



**Высшая школа теоретической механики**

Физико-механический институт

# Поиск эмпирического выражения для определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня на основе численных экспериментов

выполнил Шibaев Степан Сергеевич, группа 5040103/10201

руководитель Иванова Елена Александровна, д.ф.-м.н., профессор ВШТМиМФ

- Вычисление дополнительных модулей упругости (компонент тензора  $V$ ) важно для развития теории стержней. Согласно П. А. Жилину определение тензора  $V$  представляется желательным или даже необходимым. В существующих теориях стержней, не обладающих естественной круткой, зачастую принято, что  $V = 0$ . При этом сравнения с точными решениями трехмерной теории упругости не подтверждают допущения о возможности игнорирования тензора  $V$ , особенно при определении перемещений.
- Цель работы – поиск выражения или зависимости для вычисления дополнительного модуля упругости  $V_{32}$
- Среди задач работы: формулировка теоретических оснований, проведение численного эксперимента, обработка и анализ результатов, сравнение  $V_{32}$  и  $C_2$
- Работа опирается на исследования В. Тимошенко и А. Сударя, в которых был предложен метод для определения  $V_{32}$  с наименьшей погрешностью, а так же высказано предположение о коэффициенте пропорциональности между  $V_{32}$  и  $C_2$

- Потенциальная упругая энергия стержня

$$\rho_0 U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Phi}$$

- Структура тензоров жесткости

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_c} (B_{23} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + B_{32} \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2)$$

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3$$

- Рассматривается задача, в которой участвуют только модули  $A_3$ ,  $C_2$  и неизвестный  $B_{32}$ : криволинейный стержень без естественной крутки заделан на одном конце, на другом же нагружен моментом, как изображено на рисунке 1

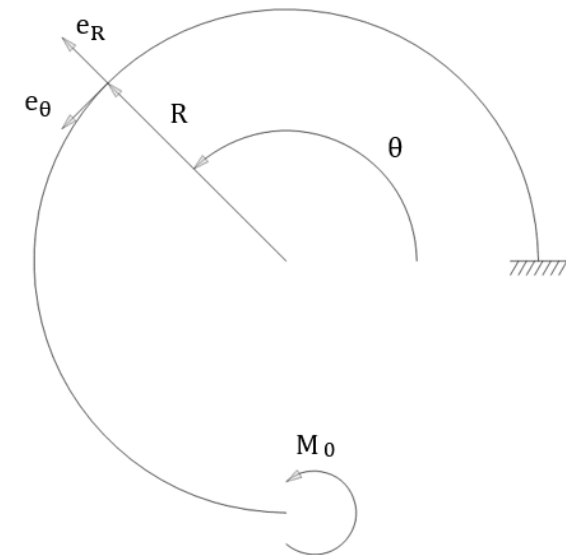


Рис. 1. Постановка задачи

- Записываются уравнения равновесия, соотношения упругости
- Компоненты векторов перемещений и поворота

$$u_n = M_0 R^2 \left( C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3} \right) \left( 1 - \cos \frac{s}{R} \right)$$

$$u_t = M_0 R^2 \left( C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1} \left( \frac{s}{R} - \left( 1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3} \right) \sin \frac{s}{R} \right)$$

$$\psi_b = M_0 s \left( C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1}$$

- Осуществив связь с трехмерной теорией через равенство количества движения и кинетического момента, получим выражения для компонент

$$u_n = -\frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_r^{(3)} \left( 1 - \frac{x}{R} \right) dx dy$$

$$u_t = \frac{1}{ab} \left( 1 - \frac{a^2}{12R^2} \right)^{-1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_\theta^{(3)} \left( 1 - \frac{x^2}{R^2} \right) dx dy$$

$$\psi_b = -\frac{1}{abR} \left( 1 - \frac{a^2}{12R^2} \right)^{-1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_\theta^{(3)} \left( 1 + \frac{12Rx}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{x}{R} \right) dx dy$$

- Для нахождения перемещений проводится численный эксперимент – решается трехмерная задача теории упругости в Ansys аналогичной постановки
- Перемещения получаем в трёх сечениях: в  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\theta = \frac{5}{4}\pi$
- Характеристики стержня:  $R=50$  мм,  $a=20$  мм,  $b=20$  мм.  $E=2e11$  Па,  $\nu=0,3$ ,  $M_0=100$  Нм

