

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

_____ А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ SOLID ЭЛЕМЕНТОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ
СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

По направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Профиль

01.03.03_03 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил

Студент гр. 5030103/90301

Бенюх М.А.

Руководитель

Профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Иванова Е.А.

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Бенюху Максиму Александровичу, гр. 5030103/90301

1. Тема работы: Конечно-элементное моделирование с использованием SOLID элементов с вращательными степенями свободы.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы, справочная литература.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): анализ SOLID элементов с вращательными степенями свободы, представленных в Ansys, исследовать моменты, которые позволяют получить SOLID элементы с вращательными степенями свободы, провести сравнение результатов решения задач с разными элементами, рассматривая перемещения и напряжения, анализ влияния абсолютно твёрдого тела присоединенного на конце на напряженно деформируемое состояние вблизи края приложения нагрузки.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: отсутствуют.
7. Дата выдачи задания 27.02.2023

Руководитель ВКР: _____ Е. А. Иванова, профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: _____ М. А. Бенюх

РЕФЕРАТ

На 30 с., 9 рисунков, 20 таблиц.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ANSYS, SOLID73, SOLID72, SOLID185, SHELL181, СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В данной работе рассматривается задача определения оптимального конечного-элемента для проведения численных расчетов конструкций остается актуальной с самого зарождения метода КЭМ. Каждый инженер расчетчик стремится проводить КЭМ расчёты и подобрать элемент так, чтобы за меньшее время было получено максимальное соответствие модели реальному поведению объекта исследования. Поэтому проведение исследования и сравнительного анализа решения задач с различными конечными элементами является действительно важной задачей, ведь такие задачи решают проблему выбора оптимального элемента. Проведено сравнение распределения моментов в сечении и анализ напряженно деформированного состояния. Суммарные моменты в сечении соответствуют теории оболочек и пластин с погрансойным эффектом. Анализ напряжений и перемещений показал наличие разницы в расчетах с применением элемента SOLID73 с шестью степенями свободы и SOLID185 с тремя степенями свободы. Итогом сравнения полученных данных с эталонным расчетом, выполненным с применением SHELL181 для тонкостенной конструкции, стало выявление области практической значимости применения элемента SOLID73, дающего более точное решение вблизи заделки.

THE ABSTRACT

30 pages, 9 pictures, 20 tables

**MATHEMATICAL MODELING, FINITE ELEMENT MODELING,
ANSYS, SOLID73, SOLID72, SOLID185, SHELL181, COMPARATIVE
ANALYSIS**

In this paper, we consider the problem of determining the optimal finite element for numerical calculations of structures remains relevant since the inception of the FEM method. Every computational engineer strives to carry out FEM calculations and to select an element so that the maximum conformity of the model to the real behavior of the object under study is obtained in the least time. Therefore, it is a really important task to carry out research and comparative analysis of solving problems with different finite elements, because such problems solve the problem of choosing the optimal element. The distribution of moments in a section and the analysis of the stress-strain state are compared. The total moments in the section correspond to the theory of shells and plates with the boundary effect. Analysis of stresses and displacements showed a difference in calculations using SOLID73 element with six degrees of freedom and SOLID185 element with three degrees of freedom. The result of comparing the data obtained with a reference calculation performed using SHELL181 for a thin-walled structure has revealed the area of practical importance of using the SOLID73 element which gives a more accurate solution near the embedment.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ SOLID-ЭЛЕМЕНТОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ ANSYS.....	7
1.1 Элементы, представленные в программном пакете ANSYS	7
1.2. SOLID72	7
1.3. SOLID73	8
1.4. Сведения о конечном элемента	9
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ, ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ	11
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В SOLID- ЭЛЕМЕНТАХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.....	15
ГЛАВА 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ХОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С РАЗНЫМИ ТИПАМИ ЭЛЕМЕНТОВ	18
4.1. Методика сравнения	18
4.2. Анализ возникающих перемещений и напряжений.....	19
4.3 Валидация расчетов	27
4.4 Область практической применимости SOLID73	30
ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПРИСОЕДИНЕННОГО НА КОНЦЕ НАГРУЖАЕМОГО ОБЪЕКТА, НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ КРАЯ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ	32
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	34
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	36

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире вычислительная механика играет важную роль в решении множества задач, связанных с напряженно-деформированным состоянием различных конструкций и объектов. Конечно-элементное моделирование (МКЭ) – это метод численного решения прикладных физических задач, при котором тело-конструкция разбивается на конечное число элементов. Для каждого такого элемента решается соответствующий набор уравнений, описывающих его поведение и взаимодействие с соседними элементами. Задача определения оптимального конечного-элемента для проведения численных расчетов конструкций остается актуальной с самого зарождения метода КЭМ. Каждый инженер расчетчик стремится проводить КЭМ расчёты и подобрать элемент так, чтобы за меньшее время было получено максимальное соответствие модели реальному поведению объекта исследования. Поэтому проведение исследования и сравнительного анализа решения задач с различными конечными элементами является действительно важной задачей, ведь такие задачи решают проблему выбора оптимального элемента. Зачастую при первой итерации рассмотрения конечных элементов принято обращаться к документации, где ожидается увидеть характеристики и описание элемента, с указанием области его применимости. Однако при рассмотрении конечных элементов с вращательными степенями свободы, которые относятся к экспериментальным, оказывается, что в документации практически отсутствует информация о специфике и области применения данных элементов, что дополнительно побуждает к изучению свойств и вклада элемента в результаты моделирования с его применением. Из первичной информации о данном элементе с вращательными степенями свободы ожидается, что задачи решаемы с данным элементом будут давать более точный результат в случае рассмотрения вращательных нагрузок на моделируемый объект. И исходя из совокупности всех перечисленных факторов справедливо утверждать, что проведение данного исследования будет являться актуальным для части сообщества механиков, использующих Ansys с целью конечно-элементного моделирования. Целью данной работы является сопоставление результатов моделирования напряженно-

деформированного состояния тел вследствие применения SOLID-элементов с вращательными степенями свободы и без них. Чтобы достигнуть цели в данной работе, в рамках проводимого исследования будут рассмотрены следующие вопросы:

1. Анализ SOLID-элементов с вращательными степенями свободы, представленными в программном пакете Ansys;
2. Исследование моментов, возникающих в SOLID-элементах с дополнительными степенями свободы;
3. Сопоставление результирующих перемещений и напряжений в ходе решения задач с разными типами элементов
4. Анализ влияния абсолютно твердого тела, присоединенного на конце нагружаемого объекта, на напряженно-деформированное состояние вблизи края приложения нагрузки.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ SOLID-ЭЛЕМЕНТОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ ANSYS

1.1 Элементы, представленные в программном пакете ANSYS

Первое, с чем необходимо определиться при исследовании и сравнение элементов – это с выбором пары элементов идентичных по своим характеристикам и свойствам так, что различны они будут только в количестве степеней свободы. Начнем с поиска элементов с вращательными степенями свободы, а после этого найдем соответствующую пару с 3 степенями свободы [11]. В документации программного пакета Ansys упоминаются два конечных элемента с вращательными степенями свободы, это SOLID72 и SOLID73 [3]. Далее были найдены соответствующие восьми узловой SOLID185 и четырех узловой SOLID187 соответствующие SOLID73 и SOLID72. Ввиду того, что экспериментальные элементы являются экспериментальными есть трудности в их отображении ведь применение элементов возможно только вызовом их через команды ADPL. В итоге оказалось удобнее работать с парой элементов SOLID73 и SOLID185, поэтому выберем их для проведения дальнейшего сравнительного анализа.

1.2. SOLID72

SOLID72 – элемент определяется четырьмя узлами, имеющими шесть степеней свободы в каждом узле: перемещения в узловых направлениях x , y и z и повороты вокруг узловых направлений x , y и z .

