Министерство образования и науки Российской Федерации Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого Институт прикладной математики и механики

Работа допущена к защите		
Завед	цующий к	афедрой
	A	.М. Кривцов
«	>>	20 г

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ЛОПАСТЕЙ

по направлению 01.04.03 «Механика и математическое моделирование» по образовательной программе

01.04.03_01 «Механика деформируемого твердого тела»

Выполнил

студент гр.23642/1

Т.А. Теницкая

Руководитель

к.т.н., доцент А.И. Боровков

Санкт-Петербург 2018

РЕФЕРАТ

На 37 с., 24 рисунков, 33 формул, 6 таблиц.

ЛОПАСТЬ НЕСУЩЕГО ВИНТА, МЕТОД КРЕЙГА-БЭМПТОНА, МКЭ, MODAL NEUTRAL FILE

В данной работе рассмотрено моделирование лопасти несущего винта вертолета, расчет деформаций с помощью метода Крейга-Бэмптона. Было учтено упрочнение лопасти за счет действия центробежной силы. Найдены перемещения конца лопасти методом конечных элементов и методом Крейга-Бэмптона. Приведены результаты сравнения перемещений.

THE ABSTRACT

37 pages, 24 pictures, 33 equations, 6 tables

BLADE, CRAIG-BAMPTON METHOD, FEM, MODAL NEUTRAL FILE

In this work, the modeling of the main rotor blade is considered and deformations by using the Craig-Bampton method are calculated. The reinforcement of the blade due to centrifugal force was taken into account. The displacement of the end of the blade by the finite element method and the Craig-Bampton method is found. The results of comparison of displacements are given.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ5
ГЛАВА 1. ВАЛИДАЦИЯ МЕТОДА КРЕЙГА-БЭМПТОНА7
1.1. Метод Крейга-Бэмптона7
1.2. Аналитическое решение задачи на изгиб
1.3. Решение задачи на изгиб с помощью метода Крейга-Бэмптона14
ГЛАВА 2. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОНЦА ЛОПАСТИ17
2.1. Постановка задачи
2.2. Методика определения упруго-массовых характеристик лопасти 17
2.3. Расчет перемещений лопасти с помощью метода Крейга-Бэмптона21
2.4. Расчет перемещений лопасти с помощью метода конечных элементов 28
ГЛАВА 3. УЧЕТ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЛОПАСТИ30
НЕСУЩЕГО ВИНТА
3.1. Преднапряжение .mnf
3.2. Решение методом конечных элементов
3.3. Расчет лопасти с преднапряжением методом Крейга-Бэмптона33
3.4. Проверка сходимости
ЗАКЛЮЧЕНИЕ
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ37

ВВЕДЕНИЕ

Несущая вертолетов главным агрегатом, который система является обеспечивает существование вертолета как летательного аппарата, обладающего вертикальными взлетом И посалкой И требующего не специально взлетно-посадочных площадок. Именно ее безотказное подготовленных функционирование обеспечивает безопасность полета вертолета во всех ожидаемых условиях эксплуатации, в том числе и на неустановившихся режимах, таких как взлет, разгон, посадка и маневры. Процесс проектирования и обеспечение заданных ресурсов требует наличия расчетных методик и прикладного математического обеспечения для определения нагрузок на агрегаты несущей системы и расчета ее динамики, как на стадии проектирования, так и в процессе летных и сертификационных испытаний.

Несущий винт вертолета определяет его летные характеристики, устойчивость и управляемость. Наличие несущего винта может приводить к таким явлениям как земной резонанс и флаттер. Он является источником вибраций и переменных нагрузок в силовых элементах конструкции вертолета. Поэтому расчет несущего винта является важнейшей задачей при проектировании вертолета.

Лопасть несущего винта работает под совместным действием аэродинамических и центробежных сил, изгибающих и крутящего моментов. В общем случае поступательного полета, распределение внешней нагрузки на лопасти зависит от еè азимутального положения, а также от движения вертолета в пространстве. Поэтому расчет лопасти несущего винта является сложной задачей, для решения которой необходимо рассматривать весь диапазон режимов полета, возникающих при эксплуатации вертолета.

Для моделирования движения деформируемых конструкций на сегодняшний день разработано и исследовано множество подходов. Точные методы сопротивления материалов для решения данных задач успешно применяются для простых конфигураций конструкций, в то же время, оказываясь бессильными для

анализа сложной реальной конструкции. Среди различных эффективных приближенных методов решения данной проблемы выделяется метод конечных элементов (МКЭ). Но, если деформируемая конструкция совершает большое движение и подвержена малым деформациям, то методом конечных элементов решать такие задачи довольно трудоемко, в следствии чего потребуются огромные затраты времени.

Лопасть несущего винта вертолета работает в экстремальных условиях. Необходимо учесть множество действующих на нее факторов, в связи с чем проводится большое количество расчетов при различных режимах работы. Целью данной дипломной работы является предложение метода для упрощения вычислительных методов динамики на примере лопасти вертолета. Метод, предложенный в данной работе, позволяет существенно сократить время расчета динамики лопастей, что важно, так как проводимые расчеты исчисляются тысячами. В связи с поставленной целью решаются следующие задачи:

- Решение задачи на собственные частоты лопасти с помощью метода
 Крейга-Бэмптона и их применение для описания упругой лопасти
- 2. Учет упрочняющего эффекта для лопасти
- 3. Сравнение результатов конечно-элементного решения для перемещений лопасти и решения, полученного с помощью метода Крейга-Бэмтона

ГЛАВА 1. ВАЛИДАЦИЯ МЕТОДА КРЕЙГА-БЭМПТОНА

1.1. Метод Крейга-Бэмптона

Упругие тела используются для моделирования движения деформируемых конструкций с учетом податливости. Упругое тело представляется совокупностью звеньев, взаимодействие которых между собой описывается уравнениями движения упругого тела. Уравнения движения упругого тела выводятся в предположении, что тело совершает большое движение и подвергается малым упругим деформациям. Решение методом конечных элементов для такого класса задач довольно трудоемко за счет сложных составляющихся упруго-массовых матриц. Однако, метод КрейБэмптона способен упростить данную задачу и без потерь с в точности.