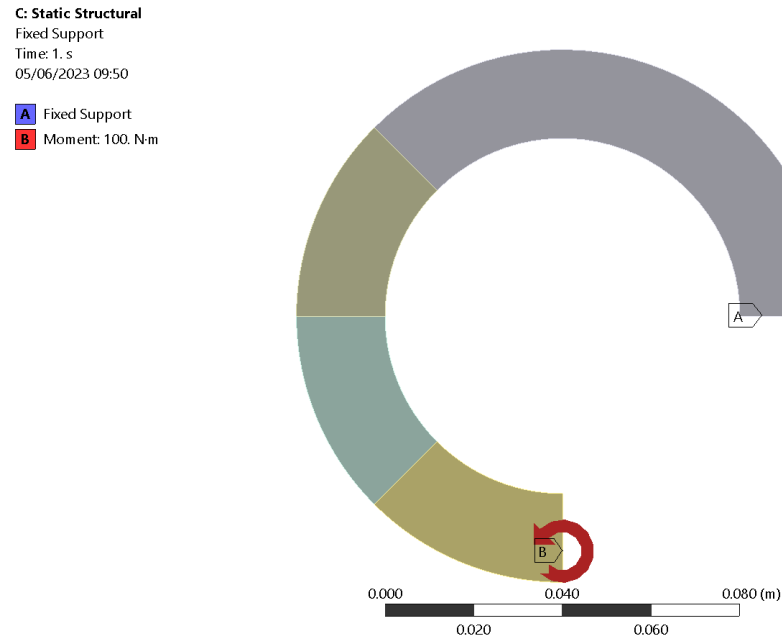


Рис. 2 – Граничные условия (ANSYS)

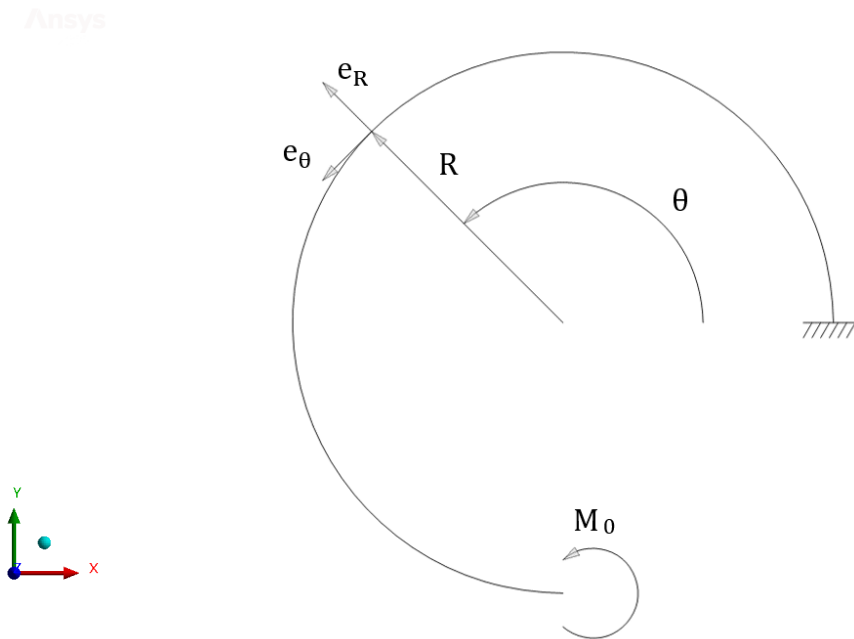


Рис. 3 – Граничные условия

- Было испробовано несколько вариантов нагружения: деформации при нагружении давлением/моментом/моментом с жесткой площадкой практически не отличаются
- Далее было решено использовать нагрузку моментом без жесткой площадки. Размер конечного элемента 1 мм
- На рисунках приведены распределения деформация по стержню и в конкретном сечении  $\theta = \frac{3}{4}\pi$