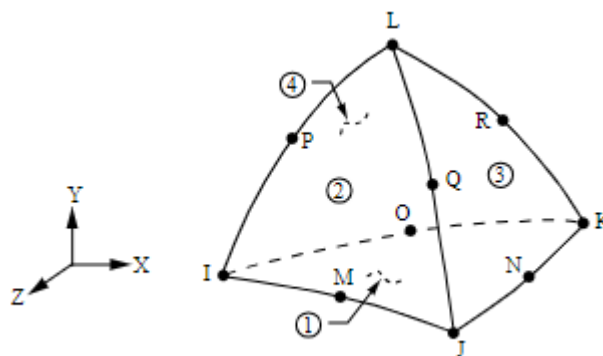


Рис.1. Четырех узловой конечный элемент SOLID72

Элемент также имеет способность к усилению жесткости. Помимо узлов, входные данные элемента включают свойства ортотропного материала. Направления ортотропного материала соответствуют направлениям координат элемента. SOLID72 использует смешанную (или гибридную) схему с постоянными сдвиговыми деформациями, что приводит к некаркасной инвариантности матрицы жесткости элемента. Элемент не должен иметь нулевой объем. Следует соблюдать осторожность при приложении силовых нагрузок и ограничений перемещения к этому твердотельному элементу со степенями свободы вращения. Для получения однородных результатов приложенные моменты должны сопровождать приложенные силы, и, где это уместно, должны применяться ограничения вращательного смещения.

1.3. SOLID73

В свою очередь SOLID73 используется для трехмерного моделирования твердотельных конструкций.

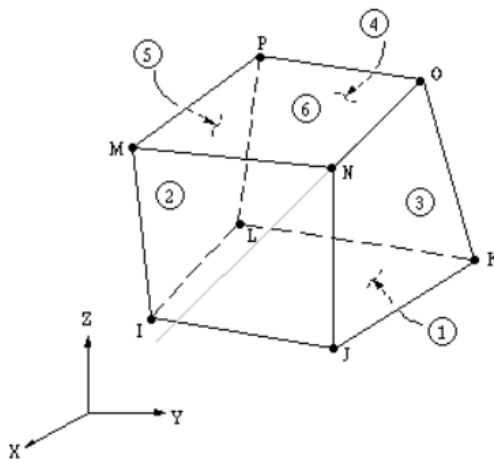


Рис.2. Восьми узловой конечный элемент SOLID73

Элемент определяется восемью узлами, имеющими шесть степеней свободы в каждом узле, аналогично четырех узловому тетраэдрическому элементу (SOLID72): перемещения в узловых направлениях x , y и z и повороты вокруг узловых осей x , y и z . Элемент определяется восемью узлами и свойствами ортотропного материала. Элемент в форме тетраэдра может быть сформирован путем определения одинаковых номеров узлов для узлов M , N , O

и P; и узлы K и L. Можно также сформировать клиновидный элемент и пирамидальный элемент. Направления ортотропного материала соответствуют направлениям координат элемента. Следует соблюдать осторожность при приложении силовых нагрузок и ограничений перемещения к этому твердотельному элементу со степенями свободы вращения.

1.4. Сведения о конечном элементе

Рассмотрим правила получения конечного элемента на примере плосконапряженного состояния тонкой пластики, затем напишем функции форм для 8 узлового элемента. Итак, обычно конечный элемент определяется узловыми точками 1, 2, 3, и т. д. и прямолинейными границами. Пусть перемещения любой точки внутри элемента задаются вектором столбцом

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_m, \dots] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Где компоненты $[N]$ являются в общем случае функциями форм, а $\{\delta\}^e$ представляют собой перемещения узловых точек. Тогда вектор столбец выглядит так [1]:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Он содержит горизонтальное и вертикальное перемещение типичной точки внутри элемента, а столбец

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Содержит соответствующие узловые перемещения узла i .

Функции $N_i N_j N_m$ должны быть выбраны таким образом, чтобы, подставляя в уравнение (1) координат узлов получались узловые перемещения. В общем случае

$$N_i(x_i, y_i) = E \quad (4)$$

$$N_i(x_j, y_j) = N_j(x_m, y_m) = 0 \quad (5)$$

Это удастся получить благодаря выбору линий относительно x и y функций.

В данном случае для 8 узлового элемента интерполяционный полином будут иметь следующий вид:

$$u = A + Bx + Cy + Dz + Uxn + Fxz + Пня + Hxyz \quad (6)$$

И для каждого узла будут следующие функции форм:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz) \quad (7)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1 + x + y - z + xy - xz - yz - xyz) \quad (8)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1 + x - y + z - xy + xz - yz - xyz) \quad (9)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1 + x - y - z - xy - xz + yz + xyz) \quad (10)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1 - x + y + z - xy - xz + yz - xyz) \quad (11)$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1 - x + y - z - xy + xz - yz + xyz) \quad (12)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1 - x - y + z + xy - xz - yz + xyz) \quad (13)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1 - x - y - z + xy + xz + yz - xyz) \quad (14)$$

Для нахождения же перемещений при использовании метода конечных элементов отыскивается минимум полной потенциальной энергии среди возможных перемещений заданной формы, то есть решают уравнение (15) [3].

$$d(U + W) = d\{\chi\} = 0, \quad (15)$$

где U – энергия деформации конструкции, W – потенциальная энергия внешней нагрузки, а χ называют потенциальной энергией.

Хоть и требуется минимизировать функционал χ в некоторой области. Но величину χ определяют в виде интеграла по области V и части границы S , на которой неизвестные функции $\{\phi\}$ или ее производны [4]:

$$\chi = \int_V f\left(\{\phi\}, \frac{\delta}{\delta x}\{\phi\}, \dots\right) dV + \int_S g\left(\{\phi\}, \frac{\delta}{\delta x}\{\phi\}, \dots\right) dS \quad (16)$$

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ, ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для проведения исследования необходимо конкретно сформулировать базовые примеры, на которых будет корректно рассматривать поведение результатов расчета с использованием разные элементов, такие задачи нужно подобрать так чтобы была возможность раскрыть ключевые свойства исследуемых элементов. В данном случае ожидается что с использованием элемента с вращательными степенями свободы будут возникать полезные, то есть позволяющие получить более точные результаты по сравнению с моделированием с использованием SOLID185 – твердотельным элементов без дополнительных степеней свободы. Таким образом выберем наиболее часто встречающиеся условия нагружения, а именно крутящий момент вокруг оси OZ, далее называемый «момент MZ», изгибающий момент вокруг оси OX, далее называемый «момент MX», вертикальная изгибающая сила вдоль оси OY, далее называемой «сила FY». С другой стороны модели установим граничное условие жесткого закрепления – заделку [2]. Теперь стоит озаботиться вопросом выбора модели, к которой будем прикладывать нагрузки. Оптимально выбрать модели, хорошо изученные в общем случае, такую модель для которой существует множество теорий моделирующие выше названные нагрузки, которыми в свою очередь можно будет воспользоваться для подтверждения качества проведения эксперимента. Поэтому выберем в качестве модели стержень круглого сечения – цилиндр, моделируемого в качестве деформируемого твердого тела с модулем Юнга равным 10^7 . Причем разнообразим модель используя разные типы цилиндров: тонкостенный, толстостенный, полный [12]. Параметры цилиндру зададим следующие: длина будет равна 2м, внешний диаметр 200мм, в случае тонкостенного – ширина стенки будет равна 2мм, а в случае толстостенного цилиндра внутренний диаметр будет равен 150мм. При задании данных параметров цилиндр соответствует теориям применимым для толстостенных, тонкостенных и полных стержней. Так можно рассмотреть тенденции распространение напряжений, перемещений, моментов наблюдаемых в сечении в последствии приложения сил и моментов. Также, чтобы уменьшить и отделить

ошибки, связанные с приложением граничных условий, введем дополнительную жесткую проставку, между гранью приложения нагрузки и самой прикладываемой нагрузкой. Жесткая проставка будет представлять из себя абсолютно твердое тело, которое будет моделироваться из упругого деформируемого твердого тела с завышенным модулем Юнга, установленного равным 10^{17} , который является свойством материала, показывающим способность материала к сопротивлению растяжению и сжатию. Данную проставку будем рассматривать в 1, 2, 3 задаче (таблица 1, 2, 3), где первая задача учитывает момент MZ , вторая задачу учитывает момент MX , третья задачу учитывает силу FY .