Метод Крейга Бэмптона [7] (метод суперпозиции собственных форм) — это метод редукции системы уравнений движения деформируемого тела, которые получаются на основе метода конечных элементов, путем аппроксимации малых упругих перемещений тела набором допустимых форм (Рис. 1.1.1.).



Рис.1.1.1. Суперпозиция собственных форм Алгоритм метода Крейга-Бэмптона:

- 1) Выбираются интерфейсные (граничные) узлы, в которых приближенное представление движения не желательно. Это узлы, к которым приложена силовая нагрузка или имеются закрепления, шарнирные элементы. Степени свободы сразу заносятся в модальный базис и не аппроксимируются;
- 2) Рассчитываются статические собственные формы колебаний по всем степеням свободы граничных узлов при единичной нагрузке;

- 3) Рассчитываются собственные формы при зажатых граничных узлах;
- 4) Строится модальная матрица редуцированных матриц жесткости и масс;
- 5) Проводится ортонормализация базиса модального пространства. В результате чего получается ортонормальная модальная матрица относительно матриц конечно-элементной модели.

Таким образом, конструкция моделируется в конечно-элементном программном комплексе, затем рассчитываются собственные формы и частоты методом Крейга-Бэмптона. В результате чего редуцированные матрицы масс и жесткостей записываются в файл специального формата .mnf файл (Modal Neutral File)[9].



Рис.1.1.2. Структура файла MNF

Конечно-элементные модели упругих элементов конструкции редуцируются по методу Крейга-Бэмптона. Пользователь определяет отдельные интерфейсные узлы, которыми тело прикрепляется к остальной системе. К степеням свободы этих узлов u_B не применяется модальная суперпозиция, они заносятся прямо в модальный базис метода КрейгаБэмптона. Степени свободы оставшихся узлов u_I аппроксимируют линейной комбинацией векторов

собственных форм ψ_j и нормируют. Отношение между физическими перемещениями и тонами метода Крейга-Бэмптона и их модальными координатами выражается следующей формулой:

$$u = \left\{ \begin{array}{c} u_B \\ u_I \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \Phi_{IC} & \Phi_{IN} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_C \\ q_N \end{array} \right\},\tag{1}$$

 Γ де u_B — граничные степени свободы, u_I — внутренние степени свободы,

Е, 0 – единичная и нулевая матрицы соответственно,

 $\Phi_{\rm IN}$ — физические перемещения внутренних степеней свободы в собственных формах, $q_{\rm C}$ — модальные координаты статических форм,

q_N – модальные координаты собственных форм закрепленных по границам.

Матрицы обобщенной жесткости и массы получаются через модальную трансформацию.

Трансформация матрицы жесткости:

$$\hat{K} = \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \Phi_{IC} & \Phi_{IN} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \Phi_{IC} & \Phi_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{CC} & \mathbf{0} \\ 0 & \hat{K}_{NN} \end{bmatrix}$$
(2)

Трансформация матрицы массы:

$$\hat{M} = \Phi^{T} M \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \Phi_{IC} & \Phi_{IN} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BI} \\ M_{IB} & M_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \Phi_{IC} & \Phi_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{CC} & \hat{M}_{NC} \\ \hat{M}_{CN} & \hat{M}_{NN} \end{bmatrix}$$
(3)

После проведения нормировки собственных векторов получают дифференциальное уравнение движения деформируемого тела. Его получают из уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} + \left[\frac{\partial D}{\partial \xi} \right]^T \lambda - Q = 0 \\
D = 0
\end{cases} \tag{4}$$

где $L = T - \Pi$ — Лагранжиан, определяемый как разность кинетической и потенциальной энергии,

F – функция диссипации энергии,

D – уравнения связей,

λ – множители Лагранжа для связей,

Q – обобщенные приложенные силы.

Обобщенные координаты упругого тела представляют собой вектор,

состоящий из координат поступательного $x \\ y \\ z = x$, вращательного

 $\left\{egin{aligned} \Psi \\ \theta \\ \Phi \end{aligned}\right\} = \{f\} \\ \text{, и модальных координат} \left\{q_{i,}(i=1..M)\right\} = \{q\}. \end{aligned}$

$$\xi = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \theta \\ \phi \\ q_i, (i = 1...M) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ f \\ q \end{array} \right\}.$$
(5)

В окончательном виде уравнение движения деформируемого тела имеет вид :

$$M\ddot{\xi} + \dot{M}\dot{\xi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M}{\partial \xi} \dot{\xi} \right]^{T} \dot{\xi} + K\xi + f_{g} + C\dot{\xi} + \left[\frac{\partial D}{\partial \xi} \right]^{T} \lambda = Q \tag{6}$$

где $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ – обобщенные координаты упругого тела и их производные по времени,

М – матрица масс упругого тела,

 \dot{M} – производная по времени матрицы масс упругого тела,

 $\partial M/\partial \xi$ — частная производная матрицы масс по обобщенным координатам, K — обобщенная матрица жесткости, fg — обобщенная гравитационная сила, C — матрица демпфирования.