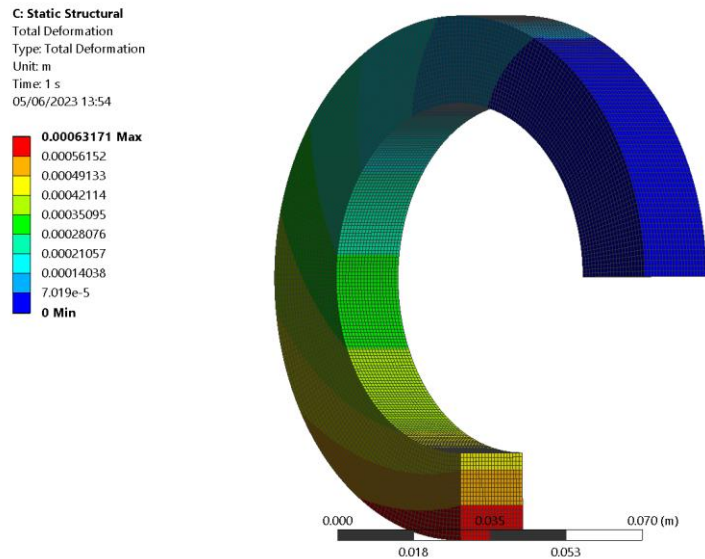


Рис. 4 – Деформация после расчета в ANSYS

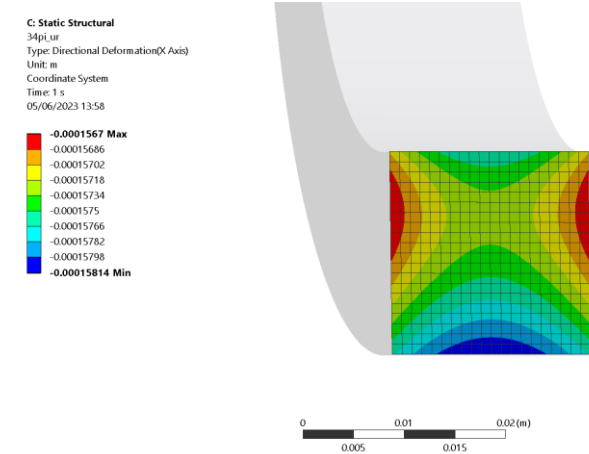


Рис. 5 – Перемещения  $u_R$  в сечении  $\theta=3/4\pi$

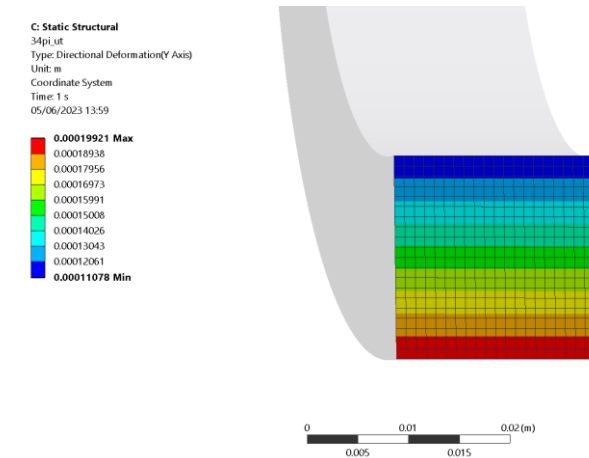


Рис. 6 – Перемещения  $u_t$  в сечении  $\theta=3/4\pi$

- После расчета в Ansys координаты узлов и перемещения в сечениях экспортированы в Scilab
- В качестве меры сгущения сетки (для увеличения точности вычисления интегралов), а также для обеспечения регулярности, проведена интерполяция
- Ниже построены перемещения в сечении на сетке узлов Ansys (41 узел на сторону) и интерполированной до 200 узлов на сторону сечения

