиентного континуума поглощать без отражений волны, идущие из решетки, в пространстве более высокой размерности.



### 3 Распространение волн в квадратной решетке

Для дальнейшего изучения отражения волн на границе дискретной области рассмотрим полупространство, заполненное квадратной решеткой. Элементарная ячейка такой решетки изображена на Рисунке 5 (левая часть Рисунка). Частица

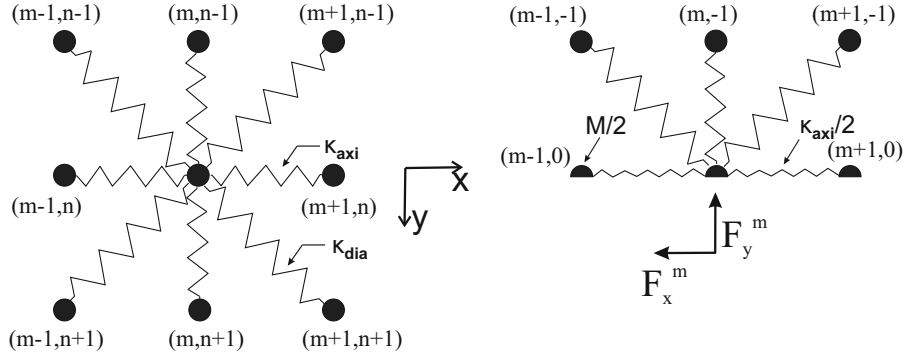


Рис. 5: Внутренняя (слева) и граничная (справа) ячейки решетки.

с безразмерными координатами  $(m, n)$  соединена с четырьмя соседними частицами, находящимися на расстоянии  $d$ , линейными пружинами с жесткостью  $\kappa_{axi}$ , а с остальными четырьмя соседями, находящимися на расстоянии  $\sqrt{2}d$ , — пружинами с жесткостью  $\kappa_{dia}$ . Каждая частица в решетке имеет две степени свободы: смещения в направлении оси  $x$  и оси  $y$   $u_x^{(m,n)}$ ,  $u_y^{(m,n)}$ . Для частицы  $(m, n)$  можно записать уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial L^{(m,n)}}{\partial u_x^{(m,n)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^{(m,n)}}{\partial \dot{u}_x^{(m,n)}} \right) = 0, \quad \frac{\partial L^{(m,n)}}{\partial u_y^{(m,n)}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^{(m,n)}}{\partial \dot{u}_y^{(m,n)}} \right) = 0, \quad (32)$$

где

$$L^{(m,n)} = E_{kin}^{(m,n)} - E_{pot}^{(m,n)}, \quad E_{kin}^{(m,n)} = \frac{1}{2} M \left( (\dot{u}_x^{(m,n)})^2 + (\dot{u}_y^{(m,n)})^2 \right), \quad (33)$$

$$E_{pot}^{(m,n)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (\Delta l_i)^2 \kappa_{axi} + \frac{1}{2} \sum_{i=5}^8 (\Delta l_i)^2 \kappa_{dia}.$$

Здесь  $E_{kin}^{(m,n)}$ ,  $E_{pot}^{(m,n)}$  — кинетическая и потенциальная энергии частицы с координатами  $(m, n)$ ,  $\Delta l_i$  — удлинения соответствующих пружин при малом отклоне

нении частицы от положения равновесия:

$$\begin{aligned}
\Delta l_1 &= u_x^{(m+1,n)} - u_x^{(m,n)}, & \Delta l_2 &= u_y^{(m,n)} - u_y^{(m,n-1)}, & \Delta l_3 &= u_x^{(m,n)} - u_x^{(m-1,n)}, \\
\Delta l_4 &= u_y^{(m,n+1)} - u_y^{(m,n)}, & \Delta l_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_y^{(m,n)} - u_y^{(m+1,n-1)} - u_x^{(m,n)} + u_x^{(m+1,n-1)} \right), \\
\Delta l_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_y^{(m,n)} - u_y^{(m-1,n-1)} - u_x^{(m-1,n-1)} + u_x^{(m,n)} \right), \\
\Delta l_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_y^{(m-1,n+1)} - u_y^{(m,n)} - u_x^{(m-1,n+1)} + u_x^{(m,n)} \right), \\
\Delta l_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_y^{(m+1,n+1)} - u_y^{(m,n)} - u_x^{(m,n)} + u_x^{(m+1,n+1)} \right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Подставив (34) в (33) и (32), получим уравнения движения для внутреннего элемента решетки:

$$\begin{aligned}
M d_{tt} u_x^{(m,n)} &= \frac{\kappa_{axi}}{2} \left( -4u_x^{(m,n)} + 2u_x^{(m+1,n)} + 2u_x^{(m-1,n)} \right) + \frac{\kappa_{dia}}{2} \left( -4u_x^{(m,n)} + u_x^{(m+1,n+1)} + \right. \\
&\quad \left. + u_x^{(m+1,n-1)} + u_x^{(m-1,n+1)} + u_x^{(m-1,n-1)} + u_y^{(m+1,n+1)} + u_y^{(m-1,n-1)} - u_y^{(m+1,n-1)} - u_y^{(m-1,n+1)} \right), \\
M d_{tt} u_y^{(m,n)} &= \frac{\kappa_{axi}}{2} \left( -4u_y^{(m,n)} + 2u_y^{(m,n+1)} + 2u_y^{(m,n-1)} \right) + \frac{\kappa_{dia}}{2} \left( -4u_y^{(m,n)} + u_y^{(m+1,n+1)} + \right. \\
&\quad \left. + u_y^{(m+1,n-1)} + u_y^{(m-1,n+1)} + u_y^{(m-1,n-1)} - u_x^{(m+1,n-1)} - u_x^{(m-1,n+1)} + u_x^{(m+1,n+1)} + u_x^{(m-1,n-1)} \right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь  $d_{tt}$  обозначает полную производную по времени второго порядка.

### 3.1 Дискретно-континуальное соответствие

Как и в случае одномерной цепочки, подберем параметры континуума так, чтобы обеспечить соответствие между континуумом и решеткой в длинноволновом приближении. Для этого проделаем те же процедуры, что и для одномерной цепочки. Сначала заменим степени свободы в решетке  $u_x^{(m,n)}$ ,  $u_y^{(m,n)}$  на смещения континуума в соответствующих точках:

$$u_x^{(m,n)}(t) = u_x(x, y, t)|_{x=md}, \quad u_y^{(m,n)}(t) = u_y(x, y, t)|_{y=nd}. \tag{36}$$

Затем представим степени свободы соседних частиц в виде разложения в ряд Тейлора относительно континуализированных смещений отсчетной частицы с учетом членов второго порядка:

$$\begin{aligned}
u_{x,y}^{(m+p,n+q)} &\approx \left[ u_{x,y} + pd \frac{\partial u_{x,y}}{\partial x} + qd \frac{\partial u_{x,y}}{\partial y} + \frac{1}{2} p^2 d^2 \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial x^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} q^2 d^2 \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial y^2} + pqd^2 \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial x \partial y} \right] \Big|_{x=md, y=nd}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Подстановка этих разложений в уравнения движения (35) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} M\partial_{tt}u_x &= (\kappa_{axi} + \kappa_{dia})d^2\partial_{xx}u_x + 2\kappa_{dia}d^2\partial_{xy}u_y + \kappa_{dia}d^2\partial_{yy}u_x, \\ M\partial_{tt}u_y &= (\kappa_{axi} + \kappa_{dia})d^2\partial_{yy}u_y + 2\kappa_{dia}d^2\partial_{yx}u_x + \kappa_{dia}d^2\partial_{xx}u_y. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь и далее  $\partial_{tt}$  обозначает частную производную по времени второго порядка. Для получения соответствий между параметрами классического изотропного континуума и решетки сравним полученные уравнения с уравнениями движения для классического изотропного континуума

$$\begin{aligned} \rho\partial_{tt}u_x &= (\lambda + 2\mu)\partial_{xx}u_x + (\lambda + \mu)\partial_{xy}u_y + \mu\partial_{yy}u_x, \\ \rho\partial_{tt}u_y &= (\lambda + 2\mu)\partial_{yy}u_y + (\lambda + \mu)\partial_{yx}u_x + \mu\partial_{xx}u_y, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ляме, а  $\rho$  — массовая плотность. Необходимо ввести параметр длины решетки в направлении, перпендикулярном плоскости  $(x, y)$ , чтобы получить соответствие между уравнениями (38) и (39). Введем параметр  $h$ , который характеризует толщину решетки. В результате получим соотношения

$$M = \rho d^2 h, \quad \kappa_{axi} + \kappa_{dia} = h(\lambda + 2\mu), \quad 2\kappa_{dia} = h(\lambda + \mu), \quad \kappa_{dia} = h\mu. \quad (40)$$

Из этих соотношений следует, что  $\lambda = \mu$ , а  $\kappa_{axi} = 2\kappa_{dia}$ . Введем обозначение

$$\kappa = \kappa_{axi} = 2\kappa_{dia} = 2\mu h, \quad (41)$$

которым и будем пользоваться в дальнейшем.

### 3.2 Дисперсионное соотношение

Перепишем уравнения движения (35) с учетом полученных результатов:

$$\begin{aligned} Md_{tt}u_x^{(m,n)} &= \frac{\kappa}{4} \left( -12u_x^{(m,n)} + 4u_x^{(m+1,n)} + 4u_x^{(m-1,n)} + u_x^{(m+1,n+1)} + u_x^{(m+1,n-1)} + \right. \\ &\quad \left. + u_x^{(m-1,n+1)} + u_x^{(m-1,n-1)} + u_y^{(m+1,n+1)} + u_y^{(m-1,n-1)} - u_y^{(m+1,n-1)} - u_y^{(m-1,n+1)} \right), \\ Md_{tt}u_y^{(m,n)} &= \frac{\kappa}{4} \left( -12u_y^{(m,n)} + 4u_y^{(m,n+1)} + 4u_y^{(m,n-1)} + u_y^{(m+1,n+1)} + u_y^{(m+1,n-1)} + \right. \\ &\quad \left. + u_y^{(m-1,n+1)} + u_y^{(m-1,n-1)} - u_x^{(m+1,n-1)} - u_x^{(m-1,n+1)} + u_x^{(m+1,n+1)} + u_x^{(m-1,n-1)} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Для изучения распространения плоских волн в решетке представим смещения плоской волны в виде:

$$\begin{aligned} u_x^{(m,n)} &= A \exp(i\omega t) \exp(-i(k_x m + k_y n)), \\ u_y^{(m,n)} &= B \exp(i\omega t) \exp(-i(k_x m + k_y n)). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь  $k_x, k_y$  — компоненты волнового вектора  $\mathbf{k} = (k \sin \theta, k \cos \theta)$ , умноженные на период решетки  $d$ . Угол  $\theta$  задает направление распространения волны,  $A$  и  $B$  — комплексные амплитуды.

Подстановка (43) в уравнения движения (42) приводит к системе из двух однородных линейных уравнений относительно  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} A [M\omega^2 + \kappa(2 \cos(k_x) + \cos(k_x) \cos(k_y) - 3)] + B\kappa[-\sin(k_x) \sin(k_y)] &= 0, \\ A\kappa[-\sin(k_x) \sin(k_y)] + B [M\omega^2 + \kappa(2 \cos(k_y) + \cos(k_x) \cos(k_y) - 3)] &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Разделим уравнения (44) на  $\kappa$  и введем безразмерную частоту

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{2M}{\kappa}} = \frac{\omega d}{c_T}, \quad (45)$$

где  $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость распространения поперечных волн в классическом континууме. Тогда уравнения (44) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} A \left[ \frac{\Omega^2}{2} + (2 \cos(k_x) + \cos(k_x) \cos(k_y) - 3) \right] + B[-\sin(k_x) \sin(k_y)] &= 0, \\ A[-\sin(k_x) \sin(k_y)] + B \left[ \frac{\Omega^2}{2} + (2 \cos(k_y) + \cos(k_x) \cos(k_y) - 3) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Для того, чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю. Отсюда следует уравнение

$$\underbrace{(2 \cos(k_x) + 2 \cos(k_y) - 4 + \Omega^2)}_{(a)} \underbrace{(4 \cos(k_x) \cos(k_y) + 2 \cos(k_x) + 2 \cos(k_y) - 8 + \Omega^2)}_{(b)} = 0, \quad (47)$$

которое описывает дисперсионные свойства решетки. В длинноволновом приближении ( $k \rightarrow 0$ ) уравнение (a) = 0 сводится к уравнению  $\Omega = \pm kd$ , откуда следует  $k = \pm\omega/c_T$ , что описывает распространение поперечных волн, а уравнение (b) = 0 сводится к уравнению  $\Omega = \pm\sqrt{3}kd$ , и  $k = \pm\omega/c_L$  ( $c_L = \sqrt{3}c_T$  в континууме, соответствующем рассматриваемой решетке) соответствует продольным волнам. На высоких частотах волны, распространяющиеся в решетке, не являются ни продольными, ни поперечными. Чтобы убедиться в этом, выразим отношение амплитуд  $B/A$ , например, из первого уравнения из (46)

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{\Omega^2}{2} + (2 \cos(k_x) + \cos(k_x) \cos(k_y) - 3)}{-\sin(k_x) \sin(k_y)} \quad (48)$$

и покажем, что на высоких частотах это отношение отличается от  $\text{ctg}(\theta)$  — отношения амплитуд  $B/A$  в случае распространения продольной волны, когда колебания частиц совершаются вдоль направления волнового вектора, и можно представить амплитуды  $A$  и  $B$  как  $A = \tilde{A} \sin \theta$ ,  $B = \tilde{A} \cos \theta$ . Также можно

показать, что для случая распространения поперечной волны, когда колебания частиц совершаются поперек направления волнового вектора, равенство  $B/A = \operatorname{tg} \theta$  нарушается на высоких частотах.

На Рисунке 6 изображен график зависимости отношения амплитуд  $B/A$  от частоты  $\Omega$  для волн, описываемых уравнением  $(b) = 0$ . Рассмотрены три различных угла распространения  $\theta$ . Пунктирные линии соответствуют значениям  $\operatorname{ctg}(\theta)$  — отношению амплитуд  $B/A$  в случае распространения продольной волны. Как видно из рисунка, волна остается продольной и на высоких частотах только при угле падения  $\theta = \pi/4$ .

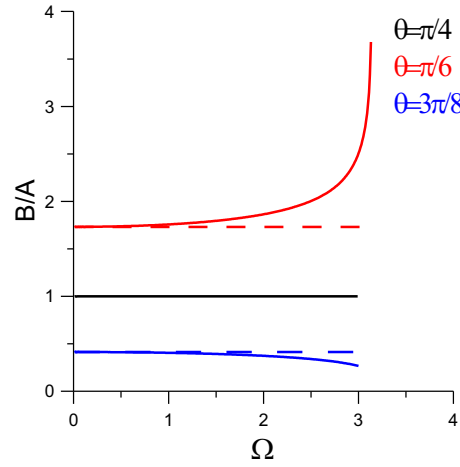


Рис. 6: Отношения амплитуды смещений по оси  $y$  к амплитуде смещений по оси  $x$  при различных углах падения.

Как видно из характера зависимостей (43), если к волновому вектору  $\mathbf{k}$  прибавить вектор  $\mathbf{k}^* = (2\pi/d, 2\pi/d)$ , уравнения движения волны, соответствующей этому новому вектору, будут полностью совпадать с исходными уравнениями. Вектор  $\mathbf{k}^*$  называется вектором обратной решетки [29]. Таким образом, информативной оказывается только первая зона Бриллюэна [28], в пределах которой  $k_x$  и  $k_y$  меняются от  $-\pi$  до  $\pi$ .

На Рисунке 7 изображены дисперсионные поверхности — зависимости  $\Omega(k_x, k_y)$  — в пределах первой зоны Бриллюэна  $-\pi \leq k_x \leq \pi$ ,  $-\pi \leq k_y \leq \pi$  [28]. Красным цветом обозначена поверхность, описываемая уравнением  $(b) = 0$ , серым — уравнением  $(a) = 0$ . Будем называть волны, соответствующие уравнению  $(b) = 0$  квазипродольными волнами (что отражает тот факт, что эти волны являются продольными на низких частотах), а соответствующие уравнению  $(a) = 0$  — квазипоперечными волнами.