Таким образом, с одной стороны, мы получаем всю мощь классического МКЭ с возможностью достаточно подробного разбиения тела на элементы и, с другой стороны, малую размерность системы уравнений динамики упругого тела, что ведет к быстрому расчету движения тела без существенной потери точности при адекватном выборе используемых допустимых форм тела

Файл .mnf импортируется как упругое тело в среду разработки механических конструкций, поддерживающую анализ многокомпонентной механической системы (MBS – Multibody simulation). К упругому телу прикладываются нагрузки, и запускается расчет напряжений и деформаций.

Под многокомпонентной механической системой понимается произвольная совокупность конечного числа твердых и упругих тел, взаимное движение которых может быть ограничено механическими связями. Между телами системы могут осуществляться также силовые взаимодействия, и система может подвергаться внешним силовым воздействиям. Система может также содержать каналы управления, формирующие движение тел в соответствии с заданными зависимостями. На уровне формализованного представления многокомпонентная механическая система состоит из следующих основных элементов: звенья, упругие тела, механические связи, силовые элементы.

Для валидации метода Крейга-Бэмптона решена простая тестовая задача на изгиб балки Бернулли-Эйлера. В следующем параграфе приведены

результаты сравнения аналитически полученного максимального прогиба балки и прогиба, полученного с помощью метода Крейга-Бэмтона.

1.2. Аналитическое решение задачи на изгиб

Дана балка прямоугольного сечения длиной L, заделанная с одного конца и нагруженная с другого силой F. Требуется найти максимальный прогиб балки W_{max} .



Рис.1.2.1. Постановка задачи

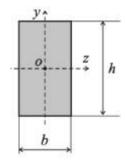


Рис.1.2.2. Прямоугольное сечение

Условные обозначения:

 $h = 60 \ \text{мм} - \text{высота прямоугольного сечения } b = 20 \ \text{мм} - \text{ширина прямоугольного сечения Параметры балки:}$

L = 1000 мм - длина балки

В качестве материала была взята сталь с параметрами: $\rho = 7850 \ \text{кг/m}^3$

 $E = 200 \ \Gamma \Pi a - модуль Юнга \upsilon =$

0.3 – коэффициент Пуассона

Граничные условия:

В заделке:

Прогиб y(0) = 0, угол поворота $\theta(0) = 0$

Сила и момент, приложенные к концу балки:

$$F(L) = 1000H, M(L) = 0$$

Прогиб балки *w* можно найти, проинтегрировав формулу:

$$w(z) = \int \left(\int \frac{M_x(z)}{EJ_x} dz \right) dz + C_1 z + C_2$$
 (7)

Где dz — расстояние между двумя смежными сечениями, $J_x = \frac{bh^3}{12}$ момент инерции сечения относительно оси x, для данного прямоугольного сечения равный 360000 мм^4 ,

 $M_{x}(z)$ _изгибающий момент, который из уравнений равновесия сил и моментов определяется как

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \tag{8}$$

 Q_{y} – поперечная сила.

В итоге получили:

$$M_{\chi}(z) = -F(L - z) \tag{9}$$

$$w(z) = -FL\frac{z^2}{2EJ_x} + F\frac{z^3}{6EJ_x} + C_1 z + C_2$$
(10)

Константы C_1 и C_2 вычисляются из граничных условий.

Граничные условия дают при подстановке $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, прогиб w(z) вычисляется с помощью формулы

$$w(z) = -FL \frac{z^2}{2EJ_x} + F \frac{z^3}{6EJ_x}$$
 (11)

$$w_{max} = -F \frac{L^3}{3EJ_x} \tag{12}$$

Для длины балки 1000 мм максимальный прогиб $w_{max} = 4.6296$ мм.

1.3. Решение задачи на изгиб с помощью метода Крейга-Бэмптона

Построена конечно-элементная модель балки, которая разбита на 10 одномерных (линейных) СВеат элементов длиной в 100 мм.

Стержневой элемент СВеат из двух узловых точек воспринимает осевое растяжение-сжатие и кручение относительно продольной оси. Компонентами перемещений в узловой точке элемента являются 3 поступательных и три вращательных степени свободы.

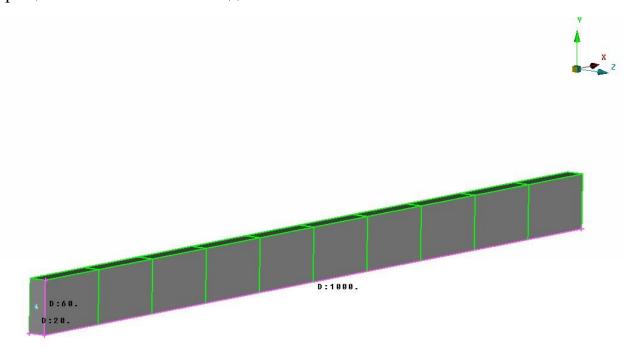


Рис.1.3.1. Конечно-элементная модель балки

Длина балки 1000 мм, размеры прямоугольного сечения 60мм×20мм. В качестве материала была взята сталь, плотностью $\rho = 7850$ кг/м³. E = 200 ГПа — модуль Юнга $\upsilon = 0.3$ — коэффициент Пуассона

Далее в модели закрепляется интерфейсный узел, в котором задано условие консольной заделки, и рассчитываются собственные частоты и формы. В

результате получен .mnf файл, который содержит информацию о 18-ти собственных частотах и формах в виде матриц Крейга-Бэмтона.





