

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«___» _____ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Анализ устойчивости конструкций при помощи метода конечных элементов

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

направленность

01.03.03_03 Математическое моделирование процессов
нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5030103/00302

М.В. Шуваев

Руководитель

старший преподаватель ВШТМиМФ,

А.И. Орлов

Санкт-Петербург
2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико – механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

_____ А.М. Кривцов

«__» _____ 2024 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Шуваеву Максиму Вячеславовичу, гр. 5030103/00302

1. Тема работы: Анализ устойчивости конструкций при помощи метода конечных элементов
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации, связанные с темой исследования, справочная литература, необработанная модель сосуда.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
 - 4.1 Аналитические и конечно-элементные методы определения устойчивости. Анализ литературных источников. Постановка задачи. Актуальность и новизна задачи;
 - 4.2 Сравнение методов Eigenvalue Linear и Nonlinear Buckling для стержневой системы, сравнение с аналитической моделью;
 - 4.3 Сравнение методов Eigenvalue Linear и Nonlinear Buckling для гладкой и подкрепленной оболочки, сравнение с аналитической моделью;
 - 4.4 Применение метода нелинейного статического расчета для анализа устойчивости оболочки методом конечных элементов. Анализ влияния конструктивных особенностей реальной оболочки на ее устойчивость.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: не предусмотрено
7. Дата выдачи задания 28.02.2024

Руководитель ВКР _____

А.И. Орлов

Задание принял к исполнению 28.02.2024.

Студент _____

М.В. Шуваев

РЕФЕРАТ

На 47 страниц, 21 рисунок, 5 таблиц

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК, ПОДВОДНЫЕ АППАРАТЫ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Анализ устойчивости конструкций при помощи метода конечных элементов»

В данной работе произведен расчет устойчивости цилиндрической оболочки, нагруженной внешним равномерно распределенным давлением. Рассмотрена конфигурация, как гладкой оболочки, так и подкрепленной силовым набором в виде шпангоутов для повышения несущей способности. В конструкции учитывались несовершенства формы, которые, так или иначе, присутствуют при реальной конструкции. Были найдены разрушающие давления в этих случаях аналитически и с помощью КЭ пакета ANSYS Workbench. Определены критические давления для оболочек с конструктивными особенностями.

ABSTRACT

In 47 pages, 21 figures, 5 tables.

KEY WORDS: STABILITY OF SHELLS, UNDERWATER VEHICLES, FINITE ELEMENT METHOD, MATHEMATICAL MODELING.

Topic of final qualifying work: “Analysis of the stability of structures using the finite element method”

In this work, calculations are made of the stability of a constant distribution loaded with an external distribution. Changes are considered, both of a smooth form and reinforced by a power set in the form of frames to reduce the load-bearing capacity. Imperfections in form were observed in the designs, which, one way or another, are present in existing structures. Pressure disturbances in these cases were found analytically and using the ANSYS Workbench FE package. The pressure values for shells with design features are determined.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ.	8
1.1 Анализ литературных источников для поиска аналитического решения	8
1.2 Метод конечных элементов	14
ГЛАВА 2. РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. КЭ АНАЛИЗ.	17
ГЛАВА 3. СЛУЧАЙ ГЛАДКОЙ ОБОЛОЧКИ. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	20
3.1 Расчетная геометрическая модель.....	20
3.2 Физико-механические свойства материала	21
3.3 Конечно-элементная сетка.....	21
3.4 Граничные условия и настройки решателя.....	24
3.4 Анализ результатов.	27
ГЛАВА 4. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ ФОРМЫ.	29
4.1 Аналитическое решение.	29
4.2 Решение МКЭ.....	33
ГЛАВА 5. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСНАЩЕННОЙ ЛЮКОМ.....	38
5.1 Люк с подкреплением выреза	38
5.2 Люк, допускающий разрыв шпангоута	40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	43
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	45

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе в качестве предмета исследования была рассмотрена упрощенная модель подкреплённой цилиндрической оболочки, с силовым набором (шпангоутами).

Критическое давление – это максимально возможное давление, выдерживаемое конструкцией при погружении. При последующем увеличении нагрузки происходит потеря устойчивости – потеря несущей способности конструкции.

При действии внешнего давления потеря устойчивости оболочек происходит хлопком с образованием нескольких вмятин в окружном направлении.

Потеря устойчивости – явление, характеризующееся возникновением больших деформаций при небольшом приращении действующей нагрузки. Это трудный для точного прогнозирования процесс, особенно когда на оболочку влияют такие факторы как разброс свойств материала и погрешности изготовления конструкции. На величину критического давления помимо геометрических параметров конструкции и свойств материала оказывают влияние граничные условия. Примером геометрических несовершенств можно считать отклонение образующей после вальцовки плоского листа и выполнения продольного сварного шва, местные вмятины в районе сварных швов, повреждения в процессе эксплуатации, а также внутренние сварочные напряжения и т.п.

Для оболочки, подкреплённой шпангоутами, возможны общая потеря устойчивости вместе со шпангоутами и местная – в пролете между шпангоутами. Для подкреплённой оболочки снижение критической нагрузки может быть вызвано так же неудовлетворительным качеством изготовления подкрепляющих элементов. Например, неплоскостность шпангоута по

отношению к оси оболочки, начальные несовершенства стенок профиля, из которого изготовлен шпангоут.

На данный момент существует большое количество работ, посвященных исследованию устойчивости оболочечных конструкций [4][7][9][10]. Некоторые работы исследуют идеальные случаи потери устойчивости цилиндрических оболочек. Данный подход весьма нагляден, однако в реальной жизни мы не сможем добиться эталонных условий, представленных в научных работах. Одновременно с этим существует документация, в которой предложен математический аппарат, учитывающий реалии изготовления конструкций.