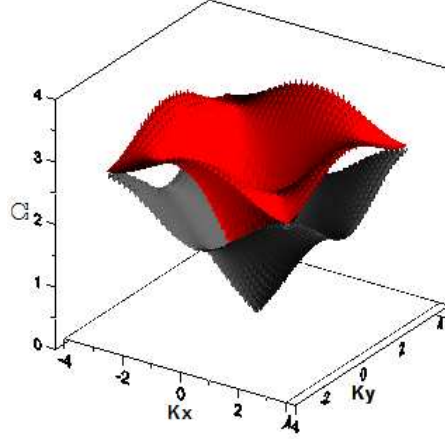


Рис. 7: Дисперсионные поверхности в пределах первой зоны Бриллюэна.

### 3.3 Энергия распространяющихся волн

Рассмотрим границу  $y = -Nd$ , бесконечно удаленную от границы  $y = 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ). Поток энергии через элементарную ячейку этой границы можно записать как работу, совершаемую силами, действующими на частицу в узле решетки на этой границе:

$$\mathcal{P}^{(m,n)} = F_x^{(m,n)} \dot{u}_x^{(m,n)} + F_y^{(m,n)} \dot{u}_y^{(m,n)}, \quad (49)$$

где  $n = -N$ ,  $u_x^{(m,n)}$ ,  $u_y^{(m,n)}$  — смещения,  $F_x^{(m,n)}$ ,  $F_y^{(m,n)}$  — силы, действующие на элемент с координатами  $(md, nd)$ :

$$\begin{aligned} F_x^{(m,n)} &= \frac{1}{2} M d_{tt} u_x^{(m,n)} + \frac{\kappa}{4} \left( 6u_x^{(m,n)} - 2u_x^{(m+1,n)} - 2u_x^{(m-1,n)} - u_y^{(m+1,n+1)} - \right. \\ &\quad \left. - u_x^{(m+1,n+1)} - u_x^{(m-1,n+1)} + u_y^{(m-1,n+1)} \right), \\ F_y^{(m,n)} &= \frac{1}{2} M d_{tt} u_y^{(m,n)} + \frac{\kappa}{4} \left( 6u_y^{(m,n)} - 4u_y^{(m,n+1)} - u_y^{(m+1,n+1)} - u_x^{(m+1,n+1)} - \right. \\ &\quad \left. - u_y^{(m-1,n+1)} + u_x^{(m-1,n+1)} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Найдем осредненный по периоду  $T = 2\pi/\omega$  поток энергии

$$\widehat{\mathcal{P}}^{(m,n)} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}^{(m,n)} dt. \quad (51)$$

Смещения (43) представим в виде полусуммы смещения и его комплексно сопряженного:

$$u_x^{(m,n)} = \frac{1}{2} \left( u_x^{(m,n)} + \bar{u}_x^{(m,n)} \right), \quad u_y^{(m,n)} = \frac{1}{2} \left( u_y^{(m,n)} + \bar{u}_y^{(m,n)} \right). \quad (52)$$

Результатом подстановки этих выражений в (49) и (50) является выражение для потока энергии вида

$$\mathcal{P}^{(m,n)} = A_1 e^{2i\omega t} + A_2 e^{-2i\omega t} + A_3. \quad (53)$$

В этом выражении  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  не зависят от времени. При осреднении по периоду (51) первые два слагаемые из (53) обратятся в ноль. Оставшееся слагаемое  $A_3$  представляет собой осредненный по времени поток энергии через элементарную ячейку границы:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \frac{\kappa\omega |A|^2}{8} \xi, \quad (54)$$

$$\xi = \sin(k_x + k_y)(D^2 + 2D + 1) + \sin(k_y - k_x)(D^2 - 2D + 1) + 4D^2 \sin(k_y).$$

Здесь введено обозначение  $D = B/A$ . Можно заметить, что это выражение уже не зависит от  $m$  и  $n$ .

### 3.4 Групповая скорость

Компоненты групповой скорости определяются выражениями

$$C_{g_x} = \frac{\partial\omega}{\partial K_x}, \quad C_{g_y} = \frac{\partial\omega}{\partial K_y}, \quad (55)$$

где  $K_x = k_x/d$ ,  $K_y = k_y/d$  — размерные компоненты волнового вектора. Определим безразмерную групповую скорость как размерную, деленную на  $c_T$ . Тогда получим в безразмерных переменных

$$c_{g_x} = \frac{\partial\Omega}{\partial k_x}, \quad c_{g_y} = \frac{\partial\Omega}{\partial k_y}. \quad (56)$$

Выразим из уравнения (47) частоту  $\Omega$  через  $k_x$  и  $k_y$ . Для квазипродольных волн (уравнение (b) = 0) и для квазипоперечных волн (уравнение (a) = 0) получим, соответственно:

$$\Omega_L = \sqrt{8 - 4 \cos(k_x) \cos(k_y) - 2 \cos(k_x) - 2 \cos(k_y)}, \quad (57)$$

$$\Omega_T = \sqrt{4 - 2 \cos(k_x) - 2 \cos(k_y)}.$$

Тогда компоненты групповых скоростей, соответствующих этим волнам, выразятся через  $k_x$  и  $k_y$  следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{gLx} &= \frac{\sin(k_x)(2 \cos(k_y) + 1)}{\Omega_L}, & c_{gLy} &= \frac{\sin(k_y)(2 \cos(k_x) + 1)}{\Omega_L} \\ c_{gTx} &= \frac{\sin(k_x)}{\Omega_T}, & c_{gTy} &= \frac{\sin(k_y)}{\Omega_T}. \end{aligned} \quad (58)$$

Как видно из этого выражения,  $x$ -компоненты групповых скоростей обращаются в ноль на границах зоны Бриллюэна  $k_x = \pm\pi$ , а  $y$ -компоненты — при  $k_y = \pm\pi$ .

### 3.5 Заключение

В данной Главе исследовано распространение плоских гармонических волн в квадратной решетке. Выведены уравнения движения рассматриваемой решетки. Показано, что классический изотропный континуум с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.25$  описывает данную решетку в длинноволновом приближении. При этом налагается ограничение на параметры решетки: связь между жесткостью пружин, соединяющих частицу решетки с ближайшими соседями, и жесткостью пружин, соединяющих соседей из второй координационной сферы. Получены дисперсионные характеристики решетки, определен поток энергии через элементарную ячейку плоской границы решетки, а также определены групповые скорости распространяющихся волн. Все результаты, полученные в данной Главе, будут использоваться в последующих Главах для изучения отражения волн от границы квадратной решетки.



## 4 Отражение волн от границы решетки

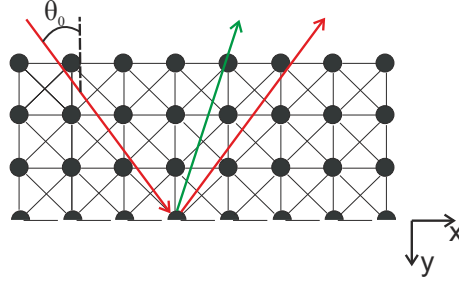


Рис. 8: Полупространство с границей  $y = 0$ .

Рассмотрим полупространство  $y < 0$ , заполненное дискретной решеткой (см. Рисунок 8). Будем изучать отражение плоских гармонических волн, переносящих энергию в положительном направлении как по оси  $x$ , так и по оси  $y$ . Пусть на границу  $y = 0$  падает волна, определяемая следующими выражениями для  $x$ - и  $y$ - компонент смещений частиц решетки:

$$u_{xI}^{(m,n)} = A_I e^{i\omega t} e^{-i(k_{x0}m + k_{y0}n)}, \quad u_{yI}^{(m,n)} = B_I e^{i\omega t} e^{-i(k_{x0}m + k_{y0}n)}. \quad (59)$$

Такое представление гарантирует, что при положительных  $k_x$  и  $k_y$  фазовая скорость этой волны направлена в положительном направлении и по оси  $x$ , и по оси  $y$ . Однако групповая скорость может при этом иметь другое направление, и при этом энергия будет переноситься этой волной в направлении, отличающемся от рассматриваемого. Зададим направление распространения падающей волны, введя угол падения  $\theta_0$  (см. Рисунок 8). Для каждого угла  $\theta_0$  и частоты  $\omega$  можно найти волновое число  $k_0$  падающей волны, удовлетворив соответствующему этой волне дисперсионному уравнению. Пусть падающая волна для определенности является квазипродольной. Вычислим групповые скорости, определяемые выражениями (58), соответствующие положительным значениям  $k_x = k_0 \sin \theta_0$ ,  $k_y = k_0 \cos \theta_0$ .

На Рисунке 9 изображены графики зависимости компонент групповых скоростей от частоты  $\Omega$  для квазипродольной волны, распространяющейся под углами  $\theta_0 = \pi/6$  и  $\theta_0 = \pi/3$ , и для порожденной ею отраженной квазипоперечной волны, которая будет обсуждаться ниже. Компоненте групповой скорости по оси  $x$  падающей волны соответствует черная линия, а по оси  $y$  — красная. Как видно из этих графиков, обе компоненты групповой скорости падающей волны положительны до некоторой частоты, что означает, что такая волна переносит энергию в интересующем нас направлении, соответствующем положительным направлениям обеих осей. Однако при дальнейшем увеличении частоты при угле

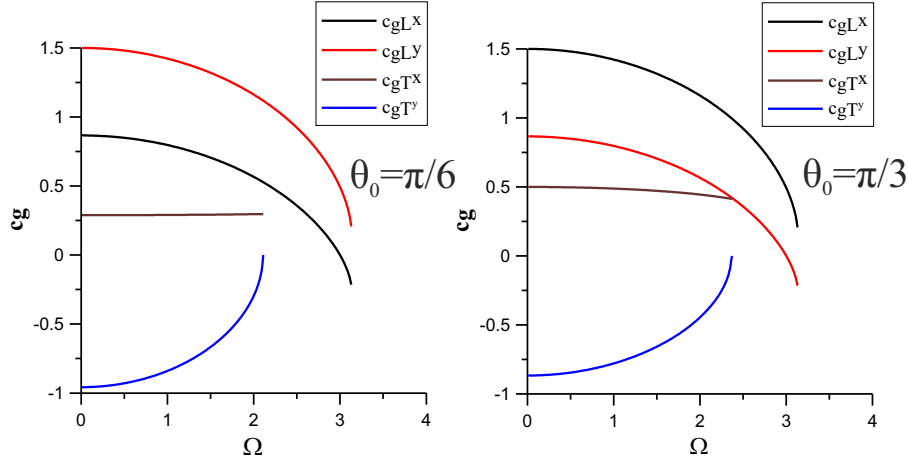


Рис. 9: Групповые скорости в зависимости от частоты для падающей квази-продольной и отраженной квазипоперечной волн при двух различных углах распространения падающей волны.

распространения  $\theta_0 = \pi/6$   $x$ - компонента групповой скорости становится отрицательной, а при  $\theta_0 = \pi/3$  —  $y$ - компонента становится отрицательной. Это означает, что волна начинает переносить энергию в первом случае в отрицательном направлении по оси  $x$ , а во втором — по оси  $y$ . Поэтому для переноса падающей волной энергии к границе в положительном направлении по осям  $x$  и  $y$  необходимо выбирать  $k_x$  и  $k_y$  в выражении для падающей волны (59) со знаками, обеспечивающими положительность обеих компонент групповой скорости.

Падающая волна (59) порождает две отраженные волны, одну квазипродольную и одну квазипоперечную:

$$\begin{aligned} u_{xR_1}^{(m,n)} &= A_{R_1} e^{i\omega t} e^{-i(k_{x1}m - k_{y1}n)}, & u_{yR_1}^{(m,n)} &= B_{R_1} e^{i\omega t} e^{-i(k_{x1}m - k_{y1}n)}, \\ u_{xR_2}^{(m,n)} &= A_{R_2} e^{i\omega t} e^{-i(k_{x2}m - k_{y2}n)}, & u_{yR_2}^{(m,n)} &= B_{R_2} e^{i\omega t} e^{-i(k_{x2}m - k_{y2}n)}. \end{aligned} \quad (60)$$

Смещения  $u^{(m,n)}$  частиц в решетке складываются из смещений, вызываемых всеми тремя волнами:

$$u_x^{(m,n)} = u_{xI}^{(m,n)} + u_{xR_1}^{(m,n)} + u_{xR_2}^{(m,n)}, \quad u_y^{(m,n)} = u_{yI}^{(m,n)} + u_{yR_1}^{(m,n)} + u_{yR_2}^{(m,n)}. \quad (61)$$

Запишем уравнения движения для элемента на границе  $y = 0$  (см. Рисунок 5,

справа):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}M d_{tt} u_x^{(m,0)} &= -\frac{\kappa}{4} \left( 6u_x^{(m,0)} - 2u_x^{(m+1,0)} - 2u_x^{(m-1,0)} + u_y^{(m+1,-1)} - u_x^{(m+1,-1)} - \right. \\
&\quad \left. - u_x^{(m-1,-1)} - u_y^{(m-1,-1)} \right) - F_x^m, \\
\frac{1}{2}M d_{tt} u_y^{(m,0)} &= -\frac{\kappa}{4} \left( 6u_y^{(m,0)} - 4u_y^{(m,-1)} - u_y^{(m+1,-1)} + u_x^{(m+1,-1)} - u_y^{(m-1,-1)} - \right. \\
&\quad \left. - u_x^{(m-1,-1)} \right) - F_y^m.
\end{aligned} \tag{62}$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (62) необходимо, чтобы все три волны распространялись с одной и той же фазой по  $x$ :

$$k_{x0} = k_{x1} = k_{x2} \Leftrightarrow k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2, \tag{63}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — направления распространения отраженных волн. Волновое число отраженной квазипродольной волны  $k_1$  и угол отражения  $\theta_1$  удовлетворяют тому же дисперсионному уравнению, что и  $k_0, \theta_0$ . Это дает при условии (63) равенства  $k_1 = k_0, \theta_1 = \theta_0$ . Угол  $\theta_2$ , а затем и волновое число  $k_2$  можно найти, удовлетворив другому дисперсионному уравнению из (47). Начиная с некоторой частоты отраженные волны второго типа будут затухать при удалении от границы по координате  $y$  и будут иметь комплексные значения  $\theta_2, k_2$ .

Посмотрим на групповые скорости отраженной квазипоперечной волны на Рисунке 9. Эта волна распространяется в противоположную сторону по оси  $y$ , нежели падающая, что отражается в различии знаков у  $y$ - компонент групповых скоростей падающей и отраженной волн. Компонента групповой скорости по оси  $y$  для квазипоперечных волн обращается в ноль на частоте отсечки, после которой эти волны затухают по  $y$ .

В соответствии с падающей волной силы  $F_x^m, F_y^m$ , действующие на граничный элемент, можно представить в виде

$$F_x^m = F_x^0(\omega) e^{-imk_{x0}} e^{i\omega t}, \quad F_y^m = F_y^0(\omega) e^{-imk_{x0}} e^{i\omega t}. \tag{64}$$

Заметим, что если граница  $y = 0$  свободная, то  $F_x^0(\omega) = F_y^0(\omega) = 0$ .