Таблица 1.

Задача 1, 2, 3. Для полного цилиндра

		
Приложение нагрузки типа: крутящий момент MZ	Приложение нагрузки типа: изгибающий момент MX	Приложение нагрузки типа: вертикальная сила FY

Таблица 2.

Задача 1, 2, 3. Для толстостенного цилиндра

		
Приложение нагрузки типа: крутящий момент MZ	Приложение нагрузки типа: изгибающий момент MX	Приложение нагрузки типа: вертикальная сила FY

Таблица 3.

Задача 1, 2, 3. Для тонкостенного цилиндра

		
Приложение нагрузки типа: крутящий момент MZ	Приложение нагрузки типа: изгибающий момент MX	Приложение нагрузки типа: вертикальная сила FY

Таким образом мы моделируем те же граничные условия, но уже другим способом. То есть главный вектор и момент точно также распространится внутрь цилиндра, а значит действительно моделируется та же нагрузка, но уже при исследовании исключаются искажения, вызванные граничными условиями. К задачам 4, 5, 6 отнесем аналогичные нагрузки, но уже приложенные к грану цилиндра, без дополнительной проставки в виде абсолютно твёрдого тела. Тогда в ходе исследования проведём сравнительный анализ на примере решения задач 1, 2, 3, 4, 5, 6 для трех типов цилиндров. Визуализация граничных условий, поставленных в задачах 4, 5, 6 расположена в таблицах 4, 5, 6.

Таблица 4.

Задача 4, 5, 6. Для полного цилиндра

		
Приложение нагрузки типа: крутящий момент MZ	Приложение нагрузки типа: изгибающий момент MX	Приложение нагрузки типа: вертикальная сила FY

Таблица 5.

Задача 4, 5, 6. Для толстостенного цилиндра

		
Приложение нагрузки типа: крутящий момент MZ	Приложение нагрузки типа: изгибающий момент MX	Приложение нагрузки типа: вертикальная сила FY

Таблица 6.

Задача 4, 5, 6. Для тонкостенного цилиндра

		
Приложение нагрузки типа: крутящий момент MZ	Приложение нагрузки типа: изгибающий момент MX	Приложение нагрузки типа: вертикальная сила FY

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОМЕНТОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В SOLID-ЭЛЕМЕНТАХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Наиболее интересные результаты для рассмотрения будут наблюдаться вблизи края приложения нагрузки, ведь именно там ожидаются наибольшие, вызванные вращательными движениями, перемещения.

Действительно, рассматривая поле суммарных моментов, рассчитываемых по формуле (17) из результатов, полученных в осях OX, OY, OZ:

$$\text{Summ moment} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}, \quad (17)$$

Можно сделать вывод, что, как и ожидалось, использование элемента с 6 степенями свободы позволяет получить согласующуюся с теорией распределение моментов в сечении (таблица 1), так, например при рассмотрении полного цилиндра под действием момента MZ наблюдается погранслоный эффект (таблица 7).

Таблица 7.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой MZ

Сечение XZ полного цилиндра	Сечение XZ тонкостенного цилиндра	Сечение XZ толстостенного цилиндра

Наибольшие значения моментов сосредоточены у границ продольной оси стержня, наименьшие же значения внутри области. Данный эффект в достаточной мере согласуется с теорией оболочек и пластин, где считается, что всегда внутри области очень хорошо работают безмоментные решения, а влияние моментов проявляется в погранслоном эффекте [10]. Кроме этого, с полученными результатами эксперимента, хорошо согласуется известный показатель в теории оболочек о том, что на расстоянии две толщины пластины

этот погранслоный эффект затухает, что означает, что действительно пиковые значения моментов ожидаются вблизи края.

Аналогично, рассматривая задачу изгибающего момента M_X , становится понятно, что моменты концентрируются у конца цилиндра и в малой, но значимой по величине части у заделки (таблица 8).

Таблица 8.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой M_X

Сечение XZ полного цилиндра	Сечение XZ тонкостенного цилиндра	Сечение XZ толстостенного цилиндра

Что также соответствует тенденциям, наблюдаемым в теории оболочек. И окончательно получаем подтверждение сделанным выводам, рассмотрев распределение моментов под действием вертикальной силы F_Y (таблица 9).

Таблица 9.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой F_Y

Сечение XZ полного цилиндра	Сечение XZ тонкостенного цилиндра	Сечение XZ толстостенного цилиндра

Погранслоный эффект также проявляется, но уже пиковые значения поля моментов в данном случае сосредоточены у продольных границ вблизи заделки. При этом также у продольных границ на грани приложения силы ненулевые значения моментов. Во всей остальной области значения минимальны по

сравнению с описанными ранее пиковыми значениями. Аналогичная картина наблюдается при рассмотрении тонкостенных и толстостенных цилиндров, где по своей сути вырезана в определенном объеме часть тела, в которой влияния моментов незначительны. Стоит отметить, что используя SOLID185 не возможно получить методами ANSYS информацию о значениях моментов в элементах сетки, что делает SOLID73 полезным для задач, в которых важно понимание распределения моментов в области конструкции. К таким задачам можно отнести случаи, где важно заблокировать вращение краев конструкции, тогда можно использовать материал устойчивый к вращательным нагрузкам ближе к краю изделия, а более экономичный обладающий уже другими эффектами размесить в сердцевине. Что вновь доказывает необходимость изучения свойств материалов, конструкций и трендов их поведения с целью создавать более совершенные конструкции.

ГЛАВА 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ХОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С РАЗНЫМИ ТИПАМИ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1. Методика сравнения

Чтобы сопоставить результаты необходимо, выбрать единый подход к съему данных. Первоначально предполагалось рассмотреть максимальные полученные значения, но оказалось, что от расчёта к расчёту в разных постановках максимальные значения по модели оказывались в разных точках, что вполне объяснимо ввиду разной геометрии и вследствие чего отличающейся расчётной сеткой [15]. Поэтому было принято решение проводить сравнение результатов в одних и тех же точках, для этого выберем восемь точек, будем осуществлять привязку по координатам, чтобы не зависеть от элемента и геометрии. Выбраны четыре внешние точки: крайняя верхняя, нижняя, левая и правая точка. В случае тонкостенного и толстостенного цилиндра выбраны дополнительно 4 внутренние точки соответствующе выбору точек на внешней границе. Далее таким образом протянем вдоль продольной оси цилиндра – по OZ точки и получим 8 линий, и с каждой получим 100 точек для сравнения по длине цилиндра.

Полученные таким образом перемещения и напряжения будут сравниваться при помощи рассмотрения относительной разницы между соответствующими точками, исследуемых задач.