В ходе данной работы были проанализированы некоторые независимые источники, посвященные данной проблеме, вследствие чего был сформирован подход к решению интересующей проблемы.

Наряду с аналитическим решением, можно выделить сравнительно новый метод – метод конечных элементов (МКЭ). Он является мощным средством анализа благодаря широкому диапазону геометрий, материалов, нагрузок и реакций, которые быть смоделированы. При решении с помощью аналитических формул может возникнуть сложность при описании некоторых особенностей конструкций, таких как вырезы, разорванные шпангоуты и т.п. В современных реалиях, с развитием компьютерных технологий, большое распространение получил именно метод конечных элементов, который обладает более гибкой базой инструментов, упрощающих работу инженера.

В большинстве случаев, линейный анализ устойчивости дает только верхний предел потери устойчивости реальной конструкции. Поэтому, необходимо выполнить нелинейный анализ устойчивости, который может учесть влияние нелинейных эффектов и несовершенства формы. С точки зрения деформаций, возникающих в материале, имеющем несовершенства

формы и структуры, особый интерес имеет состояние перед потерей устойчивости.

В данной работе для исследования устойчивости цилиндрической оболочки используется модуль *Eigenvalue Buckling*, который основывается на нахождении собственных чисел матрицы жесткости. Он хорош, когда необходимо найти значение критической нагрузки в линейных моделях. Как следует из названия, линейный анализ потери устойчивости не учитывает геометрическую и физическую нелинейности.

Метод *Nonlinear Static Analysis* позволяет проводить нелинейный анализ устойчивости конструкций. Так же с помощью него можно учитывать начальные несовершенства конструкции, что в целом отражает возможные несовершенства реальной сборки.

Для оболочек с конструктивными особенностями поиск аналитического решения задачи о нахождении критического давления - сложный процесс, ввиду отсутствия общих формул. В работе рассмотрен случай установки люка на модель подводного аппарата. При данной постановке задачи учитывались разные способы исполнения люка – с подкреплением шпангоута силового набора и без. Значения критической нагрузки были найдены с помощью метода конечных элементов в пакете *ANSYS*.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

В данной главе представлены решения задачи о нахождении критического давления гладкой цилиндрической оболочки под действием внешнего давления.

1.1 Анализ литературных источников для поиска аналитического решения

Наиболее легко задача устойчивости разрешается тогда, когда начальное напряженное состояние является безмоментным. Тогда, считая безмоментное решение известным, задается малое возмущение в виде перемещений, которые создадут дополнительные деформации, внутренние усилия и моменты. В соответствии со статическим критерием устойчивости Эйлера, запишем уравнение равновесия оболочки в возмущенном состоянии. Воспользуемся уравнением равновесия пологой оболочки [10].

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 q_n \quad (1.1)$$

где D – цилиндрическая жесткость оболочки, w – прогиб, E – модуль Юнга, δ – толщина оболочки, R – радиус срединной поверхности, q_n – условная нагрузка, статически эквивалентная воздействию безмоментных докритических усилий в возмущенном состоянии.

Если рассмотреть искривленный элемент срединной поверхности длиной dx и шириной, равной единице, можно определить осевое погонное усилие:

$$N_1 \frac{\partial w}{\partial x} - N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) = -N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (1.2)$$

$$N_2 \frac{\partial w}{\partial y} - N_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) = -N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \quad (1.3)$$

Исходя из вышесказанного, можно получить основное уравнение устойчивости гладкой цилиндрической оболочки, подставив выражения (1.2) и (1.3) для осевого и тангенциального усилия в формулу (1.1) :

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_1 \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4)$$

Оператор набла в различных степенях для формулы (1.4) представлен ниже:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1.5)$$

$$\nabla^8 = \frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} \quad (1.6)$$

Перейдем к интересующему нас частному случаю. Рассмотрим задачу о нагружении внешним давлением шарнирно закрепленной с торцов гладкой оболочки.

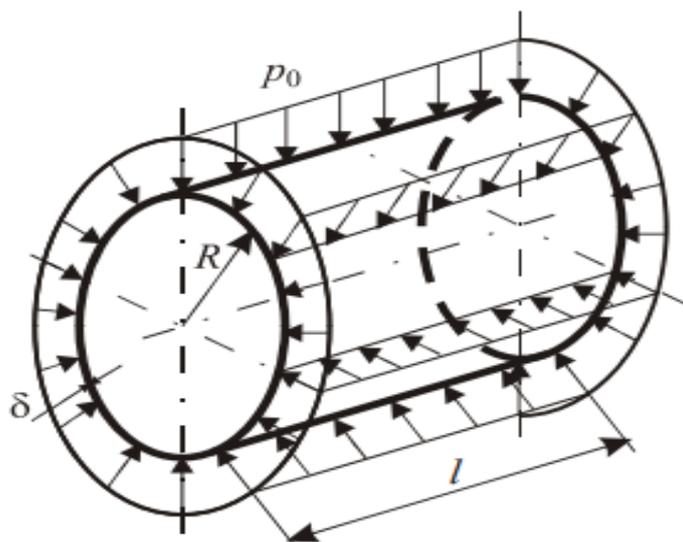


Рисунок 1. Постановка задачи

где R – радиус срединной поверхности оболочки, δ – толщина оболочки, l – длина оболочки, p_0 – внешнее боковое давление

Т.к. в данной постановке отсутствуют осевые силы, можно переписать уравнение (1.4) следующим образом:

$$D\nabla^8 w + \frac{E\delta}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_2 \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь N_2 представляется в виде $N_2 = p_0 R$, где p_0 – внешнее боковое давление, приложенное к оболочке.