Каждая из волн (59)-(60) удовлетворяет уравнениям движения (42). Отсюда можно получить отношения горизонтальной и вертикальной компонент амплитуд волн:

$$\begin{aligned}
D_0 &= \frac{A_I}{B_I} = \frac{A_{R1}}{B_{R1}} = \frac{-\Omega^2/2+3-\cos(k_{x0})(2+\cos(k_{y0}))}{-\sin(k_{x0})\sin(k_{y0})}, \\
D_2 &= \frac{A_{R2}}{B_{R2}} = \frac{-\Omega^2/2+3-\cos(k_{x0})(2+\cos(k_{y2}))}{-\sin(k_{x0})\sin(k_{y2})}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Подставим (61) и (64) в (62), затем разделим результат подстановки на  $\kappa A_I$ . Получим систему линейных уравнений с неизвестными

$$R_1 = \frac{A_{R1}}{A_I}, \quad R_2 = \frac{A_{R2}}{A_I}, \quad \hat{F}_x^0 = \frac{F_x^0}{\kappa A_I}, \quad \hat{F}_y^0 = \frac{F_y^0}{\kappa A_I} \quad (66)$$

вида

$$\begin{aligned} a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \hat{F}_x^0 &= b_1, \\ a_{21}R_1 + a_{22}R_2 + \hat{F}_y^0 &= b_2. \end{aligned} \quad (67)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\cos(k_{x0}) - \frac{\Omega^2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{ik_{y0}}(iD_0 \sin(k_{x0}) - \cos(k_{x0})), \\ a_{12} &= -\cos(k_{x0}) - \frac{\Omega^2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-ik_{y2}}(iD_2 \sin(k_{x0}) - \cos(k_{x0})), \\ a_{21} &= D_0\left(\frac{\Omega^2}{4} - \frac{3}{2} + e^{-ik_{y0}}\right) + \frac{1}{2}e^{-ik_{y0}}(D_0 \cos(k_{x0}) - i \sin(k_{x0})), \\ a_{22} &= D_2\left(\frac{\Omega^2}{4} - \frac{3}{2} + e^{-ik_{y0}}\right) + \frac{1}{2}e^{-ik_{y2}}(D_2 \cos(k_{x0}) - i \sin(k_{x0})), \\ b_1 &= \cos(k_{x0}) + \frac{\Omega^2}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{ik_{y0}}(iD_0 \sin(k_{x0}) + \cos(k_{x0})), \\ b_2 &= D_0\left(\frac{\Omega^2}{4} - \frac{3}{2}e^{ik_{y0}} + \frac{1}{2}e^{ik_{y0}}(D_0 \cos(k_{x0}) + i \sin(k_{x0}))\right). \end{aligned} \quad (68)$$

В случае, когда граница  $y = 0$  является границей раздела двух сред, необходимо еще два уравнения для нахождения коэффициентов  $R_1, R_2$ . Эти уравнения можно получить, удовлетворив условию непрерывности смещений на границе  $y = 0$ .

В случае, когда на границу падает квазипоперечная волна, ее волновые числа находятся из дисперсионного уравнения для квазипоперечной волны, далее находятся волновые числа отраженной квазипродольной волны, и уравнения (67) остаются верны, с соответствующими этому случаю значениями  $k_{x0}, k_{y0}$  и  $k_{y2}$ .

## 4.1 Коэффициенты отражения

Введем энергетический коэффициент отражения как отношение осредненных потоков энергий падающей и отраженной волн

$$RE_1 = \frac{\widehat{\mathcal{P}}_1}{\widehat{\mathcal{P}}_0} = |R_1|^2, \quad RE_2 = \frac{\widehat{\mathcal{P}}_2}{\widehat{\mathcal{P}}_0} = |R_2|^2 \frac{\xi_2}{\xi_0}, \quad (69)$$

где, в соответствии с (54),

$$\frac{\xi_2}{\xi_0} = \frac{\sin(k_{x2} + k_{y2})(D_2^2 + 2D_2 + 1) + \sin(k_{y2} - k_{x2})(D_2^2 - 2D_2 + 1) + 4D_2^2 \sin(k_{y2})}{\sin(k_{x0} + k_{y0})(D_0^2 + 2D_0 + 1) + \sin(k_{y0} - k_{x0})(D_0^2 - 2D_0 + 1) + 4D_0^2 \sin(k_{y0})}. \quad (70)$$

Коэффициент  $RE_2$  имеет смысл только тогда, когда волны соответствующего типа (квазипоперечные в случае падения квазипродольной волны и квазипродольные в противном случае) распространяются. Если же они не распространяются, а затухают при удалении от границы по оси  $y$ , они не дают вклада в энергию отраженных волн.

## 4.2 Отражение от границы

Рассмотрим отражение от свободной, закрепленной или линейно-вязкой границы дискретного полупространства. Эти базовые задачи представляют интерес для понимания особенностей отражения волн на границе дискретной решетки. Кроме того, они позволяют проверить правильность используемого подхода. В случае свободной или закрепленной границы вся энергия, приходящая к границе, должна полностью отражаться от нее. На низких частотах полученные решения должны совпадать с решениями соответствующей задачи для классического континуума.

### 4.2.1 Свободная граница

Когда граница  $y = 0$  свободная,  $F_x^m = 0$ ,  $F_y^m = 0$ . В этом случае можно решить систему уравнений (67) с двумя неизвестными  $R_1$ ,  $R_2$  и входными параметрами  $\Omega$  и  $\theta_0$ .

В данной системе нет диссипации, и вся энергия падающей волны переходит в энергию отраженных волн, так что должно выполняться равенство  $RE_1 + RE_2 = 1$  при всех допустимых  $\theta_0$  и  $\Omega$ . На Рисунке 10 показаны гра-

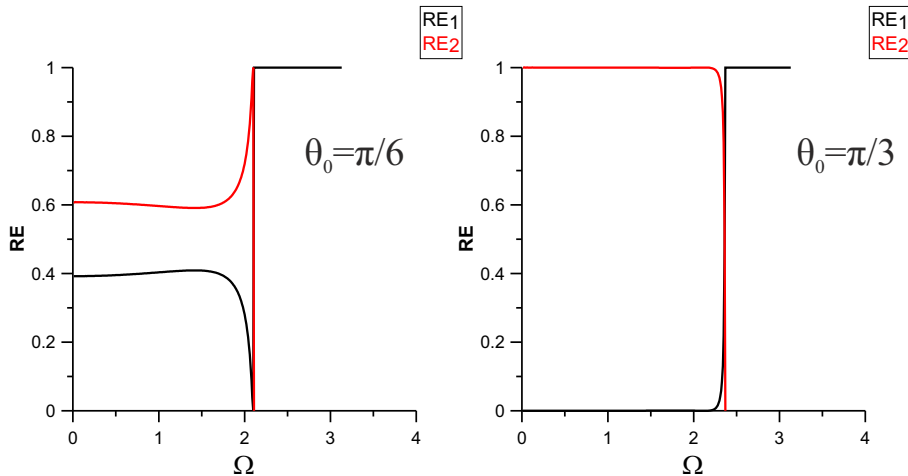


Рис. 10: Отражение от свободной границы.

фики зависимости энергетических коэффициентов отражения для отраженных

волн обоих типов при двух углах падения квазипродольной волны. Как видно из графиков, в сумме эти коэффициенты отражения всегда дают единицу. Красные линии, соответствующие коэффициенту  $RE_2$ , построены для частот, ниже соответствующей частоты отсечки, на которых этот коэффициент имеет смысл. На частоте отсечки отраженных квазипоперечных волн  $RE_2 = 0$ , что находится в соответствии с равенством нулю  $y$ -компоненты групповой скорости в этой точке. На низких частотах, где еще не проявляются дисперсионные свойства решетки, отражение полностью соответствует отражению от свободной границы сплошной среды, описываемой уравнениями классической теории упругости [3]. При угле распространения падающей волны  $\theta_0 = \pi/3$ , как и в случае сплошной среды, наблюдается трансформация волн: падающая квазипродольная волна порождает отраженную квазипоперечную волну, при этом квазипродольная волна начинает отражаться только на тех частотах, на которых квазипоперечные волны не распространяются. Если же на границу падает квазипоперечная волна, аналогичная трансформация, при которой отражается квазипродольная волна, происходит при угле падения  $\theta_0 = \pi/6$ , что также соответствует отражению в классическом континууме. При угле распространения квазипоперечной волны  $\theta_0 = \pi/3$ , а также при  $\theta_0 = \pi/4$  будет, как и в континууме, отражаться только квазипоперечная волна.

#### 4.2.2 Линейно-вязкая граница

Случай отражения от линейно-вязкой границы решетки обратил на себя внимание автора в ходе исследования, когда не производился учет смены знака групповой скорости падающей волны, и в этом случае были получены нефизичные результаты: после частоты, на которой, как выяснилось,  $y$ -компонента групповой скорости падающей волны меняет знак (что случается при углах распространения падающей квазипродольной волны  $\theta_0 > \pi/4$ ), энергия отраженных волн превосходила энергию падающей волны. После учета знаков этот нефизичный эффект был устранен.

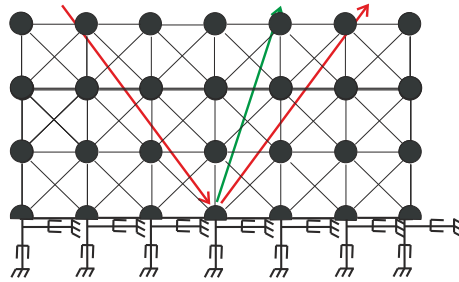


Рис. 11: Линейно-вязкая граница

На Рисунке 11 изображена граница с линейно-вязкими элементами. Действие этих элементов на граничные частицы описывается силами  $F_x^m = \kappa_1^* \partial_t u_x^{(m,0)}$ ,  $F_y^m = \kappa_2^* \partial_t u_y^{(m,0)}$ . Подставим выражения для сил в (62) и придем к следующей системе для определения коэффициентов  $R_1$ ,  $R_2$ :

$$\begin{aligned} (a_{11} + i\chi_1^*)R_1 + (a_{12} + i\chi_1^*)R_2 &= b_1 - i\chi_1^*, \\ (a_{12} - iD_0\chi_2^*)R_1 + (a_{22} - iD_2\chi_2^*)R_2 &= b_2 - iD_0\chi_2^*. \end{aligned} \quad (71)$$

Здесь коэффициенты уравнений определены согласно (68), а  $\chi_{1,2}^* = \omega\kappa_{1,2}^*/\kappa$ . Выразив эти параметры через безразмерную частоту, получим  $\chi_{1,2}^* = \frac{\Omega c_T \kappa_{1,2}^*}{d\kappa}$ .

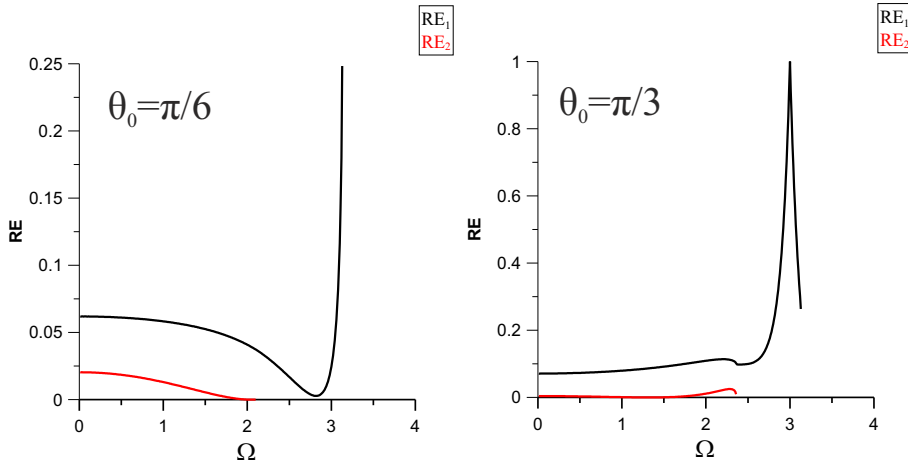


Рис. 12: Отражение от линейно-вязкой границы.

На Рисунке 12 изображены частотные зависимости коэффициентов отражения для двух разных углов распространения падающей квазипродольной волны со значениями  $d = 0.05\text{м}$ ,  $\kappa_1^*/\kappa = \kappa_2^*/\kappa = 10^{-5}$ ,  $c_T = 2000\text{м/с}$ . В этом случае уже не вся энергия отражается обратно в решетку из-за присутствия вязкости на границе. Однако если коэффициент вязкости уменьшать, то значения коэффициентов отражения будет приближаться к соответствующим значениям, полученным для случая свободной границы, а при увеличении коэффициента вязкости — к значениям для случая закрепленной границы.

На правом Рисунке 12 наблюдается уменьшение коэффициента отражения  $RE_1$  на частотах, больших частоты  $\Omega = 3$ . Это может быть связано с изменением знака групповой скорости на этой частоте.

### 4.2.3 Жестко закрепленная граница

Рассмотрим случай, когда граница  $y = 0$  жестко закреплена. Это означает, что на этой границе смещения равны нулю. Это условие приводит к следующей

системе уравнений относительно  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= -1, \\ R_1 D_0 + R_2 D_2 &= D_0. \end{aligned} \tag{72}$$

Решение системы можно записать в виде

$$R_1 = \frac{D_0 + D_2}{D_0 - D_2}, \quad R_2 = -\frac{2D_0}{D_0 - D_2}. \tag{73}$$

Зависимости коэффициентов  $RE_1$  и  $RE_2$  от частоты  $\Omega$  при двух разных углах падения квазипродольной волны изображены на Рисунке 13. Как видно из пока-

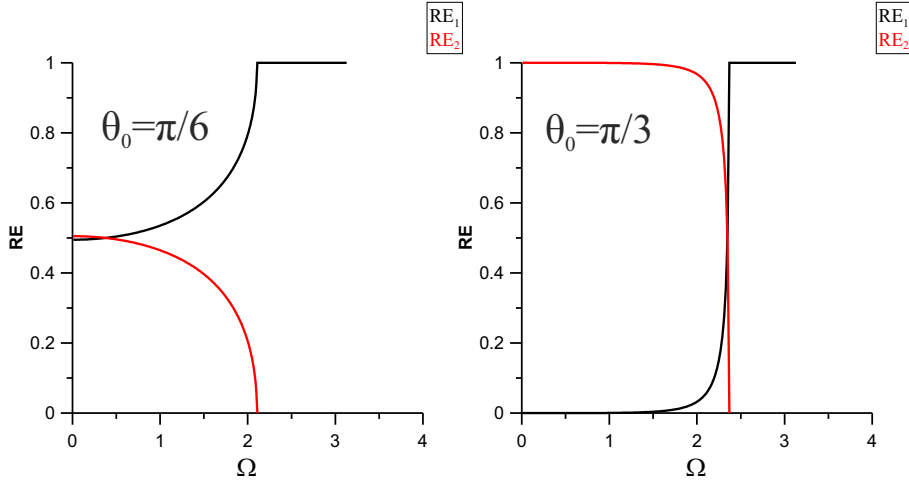


Рис. 13: Отражение от закрепленной границы.

занных зависимостей, условие  $RE_1 + RE_2 = 1$  выполняется. На низких частотах решение совпадает с решением для классического континуума [3].

### 4.3 Отражение от границы раздела двух решеток с разными свойствами.

Рассмотрим два полупространства с общей границей  $y = 0$ , заполненных дискретными решетками с идентичной геометрией, но разными физическими параметрами (см. Рисунок 14). Пусть волна падает на границу из верхнего полупространства. Для того, чтобы решить задачу об отражении в этом случае, граничных условий (62) недостаточно. Требуется удовлетворить условию непрерывности смещений на границе. Для этого необходимо найти отклик нижнего полупространства на воздействия  $F_m^x$ ,  $F_m^y$ , вызываемые падающей со стороны верхнего полупространства волной на границе  $y = 0$ . Пусть масса элементов решетки в нижнем полупространстве  $\tilde{M} = pM$ .



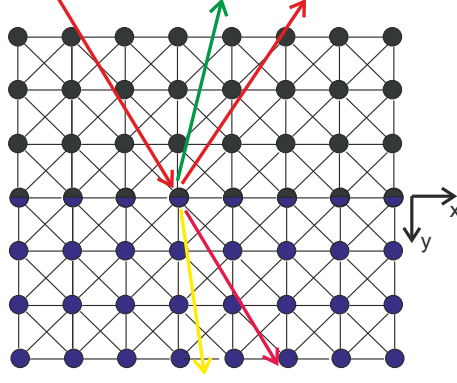


Рис. 14: Два полупространства.

Уравнения движения для внутреннего элемента нижней решетки аналогичны уравнениям (42). Тогда соотношения (65) и (47) будут верны и для волн, распространяющихся в нижней решетке, если в них сделать замену  $\Omega$  на  $\sqrt{\rho}\Omega$ .