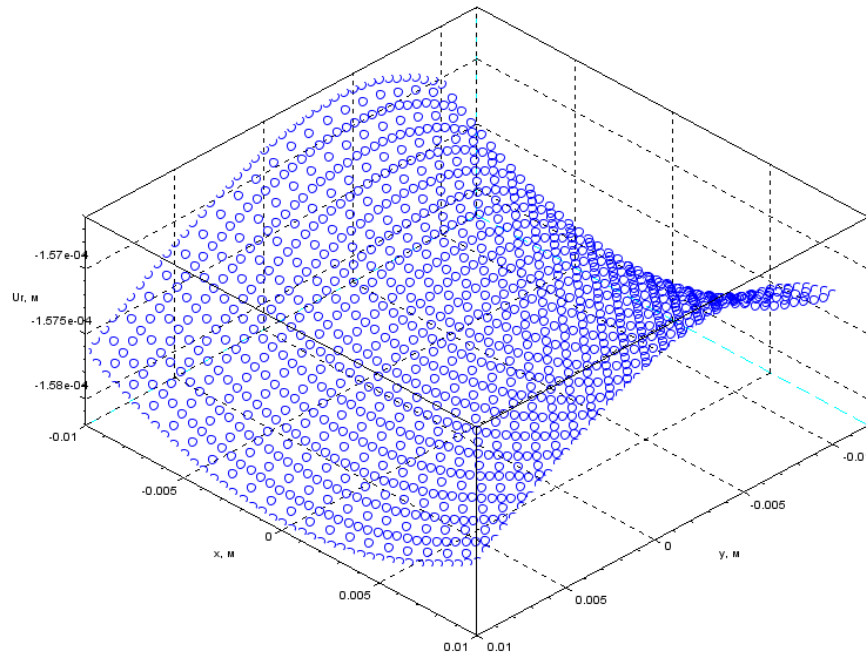


Рис. 6 – Перемещения  $u_r$  в сечении  $\theta=3/4 \pi$

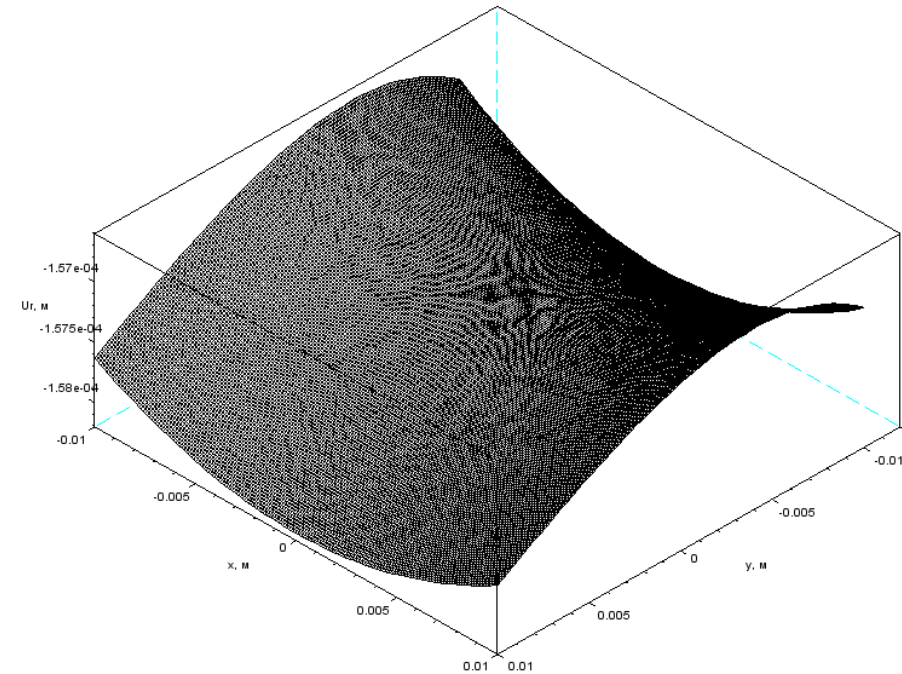


Рис. 7 – График перемещений  $u_r$  после интерполяции в сечении  $\theta=3/4 \pi$

- Дополнительно был реализован простой метод интегрирования триангулированной поверхности на основе суммирования «объемов призм». Это позволит вычислять интегралы для сечений любой формы и избавит от необходимости создавать регулярную сетку
- Использовалась библиотека Scilab CGLAB, набор узлов триангулирован методом Делоне