Рис.1.3.2. Конечно-элементная модель балки с интерфейсным узлом

Полученный .mnf файл импортируется в среду разработки MBS моделей. К правому концу балки приложена сила по оси y F = -1000 H. Расчет проводился в течении 1c с шагом 0.1.



×____ z

Рис.1.3.3. MBS модель балки

В результате получили максимальный прогиб $w_{max} = 4.6397$ мм.



Рис.1.3.4. График прогиба по оси у от времени

Сравнение полученных результатов приведено в Таблице 1.

Таблица 1

Аналитический прогиб,	Прогиб, посчитанный	й Относительная
MM	методом Крейга-	погрешность, %
	Бэмптона, мм	
4.6296	4.6397	0.2

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что метод КрейгаБэмптона дает точное решение, совпадающее с аналитическим. Следовательно, применение метода Крейга-Бэмптона в данной задаче обосновано.

ГЛАВА 2. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОНЦА ЛОПАСТИ

2.1. Постановка задачи

Для расчета перемещений лопасти с помощью метода Крейга-Бэмптона была поставлена задача:

Найти перемещения u_y конца лопасти, закрепленной в центре вращения, при действующих на нее аэродинамических силах.

В конечно-элементном программном комплексе балочными элементами СВеат смоделирована лопасть несущего винта вертолета. Характерный размер элемента 25 мм. В качестве профиля лопасти был выбран профиль NACA-0012[11] (Puc.2.1.1.)



Рис.2.1.1. Профиль лопасти

Сечения балочных элементов выбраны прямоугольной формы с соответствующими моментами инерций профиля и площади лопасти в сечении.

2.2. Методика определения упруго-массовых характеристик лопасти

Для определения изгибных жесткостей используется следующий алгоритм:

1. Решается две задачи:

Задача (1):

$$u_{x}|_{z=0} = u_{y}|_{z=0} = u_{z}|_{z=0} = 0$$

$$\varphi_{x}|_{z=0} = \varphi_{y}|_{z=0} = \varphi_{z}|_{z=0} = 0$$

$$M_{x}^{(1)}|_{z=1} = 1000_{HMM}$$
(13)

где u_{x} , u_{y} , u_{z} – компоненты вектора перемещения;

 $\varphi_{\rm X}, \varphi_{\rm Y}, \varphi_{\rm Z\!-}$ повороты вокруг осей x, y и z соответственно;

 $M_{\chi}^{(1)}$ — изгибающий момент вокруг оси х.

Задача (2):

$$u_{x}|_{z=0} = u_{y}|_{z=0} = u_{z}|_{z=0} = 0$$

$$(14)$$
 $\varphi_{x}|_{z=0} = \varphi_{y}|_{z=0} = \varphi_{z}|_{z=0} = 0$

$$M_{y}^{(2)}|_{z=1} = 1000_{HMM}$$

где $M_y^{(2)}$ – изгибающий момент вокруг оси у.

2. Определяются перемещения в точке приложения крутящего момента

 $u_{v}^{(2)}$

где верхний индекс в скобках обозначает номер задачи

3. Записываются уравнение перемещений вокруг главных осей (пока неизвестных):

$$EJ_{x_{1}} = -\frac{1}{2} \frac{M_{x_{1}}^{(1)} l^{2}}{u_{y_{1}}^{(1)}}$$

$$EJ_{y_{1}} = -\frac{1}{2} \frac{M_{y_{1}}^{(1)} l^{2}}{u_{x_{1}}^{(1)}}$$

$$EJ_{x_{1}} = -\frac{1}{2} \frac{M_{x_{1}}^{(2)} l^{2}}{u_{y_{1}}^{(2)}}$$

$$EJ_{y_{1}} = -\frac{1}{2} \frac{M_{y_{1}}^{(2)} l^{2}}{u_{x_{1}}^{(2)}}$$

где нижний x_1, y_1 — главные оси сечения, см. рисунок .

Моменты и перемещения в главных осях выражаются через соответствующие компоненты в осях лопасти по формулам:

$$u_{x_{1}}^{(1)} = u_{x}^{(1)}\cos(\alpha) + u_{y}^{(1)}\sin(\alpha)$$

$$u_{y_{1}}^{(1)} = u_{y}^{(1)}\cos(\alpha) - u_{x}^{(1)}\sin(\alpha)$$

$$u_{x_{1}}^{(2)} = u_{x}^{(2)}\cos(\alpha) + u_{y}^{(2)}\sin(\alpha)$$

$$u_{x_{1}}^{(2)} = u_{x}^{(2)}\cos(\alpha) - u_{y}^{(2)}\sin(\alpha)$$

$$M_{x}^{(1)} = M_{x}^{(1)}\cos(\alpha)$$

$$M_{x}^{(1)} = M_{x}^{(1)}\sin(\alpha)$$

$$M_{x_{1}}^{(2)} = M_{y}^{(2)}\sin(\alpha)$$

$$M_{x_{1}}^{(2)} = M_{y}^{(2)}\sin(\alpha)$$

$$M_{x_{1}}^{(2)} = M_{y}^{(2)}\cos(\alpha)$$

$$(17)$$

Подставив в формулы (15) получим четыре уравнения:

$$EJ_{x_1} = -\frac{1}{2} \frac{M_x^{(1)} \cos(\alpha) l^2}{u_y^{(1)} \cos(\alpha) - u_x^{(1)} \sin(\alpha)}$$
(18)

$$EJ_{y_1} = -\frac{1}{2} \frac{M_x^{(1)} \sin(\alpha) l^2}{u_x^{(1)} \cos(\alpha) + u_y^{(1)} \sin(\alpha)}$$
(19)

$$EJ_{x_1} = -\frac{1}{2} \frac{M_y^{(2)} \sin(\alpha) l^2}{u_y^{(2)} \cos(\alpha) - u_x^{(2)} \sin(\alpha)}$$

$$EJ_{x_1} = \frac{1}{2} \frac{M_y^{(1)} \cos(\alpha) l^2}{u_x^{(2)} \cos(\alpha) + u_y^{(2)} \sin(\alpha)}$$
(20)