Уравнения движения для граничного элемента нижней решетки:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{M}}{2} d_{tt} \tilde{u}_x^{(m,0)} + \frac{\kappa}{4} \left( 6\tilde{u}_x^{(m,0)} - 2\tilde{u}_x^{(m+1,0)} - 2\tilde{u}_x^{(m-1,0)} - \tilde{u}_y^{(m+1,1)} - \right. \\
& \left. - \tilde{u}_x^{(m+1,1)} - \tilde{u}_x^{(m-1,1)} + \tilde{u}_y^{(m-1,1)} \right) - F_x^m = 0, \\
& \frac{\tilde{M}}{2} d_{tt} u_y^{(m,0)} + \frac{\kappa}{4} \left( 6\tilde{u}_y^{(m,0)} - 4\tilde{u}_y^{(m,1)} - \tilde{u}_y^{(m+1,1)} - \tilde{u}_x^{(m+1,1)} - \right. \\
& \left. - \tilde{u}_y^{(m-1,1)} + \tilde{u}_x^{(m-1,1)} \right) - F_y^m = 0.
\end{aligned} \tag{74}$$

Ищем смещения граничных элементов нижней решетки в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_x^{(m,n)} &= e^{-imk_{x0}} \left( A_1 e^{-in\tilde{k}_{y0}} + A_2 e^{-in\tilde{k}_{y2}} \right) e^{i\omega t}, \\
\tilde{u}_y^{(m,n)} &= e^{-imk_{x0}} \left( A_1 \tilde{D}_0 e^{-in\tilde{k}_{y0}} + A_2 \tilde{D}_2 e^{-in\tilde{k}_{y2}} \right) e^{i\omega t}.
\end{aligned} \tag{75}$$

Используем представления (64) и разделим уравнения (74) на  $\kappa$ . Удовлетворение граничным условиям (74) приводит к системе относительно неизвестных  $A_1, A_2$ . Решение системы можно записать в виде

$$A_1 = \frac{-A_{12}F_y^0 + A_{22}F_x^0}{\kappa \text{Det}(A)}, \quad A_2 = \frac{A_{11}F_y^0 - A_{21}F_x^0}{\kappa \text{Det}(A)}, \tag{76}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{4} \left( 6 - 2 \cos(k_{x0})(2 + e^{-i\tilde{k}_{y0}}) - p\Omega^2 + 2i\tilde{D}_0 e^{-i\tilde{k}_{y0}} \sin(k_{x0}) \right), \\
A_{12} &= \frac{1}{4} \left( 6 - 2 \cos(k_{x0})(2 + e^{-i\tilde{k}_{y2}}) - p\Omega^2 + 2i\tilde{D}_2 e^{-i\tilde{k}_{y2}} \sin(k_{x0}) \right), \\
A_{21} &= \frac{\tilde{D}_0}{4} \left( 6 - 2e^{-i\tilde{k}_{y0}}(2 + \cos(k_{x0})) - p\Omega^2 \right) + \frac{i}{2} e^{-i\tilde{k}_{y0}} \sin(k_{x0}), \\
A_{22} &= \frac{\tilde{D}_2}{4} \left( 6 - 2e^{-i\tilde{k}_{y2}}(2 + \cos(k_{x0})) - p\Omega^2 \right) + \frac{i}{2} e^{-i\tilde{k}_{y2}} \sin(k_{x0}), \\
\text{Det}(A) &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.
\end{aligned} \tag{77}$$

Теперь можно найти смещения на границе  $y = 0$ :

$$\tilde{u}_x^{(m,0)} = e^{-imk_{x0}}(A_1 + A_2)e^{i\omega t}, \quad \tilde{u}_y^{(m,0)} = e^{-imk_{x0}}(A_1\tilde{D}_0 + A_2\tilde{D}_2)e^{i\omega t}. \tag{78}$$

Для удовлетворения условию непрерывности смещений на границе  $y = 0$  необходимо выполнение равенств

$$\tilde{u}_x^{(m,0)} = u_x^{(m,0)}, \quad \tilde{u}_y^{(m,0)} = u_y^{(m,0)}, \tag{79}$$

где

$$u_x^{(m,0)} = e^{-imk_{x0}}(A_I + A_{R_1} + A_{R_2})e^{i\omega t}, \quad u_y^{(m,0)} = e^{-imk_{x0}}(A_I D_0 - A_{R_1} D_0 - A_{R_2} D_2)e^{i\omega t}. \tag{80}$$

Амплитуды  $A_1 + A_2$  и  $A_1\tilde{D}_0 + A_2\tilde{D}_2$  представим в виде

$$A_1 + A_2 = C_1 \frac{F_x^0}{\kappa} + C_2 \frac{F_y^0}{\kappa}, \quad A_1\tilde{D}_0 + A_2\tilde{D}_2 = C_3 \frac{F_x^0}{\kappa} + C_4 \frac{F_y^0}{\kappa}, \tag{81}$$

где

$$C_1 = \frac{A_{22} - A_{21}}{\text{Det}(A)}, \quad C_2 = \frac{A_{11} - A_{12}}{\text{Det}(A)}, \quad C_3 = \frac{A_{22}\tilde{D}_0 - A_{21}\tilde{D}_2}{\text{Det}(A)}, \quad C_4 = \frac{A_{11}\tilde{D}_2 - A_{12}\tilde{D}_0}{\text{Det}(A)}. \tag{82}$$

Разделим выражения для смещений (78) и (80) на  $A_I$ . Тогда удовлетворение условиям (79) приведет к системе линейных уравнений относительно неизвестных  $R_1, R_2, \hat{F}_x^0, \hat{F}_y^0$ :

$$\begin{aligned}
R_1 + R_2 - C_1 \hat{F}_x^0 - C_2 \hat{F}_y^0 &= -1, \\
R_1 D_0 + R_2 D_2 + C_3 \hat{F}_x^0 + C_4 \hat{F}_y^0 &= D_0.
\end{aligned} \tag{83}$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (67) составляют систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:  $R_1, R_2, \hat{F}_x^0, \hat{F}_y^0$ . Решив эту систему, найдем коэффициенты отражения  $RE_1, RE_2$ . На Рисунке 15 изображены частотные зависимости найденных коэффициентов отражения при угле распространения

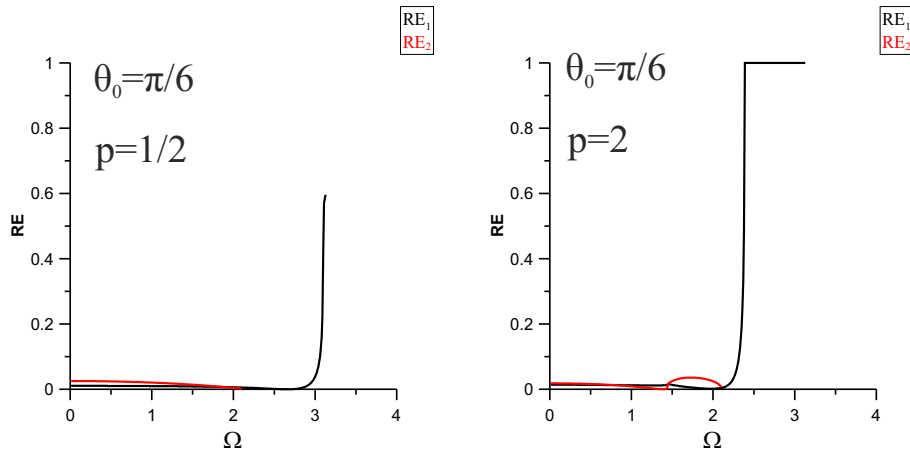


Рис. 15: Коэффициенты отражения от границы с дискретной решеткой с другими свойствами

падающей квазипродольной волны  $\theta_0 = \pi/6$  для разных значений  $p$ . При  $p < 1$  отражение небольшое практически на всем диапазоне частот и увеличивается при приближении к частоте отсечки верхней решетки. Частота отсечки нижней решетки больше частоты отсечки верхней, поэтому на всех рассматриваемых частотах часть энергии проходит во вторую решетку, и общая энергия отраженных волн уже становится меньше энергии падающей волны. При  $p > 1$ , то есть когда масса частицы в нижней решетке больше массы частицы исходной решетки, распространение волн в нижней решетке происходит на меньшем диапазоне частот, и, начиная с некоторой частоты, падающая волна полностью отражается, так как она уже не может проходить в нижнюю решетку.

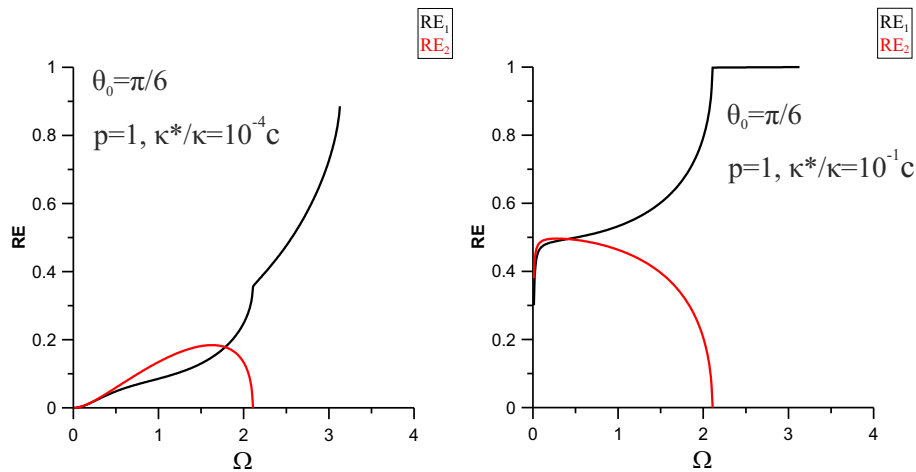


Рис. 16: Коэффициенты отражения от границы с дискретной решеткой с линейно-вязкими элементами

Рассмотрим нижнюю решетку с такими же параметрами, как и верхняя, но добавим к пружинам, соединяющим частицы в нижней решетке, линейно-вязкие элементы с коэффициентом  $\kappa^*$ , соединенные с пружинами параллельно. Результаты исследования такой системы показали, что при стремлении значения параметра вязкости к нулю нет отражения, вся энергия входящих к границе волн проходит в нижнюю решетку, что является ожидаемым результатом, так как в этом случае верхняя и нижняя решетка неразличимы. При увеличении параметра вязкости значения коэффициентов отражения приближаются к значениям, полученным для случая отражения от закрепленной границы.

На Рисунке 16 изображены зависимости коэффициентов отражения при двух разных значениях параметра вязкости. При небольшом значении параметра часть энергии может проходить через границу (см. левый график на Рис. 16). При больших значениях параметра вязкости на всех частотах, кроме самых низких, наблюдается полное отражение энергии падающей волны, как и в случае закрепленной границы.

#### 4.4 Заключение

В данной Главе были рассмотрены задачи об отражении плоских гармонических волн от границы квадратной решетки. Получены зависимости коэффициентов отражения по энергии от частоты и угла распространения падающей на границу волны. Отражение волн от свободной или закрепленной границы решетки на низких частотах полностью соответствует отражению от свободной или закрепленной границы классического континуума, что и должно выполняться, так как учитывается соответствие параметров решетки и континуума на низких частотах (в длинноволновом приближении). Также исследовано отражение от линейно-вязкой границы и от границы с другим дискретным полупространством при различных параметрах.

## 5 Отражение от границы раздела решетки и классического континуума

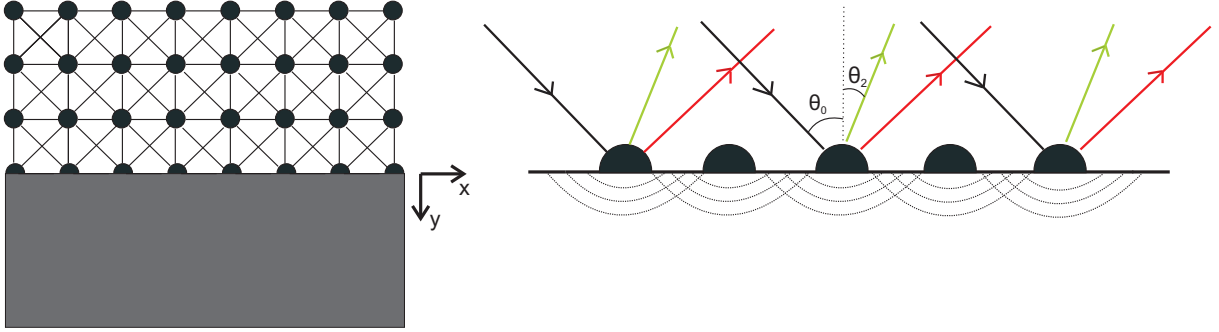


Рис. 17: Дискретная и континуальная области (слева); отражение и прохождение волн на границе (справа).

Схематическое изображение рассматриваемой модели представлено на Рисунке 17. Верхняя часть полупространства  $y < 0$  заполнена квадратной решеткой. Нижняя часть  $y > 0$  моделируется с помощью уравнений для классического континуума.

### 5.1 Смещения в континууме, вызываемые падающей волной

Как и в случае сшивания дискретных полупространств, рассмотренного в предыдущей главе, необходимо найти отклик нижнего полупространства на волну, падающую на границу раздела сред со стороны решетки.

Уравнения движения классического упругого континуума можно представить в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} (\partial_{xx} u_x + \partial_{yy} u_x) + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) (\partial_{xx} u_x + \partial_{yx} u_y) &= \rho \partial_{tt} u_x, \\ \tilde{\mu} (\partial_{xx} u_y + \partial_{yy} u_y) + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) (\partial_{xy} u_x + \partial_{yy} u_y) &= \rho \partial_{tt} u_y, \end{aligned} \quad (84)$$

где  $u_x$  и  $u_y$  — компоненты вектора смещений в континууме по  $x$  и по  $y$ . Введем малую вязкость  $\chi$ :  $\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \chi \partial_t)$ ,  $\tilde{\mu} = \mu(1 + \chi \partial_t)$ .  $\lambda$  и  $\mu$  — это коэффициенты Ляме, и  $\lambda = \mu$ , как следует из соотношений (40). Необходимость введения малой вязкости станет ясна в ходе отыскания отклика континуума.

Количество точек контакта между дискретной решеткой и континуумом на границе  $y = 0$  бесконечно в следствие бесконечной протяженности границы. В каждой точке силы  $F_x^j, F_y^j$  (64) действуют на континуум со стороны решетки.

Предположим, что зона контакта между каждой граничной массой в решетке и континуумом конечна, чтобы избежать сингулярностей в решении для классического континуума. Для этой цели вводится параметр  $b$  — половина ширины контакта между континуумом и одной частицей решетки на границе. Выберем граничные условия таким образом, чтобы контактная сила не зависела от параметра  $b$ :

$$\int_{-b}^b \sigma dx = \frac{F}{h}. \quad (85)$$

Теперь можно сформулировать динамические граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{F_y^j}{2bh} H(b - |x - jd|), \\ \sigma_{yx}(x, 0) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{F_x^j}{2bh} H(b - |x - jd|), \end{aligned} \quad (86)$$

где  $\sigma_{yy}(x, y, t)$  — нормальное напряжение,  $\sigma_{yx}(x, y, t)$  — тангенциальное напряжение,  $H(x)$  — функция Хевисайда (выбрана для простоты),  $j$  — целое число.

Также предполагаем соответствие между напряжениями  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{yx}$  и силами  $F_y^j$ ,  $F_x^j$  в длинноволновом приближении. Выразим силы  $F_y^j$ ,  $F_x^j$  из уравнений (62) и континуализируем полученные выражения, подставив в них континуализированные смещения (37). Силы  $F_y^j$ ,  $F_x^j$  можно выразить следующим образом:

$$F_x^j = \frac{1}{2} \kappa d \partial_y u_x + \frac{1}{2} \kappa d \partial_x u_y, \quad F_y^j = \frac{3}{2} \kappa d \partial_y u_y + \frac{1}{2} \kappa d \partial_x u_x. \quad (87)$$

Напряжения в классическом континууме выражаются через смещения следующим образом [3]:

$$\sigma_{yx} = \mu (\partial_y u_x + \partial_x u_y), \quad \sigma_{yy} = \lambda \partial_x u_x + (\lambda + 2\mu) \partial_y u_y. \quad (88)$$

При выбранном распределении сил по площади контакта должно выполняться соответствие  $\sigma_{yy} = F_y^j / 2bh$ ,  $\sigma_{yx} = F_x^j / 2bh$ . С учетом соотношений между параметрами континуума и решетки в длинноволновом приближении (41) можно сделать вывод, что для удовлетворения поставленным условиям необходимо выполнение равенства  $b = d/2$ .