Так же учтем граничные условия:

$$\begin{cases} w|_{x=0} = 0, \\ w''|_{x=0} = 0, \\ w|_{x=l} = 0, \\ w''|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

Будем искать решение уравнения (1.7) с граничными условиями (1.8) в следующем виде:

$$w = A \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{my}{R} \quad (1.9)$$

где n – число волн вдоль образующей цилиндра, m – число полных волн по окружности. Подставляя решение (1.9) в уравнение равновесия оболочки (4), выразим тангенциальное погонное усилие N_2 :

$$N_2 = \left(\frac{R}{m}\right)^2 \left(D \left[\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m^2}{R^2} \right]^2 + \frac{E\delta}{R^2} \frac{\frac{n^4 \pi^4}{l^4}}{\left[\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{m^2}{R^2} \right]^2} \right) \quad (1.10)$$

При фиксированном значении m тангенциальное погонное усилие будет принимать наименьшее значение при $n = 1$. Учитывая принятое ранее выражение для N_2 , запишем значение внешнего бокового давления p_0 :

$$p_0 = \frac{Dm^2}{R^3} \left(1 + \left(\frac{\pi R}{lm} \right)^2 \right) + \frac{E\delta}{Rm^2} \frac{\left(\frac{\pi R}{lm} \right)^4}{\left(1 + \left(\frac{\pi R}{lm} \right)^2 \right)^2} \quad (1.11)$$

Найденная аналитическая формула для давления является общей и применима для разных длин оболочки. Рассмотрим следующую конфигурацию оболочки, параметры ее указаны в таблице 1:

Таблица 1. Параметры оболочки

№ параметра	Параметр	Значение
1	Радиус срединной поверхности, R	742,5 мм
2	Длина цилиндрической оболочки, l	3000 мм
3	Толщина цилиндрической оболочки, δ	15 мм

Дальнейший ход решения определяется типом оболочки, характеризующимся ее длиной. В различных источниках, посвященных решению задачи об устойчивости оболочек, предлагаются разные подходы к определению ее типа. Рассмотрим следующие:

$$1.38 \sqrt{\frac{\delta}{R}} \leq \frac{1}{R} \leq 0.57 \sqrt{\frac{R}{\delta}} \quad (1.12)$$

$$l \geq 25\sqrt{R\delta} \quad (1.13)$$

Оба условия выполняются, поэтому можно считать оболочку с параметрами из Таблицы 1 оболочкой средней длины. Для такого типа оболочек можно считать, что одно из слагаемых в формуле (1.11) много меньше единицы, а именно:

$$\frac{\pi R}{lm} \ll 1 \quad (1.14)$$

Учитывая (1.14), преобразуется выражение для внешнего бокового давления следующим образом:

$$p_0 = \frac{Dm^2}{R^3} + \frac{E\delta R^3}{m^6} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \quad (1.15)$$

Для нахождения критического давления минимизируем (1.15) по числу m . Необходимо взять производную по m и приравнять ее к нулю:

$$\frac{dp_0}{dm} = \frac{2mD}{R^3} - \frac{2E\delta R^3}{m^7} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 = 0 \quad (1.16)$$

Из (1.16) выражается m и подставляется в (1.15):

$$p_{кр} = \frac{E\pi\sqrt{6}}{9(1-\mu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{\frac{5}{4}} \quad (1.17)$$

Коэффициент Пуассона μ принимается равным 0.3, при котором (1.17) даст формулу П.Ф. Папковича, а именно:

$$p_{кр} = 0.92 \frac{ER}{l} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (1.18)$$

Формула (1.18) определяет критическое давление для оболочки.

Рассмотрим иной подход к решению для идентичной постановки задачи [9]. Критическое давление определяется формулой Мизеса:

$$p_{кр} = \frac{E\delta}{R} \left(\frac{\lambda^4 + \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)R^2}(\lambda^2 + n^2)^4}{(\lambda^2 + n^2)^2 \varepsilon} \right) \quad (1.19)$$

где R – радиус срединной поверхности, E – модуль Юнга, δ – толщина цилиндрической оболочки, n – число волн по осевой координате, μ – модуль Пуассона. Для бокового давления ε принимается равным n^2 . Число n рассчитывается по формуле:

$$n = 2.7^4 \sqrt{\frac{R}{\delta}} \sqrt{\frac{R}{l}} \quad (1.20)$$

Учитывая выражение (1.20) формула для критического давления (1.19) записывается в следующем виде:

$$p_{кр} = k_p \frac{E \delta^2}{l R^2} \quad (1.21)$$

$$k_p = \frac{cR}{\delta} \left(\frac{\lambda^4 + \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)R^2} (\lambda^2 + n^2)^4}{(\lambda^2 + n^2)^2 \varepsilon} \right) \quad (1.22)$$

где $c = \frac{l}{\sqrt{R\delta}}$ и $\lambda = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{R}{\delta}}$

После подстановки параметров c и λ , можно убедиться, что коэффициент k_p зависит от соотношения $\frac{l}{\sqrt{R\delta}}$. Зная, что рассмотренная оболочка является оболочкой средней длины, коэффициент (1.22) можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$k_p = \frac{0.92}{1 - \frac{a\sqrt{R\delta}}{l}} \quad (1.23)$$

Для бокового давления параметр a принимается равным 1.31.

Далее, в таблице 2, будут представлены значения критического давления, выражения для которых взяты из разных литературных источников, чтобы проверить точность аналитического расчета.