Для определения EJ_{x_1} , EJ_{x_1} и α используются уравнения (18)–(20). Уравнение (21) используется для проверки.

Таким образом, имеем систему из трех нелинейных уравнений для определения изгибных жесткостей относительно главных осей и угла поворота главных осей относительно осей лопасти.

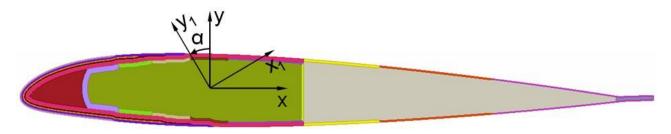


Рис.2.2.1. Оси лопасти (ху) и главные оси моментов инерции сечения (x_1y_1) Для определения жесткости на растяжение используется следующий алгоритм:

1. Решается Задача (3):

$$u_{x}|_{z=0} = u_{y}|_{z=0} = u_{z}|_{z=0} = 0$$

$$(22)$$
 $\varphi_{x}|_{z=0} = \varphi_{y}|_{z=0} = \varphi_{z}|_{z=0} = 0$

$$F_{z}|_{z=1} = 1000_{H} \Gamma_{Z}e$$

 $F_{\rm Z}$ – растягивающее усилие вдоль оси z.

- 2. Определяются перемещение вдоль оси z в точке приложения растягивающей $c_{\rm UJI h} \, u_{\rm Z}$
- 3. Жесткость на растяжение вычисляется по формуле:

$$EA = \frac{F_z l}{u_z} \tag{23}$$

Для определения жесткости на кручение используется следующий алгоритм:

1. Решается Задача (4):

$$u_{x}|_{z=0} = u_{y}|_{z=0} = u_{z}|_{z=0} = 0$$

$$\varphi_{x}|_{z=0} = \varphi_{y}|_{z=0} = \varphi_{z}|_{z=0} = 0$$

$$M_{z}^{(1)}|_{z=1} = 1000_{HMM}$$
(24)

где $M_{\rm z}$ крутящий момент вокруг оси z.

- 2. Определяется угол поворота вокруг оси z в точке приложения крутящего момента φ_{z} .
- 3. Жесткость на кручение вычисляется по формуле:

$$GJ_{P} = \frac{M_{z}l}{\varphi_{2}} \tag{25}$$

Упругие, геометрические и массовые характеристики сечений балочной ЛНВ определяются следующим образом:

- 1) Эквивалентная площадь сечения равна площади поперечного сечения лопасти А.
- 2) Эквивалентный модуль Юнга определяется из жесткости на растяжение:

$$E = \frac{(EA)}{A} \tag{26}$$

3) Главные моменты инерции определяются из жесткости на изгиб:

$$J_{x_{1}} = \frac{EJ_{x_{1}}}{E}$$

$$J_{y_{1}} = \frac{EJ_{y_{1}}}{E}$$
(27)

4) Эффективный коэффициент Пуассона принимается равным 0.3. 5) Эффективный модуль сдвига определяется выражением

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{28}$$

6) Полярный момент инерции определяется из жесткости на кручение

$$GJ_{P} = \frac{(GJ_{P})}{G} \tag{29}$$

7) Для определения эффективной объемной плотности находится масса секции m и объем V, а затем вычисляется их отношение

$$\rho = \frac{m}{v} \tag{30}$$

- 8) Положение центра масс эффективного сечения совпадает с центром масс сечения лопасти.
 - **2.3.** Расчет перемещений лопасти с помощью метода Крейга-Бэмптона На *Рисунке 2.3.1.* представлена конечно-элементная модель лопасти Длина лопасти L = 5.96 м.

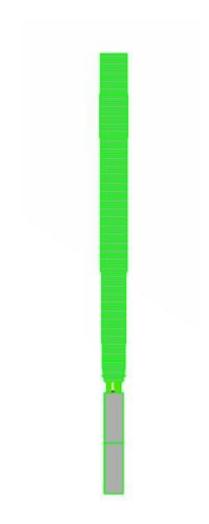


Рис.2.3.1. Конечно-элементная модель лопасти

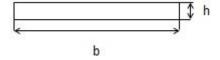


Рис.2.3.2. Прямоугольное сечение лопасти

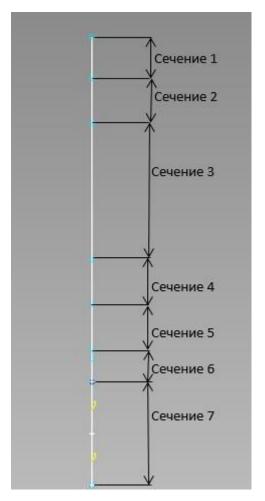


Рис.2.3.3. Разбиение на сечения

Далее, закрепляется интерфейсный узел по всем степеням свободы и производится расчет на собственные частоты методом Крейга-Бэмптона.