Представим смещения в континууме через потенциалы  $\Phi$ ,  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} u_x(x, y, t) &= \partial_x \Phi(x, y, t) + \partial_y \Psi(x, y, t), \\ u_y(x, y, t) &= \partial_y \Phi(x, y, t) - \partial_x \Psi(x, y, t). \end{aligned} \quad (89)$$

Тогда напряжения  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{yx}$  можно связать с потенциалами смещений  $\Phi$ ,  $\Psi$  следующим образом [3]:

$$\sigma_{yy} = \tilde{\lambda} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) \Phi + 2\tilde{\mu} (\partial_{yy} \Phi - \partial_{yx} \Psi), \quad \sigma_{yx} = \tilde{\mu} (2\partial_{xy} \Phi + \partial_{yy} \Psi - \partial_{xx} \Psi). \quad (90)$$

Представление (89) удовлетворяет уравнениям движения (84), если

$$\partial_{tt}\Phi - (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})/\rho(\partial_{xx} + \partial_{yy})\Phi = 0, \quad \partial_{tt}\Psi - \tilde{\mu}/\rho(\partial_{xx} + \partial_{yy})\Psi = 0. \quad (91)$$

Решения уравнений (91) будем искать в виде

$$\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y)e^{i\omega t}, \quad \Psi(x, y, t) = \psi(x, y)e^{i\omega t}. \quad (92)$$

Подставим эти выражения в (91) и применим к результату подстановки экспоненциальное преобразование Фурье по пространственной координате  $x$ , которое определено следующим образом:

$$\varphi^*(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\varphi(x, y)dx, \quad \psi^*(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\psi(x, y)dx. \quad (93)$$

Применим также преобразование Фурье к граничным условиям (86), подставив в их левую часть выражения (90). В результате придем к уравнениям

$$\partial_{yy}\varphi^* - \zeta_L^2\varphi^* = 0, \quad \partial_{yy}\psi^* - \zeta_T^2\psi^* = 0 \quad (94)$$

с граничными условиями при  $y = 0$ :

$$(1 + i\chi^*)((\lambda + 2\mu)\partial_{yy}\varphi^* - \lambda k^2\varphi^* + 2\mu ik\partial_y\psi^*) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_y^0 e^{-ijkx_0} \frac{e^{ik(jd+b)} - e^{ik(jd-b)}}{idhk},$$

$$(1 + i\chi^*)\mu(\partial_{yy}\psi^* + k^2\psi^* - 2ik\partial_y\varphi^*) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_x^0 e^{-ijkx_0} \frac{e^{ik(jd+b)} - e^{ik(jd-b)}}{idhk}, \quad (95)$$

где

$$\zeta_L = \sqrt{k^2 - \omega^2/\tilde{c}_L^2}, \quad \zeta_T = \sqrt{k^2 - \omega^2/\tilde{c}_T^2}, \quad (96)$$

$$\tilde{c}_L^2 = c_L^2(1 + i\chi^*), \quad \tilde{c}_T^2 = c_T^2(1 + i\chi^*), \quad \chi^* = \omega\chi,$$

$c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  и  $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорости распространения продольных и поперечных волн в классическом континууме, соответственно.

Общее решение уравнений (94), принимая во внимание, что функции  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  должны стремиться к нулю при стремлении  $y$  к бесконечности, можно искать в виде

$$\varphi^*(k, y) = A(k, \omega)\exp(-\zeta_L y), \quad \psi^*(k, y) = B(k, \omega)\exp(-\zeta_T y) \quad (97)$$

при условии, что действительные части радикалов  $\zeta_L$ ,  $\zeta_T$  положительны.

Найдем функции  $A(k, \omega)$  и  $B(k, \omega)$ , которые удовлетворяют граничным условиям (95). Для этого подставим решения (97) в граничные условия (95) и получим систему из двух алгебраических уравнения для нахождения неизвестных

А и В. Решением этой системы являются выражения

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{\mu ikdh(1+i\chi^*)} \frac{\gamma F_y^0 + 2ik\zeta_T F_x^0}{\gamma^2 - 4k^2\zeta_T\zeta_L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ik_x0j} (e^{ik(jd+b)} - e^{ik(jd-b)}), \\ B &= -\frac{1}{\mu ikdh(1+i\chi^*)} \frac{\gamma F_x^0 - 2ik\zeta_L F_y^0}{\gamma^2 - 4k^2\zeta_T\zeta_L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ik_x0j} (e^{ik(jd+b)} - e^{ik(jd-b)}). \end{aligned} \quad (98)$$

Подставим (92) в (89) и применим преобразование Фурье к результату подстановки. Получим связь между преобразованиями Фурье от смещений  $u_x$ ,  $u_y$  и найденными выражениями для  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$ :

$$u_x^* = (-ik\varphi^* + \partial_y\psi^*) e^{i\omega t}, \quad u_y^* = (ik\psi^* + \partial_y\varphi^*) e^{i\omega t}. \quad (99)$$

Для нахождения смещений в континууме применим обратное преобразование Фурье:

$$u_x(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u_x^*(k, y, t) dk, \quad u_y(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u_y^*(k, y, t) dk, \quad (100)$$

где

$$\begin{aligned} u_x^* &= (F_x^0\zeta_T(2k^2e^{-\zeta_L y} - \gamma e^{-\zeta_T y}) + F_y^0 ik(2\zeta_T\zeta_L e^{-\zeta_T y} - \gamma e^{-\zeta_L y})) S, \\ u_y^* &= (F_x^0 ik(\gamma e^{-\zeta_L y} - 2\zeta_T\zeta_L e^{-\zeta_T y}) + F_y^0\zeta_L(2k^2e^{-\zeta_T y} - \gamma e^{-\zeta_L y})) S, \\ S &= \frac{e^{i\omega t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ikjd} e^{-ik_x0j} (e^{-ikb} - e^{ikb})}{idhk\mu(1+i\chi^*)\Delta}, \quad \gamma = 2k^2 - \omega^2/\tilde{c}_T^2, \quad \Delta = \gamma^2 - 4k^2\zeta_T\zeta_L. \end{aligned} \quad (101)$$

Таким образом, смещения в континууме, вызываемые поверхностными напряжениями, соответствующими падающей волне, найдены в виде интегралов.

## 5.2 Удовлетворение условию непрерывности смещений на границе

Для избежания сингулярностей в решении для континуума зона контакта между континуумом и частицей решетки была распределена по конечной области. Это приводит к неоднозначности постановки граничных условий. Предположим, что смещения масс на границе решетки равны смещению континуума в точках контакта:

$$u_x^{(m,0)}(t) = u_x(md, 0, t), \quad u_y^{(m,0)}(t) = u_y(md, 0, t). \quad (102)$$

Следует обратить внимание на то, что смещения в решетке  $u_x^{(m,0,t)}$ ,  $u_y^{(m,0,t)}$  можно также приравнять к смещениям континуума  $u_x(md, 0, t)$ ,  $u_y(md, 0, t)$ , осредненным по ширине контакта  $2b$ .



Подставим смещения в решетке (80) и найденные в интегральной форме смещения в континууме в граничные условия (102). Тогда получим уравнения

$$A^{(f)} e^{-ik_{x0}m} = \int_{-\infty}^{\infty} F^{(f)} e^{-ikmd} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{ikjd} e^{-ik_{x0}j} dk, \quad f = 1, 2, \quad (103)$$

где

$$\begin{aligned} A^1 &= A_I + A_{R_1} + A_{R_2}, & A^2 &= A_I D_0 - A_L D_0 - A_T D_2, \\ F^1(k, \omega) &= \frac{(2k^2 - \gamma)\zeta_T F_x^0 + ik(2\zeta_T \zeta_L - \gamma)F_y^0}{2\pi i k d h \mu (1 + i\chi^*) \Delta} (e^{-ikb} - e^{ikb}), \\ F^2(k, \omega) &= \frac{-ik(2\zeta_T \zeta_L - \gamma)F_x^0 + (2k^2 - \gamma)\zeta_L F_y^0}{2\pi i k d h \mu (1 + i\chi^*) \Delta} (e^{-ikb} - e^{ikb}). \end{aligned} \quad (104)$$

Умножим левую и правую части уравнений (103) на  $e^{ik_{x0}m}$  и введем новый индекс суммирования  $l = j - m$ . Тогда уравнения (103) можно переписать в следующем виде:

$$A^{(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} F^{(f)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(kd - k_{x0})} dk. \quad (105)$$

Эти уравнения разделим на  $A_I$ , используем соотношение между параметрами континуума и решетки  $\kappa = 2\mu h$  и введем безразмерную переменную интегрирования  $K = kd$  и безразмерный параметр  $b_{dl} = b/d$ . После этого уравнения (105) примут вид

$$\begin{aligned} 1 + R_1 + R_2 &= C_1 \hat{F}_x^0 + C_2 \hat{F}_y^0, \\ D_0 - R_1 D_0 - R_2 D_2 &= C_3 \hat{F}_x^0 + C_4 \hat{F}_y^0, \end{aligned} \quad (106)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\pi i (1 + i\chi^*)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-il k_{x0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K, \Omega)}{K \Delta} e^{ilK} (e^{-iK b_{dl}} - e^{iK b_{dl}}) dK, \\ C_2 &= \frac{1}{\pi i (1 + i\chi^*)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-il k_{x0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(K, \Omega)}{\Delta} e^{ilK} (e^{-iK b_{dl}} - e^{iK b_{dl}}) dK, \\ C_4 &= \frac{1}{\pi i (1 + i\chi^*)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-il k_{x0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_4(K, \Omega)}{K \Delta} e^{ilK} (e^{-iK b_{dl}} - e^{iK b_{dl}}) dK, \\ C_3 &= -C_2. \end{aligned} \quad (107)$$

Здесь  $F_1, F_2, F_4$  — симметричные по  $K$  функции:

$$\begin{aligned} F_1 &= \beta_T^2 \sqrt{K^2 - \beta_T^2}, & F_2 &= i(2\sqrt{K^2 - \beta_T^2} \sqrt{K^2 - \beta_L^2} - 2K^2 + \beta_T^2), \\ F_4 &= \beta_T^2 \sqrt{K^2 - \beta_L^2}, & \beta_L^2 &= \Omega^2 c_T^2 / c_L^2 / (1 + i\chi^*), & \beta_T^2 &= \Omega^2 / (1 + i\chi^*), \\ \Delta &= (2K^2 - \beta_T^2)^2 - 4K^2 \sqrt{K^2 - \beta_T^2} \sqrt{K^2 - \beta_L^2}. \end{aligned} \quad (108)$$

Прямое вычисление сумм интегралов (107) требует очень много времени, так как необходимо учитывать много членов суммирования (порядка нескольких тысяч). Для избежания временных затрат суммы из (107) следует брать аналитически. Проведем ряд преобразований над коэффициентами (107).

Перепишем коэффициент  $C_1$  в виде

$$C_1 = \frac{1}{\pi i(1 + i\chi^*)}(C_{11} + C_{12}), \quad \text{где}$$

$$C_{11} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilk_{x0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} e^{iK} e^{-iKbal}, \quad C_{12} = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilk_{x0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} e^{iK} e^{iKbal}.$$
(109)

В  $C_{11}$  сделаем замену  $l$  на  $-l$  и  $K$  на  $-K$ :

$$C_{11} = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilk_{x0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} e^{iK} e^{iKbal} dK.$$
(110)

Теперь

$$C_1 = - \frac{1}{\pi i(1 + i\chi^*)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (e^{ilk_{x0}} + e^{-ilk_{x0}}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K} e^{iK(bal+l)} dK.$$
(111)

Этот результат можно переписать в виде  $C_1 = -1/(\pi i(1 + i\chi^*))(C_1^1 + C_1^2 + C_{10})$ , где

$$C_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} (e^{iKbal} - e^{-iKbal}) dK, \quad C_1^1 = \sum_{l=-\infty}^{-1} (e^{ilq} + e^{-ilq}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} e^{iK(bal+l)} dK,$$

$$C_1^2 = \sum_{l=1}^{\infty} (e^{ilq} + e^{-ilq}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} e^{iK(bal+l)} dK.$$
(112)

В  $C_1^1$  сделаем замену  $l$  на  $-l$ . Тогда получим окончательное выражение для  $C_1$ , с которым будем работать:

$$C_1 = - \frac{1}{\pi i(1 + i\chi^*)} \left( \sum_{l=1}^{\infty} (e^{ilq} + e^{-ilq}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} (e^{iK(bal-l)} + e^{iK(bal+l)}) dK + C_{10} \right).$$
(113)

Применим контурное интегрирование для вычисления интегралов из (113). Посчитаем сначала интеграл

$$J_1^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} e^{iK(bal+l)} dK.$$
(114)

Подынтегральная функция из (114) многозначна из-за присутствия радикалов  $\zeta_T$ ,  $\zeta_L$  и обращается в бесконечность в так называемых полюсах Рэлея, которые являются простыми корнями уравнения  $\Delta(K) = 0$ . Это уравнение в случае

нулевой вязкости было исследовано в [3]. У него есть два вещественных корня:  $K = \pm \omega d / c_R = \Omega c_T / c_R$ , где  $c_R$  — скорость распространения поверхностных волн Рэлея. С ненулевой вязкостью корни перемещаются в верхнюю и нижнюю полуплоскости:  $K = \pm \beta_R$ ,  $\beta_R = \Omega c_T / c_R / (1 + i\chi^*)$ . Точки ветвления  $K = \pm \beta_L$  и  $K = \pm \beta_T$ . Интеграл  $J_1^1$  интегрируем по верхней полуплоскости. Контур интегрирования и положение точек сингулярности в верхней полуплоскости изображены на Рисунке 18.

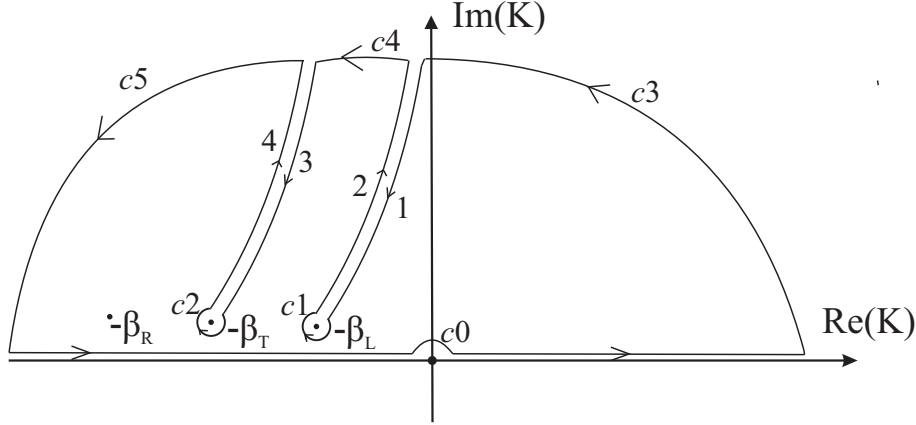


Рис. 18: Контур интегрирования в верхней полуплоскости

На разрезе 1–2  $\text{Re}(\zeta_L) = 0$ , а на разрезе 3–4  $\text{Re}(\zeta_T) = 0$ . Отсюда следует, что на этих разрезах мнимая часть соответствующего подкоренного выражения равна нулю, а действительная часть меньше нуля. Первое условие можно записать в виде  $2\text{Im}(K)\text{Re}K = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\alpha_1 = \text{Im}(\beta_L^2) = -\Omega^2 \chi^* c_T^2 / c_L^2 / (1 + \chi^{*2})$ ,  $\alpha_2 = \text{Im}(\beta_T^2) = -\Omega^2 \chi^* / (1 + \chi^{*2})$ . Общее выражения для  $K$  на контурах 1–4 можно записать в виде  $K = a + i\alpha/2/a$ , где  $a = \text{Re}(K)$ ,  $\alpha = \alpha_1$  или  $\alpha_2$  имеют отрицательные значения. Таким образом,  $|\exp(i\ell K)| = |\exp(-\alpha/2/a)| < 1$ .