Таблица 2. Аналитическое решение задачи.

Источник	Значение, Па
[10]	$2.6417 \cdot 10^6$
[9]	$2.7693 \cdot 10^6$

1.2 Метод конечных элементов

КЭ пакет ANSYS, в котором проведены расчеты для нескольких глав в данной работе, реализует метод конечных элементов. Это численный метод, используемый для решения дифференциальных уравнений. Он исключительно полезен при решении задач теории упругости, гидродинамики, топологической оптимизации и т.д.

Основная идея данного метода – разбиение области на простые подобласти, которые называются конечными элементами. В каждом таком элементе находится решение поставленной задачи, после чего, используя функции форм, строится локальное приближение найденного решения. Функции форм могут быть различными, однако должны выполняться следующие требования [3]:

– i – я функция в i – ом узле равна единице, в остальных узлах она равна нулю;

– i – я функция не равна нулю только для элементов, которые содержат i – й узел (точка, в которой конечные элементы связаны между собой).

Для решения задачи устойчивости в линейной постановке при помощи МКЭ составляется, а затем численно решается уравнение равновесия в матричной форме:

$$(K + \lambda K_r)W = 0 \quad (1.24)$$

где K – глобальная матрица жесткости, K_r – матрица геометрической жесткости, λ – параметр нагружения, W – вектор узловых перемещений элементов, соответствующий нормированному вектору узловых сил.

Линейный анализ устойчивости дает завышенную величину критической нагрузки, однако позволяет найти верхнюю оценку критической

нагрузки. Чтобы найти более точное значение нагрузки, которую способна выдержать конструкция, можно воспользоваться шаговой процедурой метода конечных элементов.

Элементы геометрической матрицы жесткости представляют из себя нелинейные функции продольных усилий в элементах. Нахождение критической нагрузки производится пошагово с увеличением нагрузки и параллельным корректированием элементов матрицы K_r . При этом производится контроль устойчивости по перемещениям на каждом шаге нагружения. В программе *ANSYS* реализован итерационный метод Ньютона-Рафсона [5][8]. Его суть заключается в последовательном определении перемещений в узлах, возникающих из-за невязки сил. Можно выделить следующие шаги решения методом Ньютона-Рафсона:

1. Находится начальный вектор узловых перемещений:

$$w_0^* = K^{-1}P_1 \quad (1.25)$$

где K – матрица жесткости, P_1 – вектор узловых сил на первом шаге процесса.

Начало итераций цикла $i = 1, 2, 3 \dots$. По найденным значениям перемещений w_{i-1}^* находится геометрическая матрица жесткости $K_r(w_{i-1}^*)$.

2. Находится матрица жесткости, соответствующая текущей итерации:

$$K_i = K + K_r(w_{i-1}^*) \quad (1.26)$$

3. Определяются узловые реакции и вектор невязки этих реакций:

$$P_{i-1}^* = K_i w_{i-1}^* \quad (1.27)$$

$$\Delta_i = P_1 - P_{i-1}^* \quad (1.28)$$

где Δ_i – невязка узловых реакций на i -ом шаге

4. Вычисляется вектор дополнительных узловых перемещений, который обусловлен невязкой:

$$\delta w_i = K_i^{-1} \Delta_i \quad (1.29)$$

5. Производится корректировка вектора узловых перемещений:

$$w_i^* = w_{i-1}^* + \delta w_i \quad (1.30)$$

Со 2-го шага итерационного процесса производится оценка сходимости. Условием сходимости является следующее выражение:

$$\|\delta w_i - \delta w_{i-1}\| < \varepsilon \quad (1.31)$$

где $\|\delta w_i - \delta w_{i-1}\| = \sqrt{\{\delta w_i - \delta w_{i-1}\}^T \{\delta w_i - \delta w_{i-1}\}}$ – норма вектора разности перемещений на соседних итерациях. Описанные выше этапы повторяются до тех пор, пока не выполнится условие или число возможных итераций i не достигнет максимально возможного n_{max} .

ГЛАВА 2. РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. КЭ АНАЛИЗ

Прежде всего, нужно рассмотреть именно сам метод расчета конструкций на устойчивость. В КЭ пакете *ANSYS* существуют модули, позволяющие производить расчет потери устойчивости конструкций по формам потери устойчивости. Название модуля – *Eigenvalue Buckling*. Он позволяет производить как линейные, так и нелинейные расчеты [15]. Для наглядности работы используем стандартную модель стержня.

Расчет стержня начинается с построения геометрии. Использовались параметры из таблицы 3:

Таблица 3. Параметры стержня

Параметр стержня	Значение, м
Ширина, h	0.06
Толщина, b	0.04
Длина, l	1

После построения геометрии можно приступить к расчету стержня на устойчивость. В качестве граничных условий использована следующая комбинация: нижняя грань жестко закреплена, верхняя грань свободна. К верхней грани приложена сжимающая сила.