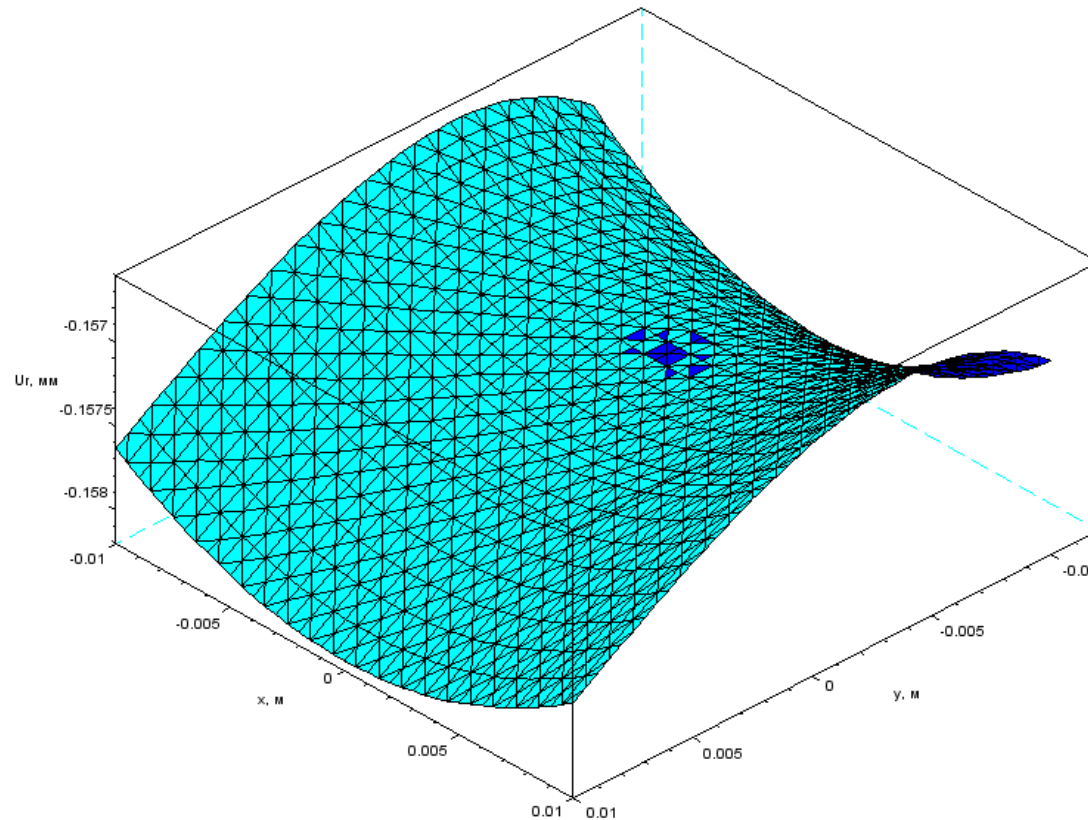


Рис. 8 – Триангуляция Делоне для интегрирования перемещений в сечении  $\theta=3/4 \pi$



- На интерполированной сетке численно найдены интегралы для определения компонент векторов перемещений и поворота (слайд 4)
- Как видно, значения, вычисленные методом трапеций, и на основе триангуляции отличаются не сильно, однако далее увидим, что эта разница существенно влияет на конечный результат

Таблица 1 – Компоненты векторов перемещений и поворота для стержня квадратного сечения 20x20 мм (интерполяция)

Сечение	$\theta = 3/4 \pi$	$\theta = 4/4 \pi$	$\theta = 5/4 \pi$
$u_n$ (интерполяция), мм	0.000157335	0.00015499	0.004419231
$u_t$ (интерполяция), мм	0.000185091	0.000294141	0.005901444
$\psi_b$ (интерполяция), рад	0.000158658	0.000433829	0.007375522

Таблица 2 – Компоненты векторов перемещений и поворота для стержня квадратного сечения 20x20 мм (триангуляция)

Сечение	$\theta = 3/4 \pi$	$\theta = 4/4 \pi$	$\theta = 5/4 \pi$
$u_n$ (триангуляция), мм	0.000157335	0.000154985	0.00442210
$u_t$ (триангуляция), мм	0.000185090	0.000294135	0.00590132
$\psi_b$ (триангуляция), рад	0.000158658	0.000433815	0.00737207

- В предыдущих исследованиях при поиске лучшего метода определения  $V_{32}$  часто возникали комплексные значения. Поэтому, прежде чем вычислить непосредственно  $V_{32}$  был проведен дополнительный численный эксперимент с «распрямым стержнем» для нахождения модуля  $C_2$  на основе эксперимента
- Выражения для компонент векторов перемещений и поворота в такой задаче существенно упрощаются

$$u_n = \frac{M_0 s^2}{2C_2} \quad \psi_b = \frac{M_0 s}{C_2}$$

- Как видно, значения, полученные экспериментально, практически не отличаются от аналитического. При этом, опять же, далее увидим, что даже небольшие различия существенно влияют на конечный результат