Интегрирование по круговым контурам  $c1$ ,  $c2$  вокруг точек ветвления обращается в ноль при стремлении их радиуса к нулю. Интегрирование по круговым контурам  $c3$ ,  $c4$ ,  $c5$  обращается в ноль при  $|K| \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$\oint f(K) dK = \left( \int_{c0} + \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 + \int_{-\infty}^{\infty} \right) f(K) dK = 2\pi i \text{Res} [f(K), K = -\beta_R] \quad (115)$$

где  $\int_{-\infty}^{\infty}$  следует понимать в смысле главного значения по Коши,  $f(K)$  — подынтегральная функция интеграла  $J_1^1$  (114). Подробное вычисление интегралов приведено в Приложении А.

Контур интегрирования для интеграла

$$J_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K} e^{iK(b_{dl}-l)} dK \quad (116)$$

находится в нижней полуплоскости. Все вычисления проводятся аналогично вычислениям интеграла  $J_1^1$ . Интегрирование по круговому контуру  $c0$  дает такой же результат, что и для интеграла  $J_1^1$ , но с обратным знаком, поэтому общий вклад от этого полюса в  $J_1 + J_2$  равен нулю, что согласуется с тем фактом, что исходный интеграл не имеет особенности в нуле.

Интеграл  $C_{10}$  перепишем в виде

$$C_{10} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(K)}{K\Delta} (e^{iKb_{dl}} - 1) dK. \quad (117)$$

Интегрирование проводим по верхней полуплоскости.

Таким образом, коэффициент  $C_1$  можно представить в виде (см. Приложение А)

$$C_1 = -\frac{1}{\pi i(1+i\chi^*)} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{ilq} + e^{-ilq}) \left( 2\pi i \tilde{R}(K) e^{-i\beta_R l} + \int_{-\infty}^{-L} \tilde{f}_1(K) e^{-iKl} dK K + \int_{-\infty}^{-T} \tilde{f}_2(K) e^{-iKl} dK K + C_{10} \right). \quad (118)$$

Внесем суммы под интеграл и посчитаем их как суммы геометрических прогрессий:

$$\sum_{l=1}^{\infty} (e^{ilk_{x0}} + e^{-ilk_{x0}}) e^{ilK} = \frac{e^{i(k_{x0}+K)}}{1 - e^{i(k_{x0}+K)}} + \frac{e^{i(K-k_{x0})}}{1 - e^{i(K-k_{x0})}}. \quad (119)$$

После этого интегралы уже с конечными пределами и без суммирований вычислялись на языке Fortran 90 с помощью пакетов функций из библиотеки IMSL.

Введение малой вязкости было необходимо для обеспечения сходимости геометрических прогрессий в (119) для последующего применения формулы для суммы геометрической прогрессии.

Коэффициенты  $C_1$  и  $C_4$  имеют одинаковую структуру, поэтому вычисление коэффициента  $C_4$  проводится аналогично вычислению коэффициента  $C_1$ .

Применив для вычисления коэффициента  $C_2$  преобразования, аналогичные преобразованиям (109)–(113), получим следующее представление:

$$C_2 = -\frac{1}{\pi i(1+i\chi^*)} \sum_{l=1}^{\infty} (e^{ilk_{x0}} - e^{-ilk_{x0}}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(K)}{\Delta} (e^{iK(b_{dl}+l)} - e^{iK(b_{dl}-l)}) dK. \quad (120)$$

Контуры интегрирования для интегралов

$$J_2^1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(K)}{\Delta} e^{iK(b_{at}+l)} dK, \quad J_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(K)}{\Delta} e^{iK(b_{at}-l)} dK \quad (121)$$

такие же, как и контуры для  $J_1^1, J_1^2$ , с той лишь разницей, что у  $J_2^1, J_2^2$  нет полюса в нуле. Вычисления аналогичны вычислениям  $C_1$ .

Для проверки полученных результатов значения коэффициентов  $C_1, C_2, C_4$  на некоторых частотах сравнивались со значениями, полученными без применения контурного интегрирования, а с помощью прямого суммирования и вычисления интегралов, что, как уже упоминалось выше, требует значительных временных затрат.

### 5.3 Коэффициенты отражения

Уравнения (67) и (106) составляют систему из четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестным  $R_1, R_2, \hat{F}_x^0, \hat{F}_y^0$ . Решение этой системы позволяет найти энергетические коэффициенты отражения  $RE_1$  и  $RE_2$  (69).

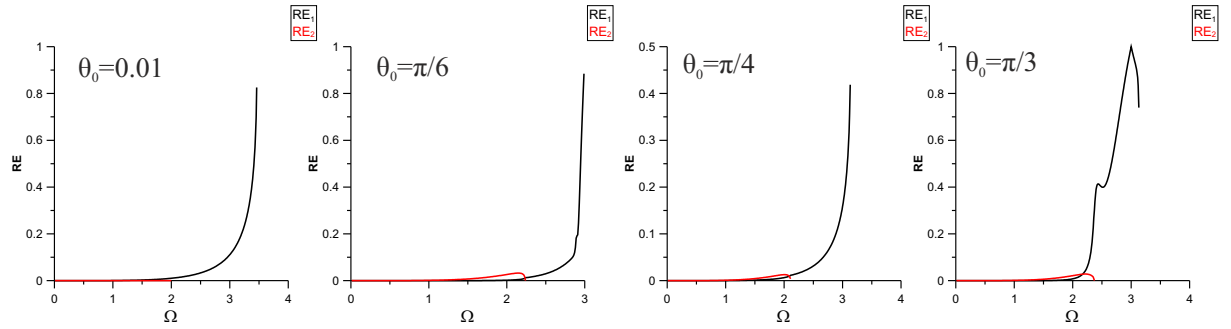


Рис. 19: Коэффициенты отражения от границы дискретной решетки и континуума.

На Рисунке 19 представлены графики частотных зависимостей коэффициентов отражения  $RE_1$  и  $RE_2$  для разных углов распространения  $\theta_0$  падающей квазипродольной волны. Коэффициент  $RE_1$  соответствует отраженной квазипродольной волне, а  $RE_2$  — отраженной квазипоперечной. Для вычислений взяты параметры континуума  $\lambda = \mu = 9.2\text{ГПа}$ , параметр вязкости  $\chi = 10^3/\lambda$  с. При почти нормальном падении квазипродольной волны на границу квазипоперечная волна практически не отражается, что отображено на крайнем левом графике Рисунка 19. Коэффициенты отражения практически равны нулю на низких частотах, независимо от угла распространения падающей волны, а на частотах, близких к частоте отсечки для квазипродольных волн, коэффициент

отражения квазипродольной волны доходит до значения 1 при некоторых углах  $\theta_0$ . Уменьшение коэффициента отражения квазипродольной волны на частотах, больших частоты  $\Omega = 3$  при  $\theta_0 = \pi/3$  связано, возможно, как и в случае отражения от линейно-вязкой границы (см. Рисунок 11), с изменением знака  $y$ -компоненты групповой скорости падающей волны на этих частотах.

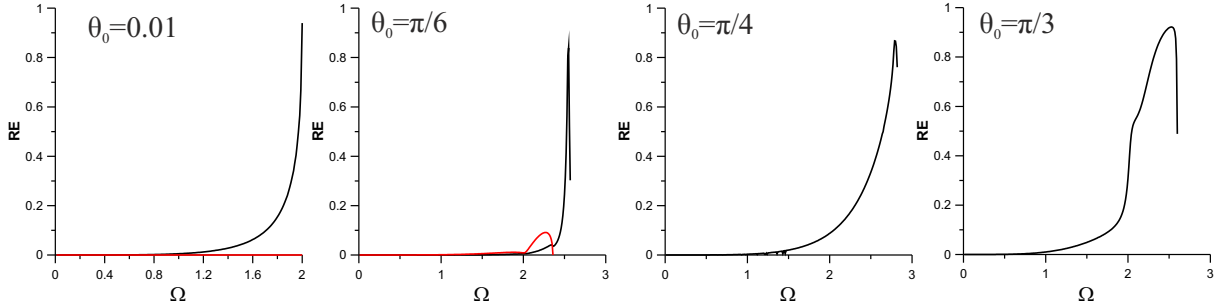


Рис. 20: Коэффициенты отражения от границы раздела квадратной решетки и континуума.

На Рисунке 20 представлены графики частотных зависимостей коэффициентов отражения  $RE_1$  и  $RE_2$  для разных углов распространения  $\theta_0$  падающей квазиперечной волны. Коэффициенту отражения квазиперечной волны  $RE_1$  соответствует черная линия, а коэффициенту отражения квазипродольной волны  $RE_2$  — красная. При почти нормальном падении квазиперечной волны на границу квазипродольная волна практически не отражается, что отображено на крайнем левом графике Рисунка 20. Коэффициенты отражения также практически равны нулю на низких частотах, независимо от угла распространения падающей волны, а на частотах, близких к частоте отсечки для квазиперечных волн, достигают значений, близких к единице, при некоторых углах  $\theta_0$ . Здесь на частоте  $\Omega = 2.55$   $y$ -компонента групповой скорости падающей волны меняет знак при угле  $\theta_0 = \pi/6$ , а при угле  $\theta_0 = \pi/3$   $x$ -компонента меняет знак.

## 5.4 Заключение

В данной Главе рассмотрено отражение плоских гармонических волн от плоской бесконечной границы квадратной решетки и классического континуума. Предложены граничные условия, устраняющие сингулярности, возникающие при точечном воздействии решетки на континуум. Найден отклик континуума на воздействия падающей волны со стороны решетки в виде бесконечных сумм интегралов. Интегралы на границе вычисляются методом контурного интегрирования, а суммы, благодаря введению малой вязкости в континуум, берутся

аналитически. Энергетические коэффициенты отражения волн, падающих на границу со стороны решетки, найдены в зависимости от частоты падающей волны и угла ее распространения. Из полученных результатов видно, что классический континуум может обеспечить безотражательное прохождение низкочастотных волн. Однако, более высокочастотные волны отражаются, и на частотах, близких к пороговой частоте решетки, практически вся энергия падающей волны отражается обратно в решетку.

## 6 Отражение от границы раздела решетки и градиентного континуума

### 6.1 Уравнения движения и их решение

Результаты исследования одномерного случая показали, что градиентный континуум, не содержащий в уравнениях движения производных от смещений по координате четвертого порядка, способен обеспечить безотражательную границу. Поэтому рассмотрим такой континуум и при сшивании с решеткой. Для этого добавим новые члены к уравнениям движения для классического континуума (84) согласно [2], так что уравнения движения рассматриваемого градиентного континуума примут вид

$$\rho\ddot{u}_i - \rho d^2 A \ddot{u}_{i,jj} = \tilde{\mu}(u_{i,jj} + 2u_{j,ij}), \quad (122)$$

где индексы  $i, j$  соответствуют координатам  $x$  или  $y$  и ведется суммирование по повторяющемуся индексу  $j$ .  $\ddot{u}$  обозначает вторую производную по времени от смещения. Введем малую вязкость  $\tilde{\mu} = \mu(1 + \chi\partial_t)$ , как и в классическом континууме.

Необходимо решить задачу о нахождении отклика континуума на падающую из решетки волну. Граничные условия в этом случае будут такими же, что и на границе с классическим континуумом, так как в данном случае также необходимо вводить конечную зону контакта для избежания сингулярностей в решении. Для удовлетворения граничным условиям понадобится связь напряжений с перемещениями:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\mu}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,k}\delta_{i,j}) + \frac{1}{2}\rho d^2 A \ddot{u}_{i,j}. \quad (123)$$

Здесь ведется суммирование по повторяющемуся индексу  $k$ , который также соответствует координатам  $x$  или  $y$ . В качестве параметра длины в континууме взят период решетки  $d$ ,  $A$  — параметр континуума, входящий в уравнения движения (122). Представляя смещения  $u_x(x, y, t)$ ,  $u_y(x, y, t)$  через потенциалы, как это было сделано в (89), придем к следующим уравнениям:

$$\ddot{\varphi} - 3\tilde{\mu}/\varphi_{,ii} - d^2 A \ddot{\varphi}_{,jj} = 0, \quad \ddot{\psi} - \tilde{\mu}/\rho\psi_{,ii} - d^2 A \ddot{\psi}_{,jj} = 0. \quad (124)$$

Здесь ведется суммирование по повторяющимся индексам  $i, j$ . После перехода в частотную область и применения преобразования Фурье (93) придем к уравнениям

$$\varphi_{,yy}^* - R_L^2 \varphi = 0, \quad \psi_{,yy}^* - R_T^2 \psi = 0 \quad (125)$$



с граничными условиями при  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(3\varphi_{,yy}^* - k^2\varphi^* + 2ik\psi_{,y}^*) - \frac{1}{2}\rho d^2 A\omega^2(\varphi_{,yy}^* + ik\psi_{,y}^*) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_y^j \frac{e^{ikjd}(e^{ikb} - e^{-ikb})}{dhik}, \\ \hat{\mu}(\psi_{,yy}^* + k^2\psi^* - 2ik\varphi_{,y}^*) - \frac{1}{2}\rho d^2 A\omega^2(k^2\psi^* - ik\varphi_{,y}^*) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_x^j \frac{e^{ikjd}(e^{ikb} - e^{-ikb})}{dhik}. \end{aligned} \quad (126)$$

Здесь  $\hat{\mu} = \mu(1 + i\chi^*)$ ,  $\chi^* = \omega\chi$ . В уравнениях (125)

$$R_{L,T} = k^2 - \frac{\omega^2}{\tilde{c}_{L,T}^2 - d^2 A\omega^2}, \quad (127)$$

$\tilde{c}_L$  и  $\tilde{c}_T$  определены согласно (96). Решение (125) будем искать в виде

$$\varphi^* = A_1 e^{-R_L y}, \quad \psi^* = B_1 e^{-R_T y}. \quad (128)$$

Найдем  $A_1$  и  $B_1$ , удовлетворив граничным условия (126). Используя соотношения (99), найдем Фурье образы смещений в континууме. Сами же смещения также можно найти в виде интегралов (100). Проведя выкладки, аналогичные (102)-(105), придем к уравнению (106), которое обеспечивает удовлетворение условию непрерывности смещений на границе  $y = 0$ . Коэффициенты  $C_1$ - $C_4$ , характеризующие отклик рассматриваемого градиентного континуума на падающую на границу со стороны решетки волну, также имеют структуру (107), но в данном случае  $C_2 \neq C_3$ ,  $C_3$  имеет такую же структуру, что и  $C_2$ , а функции  $F_1(K) - F_4(K)$  будут такими:

$$\begin{aligned} F_1(K) &= \zeta_T \beta_L (3 - \alpha), \quad F_2(K) = i(\zeta_T \zeta_L (\alpha - 2) + \zeta_T^2 + k^2(1 - \alpha)), \\ F_3(K) &= i(\zeta_T \zeta_L (2 - \alpha) + \zeta_L^2 (\alpha - 3) + k^2), \quad F_4(K) = \zeta_L \beta_T. \end{aligned} \quad (129)$$

Здесь уже осуществлен переход к безразмерным переменным, таким же образом, как это было сделано в классическом континууме,

$$\begin{aligned} \beta_{L,T} &= \frac{\Omega^2}{c_{L,T}^2(1 + i\chi^*)/c_T^2 - A\Omega^2}, \quad \alpha = \frac{A\Omega^2}{2(1 + i\chi^*)}, \quad \zeta_{L,T} = \sqrt{K^2 - \beta_{L,T}^2}, \\ \Delta &= K^4(\alpha - 1) + K^2(3\zeta_L^2 - \zeta_T^2 - 4\zeta_L\zeta_T + \alpha\zeta_L(\zeta_L - \zeta_T)(\alpha - 4)) + \zeta_L^2\zeta_T^2(3 - \alpha). \end{aligned} \quad (130)$$

Как видно из этих выражений, подынтегральные функции в интегралах из  $C_1$ - $C_4$  являются многозначными в комплексной области из-за присутствия радикалов  $\zeta_T$ ,  $\zeta_L$ . Интегралы можно вычислить методом контурного интегрирования, взяв затем суммы этих интегралов аналитически, как и для классического континуума. Но в данном случае полюса подынтегральных функций, являющиеся корнями уравнения  $\Delta = 0$ , необходимо вычислять для каждой частоты  $\Omega$

численно, в то время как в классическом континууме значения полюсов аналитически выражались через частоту и скорость поверхностных волн Рэлея. На некоторых частотах полюсов может быть два, что соответствует двум распространяющимся поверхностным волнам в градиентном континууме. Разрезы, аналогичные разрезам 1–4 на контуре интегрирования, изображенном на Рисунке 18, и определенные из тех же соображений, математически выражаются из системы

$$\begin{cases} 2\text{Im}(K)\text{Re}(K) = -\gamma\xi\chi^*, \\ \text{Re}(K)^2 - \text{Im}(K)^2 - \gamma_{L,T}(\xi_{L,T} - \Omega^2 A) < 0 \end{cases}, \quad (131)$$

где

$$\gamma_{L,T} = \frac{\Omega^2}{(\xi_{L,T} - \Omega^2 A)^2 + \xi_{L,T}^2 \chi^{*2}}, \quad \xi_{L,T} = \frac{c_{L,T}^2}{c_T^2}. \quad (132)$$

При интегрировании по переменной  $x = \text{Im}(K)$  значения  $x$ , соответствующие точкам ветвления, можно записать в виде

$$x_{L,T} = \Omega \sqrt{\frac{(A\Omega^2 - \xi_{L,T}^2)^2 \pm \sqrt{(A\Omega^2 - \xi_{L,T}^2)^2 + \xi_{L,T}^2 \chi^{*2}}}{2((A\Omega^2 - \xi_{L,T}^2)^2 + \xi_{L,T}^2 \chi^{*2})}}. \quad (133)$$

Все вычисления аналогичны вычислениям для классического континуума. При параметре  $A = 0$  результаты получаются такими же, как и для классического континуума, так как уравнения (122) с таким параметром  $A$  совпадают с уравнениями движения классического континуума.