Задача может быть рассмотрена в двух постановках: линейной и нелинейной. Для этого случая будем использовать геометрическую нелинейность. Результат работы *ANSYS* – некоторый безразмерный коэффициент. Если домножить его на величину приложенной нагрузки, можно получить значение критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости. В этом расчете была найдена потеря устойчивости по одной моде. Далее представлены результаты работы модуля *Eigenvalue Buckling*:

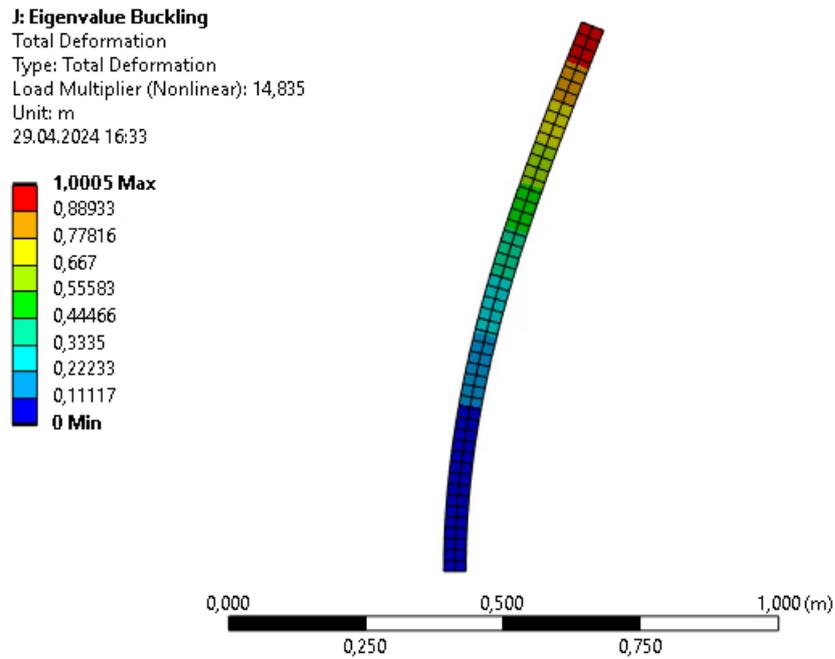


Рисунок 2. Устойчивость стержня.

Значение критической нагрузки, полученной конечно-элементным методом, получилось равным:

$$F_{кр(КЭ)} \approx 158350 \text{ Н}$$

Для уточнения результата воспользуемся формулой Эйлера для расчета критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости стержня:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(l\mu)^2} \quad (2.1)$$

где E – модуль Юнга, I_{min} – минимальный главный центральный момент инерции поперечного сечения стержня, l – длина стержня, μ – коэффициент приведения длины.

Очевидно, что при потере устойчивости изгиб стержня произойдет в плоскости наименьшей изгибной жесткости стержня, поэтому сразу можно определить один из коэффициентов в формуле (2.1), а именно:

$$I_{min} = \frac{hb^3}{12} \approx 3.2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4 \quad (2.2)$$

Коэффициент приведения длины для стержня с параметрами из таблицы 3 и рассмотренными ГУ будет равен $2l$. Это означает, что стойка Эйлера в два раза длиннее, чем стойка в рассматриваемой задаче, при той же силе, приводящей к потере устойчивости. Исходя из вышесказанного, найдем значение критической нагрузки:

$$F_{кр} = 157914 \text{ Н}$$

Для последующих вычислений критического давления для оболочек средней длины будем использовать метод *Nonlinear Static Analysis*. Основная идея метода будет заключаться в указании несовершенства сборки, посредством внесения начальных несовершенств на основе 1-й моды потери устойчивости, полученной в модуле *Eigenvalue Buckling*.

ГЛАВА 3. СЛУЧАЙ ГЛАДКОЙ ОБОЛОЧКИ. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Задача о поиске критического давления методом конечных элементов для гладкой цилиндрической оболочки проводится поэтапно. Далее будут описаны и рассмотрены все шаги от построения геометрии до анализа результатов.

3.1 Расчетная геометрическая модель

Построение геометрии производилось в программе для 3D-моделирования *SpaceClaim*. Построение производилось в соответствии с параметрами из таблицы 1. Готовый вариант цилиндрической оболочки представлен на рисунке

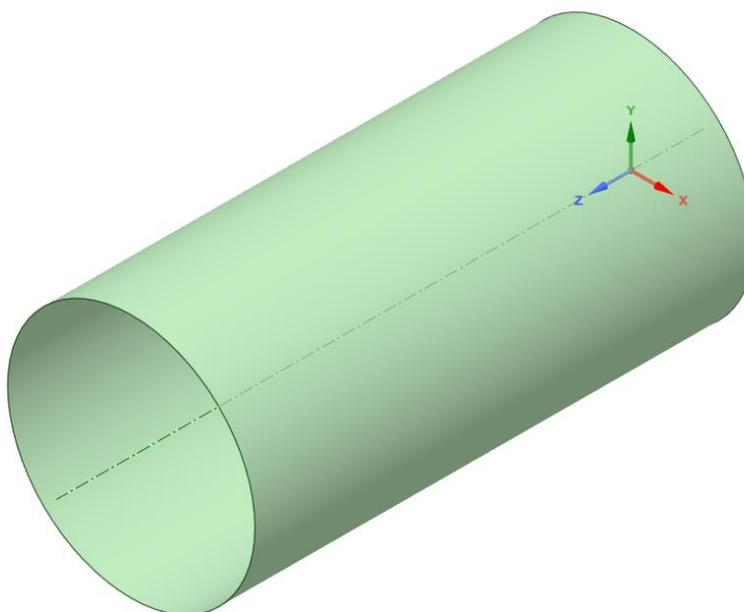


Рисунок 3. Геометрия гладкой оболочки.

Изначальная оболочка имела внутренний радиус 735 мм, внешний – 750 мм. Из геометрии была выделена срединная поверхность с помощью инструмента *Midsurface*. Это сделано для того, чтобы дальнейшие расчеты проводить не с твердотельным объектом, а с оболочечной конструкцией. Явным преимуществом данного подхода является существенное снижение

времени расчета и ресурсных затрат вычислительной машины. Для учета прогибов оболочки необходимо иметь несколько элементов по толщине (как правило 3-5) в следствие чего твердотельная модель будет иметь число элементов на порядки больше, чем число элементов оболочечной модели.