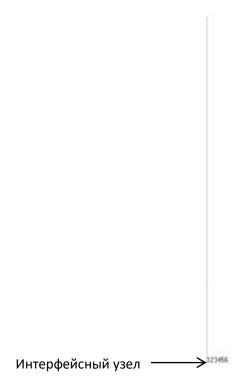


Рис.2.3.4. Модель лопасти и интерфейсные узлы

В Таблице 2 представлены рассчитанные 18 собственных частот для лопасти несущего винта.

Таблица 2

Собственные формы	Собственная частота, Гц
1	2.864701E-05
2	4.790649E-05
3	5.645053E-05
4	1.579408E-04
5	2.148625E-04
6	3.892120E-04
7	3.846915E+00
8	1.269240E+01
9	2.307994E+01
10	2.686529E+01
11	3.107919E+01

12	5.958772E+01
13	7.690033E+01
14	8.176823E+01
15	9.613210E+01
16	1.369215E+02
17	2.390530E+02
18	5.198444E+02

Первые шесть собственных частот нулевые и соответствуют перемещению и вращению лопасти несущего винта как жесткого целого. На Рисунке 2.3.5. представлены собственные формы колебаний лопасти.

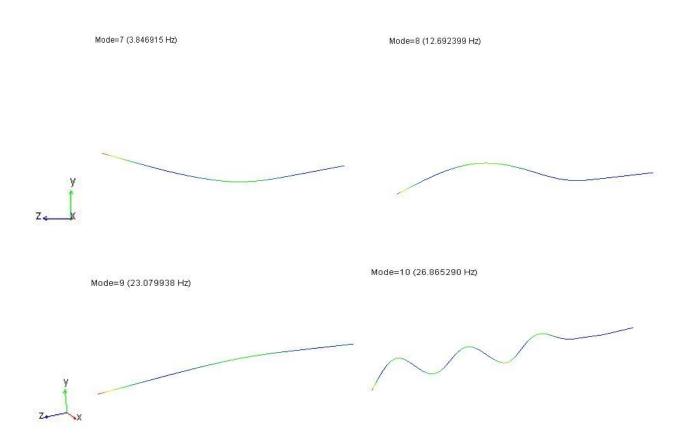


Рис.2.3.5. Собственные формы колебаний лопасти Прикладываемые аэродинамические нагрузки рассчитаны по формулам:

$$Y = \frac{C_{ya}v^2pb_i}{2} \tag{31}$$

Где У - подъемная сила, Н

 $C_{va} = 0.15 - коэффициент подъемной силы$

v – линейная скорость лопасти, м/с

p = 0.91 - плотность воздуха на высоте 3000м, кг/м³

 b_i – хорда і-го сечения лопасти, м

$$X = \frac{C_{xp}v^2pb_i}{2} \tag{32}$$

Где X - лобовое сопротивление, H

 $_{\text{гле}} C_{xp} = 0.009 -$ коэффициент лобового сопротивления

v – линейная скорость лопасти, м/с

p = 0.91 - плотность воздуха на высоте 3000м, кг/м 3

 b_{i} – хорда і-го сечения лопасти, м

Коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления заданы в соответствии с таблицей справочника авиационных профилей для профиля

NACA-0012 . Угол атаки $\alpha = -2^{\circ}$

Полученные аэродинамические силы для і-тых сечений представлены в

Таблице 3 Таблица 3

N	$X_{i, H}$	$Y_{i, H}$
сечения		
	10.4.10	1.10.277
1	10.163	169.377
2	2.879	156.427
3	22.247	370.789
4	2.897	48.279
5	1.854	30.899
6	0.209	3.476

7	0.474	7.899

На *Рисунке 2.3.6*. представлена модель упругой лопасти MBS, с приложенными аэродинамическими силами.



Рис.2.3.6. Модель лопасти MBS

Граничные условия для лопасти — это заделка, позволяющая вращение только вокруг оси Y. Вращение лопасти производится со скоростью w = 12.02 об/сек

Далее была рассчитана динамическая задача с шагом 0.01. Выведены перемещения конца лопасти u_y в зависимости от времени. (*Puc.2.3.7*)

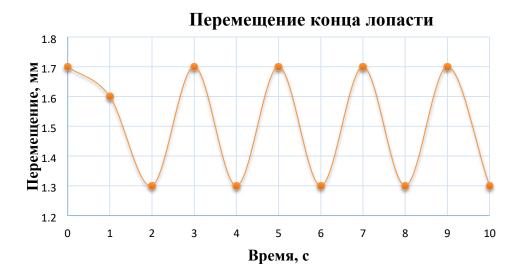


Рис.2.3.7. Перемещения конца лопасти

Перемещения конца лопасти $u_y = 1.734$ мм. Для сверки результатов задача решена методом конечных элементов.

2.4. Расчет перемещений лопасти с помощью метода конечных элементов

Для расчета перемещений методом конечных элементов была поставлена та же задача, что и в предыдущем разделе. Необходимо найти перемещения u_y конца лопасти и сравнить с решением методом Крейга-Бэмптона.

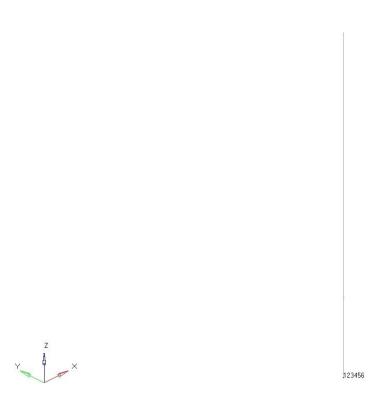


Рис.2.4.1. Постановка задачи

Первым шагом решается задача вращения лопасти вокруг y со скоростью w = 12.02 об/сек. Вторым шагом лопасть нагружается аэродинамическими силами.