## 6.2 Дисперсионные характеристики

Для визуализации характера распространения волн в рассматриваемом градиентном континууме найдем его дисперсионные характеристики. Пусть в континууме распространяется плоская волна

$$u_x = B \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y), \quad u_y = C \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y). \quad (134)$$

Подставим эти смещения в уравнения движения (122) (без вязкости). Определитель полученной системы линейных алгебраических однородных уравнений относительно неизвестных амплитуд  $B, C$  должен быть равен нулю, чтобы система имела нетривиальное решение. Это условие приводит к следующим зависимостям безразмерной частоты  $\Omega$  от безразмерного волнового числа  $K = d\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ :

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\frac{K^2}{1 + AK^2}} \quad \text{для поперечных волн,} \\ \Omega &= \sqrt{\frac{3K^2}{1 + AK^2}} \quad \text{для продольных волн.} \end{aligned} \quad (135)$$

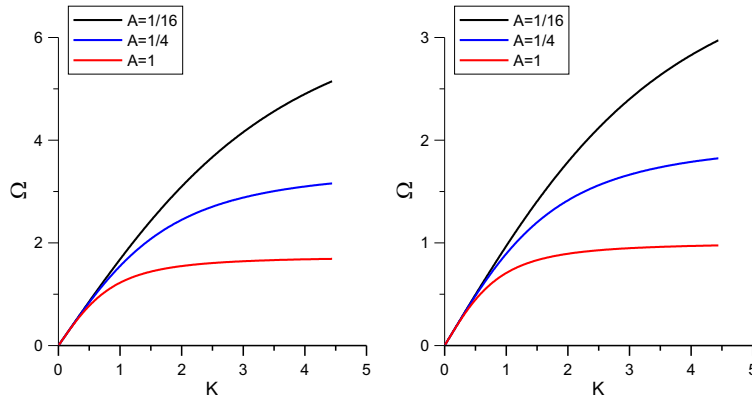


Рис. 21: Дисперсионные характеристики продольных (слева) и поперечных (справа) волн в градиентном континууме (122) с различными значениями параметра  $A$ .

На Рисунке 21 изображены дисперсионные характеристики градиентного континуума (122). Из представленных графиков видно, что при увеличении параметра  $A$  дисперсионные характеристики выходят на асимптоты, соответствующие более низким частотам. Заметим, что как и в случае классического континуума, дисперсионные характеристики градиентного континуума аппроксимируют дисперсию решетки только на низких частотах и не учитывают анизотропию решетки.

### 6.3 Коэффициенты отражения

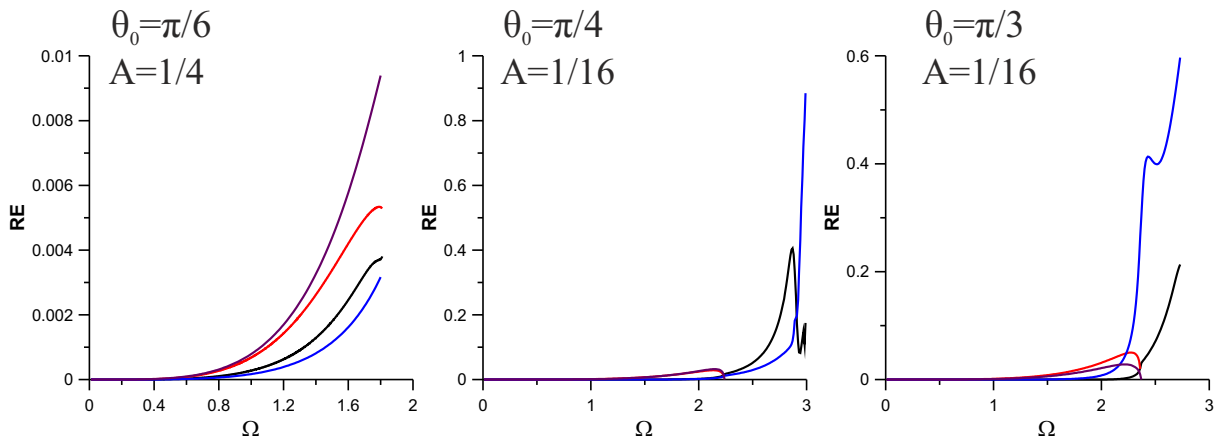


Рис. 22: Коэффициенты отражения от границы дискретной решетки и двух разных континуумов.

Коэффициенты отражения от границы градиентного континуума могут быть вычислены по той же схеме, что и от границы классического континуума. На

Рисунке 22 представлены частотные зависимости коэффициентов отражения в случае падения квазипродольной волны. Параметры  $\mu$  и  $\chi$  взяты такие же, как и в классическом континууме. Черная и красная линии соответствуют коэффициентам отражения квазипродольной и квазипоперечной волн от границы с градиентным континуумом с указанным параметром  $A$ , а синим и сиреневым — с классическим. При увеличении параметра  $A$  отражение от границы с градиентным континуумом становится заметно больше, чем от границы с классическим. Это, возможно, связано с тем, что горизонтальная асимптота дисперсионных характеристик (135) становится меньше, чем пороговые частоты распространения соответствующих волн в решетке. Отражение квазипродольных волн меньше, чем на границе с классическим континуумом, при  $A = 1/16$ ,  $\theta_0 = \pi/3$ .

В случае падения квазипоперечной волны градиентный континуум дает большее отражение, чем классический.

Для уменьшения отражения, по-видимому, нужно модифицировать уравнения (122) так, чтобы уравнения в потенциалах (124) содержали бы не одну константу  $A$ , а две разные константы, соответствующие продольным и поперечным волнам.

## 7 Заключение

Мотивация для данного исследования заключалась во внесении вклада в изучение отражения волн на границе дискретных систем, а также в развитие численных подходов для решения задач на разных масштабных уровнях, которые становятся все более популярными в исследованиях динамического деформирования различных материалов. В частности, данная работа может заинтересовать тех исследователей, которые применяют дискретно-континуальные модели для уменьшения больших временных затрат на вычисления, связанных с дискретным моделированием. В таких моделях вводится континуальная область для того, чтобы уменьшить размер дискретной области, насколько это возможно, значительно экономя при этом время на вычисления. Для достижения этой цели континуальная область не должна порождать ложные отражения от искусственно введенной границы между областями на как можно большем диапазоне частот. В данной работе были проверены возможности классического континуума выполнить это требование. С этой целью изучены отражения плоских гармонических волн на границе одномерной цепочки и континуума, а также квадратной решетки и континуума. Для выявления специфики отражения волн в анизотропной квадратной решетке рассмотрены задачи об отражении от свободной, закрепленной, линейно-вязкой границы решетки, а также от границы с другой решеткой. Предложен метод сшивания областей, в котором точечный характер частиц в решетке не вызывает особенностей в решении уравнений движения для классического континуума. Показано, что в то время как классический континуум может служить неотражающей границей на низких частотах, на высоких частотах он не обладает такой способностью. С учетом сформулированных выше результатов, можно сделать вывод, что классический континуум не является самой привлекательной моделью для обеспечения условия отсутствия отражения в широкой полосе частот. Одной из привлекательных альтернатив может быть градиентный континуум, который, в отличие от классического, обладает дисперсионными свойствами. Исследование в одномерном случае показало, что градиентный континуум может обеспечить безотражательную границу для дискретной области на всем диапазоне частот. Однако при сшивании с квадратной решеткой подобрать параметры градиентного континуума, при котором он дает меньшее отражение, чем классический, пока не удалось.

## Приложения

### А Вычисление интегралов по контурам

Для примера приводятся вычисления интеграла (114). Интегралы (116), (121) вычисляются по тому же принципу.

Будем обходить контур в направлении, указанном на Рисунке 18, а переменной интегрирования выберем  $KK = \text{Im}(K)$ . Тогда точки ветвления  $-\beta_L$ ,  $-\beta_T$  будут соответствовать значениям переменной  $KK$   $L$  и  $T$ , соответственно:

$$L = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \chi^{*2}}}{2(1 + \chi^{*2})}} \frac{\Omega c_T}{c_L}, \quad T = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \chi^{*2}}}{2(1 + \chi^{*2})}} \Omega. \quad (136)$$

На контурах 1-2

$$K = iKK - \frac{\Omega^2 c_T^2 \chi^*}{2KK c_L^2 (1 + \chi^{*2})}, \quad dK = GdKK, \quad G = \left( i + \frac{\Omega^2 c_T^2 \chi^*}{2KK^2 c_L^2 (1 + \chi^{*2})} \right). \quad (137)$$

Посчитаем интегралы по контурам 1, 2:

$$1 = \int_{\infty}^L \frac{\beta_T^2 \sqrt{K^2 - \beta_T^2} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^2 - 4K^2 i \sqrt{K^2 - \beta_T^2} \sqrt{\beta_L^2 - K^2}} e^{iK(b_{ai+l})} GdKK. \quad (138)$$

На этом берегу разреза корень  $\sqrt{K^2 - \beta_T^2}$  чисто мнимый, отрицательный, так что нужно взять значение  $-i\sqrt{\beta_L^2 - K^2}$ .

$$2 = \int_L^{\infty} \frac{\beta_T^2 \sqrt{K^2 - \beta_T^2} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^2 + 4K^2 i \sqrt{K^2 - \beta_T^2} \sqrt{\beta_L^2 - K^2}} e^{iK(b_{ai+l})} GdKK. \quad (139)$$

На этом берегу разреза корень  $\sqrt{K^2 - \beta_T^2}$  чисто мнимый, положительный, так что нужно взять значение  $i\sqrt{\beta_L^2 - K^2}$ . В первом интеграле поменяем пределы интегрирования местами, что приведет в появлению знака минус перед интегралом, и итоговый вклад по контурам 1-2

$$\begin{aligned} J_1^{(\infty, L)} &= 2 - 1 = \int_{\infty}^L \frac{8K^2 i \beta_T^2 (K^2 - \beta_T^2) \sqrt{\beta_L^2 - K^2} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^4 + 16K^4 (K^2 - \beta_T^2) (\beta_L^2 - K^2)} e^{iK(b_{ai+l})} GdKK = \\ &= \int^{-L} \frac{8K^2 i \beta_T^2 (K^2 - \beta_T^2) \sqrt{\beta_L^2 - K^2} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^4 + 16K^4 (K^2 - \beta_T^2) (\beta_L^2 - K^2)} e^{-iK(b_{ai+l})} GdKK = \\ &= \int_{-\infty}^{-L} f_1(K) K e^{-iK(b_{ai+l})} dKK, \quad f_1(K) = \frac{8K^2 i \beta_T^2 (K^2 - \beta_T^2) \sqrt{\beta_L^2 - K^2} G / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^4 + 16K^4 (K^2 - \beta_T^2) (\beta_L^2 - K^2)}. \end{aligned} \quad (140)$$

На контурах 3–4

$$K = iKK - \frac{\Omega^2 \chi^*}{2KK(1 + \chi^{*2})}, \quad dK = \tilde{G}dKK, \quad \tilde{G} = \left( i + \frac{\Omega^2 \chi^*}{2KK^2(1 + \chi^{*2})} \right). \quad (141)$$

Посчитаем интегралы по контурам 3, 4:

$$3 = \int_{\infty}^T \frac{\beta_T^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^2 - 4K^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} \sqrt{K^2 - \beta_L^2}} e^{iK(b_{al}+l)} \tilde{G}dKK. \quad (142)$$

Здесь корень  $\sqrt{K^2 - \beta_T^2}$  чисто мнимый, положительный, так что взяли  $i\sqrt{\beta_T^2 - K^2}$ .

$$4 = \int_T^{\infty} \frac{-\beta_T^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^2 + 4K^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} \sqrt{K^2 - \beta_L^2}} e^{iK(b_{al}+l)} \tilde{G}dKK. \quad (143)$$

Здесь корень  $\sqrt{K^2 - \beta_T^2}$  чисто мнимый, отрицательный, так что взяли  $-i\sqrt{\beta_T^2 - K^2}$ .

В интеграле 4 поменяем пределы интегрирования, так что перед ним появится знак минус, и в итоге

$$\begin{aligned} J_1^{(\infty, T)} &= 3 - 4 = \int_{\infty}^T \frac{2\beta_T^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} (2K^2 - \beta_T^2)^2 / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^4 + 16K^4 (\beta_T^2 - K^2) (K^2 - \beta_L^2)} e^{iK(b_{al}+l)} \tilde{G}dKK = \\ &= \int_{-T}^{-\infty} \frac{2\beta_T^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} (2K^2 - \beta_T^2)^2 / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^4 + 16K^4 (\beta_T^2 - K^2) (K^2 - \beta_L^2)} e^{-iK(b_{al}+l)} \tilde{G}dKK = \\ &= \int_{-\infty}^{-T} f_2(K) e^{-iK(b_{al}+l)} dKK, \quad f_2(K) = \frac{2\beta_T^2 i \sqrt{\beta_T^2 - K^2} (2K^2 - \beta_T^2)^2 \tilde{G} / K}{(2K^2 - \beta_T^2)^4 + 16K^4 (\beta_T^2 - K^2) (K^2 - \beta_L^2)}. \end{aligned} \quad (144)$$

Вычет в точке  $K = -\beta_R$  равен

$$\begin{aligned} \text{Res}[K = -\beta_R, J_1^1] &= R(K) e^{-i\beta_R(b_{al}+l)}, \quad R(K) = \frac{R_A}{4R_B}, \\ R_A &= \beta_T^2 (\beta_R^2 - \beta_T^2) \sqrt{\beta_R^2 - \beta_L^2}, \\ R_B &= \beta_R^2 \mu \left( 4\sqrt{\beta_R^2 - \beta_T^2} \sqrt{\beta_R^2 - \beta_L^2} \beta_R^2 - 2\sqrt{\beta_R^2 - \beta_T^2} \sqrt{\beta_R^2 - \beta_L^2} \beta_T^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4\beta_R^4 + 3\beta_R^2 \beta_L^2 + 3\beta_T^2 \beta_R^2 - 2\beta_T^2 \beta_L^2 \right). \end{aligned} \quad (145)$$

Для интегрирования по контуру  $c0$  сделаем замену  $K = re^{i\varphi}$ . Тогда  $dK = ire^{i\varphi} d\varphi$ . В пределе  $r \rightarrow 0$  получим

$$\int_{c0} = \int_{\pi}^0 \frac{F_1(re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} e^{ire^{i\varphi}(b_{al}+l)} r i e^{i\varphi} d\varphi = \int_{\pi}^0 F_1(0) i d\varphi = -i\pi F_1(0). \quad (146)$$

Тогда, согласно (115),

$$J_1^1 = 2\pi i R(K) e^{-i\beta_R(b_{dl}+l)} + i\pi F_1(0) - \int_{-\infty}^{-T} f_2(K) e^{-iK(b_{dl}+l)} dK K - \int_{-\infty}^{-L} f_1(K) K e^{-iK(b_{dl}+l)} dK K. \quad (147)$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл  $J_1^2$  из (116). Вычет в точке  $K_R = \beta_R$  равен

$$\text{Res} [K = \beta_R, J_1^2] = R(K) e^{i\beta_R(b_{dl}-l)}. \quad (148)$$

В формуле (115) его следует брать с отрицательным знаком, так как интегрирование ведется по контуру в нижней полуплоскости. Вычисления приводят к следующему выражению:

$$J_1^2 = -2\pi i R(K) e^{i\beta_R(b_{dl}-l)} - i\pi F_1(0) + \int_{-\infty}^{-T} f_2(K) e^{iK(b_{dl}-l)} dK K + \int_{-\infty}^{-L} f_1(K) K e^{iK(b_{dl}-l)} dK K. \quad (149)$$

Принимая во внимание (147) и (149), можно прийти к выражению для коэффициента  $C_1$  из (113) вида (118), где

$$\begin{aligned} \tilde{R}(K) &= R(K) (e^{i\beta_R b_{dl}} - e^{-i\beta_R b_{dl}}), & \tilde{f}_1(K) &= f_1(K) (e^{iK b_{dl}} - e^{-iK b_{dl}}), \\ \tilde{f}_2(K) &= f_2(K) (e^{iK b_{dl}} - e^{-iK b_{dl}}). \end{aligned} \quad (150)$$



## Б Охрана труда при выполнении работы

### Б.1 Введение

Данная работа проводилась с использованием персонального компьютера. Основные нагрузки при выполнении данной работы: интеллектуальные, эмоциональные, зрительные, а также слуховые. Последние выражены слабо, так как современная вычислительная техника не производит много шума.