Так будем рассматривать сначала распределение перемещений, вычисленных по формуле (18) из полученных значений по направлениям расчётных координат OX, OY, OZ [5].

$$Total\ deformation = \sqrt{U_X^2 + U_Y^2 + U_Z^2}, \quad (18)$$

Комбинаторика постановок задач, по которым построены графики относительных ошибок, следующие:

1. Нагрузка приложена к жесткой абсолютно твердой проставке, прикрепленной к грани цилиндра;
2. Нагрузка приложена непосредственно к грани цилиндра;
3. Расчёт с использованием SOLID73 с 6 степенями свободы;
4. Расчет с использованием SOLID185 с 3 степенями свободы;

4.2. Анализ возникающих перемещений и напряжений

Итак, перейдем к анализу напряженно деформируемого состояния.

Рассматривая относительные ошибки по суммарным перемещениям под действием момента MZ , можно сделать следующие выводы [13]:

1. Для полного цилиндра отклонения по перемещениям минимальны, не более 0,2 процента, максимум разницы наблюдается в случае сравнения приложения нагрузки к грани с использованием в расчете SOLID73 или SOLID185 (таблица 10). Практически для всех комбинаций результатов наблюдается возрастание ошибки вблизи приложения нагрузки;

Таблица 10.

Относительные ошибки по перемещениям, вызванные нагрузкой MX

<p>Относительная ошибка грань SOLID185 / SOLID73</p> <p>— Правая точка внешнего оконтура — Левая точка внешнего оконтура — Верхняя точка внешнего оконтура — Нижняя точка внешнего оконтура</p>	<p>Относительная ошибка твердое тело SOLID185 / SOLID73</p> <p>— Правая точка внешнего оконтура — Левая точка внешнего оконтура — Верхняя точка внешнего оконтура — Нижняя точка внешнего оконтура</p>
<p>Нагрузка приложена на грань. Сравнение SOLID185/SOLID73</p>	<p>Нагрузка приложена на твердое тело. Сравнение SOLID185/SOLID73</p>

2. Для толстостенного цилиндра получены очень близкие результаты по результатам сравнения комбинаторики способа приложения нагрузки и типов элементов, в среднем не превосходят 1 процента ошибки. Также наблюдается незначительный рост ошибки в приближении к месту приложения нагрузки (таблица 11). Наибольшее же отличие в случае

сравнения с использованием в месте нагружения жесткой проставки и без с SOLID73;

Таблица 11.

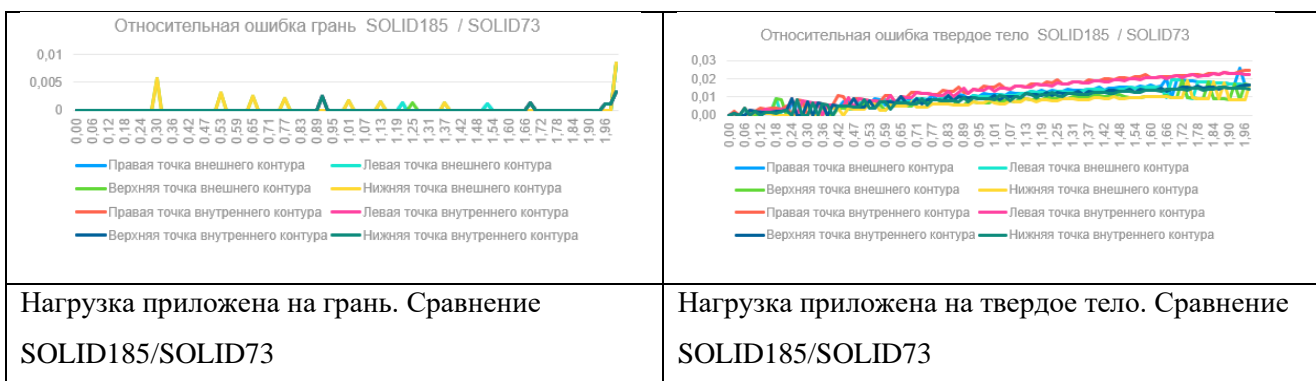
Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой M_X



3. Для тонкостенного цилиндра практически идентичные результаты с толстостенным, за исключением того, что в среднем максимум отклонения не превышает 0,03 процента (таблица 12);

Таблица 12.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой M_X



4. Можно сделать вывод, что в среднем сравнивая перемещения после приложения момента M_Z , ошибка мала. Значительных различий в применении SOLID73 и SOLID185 не наблюдается.

Рассматривая относительные ошибки по суммарным перемещениям под действием изгибающего момента M_X , можно сделать следующие выводы:

1. Для полного цилиндра значения относительной разницы в 10 раз превышают полученные ранее под действием нагрузки MZ (таблица 13). Особенно видна разница при сопоставлении результатов расчета с применением разных элементов вблизи заделки, здесь происходит всплеск ошибки до максимальных значений в 4% ошибки.

Таблица 13.

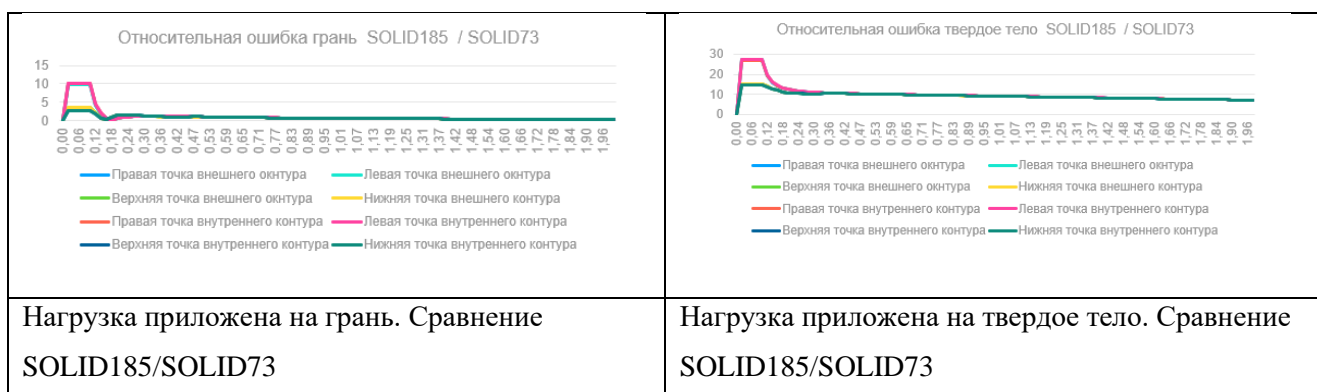
Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой MX



2. Аналогичная ситуация с ростом относительной разницы и в случае толстостенного цилиндра, где также наблюдается всплеск вблизи заделки до максимальных 60% (таблица 14).

Таблица 14.

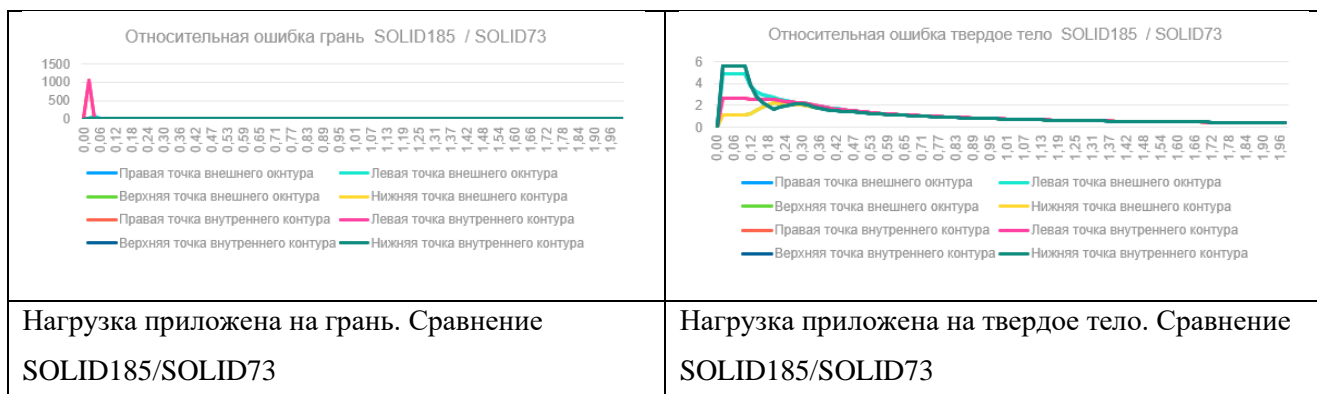
Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой MX



3. Для тонкостенного цилиндра также наблюдается краевой эффект вблизи заделки и нераспространение данного эффекта внутрь цилиндра (таблица 15).