Рис.2.4.2. Аэродинамические силы

Полученное распределение перемещений представлено на Рисунке 2.4.3

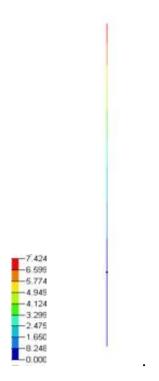


Рис.2.4.3. Распределение перемещений лопасти, мм Получившиеся максимальные перемещения конца лопасти $u_v = 7.424$ мм.

Анализ полученных результатов: перемещения конца лопасти, найденные методом Крейга-Бэмптона и методом конечных элементов в значительно отличаются. Это связано с тем, что в методе Крейга-Бэмптона не было учтено упрочнение лопасти. Так как при вращении на лопасть действует центробежная растягивающая сила, лопасть упрочняется и собственные частоты лопасти увеличиваются. Поэтому аппроксимация перемещений по собственным формам прошла неверно. По этой причине необходимо создавать .mnf файл лопасти с учетом центробежных сил, т.е. с учетом преднапряжения.

ГЛАВА 3. УЧЕТ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА

3.1. Преднапряжение .mnf

В данном разделе описывается использование преднапряжения при создании .mnf файла. Чтобы рассчитать центробежную силу, действующую на элемент лопасти, была использована аналитическая *Формула 33*.

$$F_{\mathsf{I}\mathsf{I}\mathsf{G}} = m_i w^2 r \tag{33}$$

Где r – расстояние до центра вращения, м

w = 12.02 - угловая скорость, об/с

 m_i - массы сечений лопасти

Далее, полученные силы приложены к узлам в конечно-элементной модели.

Рис.3.1.1. Конечно-элементная модель

Результирующая центробежная сила $F_{\text{цб}}$ = 117751.6H

Методом Крейга-Бэмптона с преднапряжением были получены 10 собственных частот лопасти, приведенные в *Таблице 4*.

Таблица 4

Мода	Частота, Гц
1	3.109355E-05
2	1.160988E-04
3	1.466733E-04
4	2.081742E-04
5	1.147095E+01
6	1.242692E+01
7	2.711254E+01
8	3.605019E+01
9	5.103683E+01
10	5.591439E+01

Полученные частоты выше предыдущих, так как лопасть несущего винта упрочняется.

3.2. Решение методом конечных элементов

Для проверки корректности приложенного преднапряженного состояния была решена задача на собственные частоты методом конечных элементов. Была поставлена задача:

Лопасть несущего винта закреплена в центре вращения и задано вращение с угловой скоростью w = 12.02 об/сек вокруг оси y. Первым шагом рассчитывается статическая задача вращения лопасти, вторым шагом рассчитываются собственные частоты методом конечных элементов с преднапряжением центробежной силой от первого шага.





Рис.3.2.1. Конечно-элементная модель

Полученные собственные частоты полностью соответствуют собственным частотам, рассчитанным с помощью метода Крейга-Бэмптона.

Результаты расчета представлены в Таблице 5.

Таблица 5

Мода	Частота, Гц
1	5.051666E+00
2	9.547756E+00
3	1.526490E+01
4	2.344698E+01
5	2.968148E+01
6	3.958425E+01
7	6.059569E+01
8	6.739490E+01
9	8.091143E+01
10	1.042012E+02

Вывод: преднапряжение центробежной силой выполнено корректно, так как результаты полностью сходятся. Следовательно, данный метод применим для решения данной задачи

3.3. Расчет лопасти с преднапряжением методом Крейга-Бэмптона

В MBS модуль был в качестве упругого тела импортирован .mnf файл, в котором учтено преднапряжение центробежными силами. К узлам лопасти приложены аэродинамические силы, центр вращения лопасти закреплен и задана угловая скорость w = 12.02 об/сек вокруг оси y (Puc. 3.3.1.)



Рис.3.3.1. Модель лопасти в MBS постановке

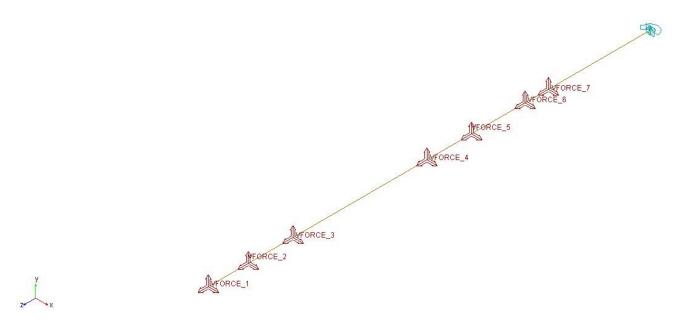


Рис.3.3.2. Модель лопасти в MBS постановке, изометрия

Был проведен динамический расчет в 10 сек с шагом по времени 0.01. Были выведены результирующие перемещения конца лопасти u_y , график зависимости от времени которых представлен на *Рисунке* 3.3.3.