3.2 Физико-механические свойства материала

В качестве материала, из которого сделана оболочка была выбрана сталь 09Г2С – конструкционная низколегированная сталь для сварных конструкций [6]. Она обладает высокой прочностью и часто используется в конструкциях, работающих под давлением. Сталь этой марки широко применима в машиностроении, судостроении и изготовлении конструкционных элементов, таких как болты, гайки, трубы, зубчатые колеса и т.д.

Все основные физико-механические свойства стали 09Г2С представлены в таблице 4.

Таблица 4. Физико-механические свойства стали 09Г2С.

Плотность	7850, кг/м ³
Коэффициент Пуассона	0.3
Модуль Юнга	200, ГПа
Тангенциальный модуль	1602, МПа
Предел текучести	285, МПа
Предел прочности	425, МПа

3.3 Конечно-элементная сетка

Разбиение расчетной области на конечные элементы является одним из самых важных этапов в подготовке к расчету задачи. Параметры сетки определяют точность полученного решения и время, которое необходимо

будет потрачено на его получение. Неправильно построенная сетка может привести к некорректным результатам.

Можно выделить несколько видов конечно-элементных сеток [13].

Например:

– Структурированные сетки: в таких сетках элементы – упорядоченная структура из квадратов или параллелограммов (в 3D постановке кубы и параллелепипеды). Довольно простой, но одновременно незатратный в плане требуемого на расчет времени вид сетки. Подходит для простой геометрии расчетной области, поэтому в данной работе будет использована именно эта сетка;

– Неструктурированные сетки: в таких сетках нет упорядоченной структуры элементов. Используются треугольники и тетраэдры, что позволяет описывать более сложные виды геометрии;

– Сетки смешанного типа: являются комбинацией первых двух видов конечно-элементной сетки.

В работе была проведена сеточная сходимость, чтобы определить оптимальный размер элемента для сетки. Для этого размер элемента варьировался в пределах от 10 м до 100 мм с шагом 10 мм.

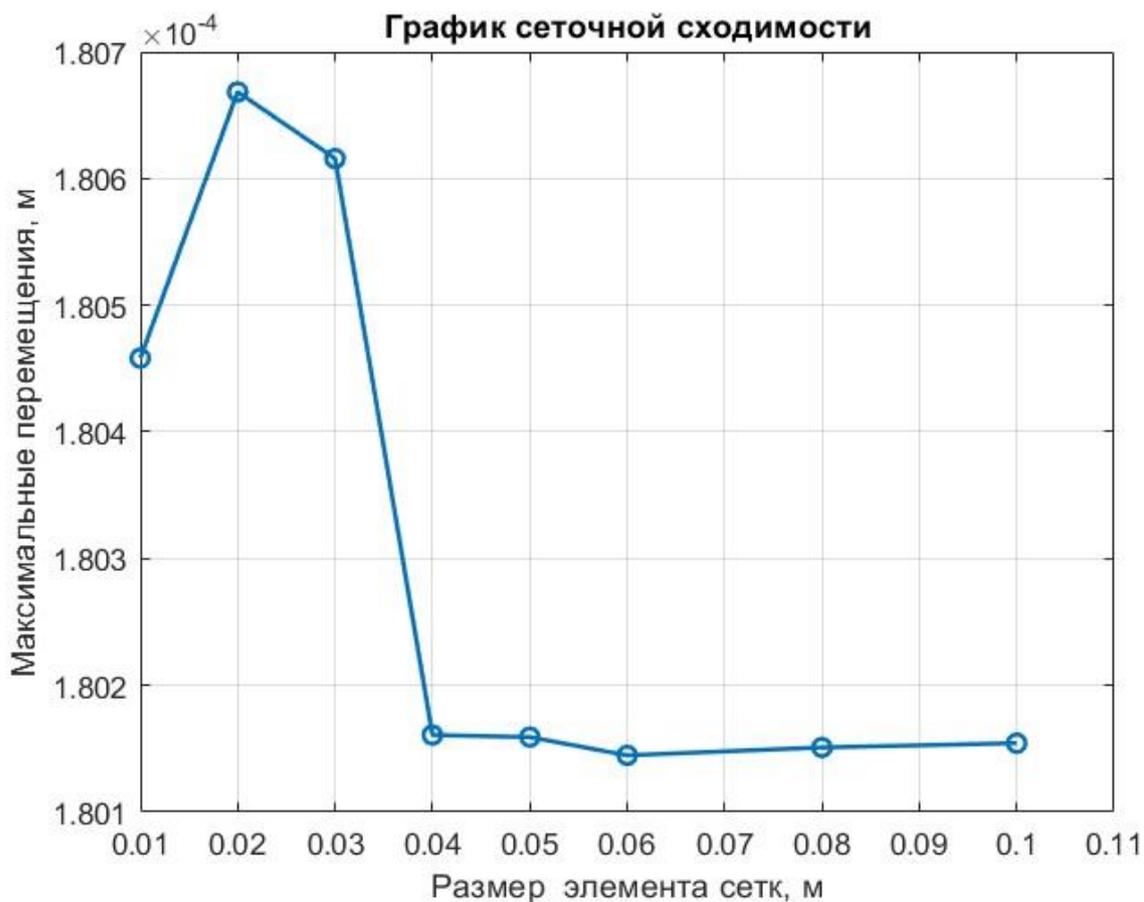


Рисунок 4. Сеточная сходимость.