Опасные и вредные факторы условий работы по природе возникновения делятся на следующие группы:

- физические (температура воздуха, влажность воздуха, скорость воздуха, наличие аэрозолей преимущественно фиброгенного действия, эквивалентный уровень звука, искусственное освещение рабочей поверхности при комбинированном освещении, ионизирующее излучение);
- химические (наличие вредных веществ);
- психофизиологические (интеллектуальные, сенсорные, эмоциональные нагрузки);
- биологические.

В помещении лаборатории или кафедры на сотрудника, работающего с вычислительной техникой, могут негативно действовать следующие физические факторы:

- повышенная и пониженная температура воздуха;
- чрезмерная запыленность и загазованность воздуха;
- повышенная и пониженная влажность воздуха;
- недостаточная освещенность рабочего места;
- превышающий допустимые нормы шум;
- повышенный уровень ионизирующего излучения;
- повышенный уровень электромагнитных полей;
- повышенный уровень статического электричества;
- опасность поражения электрическим током;
- блеклость экрана дисплея.

Биологические вредные производственные факторы в данном помещении отсутствуют. К психологически вредным факторам, воздействующим на сотрудника или студента кафедры в течение рабочего дня можно отнести следующие:

- нервно - эмоциональные перегрузки;
- умственное напряжение;
- перенапряжение зрительного анализатора
- перенапряжение слухового анализатора

## **Б.2 Микроклимат рабочей зоны**

Микроклимат рабочего помещения — это климат внутренней среды этих помещений, который определяется действующими на организм человека сочетаниями температуры, влажности и скорости движения воздуха. Допустимые микроклиматические условия — это такие сочетания параметров микроклимата, которые при длительном и систематическом воздействии на человека могут вызвать напряжение реакций терморегуляции и которые не выходят за пределы физиологических приспособительных возможностей. При этом не возникает нарушений в состоянии здоровья, не наблюдаются дискомфортные теплоощущения, ухудшающие самочувствие и понижение работоспособности. Оптимальные параметры микроклимата в производственных помещениях обеспечиваются системами кондиционирования воздуха, а допустимые параметры — обычными системами вентиляции и отопления. Помещение программистов вычислительных машин является помещением категории 1а (выполняются легкие физические работы), поэтому должны соблюдаться следующие требования: оптимальная температура воздуха (в холодное время года) 22С (допустимая — 20–24С), оптимальная относительная влажность — 40 – 60% (допустимая — не более 75%) , скорость движения воздуха не более 0.1м/с. Для создания и автоматического поддержания в лаборатории независимо от наружных условий оптимальных значений температуры, влажности, чистоты и скорости движения воздуха, в холодное время года используется водяное отопление, в теплое время года применяется кондиционирование воздуха. Также одежда персонала должна соответствовать температурному режиму в помещении.

Содержание вредных веществ в воздухе рабочей зоны не должно превышать предельно допустимых концентраций (ПДК), используемых при проектировании производственных зданий, технологических процессов, оборудования, вентиляции, для контроля за качеством производственной среды и профилактики неблагоприятного воздействия на здоровье работающих, и подлежит систематическому контролю.

## **Б.3 Шумовые воздействия**

В помещении лаборатории (кафедры) источником шумовых помех могут стать вентиляционные установки, кондиционеры или периферийное оборудование для ЭВМ (плоттеры, принтеры и др). Длительное воздействие этих шумов отрицательно сказывается на эмоциональном состоянии персонала. Шум ухудшает условия труда оказывая вредное действие на организм человека. Работающие в условиях длительного шумового воздействия испытывают раздражительность,

головные боли, головокружение, снижение памяти, повышенную утомляемость, понижение аппетита, боли в ушах и т. д. Такие нарушения в работе ряда органов и систем организма человека могут вызвать негативные изменения в эмоциональном состоянии человека вплоть до стрессовых. Под воздействием шума снижается концентрация внимания, нарушаются физиологические функции, появляется усталость в связи с повышенными энергетическими затратами и нервно-психическим напряжением, ухудшается речевая коммутация. Все это снижает работоспособность человека и его производительность, качество и безопасность труда. Длительное воздействие интенсивного шума (выше 80 дБА) на слух человека приводит к его частичной или полной потере. Для того, чтобы добиться допустимого уровня шума рекомендуется применять звукопоглощающее покрытие стен. В качестве мер по снижению шума можно предложить следующее: облицовка потолка и стен звукопоглощающим материалом (снижает шум на 6-8 дБ); экранирование рабочего места (постановкой перегородок, диафрагм); установка в компьютерных помещениях оборудования, производящего минимальный шум; рациональная планировка помещения. Для уменьшения шума в лаборатории следует использовать вместо матричного принтера, который производит много шума, более тихий - лазерный принтер.

#### **Б.4 Освещенность**

Работа, выполняемая с использованием вычислительной техники, имеют следующие недостатки: вероятность появления прямой блескости, ухудшенная контрастность между изображением и фоном, отражение экрана. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего. Освещение в помещениях, где располагается вычислительная техника, должно быть смешанным: естественным и искусственным. При выполнении зрительной работы категории средней точности к. е. о. должен быть не ниже 4%. Искусственное освещение в помещениях следует осуществлять в виде комбинированной системы освещения с использованием люминесцентных источников света в светильниках общего назначения. В качестве источников должны использоваться люминесцентные лампы типа ЛБ и ДРЛ с индексом цветопередачи ( $R > 70$ ). В качестве светильников должны использоваться установки с преимущественно отраженным или рассеянным светораспределением (тип УСП-5-2x40, УСП-35-2x40, ЛВ003-2x40-002). Величина освещенности при ис-

кусственном освещении люминесцентными лампами должна быть в горизонтальной плоскости не ниже 300лк- для системы общего освещения и не ниже 750лк — для системы комбинированного освещения, причем с учетом работы категории высокой зрительной точности может быть увеличена до 1000лк. Для исключения бликов отражения на экранах от светильников общего назначения необходимо применять антибликерные сетки, специальные фильтры для экранов, защитные козырьки и т.п.

## **Б.5 Пожарная безопасность**

В помещении кафедры (лаборатории) должны быть огнетушители и планы эвакуации. Эвакуационные выходы должны располагаться рассредоточено, быть достаточно широкими, не содержать винтовых лестниц, раздвижных дверей, турникетов, наружные эвакуационные двери зданий не должны иметь запоров, которые не могут быть открыты изнутри без ключа.

Опасность загорания в ЭВМ связана со значительным количеством плотно расположенных на монтажных платах и блоках: электронных узлов и схем, электрических и коммутационных кабелей, резисторов, конденсаторов, полупроводниковых диодов и транзисторов. Высокая плотность элементов в электронных схемах приводит к значительному повышению температуры отдельных узлов ( $80 - 200^{\circ}\text{C}$ ), что может служить причиной воспламенения изоляционных материалов.

## **Б.6 Эргономические требования**

Под рабочим местом понимается зона, оснащенная необходимыми техническими средствами, в которой совершается трудовая деятельность исполнителя или группы исполнителей, совместно выполняющих одну работу или операцию. Конструкция рабочего места должна обеспечивать быстроту, безопасность, простоту и экономичность технического обслуживания в нормальных и аварийных условиях; полностью отвечать функциональным требованиям и предполагаемым условиям эксплуатации. Конструкция рабочего стола должна обеспечивать оптимальное размещение на рабочей поверхности используемого оборудования с учетом его количества и конструктивных особенностей, характера выполняемой работы. Высота рабочей поверхности стола для взрослых пользователей должна регулироваться в пределах 680–800 мм; при отсутствии такой возможности высота рабочей поверхности стола должна составлять 725 мм. Конструкция рабочего стула (кресла) должна обеспечивать поддержание рациональной рабочей позы, позволять изменять позу с целью снижения статическо-

го напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления. Тип рабочего стула (кресла) должен выбираться в зависимости от характера и продолжительности работы с учетом роста пользователя. Поверхность сиденья, спинки и других элементов стула (кресла) должна быть полумягкой, с нескользящим, неэлектризующимся и воздухопроницаемым покрытием, обеспечивающим легкую очистку от загрязнений. Клавиатуру следует располагать на поверхности стола на расстоянии 100–300 мм от края, обращенного к пользователю, или на специальной, регулируемой по высоте рабочей поверхности, отделенной от основной столешницы.

### **Б.6.1 Напряженность трудового процесса**

Тяжесть трудового процесса в ходе работы над диссертацией можно отнести к оптимальному классу условий труда (легкая физическая нагрузка), основная нагрузка интеллектуальная, присутствует возможность гибкого графика работы, изменения рабочей позы. Классифицировать по степени напряженности выполняемую работу можно следующим образом: интеллектуальные нагрузки предполагают решение сложных задач с выбором по известным алгоритмам (напряженный труд 1-ой степени), а также эвристическую, творческую деятельность, требующую решения сложных задач при отсутствии алгоритма (напряженный труд 2-ой степени); большую часть времени работа проходит установленному графику с возможной его коррекцией по ходу деятельности (напряженный труд 1-ой степени); иногда присутствует работа в условиях дефицита времени (напряженный труд 2-ой степени); сенсорные нагрузки (работа за экраном компьютера) присутствуют более четырех часов за рабочий день (напряженный труд 2-ой степени); фактическая продолжительность рабочего дня 8–9 часов (напряженность труда средней степени).

## **Б.7 Заключение**

Работа с персональным или портативным компьютером, проводившаяся при подготовке данной работы, характеризуется значительным умственным напряжением и нервно-эмоциональной нагрузкой, высокой напряженностью зрительной работы. В процессе работы с компьютером необходимо соблюдать правильный режим труда и отдыха, что соблюдалось в моем случае в связи с возможностью регулирования графика работы.

Условия моего труда на рабочем месте в соответствии с гигиеническими критериями оценки являются оптимальными (сохраняется здоровье работающего, создаются предпосылки для поддержания высокого уровня работоспо-

способности, согласно нормативам, установленным для микроклиматических параметров, неионизирующих электромагнитных излучений и факторов трудового процесса). Трудовой процесс можно отнести к напряженному напряженному труду первой и второй степени.

## Список литературы

- [1] A.V. Metrikine, H. Askes. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure Part 1: Generic formulation, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21(4), 2002, pp. 589–596.
- [2] A.V. Metrikine, J.M. Prokhorova. On the uniqueness of the Lagrangian of gradient elastic continua. G.A. Maugin, A.V. Metrikine (Eds.). *Mechanics of Generalized Continua: One Hundred Years after the Cosserat*, Springer, 2010, pp. 149–160.
- [3] J.D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1973, 425p.
- [4] В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев Наук. думка, 1981, 283с.
- [5] K. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover publications, inc., New York, 1975, 649p.
- [6] Л.М. Бреховских. *Волны в слоистых средах*. Москва, Наука, 1973, 343с.
- [7] А.М. Кривцов. *Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой*. М.: Физматлит, 2007, 304 с.
- [8] А.В. Ченцов *Разработка дискретно-континуальных моделей деформирования и разрушения наноматериалов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*. Москва, 2008.
- [9] Л.И. Слепян. *Механика трещин*. Л.: Судостроение, 1990, 296с.
- [10] Л.И. Слепян. О дискретных моделях в механике разрушения. *МТТ*, №6, 2010, с. 46–59.
- [11] М. Борн, Х. Кунь. *Динамическая теория кристаллических решеток*. М.: Издательство иностранной литературы, 1958, 488с.
- [12] В.И. Ерофеев. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999, 328 с.
- [13] E. B. Tadmor, M. Ortiz, R. Phillips. Quasicontinuum Analysis of Defects in Solids, *Phil. Mag.*, A, 73, 1996, pp. 1529–1563.

- [14] R. E. Miller, E. B. Tadmor. The Quasicontinuum Method: Overview, applications and current directions. *Journal of Computer-Aided Materials Design*, №9, 2002, pp. 203–239.
- [15] J.Q. Broughton, F.F. Abraham, N. Bernstein, E. Kaxiras. Concurrent coupling of length scales: Methodology and application, *Physical Review B*, Vol. 60(4), 1999, pp.2391–2403.
- [16] S. Kohlhoff, P. Gumbsch, H.F. Fischmeister. Crack propagation in bcc crystals studied with a combined finite-element and atomistic model, *Phil. Mag. A*, Vol. 64(4), 1991, pp. 851–878.
- [17] R.E. Rudd, J.Q. Broughton. Coarse-grained molecular dynamics and the atomic limit of finite elements, *Physical Review B* 58, 1998, pp. R5893–R5896.
- [18] S.P. Xiao, T. Belytschko. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193, 2004, pp. 1645–1669.
- [19] G.J. Wagner, W.K. Liu. Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *Journal of Computational Physics* 190, 2003, pp.249-274.
- [20] С.Г. Псахье, А.Ю. Смолин, Ю.П. Стефанов, П.В. Макаров, М.А. Чертов. Моделирование поведения сложных сред на основе совместного использования дискретного и континуального подходов. *Письма в ЖТФ*, том 30, вып. 17. 2004, с.7–13
- [21] J. Dominguez. *Boundary elements in dynamics*, Southampton: Computational Mechanics Publications, 1993.
- [22] W. Cai, M.D. Koning, V.V. Bulatov, S.Yip. Minimizing boundary reflections in coupled-domain simulations. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 85, 2000, pp. 3213–3216.
- [23] E.G. Karpov, G.J. Wagner, W.K. Liu. Green's function approach to deriving non-reflecting boundary conditions in molecular dynamics simulations, *Int. J. Numer. Meth. Engng* Vol. 62, 2005, pp. 1250–1262.
- [24] W. E, Z. Huang. Matching conditions in atomistic-continuum modeling of materials. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 87, 2001, 135501.



- [25] W. A. Curtin, R. E. Miller. Atomistic/continuum coupling in computational materials science. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* Vol. 11, 2003, pp. R33–R68.
- [26] W.K. Liu, H.S. Park. Bridging Scale Methods for Computational Nanotechnology, *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*, editors M. Rieth and W. Schommers, 2006, 140p.
- [27] W.K. Liu, E.G. Karpov, H.S. Park. *Nano Mechanics and Materials: Theory, Multiscale Methods and Applications*. John Wiley and Sons Ltd, 2006, 337p.
- [28] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. McGraw-Hill book company, inc. 1946, 260p.
- [29] M. Dove. *Introduction to lattice dynamics*. Cambridge University Press, 1993, 276p.