Таблица 15.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой МХ



4. Таким образом можно сделать вывод о формировании тенденции пиковых отличий вблизи заделки.

Рассматривая относительные ошибки по суммарным перемещениям под действием вертикальной силы F_Y, можно сделать следующие выводы:

1. Для полного цилиндра вновь заметна тенденция значительных отклонений при сравнении элементов SOLID73 и SOLID72. Максимальные ошибки соответствуют значениям в 8–10% (таблица 16).

Таблица 16.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой МХ



2. Все тот же эффект наблюдается на толстостенном и тонкостенном цилиндре вблизи заделки (таблица 17, 18).

Таблица 17.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой MX

<p>Относительная ошибка грань SOLID185 / SOLID73</p> <p>— Правая точка внешнего контура — Левая точка внешнего контура — Верхняя точка внешнего контура — Нижняя точка внешнего контура — Правая точка внутреннего контура — Левая точка внутреннего контура — Верхняя точка внутреннего контура — Нижняя точка внутреннего контура</p>	<p>Относительная ошибка твердое тело SOLID185 / SOLID73</p> <p>— Правая точка внешнего контура — Левая точка внешнего контура — Верхняя точка внешнего контура — Нижняя точка внешнего контура — Правая точка внутреннего контура — Левая точка внутреннего контура — Верхняя точка внутреннего контура — Нижняя точка внутреннего контура</p>
Нагрузка приложена на грань. Сравнение SOLID185/SOLID73	Нагрузка приложена на твердое тело. Сравнение SOLID185/SOLID73

Таблица 17.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой MX

<p>Относительная ошибка грань SOLID185 / SOLID73</p> <p>— Правая точка внешнего контура — Левая точка внешнего контура — Верхняя точка внешнего контура — Нижняя точка внешнего контура — Правая точка внутреннего контура — Левая точка внутреннего контура — Верхняя точка внутреннего контура — Нижняя точка внутреннего контура</p>	<p>Относительная ошибка твердое тело SOLID185 / SOLID73</p> <p>— Правая точка внешнего контура — Левая точка внешнего контура — Верхняя точка внешнего контура — Нижняя точка внешнего контура — Правая точка внутреннего контура — Левая точка внутреннего контура — Верхняя точка внутреннего контура — Нижняя точка внутреннего контура</p>
Нагрузка приложена на грань. Сравнение SOLID185/SOLID73	Нагрузка приложена на твердое тело. Сравнение SOLID185/SOLID73

Рассматривая относительные ошибки по суммарным напряжениям под действием момента MZ , можно сделать следующие выводы:

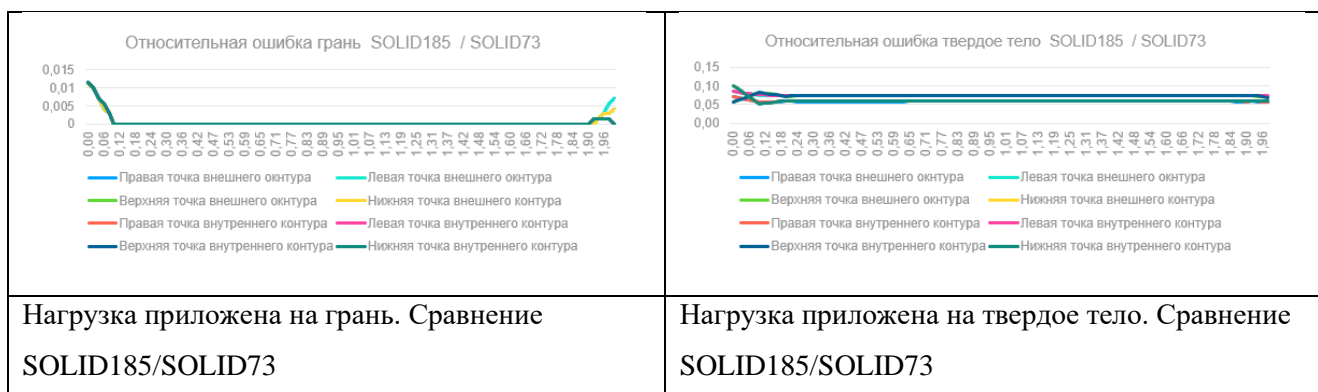
1. По сравнению с напряжениями ошибки для толстостенного цилиндра значительно возросли, причем в области приложения нагрузки можно наблюдать пик более 40% (таблица 18). В остальной же области стержня значимых отклонений не наблюдается.

Таблица 18.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой M_X 

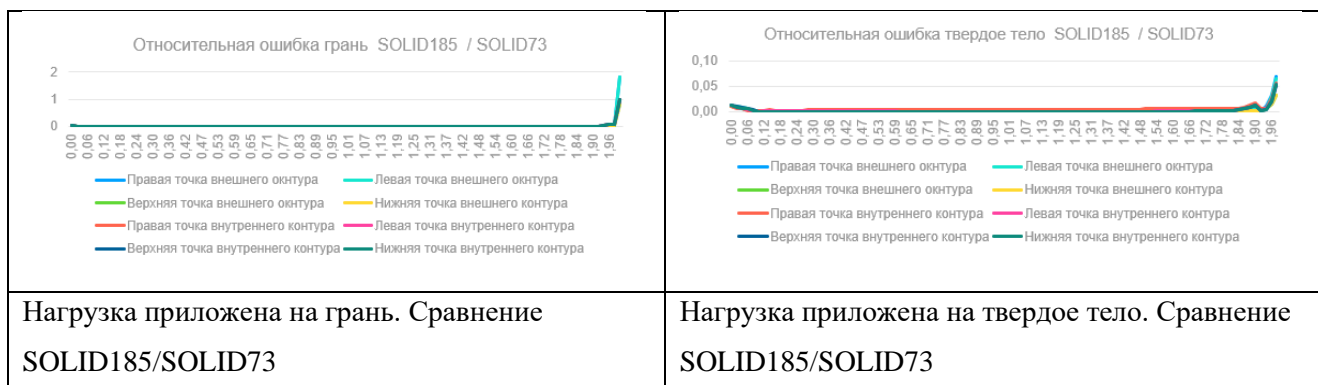
2. В случае толстостенного цилиндра при сравнении результатов с разными способами приложения нагрузки при одном элементе, особых скачков не наблюдается, что говорит об отсутствии влияния в данном случае способа приложения нагрузки (таблица 19). Ведь если рассмотреть расчеты непосредственно графики при одном и том же способе приложения нагрузки, но с разными элементами, то вновь заметно проявление всплеска вблизи заделки и области приложения нагрузки.

Таблица 19.