Из рисунка 4 можно видеть, что начиная с размера элемента в 40 мм график сеточной сходимости выходит на некоторую асимптоту, на которой отсутствуют скачки значений. Оптимальные размеры элемента сетки лежат в пределах 40-60 мм. При выбранном размере элемента 40 мм число узлов составило 8816, число элементов 8700. Элементы второго порядка.

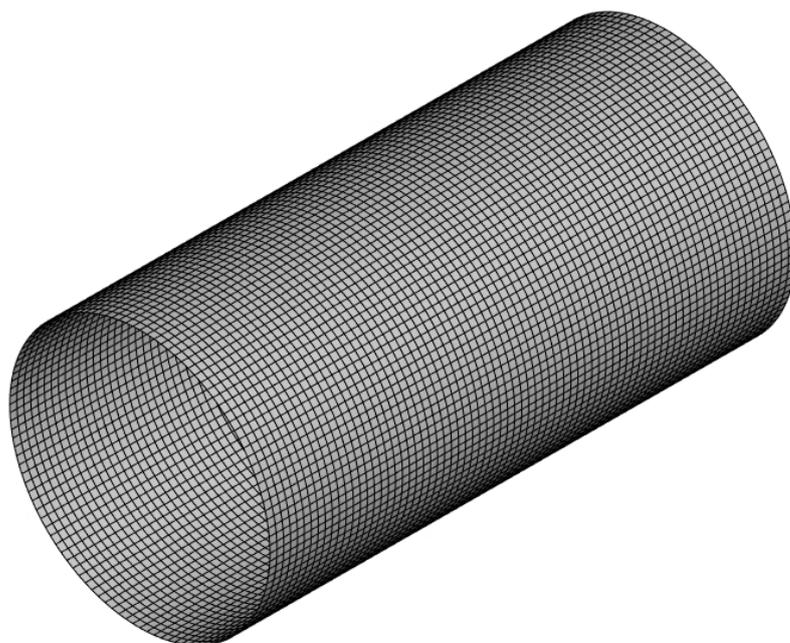


Рисунок 5. Готовая конечно-элементная сетка.

3.4 Граничные условия и настройки решателя.

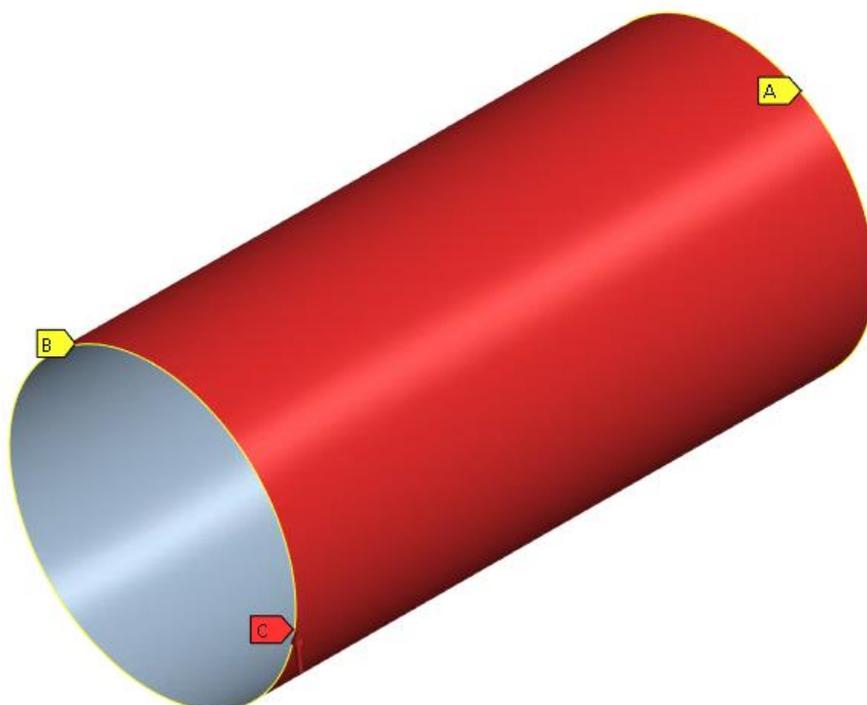


Рисунок 6. Граничные условия гладкой оболочки.

В областях А и В на рисунке поставлены условия шарнирного опирания, перемещения отсутствуют по трем координатам X, Y, Z. Боковое давление составляет 5 МПа.

Рассматривается нелинейный расчет. Учитывается **геометрическая нелинейность** – перемещения, вызывающие значительные изменения геометрии конструкции. При таком расчете применяется итерационный процесс, для достижения сходимости. На каждой итерации решается система уравнений равновесия с учетом матриц жесткости. Нагрузка прикладывается пошагово, что упрощает достижение сходимости на отдельно взятых шагах нагрузки. Нагрузка разбивается на 100 подшагов. Расчет проводится при включенном параметре *Large Deflection*, что позволяет учитывать несколько важных особенностей:

- Учет больших деформаций;
- Учет больших перемещений и поворотов;
- Учет увеличения жесткости конструкции под действием напряжений.

Сталь марки 09Г2С в расчете обладает **физической нелинейностью** – т.е. в модели материала отсутствует линейная зависимость между нагрузкой и перемещениями в конструкции из данного типа материала. Поведение материала описывается мультилинейной моделью упрочнения. Она использует кусочно-линейную функцию для моделирования нелинейной реакции деформационного упрочнения до начала разрушения материала.