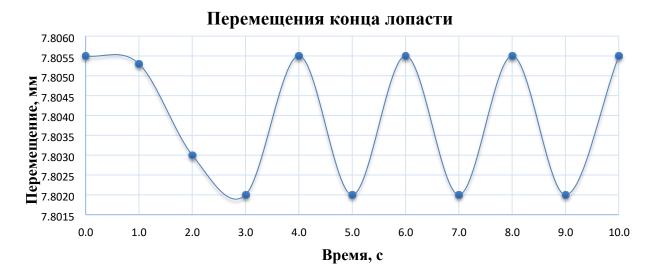


Рис.3.3.3. График перемещений

Полученные результаты для сравнения представлены в Таблице 6.

Таблица 6

Перемещения,	Перемещения,	Относительная
найденные МКЭ, мм	найденные методом	погрешность, %
	Крейга-Бэмптона, мм	
7.424	7.805	5

3.4. Проверка сходимости

Ясно, что результат зависит от количества выбранных собственных частот и форм. Так как перемещения узлов выражаются аппроксимацией собственных форм, то при выборе недостаточного количества частот решение может быть неверным. Поэтому, в данной работе была проведена проверка на сходимость по частотам.

Для количества частот от 4 до 15 был построен график сходимости перемещений конца лопасти.

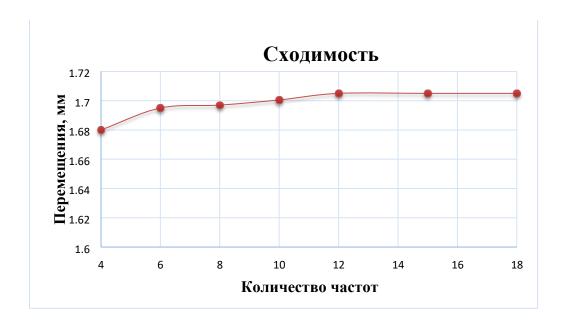


Рис.3.4.1. График сходимости

Вывод: В зависимости от количества частот перемещения конца лопасти сходятся к значению 1.705 мм. Это значит, что в данной работе количество частот выбрано верно, и рассчитывать их больше не имело смысла. Но, в зависимости от сложности конструкции рекомендуется проверять сходимость решения, так как для более сложного случая может потребоваться больше аппроксимирующих форм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной работы были выполнены следующие задачи:

- 1. Решена задача валидации метода Крейга-Бэмптона.
 - На основании полученных результатов был сделан вывод, что метод Крейга-Бэмптона дает решение, совпадающее с аналитическим, следовательно, применим для расчетов в данной работе.
- 2. Решена задача на собственные частоты лопасти методом Крейга-Бэмптона и методом конечных элементов.
 - Собственные частоты лопасти, рассчитанные двумя методами полностью совпадают.
- 3. Двумя данными методами были рассчитаны перемещения конца лопасти. При расчете перемещений были выявлены существенные отклонения в результатах. После проведенного анализа результатов был сделан вывод о том, что при применении метода Крейга-Бэмптона не было учтено упрочнение лопасти, в следствие чего получены неверные перемещения.
- 4. Рассчитаны перемещения лопасти методом конечных элементов и методом Крейга-Бэмптона с учетом упрочнения лопасти центробежной силой.
 - Перемещения конца лопасти, рассчитанные двумя методами, отличаются на 5%, что приемлемо. Следовательно, метод Крейга-Бэмптона дает быстрое и точное решение в сравнении с методом конечных элементов. Это значит, что многочисленные расчеты динамики лопастей несущего винта вертолета будут проводиться в десятки раз быстрее, что способствует эффективности проектирования вертолета.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1. Аэродинамика вертолета/М.Л. Миль М.: Машиностроение, 1996.-229с.
- 2. Аэродинамика вертолетов / Д.И. Базов М.: Книга по Требованию, 2012. 196с.
- 3. Исследование работы лопастей НВ / А.Ю.Лисс Дисс.-Казань, 1974
- 4. Конструкция вертолетов: Учебник для авиационных техникумов / Ю. С. Богданов, Р. А. Михеев, Д. Д. Скулков. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
- 5. Основы летной эксплуатации вертолетов/А. М. Володко-М.: Транспорт,1986.-136с.
- 6. Применение метода синтеза форм для расчета колебаний космического аппарата/С.Н. Дмитриев МГТУ имени Баумана, 2009 15с.
- 7. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. М.: МГТУ им. Баумана, 1999. 592с.
- 8. Теория вертолета/У. Джонсон В 2-х книгах. Пер. с англ.— М.: Мир, 1983. (Авиационная и ракетно-космическая техника). Кн. 1. 502с.
- Adams flex theory[Электронный ресурс].-Режим доступа: https://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC930 4&actp=RSS
- 10. Лопасти несущего винта вертолета[Электронный ресурс]. Режим доступа: http://stroimsamolet.ru/lopasti-nesushhego-vinta-vertoleta/
- 11. Математическое моделирование динамики и нагружения несущего винта транспортного вертолета[Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.khai.edu/csp/nauchportal/Arhiv/OIKIT/2018/OIKIT79/p100-104.pdf
- 12. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.euler.ru/distr/euler/theory/theory.pdf
- 13. Принципы построения общих уравнений динамики упругих тел на основе модели Крейга-Бэмптона и их практически значимых

- приближений[Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=vuu&paperid=342&option_lang=rus
- 14. Справочник авиационных профилей[Электронный ресурс]. Режим доступа: http://kipla.kai.ru/liter/Spravochnic_avia_profiley.pdf
- 15. Сравнительный анализ методов экспериментального подтверждения конечноэлементных динамических моделей конструкции космических аппаратов
 [Электронный ресурс]. Режим доступа:
 https://www.energia.ru/ktt/archive/2016/04-2016/04-02.pdf