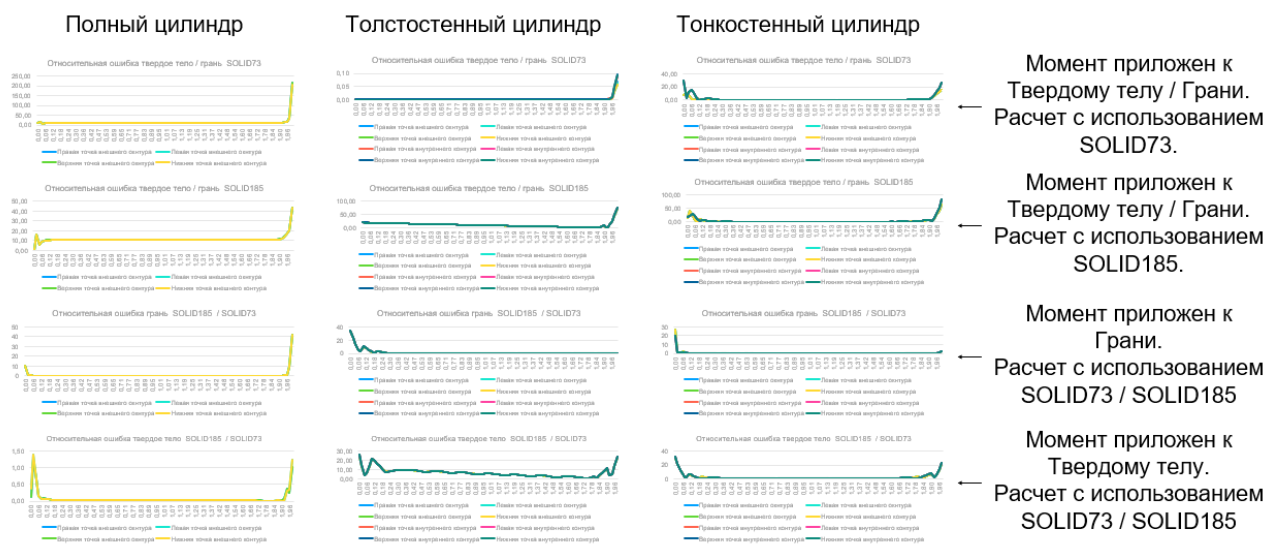
Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой M_X 

3. При рассмотрении тонкостенного цилиндра тренд на пиковые значения на концах, без распространения эффекта вглубь области сохраняется (таблица 20).

Таблица 20.

Поле суммарных моментов, вызванных нагрузкой M_X 

Рассматривая относительные ошибки по суммарным напряжениям под действием момента M_X и вертикальной силой F_Y , можно сделать вывод о том, что наблюдаемые тенденции аналогичны и не нуждаются в дополнительном описании, результаты представлены на рисунке 3 и рисунке 4.

Рис.3. Относительная ошибка по напряжениям под действием момента M_X

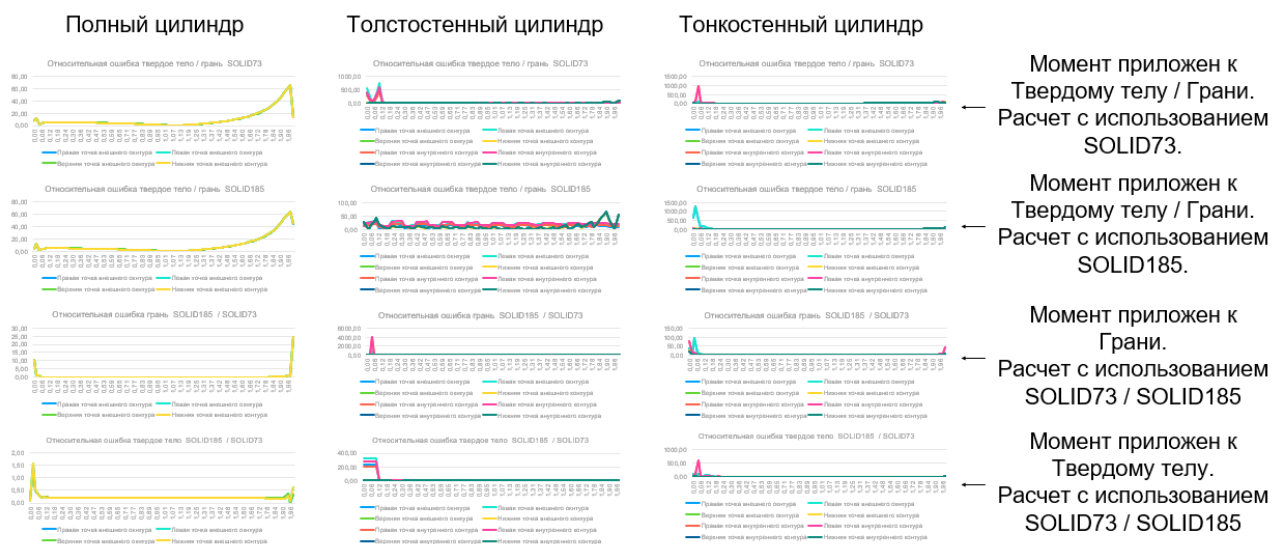


Рис.4. Относительная ошибка по напряжениям под действием силы FY

Если подводить итог, то суммарно в случае рассмотрения расчета с участием SOLID73 и SOLID185 – существует ошибка у заделки – намного больше, чем у места приложения. Таким образом можно сказать, что тенденции одинаковы. Не зависимо от того какая нагрузка, не зависимо от того к какому телу прикладывается нагрузка – твердое тело или грань. Все равно наблюдается всплеск вблизи заделки. Данное явление требует объяснения. Итак, исходя из постановки задачи, ожидается что в точке применения заделки значение суммарных перемещений обязано быть равным 0. Это действительно так и если рассмотреть снятые значения, то все равно относительная ошибка велика вблизи нуля. Разбираясь, в сущности, этой ошибки, оказывается, что разница наблюдается не от того, что один из методов дает численную ошибку и необъяснимо большие значения вблизи нуля, а сначала наблюдается гладкость значений перемещении, затем при стремление малых значений к 0 наблюдается всплеск. Это объясняется тем, что можно наблюдать эффект быстроменяющаяся функция перемещений, она имеет небольшие значения, но быстроменяющаяся. То есть если взять производную от функции перемещений вблизи 0, то наблюдался бы заметный всплеск.

4.3 Валидация расчетов

Таким образом однозначно становится понятно, что действительно результаты получаемы при использовании двух разных элементов дают в определенной области разные результаты. Значит можно утверждать, что один из этих элементов вносит вклад в решения так, что оно является более точным чем другое, потому что однозначно одно из них окажется более близким к какому-то эталонному решению. Теперь задача дальнейшего сравнительного анализа задачи сравнения двух элементов SOLID73 и SOLID185 заключается в том, чтобы найти решение задачи в похожей постановке так чтобы можно было быть уверенным в его достоверности. Такое решение должно быть подкреплено теорией и несколькими реальными экспериментами, которые бы подтверждали теорию. Также немаловажно, чтобы результаты расчета в программном пакете Ansys, с использованием данной теории, также хорошо удовлетворяло экспериментам. То есть задачу наиболее приближенную к реальности.

В данном случае можно рассмотреть теорию оболочек, которая ранее упоминалась с целью объяснения погранслойного эффекта, наблюдаемого в распределении суммарных моментов в сечении цилиндров. Об этой теории известно, что в случае тонкостенной конструкции, а именно в случае данных задач такой конструкцией является тонкостенный цилиндр, позволяет получить результаты расчёта лучше по сравнению с результатами, которые можно получить, используя SOLID элементы для моделирования [8]. Выигрыш от использования SHELL элементов заключается в том, что при одной и той же расчетной сетке, его применение повышает качество решения за счет того, что дает более точные результаты. Будет использован для расчёта конечный элемент, представленный в программном пакете ANSYS, именуемый SHELL181.