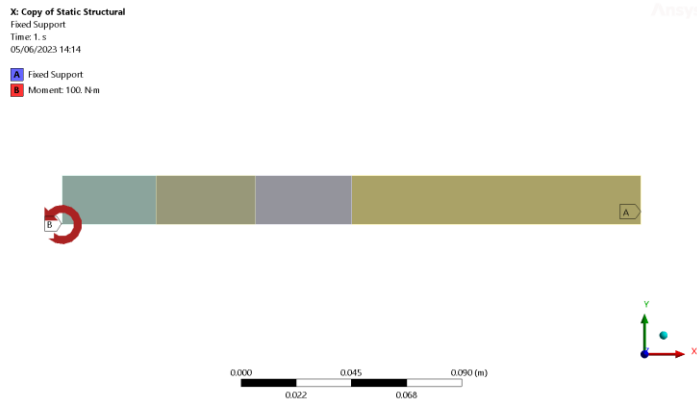


Рис. 9 – Граничные условия задачи с распрямым стержнем (ANSYS)

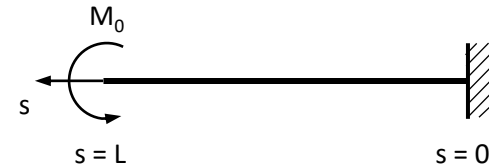


Рис. 10 – Граничные условия задачи с распрямым стержнем

Таблица 3 – Значения модуля  $C_2$ , определенные экспериментально и аналитически

Сечение	$s = \frac{3\pi}{4} R$	$s = \pi R$	$s = \frac{5\pi}{4} R$	Аналитически
$C_2$	2.6865e9	2.6817e9	2.6787e9	2.6667e9

- Теперь, используя полученные компоненты  $u_n, u_t, \psi_b$  можем вычислить  $B_{32}$
- Метод, дающий наиболее точные результаты был определен в предыдущих работах. Он предполагает использование коэффициента  $\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3}\right)^{-1}$  и компоненты  $\psi_b$
- Таким образом, используем формулу: 
$$B_{32} = \sqrt{\left(R^2 A_3 \left(C_2 - \frac{M_0 s_*}{\psi_b(s_*)}\right)\right)}$$
- Модули  $A_3$  и  $C_2$  вычисляем следующим образом:  $A_3 = EF$        $C_2 = EI$        $C_2$  (экспериментально)
- В таблицах 4 и 5 видим результаты и то, о чем говорилось ранее – использование экспериментального  $C_2$  изменяет результаты и значительно снижает погрешность относительно среднеарифметического

Таблица 4 – Значения  $B_{32}$  при аналитическом значении  $C_2$ 

Сечение	$\theta = 3/4 \pi$	$\theta = 4/4 \pi$	$\theta = 5/4 \pi$	Среднее
$B_{32}$ (триа.)	714.922902	989.518727	805.198545	836.546724
$B_{32}$ (четыр.)	406.020580	995.118286	947.456257	782.865041

Таблица 5 – Значения модуля  $B_{32}$  на основе экспериментального  $C_2$ 

Сечение	$\theta = 3/4 \pi$	$\theta = 4/4 \pi$	$\theta = 5/4 \pi$	Среднее
$B_{32}$ (триа. эксп.)	20519263.53	20016275.99	18107717.71	19547752.41
$B_{32}$ (четыр. эксп.)	20369187.03	20040280.97	18223494.62	19544320.87

- Чтобы попытаться выявить зависимость аналогично были вычислены  $V_{32}$  для еще нескольких стержней прямоугольного сечения. Для стержня наибольшего сечения был задан момент 150 кНм вместо 100 Нм для остальных

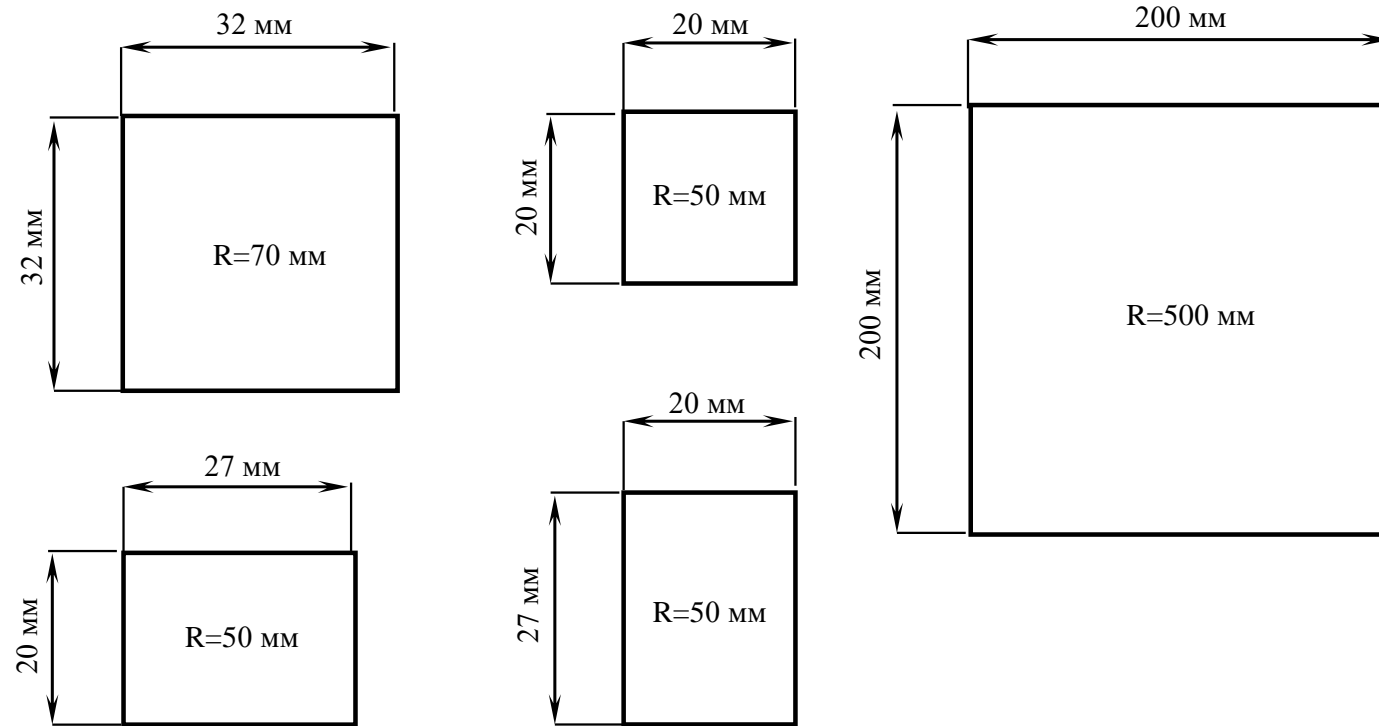


Рис. 11 – Сечения исследуемых стержней

- В результате аналогичных расчетов получили значения искомого модуля и для других сечений
- Комплексные корни при использовании аналитического  $C_2$  получили только для стержня №2
- В таблице 6 ниже приведены результаты и сравнение с  $C_2$ , видим, что в среднем коэффициент пропорциональности близок к 0,7. Это достаточно близко к результатам прошлых работ, где аналогичный коэффициент пропорциональности был равен 0,6. При этом важно отметить заметную «нестабильность» результатов. В будущем было бы полезно провести аналогичные изыскания, обратив особое внимание на численные аспекты, а также рассмотреть сечения иной формы

Таблица 6 – Соотношения усредненных  $V_{32} / C_2$

№	Характеристики стержня	$V_{32}$ (три.)/ $C_2$	$V_{32}$ (четыр.)/ $C_2$	$V_{32}$ (три. эксп.)/ $C_2$ (эксп.)	$V_{32}$ (четыр. эксп.)/ $C_2$ (эксп.)
1	R=50 мм, b=20 мм, a=20 мм	0.30	0.30	0.73	0.73
2	R=50 мм, b=27 мм, a=20 мм	0.18	0.18	0.74	0.74
3	R=50 мм, b=20 мм, a=27 мм	0.47	0.47	0.69	0.69
4	R=70 мм, b=32 мм, a=32 мм	0.40	0.39	0.73	0.73
5	R=500 мм, b=200 мм, a=200 мм	0.30	0.30	0.73	0.73

Спасибо за внимание.