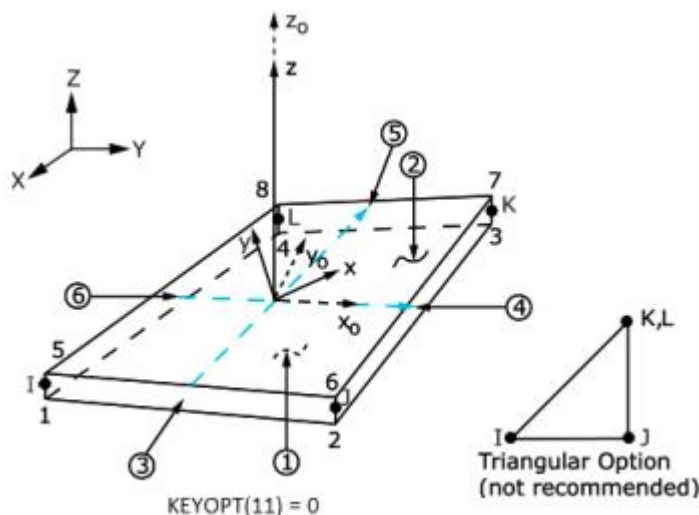


Рис.5. Четырех узловой конечный элемент SHELL181

SHELL181 подходит для анализа тонких и умеренно толстых оболочечных структур. Это четырех узловой элемент с шестью степенями свободы в каждом узле: перемещение в направлениях x , y и z и вращение вокруг осей x , y и z . (Если используется мембранный вариант, элемент имеет только поступательные степени свободы). Вырожденный треугольный вариант следует использовать только в качестве элементов-заполнителей при создании сетки. SHELL181 хорошо подходит для линейных, больших вращений и/или нелинейных приложений с большими деформациями. Изменение толщины оболочки учитывается при нелинейном анализе. В элементной области поддерживаются как полные, так и сокращенные схемы интеграции. SHELL181 учитывает влияние толкателя (жесткости нагрузки) распределенного давления. SHELL181 можно использовать для многослойных приложений для моделирования композитных оболочек или многослойных конструкций. Точность моделирования композитных оболочек определяется теорией деформации сдвига первого порядка (обычно называемой теорией оболочек Миндлина-Рейснера). Формулировка элемента основана на логарифмической деформации и мерах истинного напряжения. Кинематика элемента допускает конечную деформацию мембраны (растяжение). Однако предполагается, что изменения кривизны в течение интервала времени малы.

Таким образом, проводится сравнение решения, полученного для тонкостенного цилиндра с применением SOLID73 с эталонным решением, полученным при помощи элемента SHELL181, далее из этого сравнения произведем подсчет относительной разницы результатов вдоль сечения цилиндра. После этого аналогичное сравнение выполняется для расчёта с использованием SOLID185. Затем сравниваются величины относительной ошибки путем подсчета относительной разницы. В данном случае подсчет будет произведен по формуле без модуля (18), чтобы была ясность в понимании направления отклонения между двумя результатами.

$$\delta = \frac{\delta_{73} - \delta_{185}}{|\delta_{73}|} * 100, \% \quad (18)$$

Так был получен график рисунок 6.

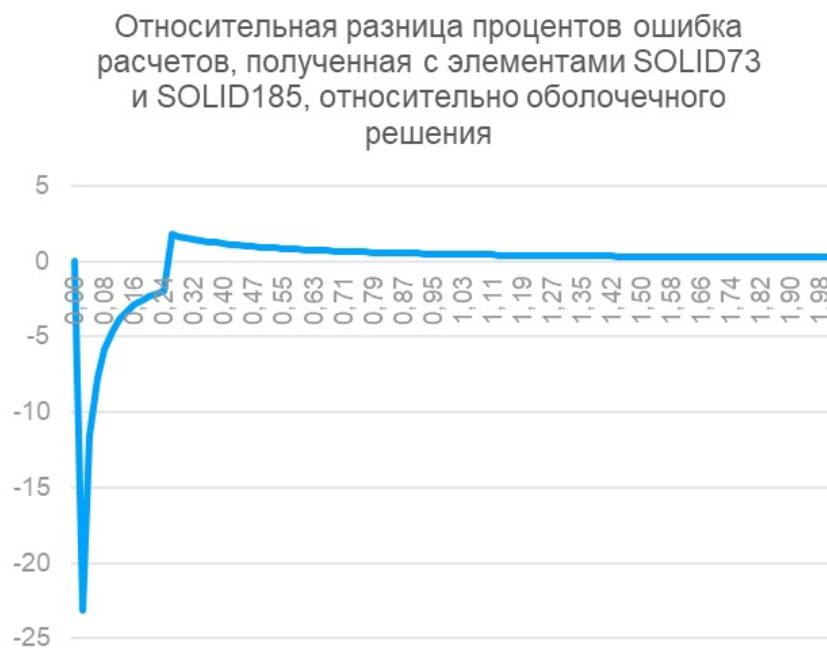


Рис.6. Оценка точности решения с SOLID73 по сравнению с SOLID185

Из рисунке 6 можно сделать вывод о том, что действительно решения получаемые при помощи элементов с вращательными степенями свободы и без имеют разный результат вблизи заделки, причем отрицательная разность, из формулы, свидетельствует о том что ошибка расчета с применением конечного элемента SOLID185 больше ошибки полученной с применением SOLID73 [14].

Однако в остальной части области разница практически отсутствует, но все же стоит упомянуть, что на участках с положительной ошибкой решение с SOLID185 показало себя точнее.

4.4 Область практической применимости SOLID73

Суммируя вышесказанное, решение с применением SOLID73 лучше совпадает с эталонным решением вблизи края тонкостенной конструкции, то есть его следует применять для более точного описания краевого эффекта. Значит по итогу получена область, в которой применение элемента SOLID73 позволяет получить более точный результат по сравнению с SOLID185.



Рис.7. Область повышенной ошибки по перемещениям

Полученную область с хорошим эффектом точности иллюстрирует рисунок 7 для поля суммарных перемещений. Представлен наиболее приближенный график к среднему значению области всплеска относительной ошибки по суммарным перемещениям. Для поля же суммарных напряжений область изображает рисунок 8. Где представлен наиболее приближенный к среднему значению области повышенной ошибки по суммарным напряжениям.

Наиболее приближенный график к среднему значению области повышенной ошибки по **напряжениям**

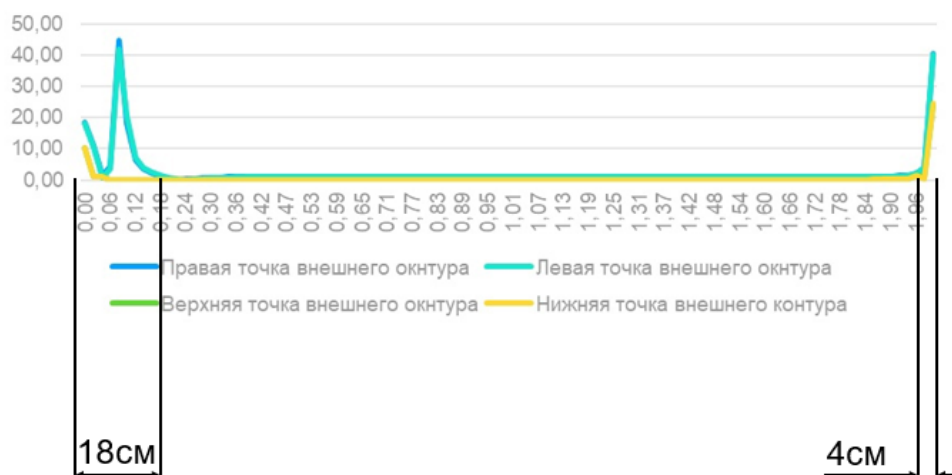


Рис.8. Область повышенной ошибки по напряжениям

В среднем размер области составил 18см, что составляет 10% от длины стержня. И ширина области применимости согласно теории оболочек составляет значение близкое к расстоянию 2 толщины пластины, после чего этот погранслоный эффект затухает.

ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПРИСОЕДИНЕННОГО НА КОНЦЕ НАГРУЖАЕМОГО ОБЪЕКТА, НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ КРАЯ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ

Далее проведем анализ результатов, полученных с приложением нагрузки к абсолютно твердому телу, присоединенному к краю цилиндра. Не деформируемое твёрдое в данной задаче представляет из себя заполненная область пространства упругим материалом с модулем Юнга, многократно превышающим материал цилиндра вплоть до 10^{17} степени [7]. Для обыкновенного полного цилиндра значительных отклонений результатов не ожидается. Однако интересно рассмотреть поведение тонкостенного и толстостенного цилиндра под действием различных нагрузок, ведь в реальных условиях закрепления массивного объекта, представляющего жесткую вставку, к тонкостенной трубе, может привести к ее разрушению. Поэтому ожидается, что получится воссоздать особенное поведение для тонкостенного цилиндра со значительными значениями нагрузки [9].

Для максимизации объективности оценки перемещений и напряжений взяты для рассмотрения 8 точек в поперечной плоскости, протянутых вдоль стержня. Точки располагаются на внешней части в верхней точке, нижней, правой, левой. Схожим образом точки будут размещены на внутренней части поверхности. Таким образом, удастся отследить поэлементные ошибки, отличия в расчетах по всей длине стержня. Например, сравнивая для толстостенного цилиндра значения перемещений в задаче о крутящем моменте MZ с использованием SOLID73 при нагрузке в $500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $500000 \text{ Н}\cdot\text{м}$, можно получить относительную ошибку получившихся результатов рисунок 9.

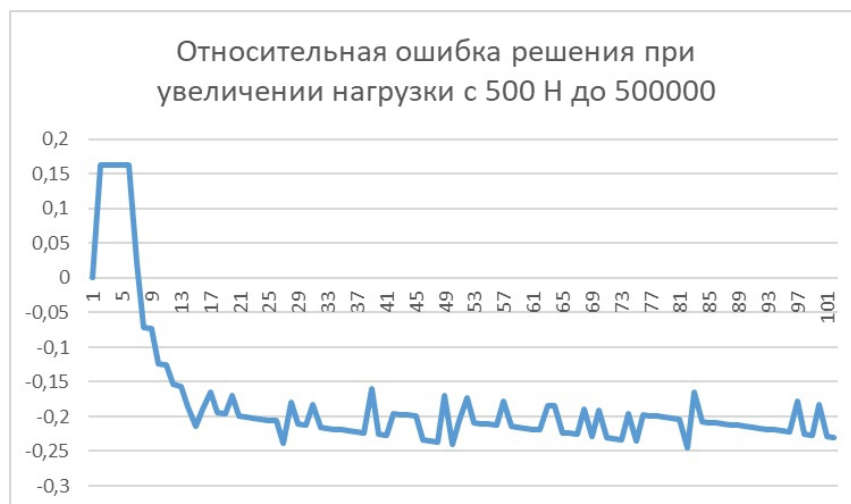


Рис.9. Относительная ошибка решения при увеличении нагрузки

Из полученного распределения относительной ошибки по длине стержня, не превышающей 0,2 процента, можно сделать вывод об отсутствии влияния данного параметра на неточности в решении задачи. Особых тенденций не обнаружено. При проведении исследования с увеличением нагрузки со 500 Н*м до 50000 Н*м, рост относительной ошибки не наблюдается. То есть если решается линейная задача, то результаты продолжают оставаться линейными и изменение ошибок не наблюдается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы было проведено исследование и сравнительный анализ конечно элементного моделирования с использованием SOLID элемента с вращательными степенями свободы и SOLID элемента с тремя степенями свободы. Помимо обычного приема для сравнения двух элементов при помощи анализа напряженно-деформируемого состояния, было проведено исследование распределение суммарных моментов в сечениях трех типов цилиндров. Также при помощи жесткой проставки на конце цилиндра в виде абсолютно твердого тела удалось разнообразить, то есть при одном главном векторе и моменте разнообразены граничные условия, получили решения на большем числе задач [6]. Таким образом был проведен анализ SOLID-элементов представленных в Ansys SOLID73 и SOLID185. Исследованы моменты, возникающие в SOLID-элементах вследствие чего установлено, что в случае применение в качестве нагрузки крутящего момента наблюдается погранслойный эффект с наибольшими значениями на границе вдоль стержня. При приложении изгибающего момента наблюдается концентрация моментов у конца приложения нагрузки и малые, но значимые значения у заделки, что также свидетельствует о наличии погранслойного эффекта. Сравнительный анализ напряженно-деформируемого состояния с разными типами элементов показал, что, рассматривая перемещения, оказалось, что относительная ошибка независимо от тип элемента имеет большие отклонения у заделки, но при удалении от края эффект рассеивается. Аналогично для напряжений наблюдаем всплеск относительной ошибки у заделки и у края приложения нагрузки. По результатам сравнения с принятым за эталонное оболочечное решение можно сделать вывод о том, что действительно вблизи заделки в среднем с использованием SOLID73 будет получен более точный результат. Установлено влияние абсолютно твердого тела, присоединенного на конце нагружаемого объекта, на напряженно-деформированное состояние вблизи края. Проведено исследование с увеличением нагрузки на край стержня, которое показало, что с увеличением прилагаемой силы рост ошибки не происходит. Впервые проведено детальное исследование элемента SOLID73, применимость обозначена вблизи

заделки. Итогом исследования является подтверждение гипотезы о практической значимости применения SOLID-элементов с вращательными степенями свободы в ходе моделирования отдельных участков модели

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Батэ К., Вилсон Е. Численные методы анализа и методы конечных элементов. Перевод. М.: Стройиздат, 1982. 93 с.
2. Елисеев К. В., Зиновьева Т. В. Вычислительный практикум в современных расчетных САЕ-системах: учебное пособие, СПб.: СПбГПУ, 2008, 112 с.
3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган; пер. с англ. Б. И. Квасова; под ред. Н. С. Бахвалова. - М., 1986. - 221 с.: ил.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Перевод. М.: Мир, 1975. 153 с.
5. Жидков А. В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования / А. В. Жидков. Нижний Новгород, 2006. – 115 с.
6. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера: практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. — М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
7. Литвинов А. Н. Механика материалов и конструкций. Лабораторный практикум: учеб.-метод. пособие: в 2 ч. / А. Н. Литвинов, Н.С. Шорина; под ред. А. Н. Литвинова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. – Ч. 1. – 17 с.
8. Монахов В.А. Теория пластин и оболочек: учеб. Пособие «Строительство уникальных зданий и сооружений» / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2016. 135 с.
9. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета плоских оболочек. Москва Изд-во литературы по строительству Ленинград. 1966. 183 с.
10. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. Учебное пособие. М.; Высш. школа, 1982. – 171 с.
11. Сегерлинд Л. Применение методов конечных элементов. Перевод. М.: Мир, 1979. 312 с.
12. Синицын С. А. Начертательная геометрия и инженерная графика. Задания и методические указания. М.: РГОТУПС, 1999. – 52 с.

13. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. Перевод. М.: Наука, 1975. 58, 299 с.
14. Boujelben, A., Ibrahimbegovic, A. Finite-strain three-dimensional solids with rotational degrees of freedom: non-linear statics and dynamics. *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.* 4, 3 (2017).
15. Клебанов Я.М., Давыдов А. Н., Папировский В.Л. Использование программного комплекса ANSYS в учебном процессе. Сайт cadfem.ru