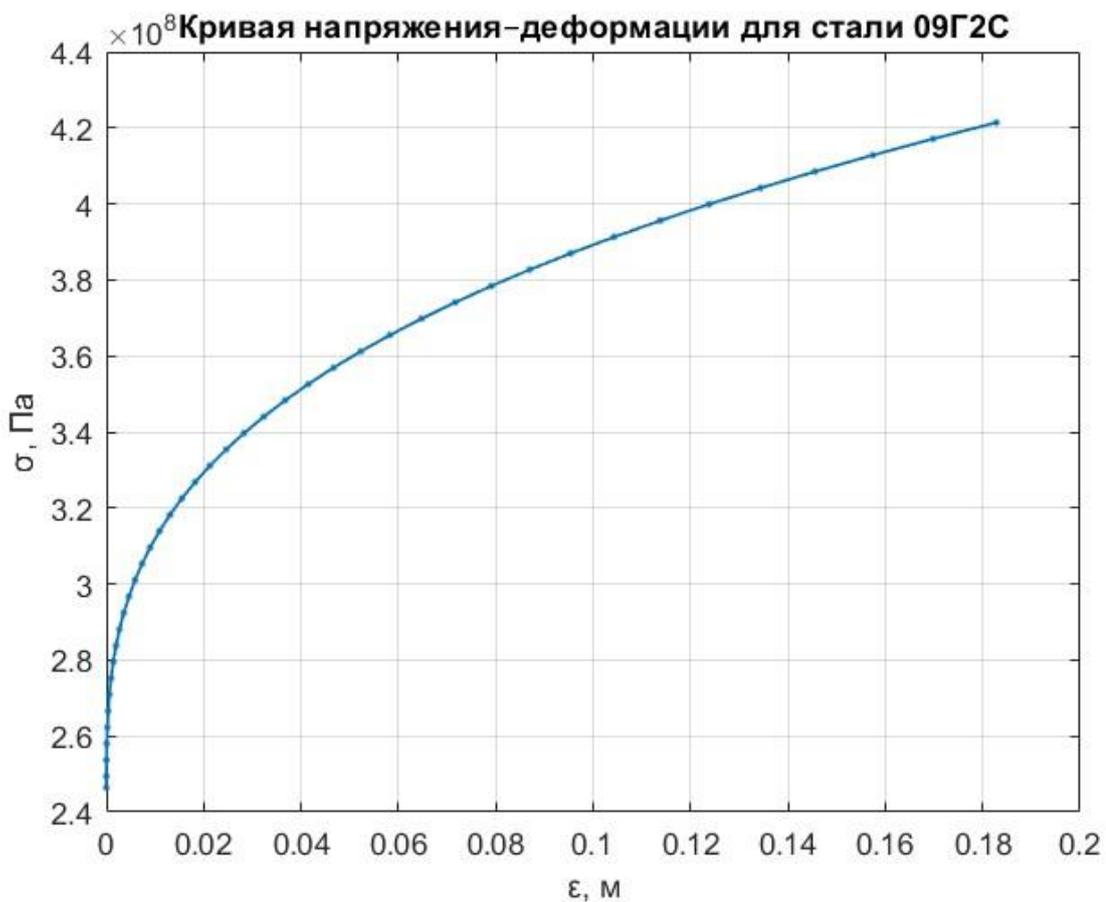


Рисунок 7. Кривая напряжения-деформирования стали 09Г2С.

Мультилинейная модель пластичности обеспечивает лучшее согласование с экспериментальными данными и считается наиболее информативной [12].

3.4 Анализ результатов

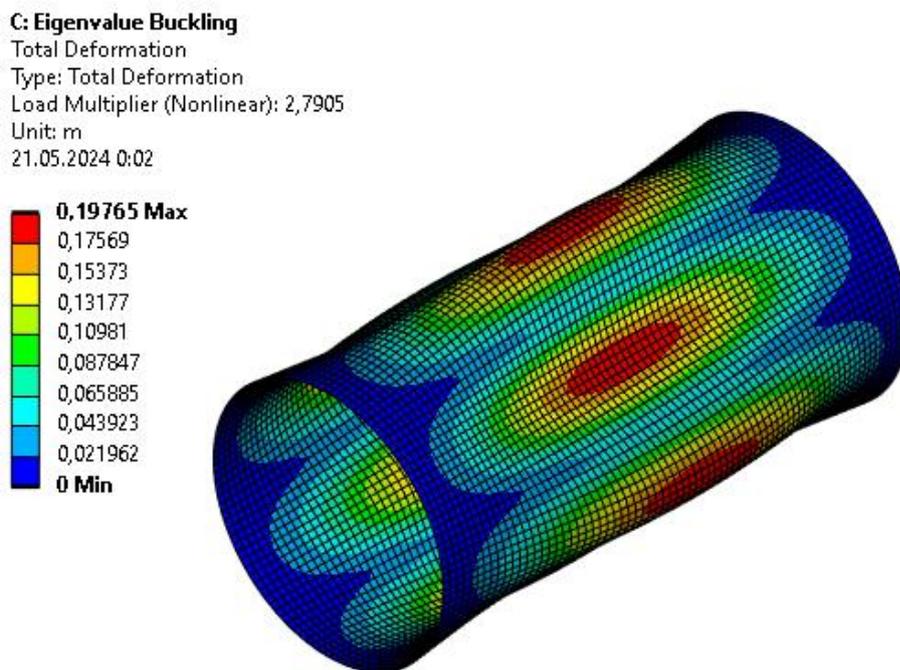


Рисунок 8. Форма потери устойчивости для гладкой оболочки.

На рисунке 8 представлена форма потери устойчивости оболочки. Решение методом *Nonlinear Static Analysis* разошлось на назначении бокового давления, равного 2,76 МПа. Ниже, на рисунке 9, представлен график зависимости перемещений от значения нагрузки, которая прикладывалась пошагово.

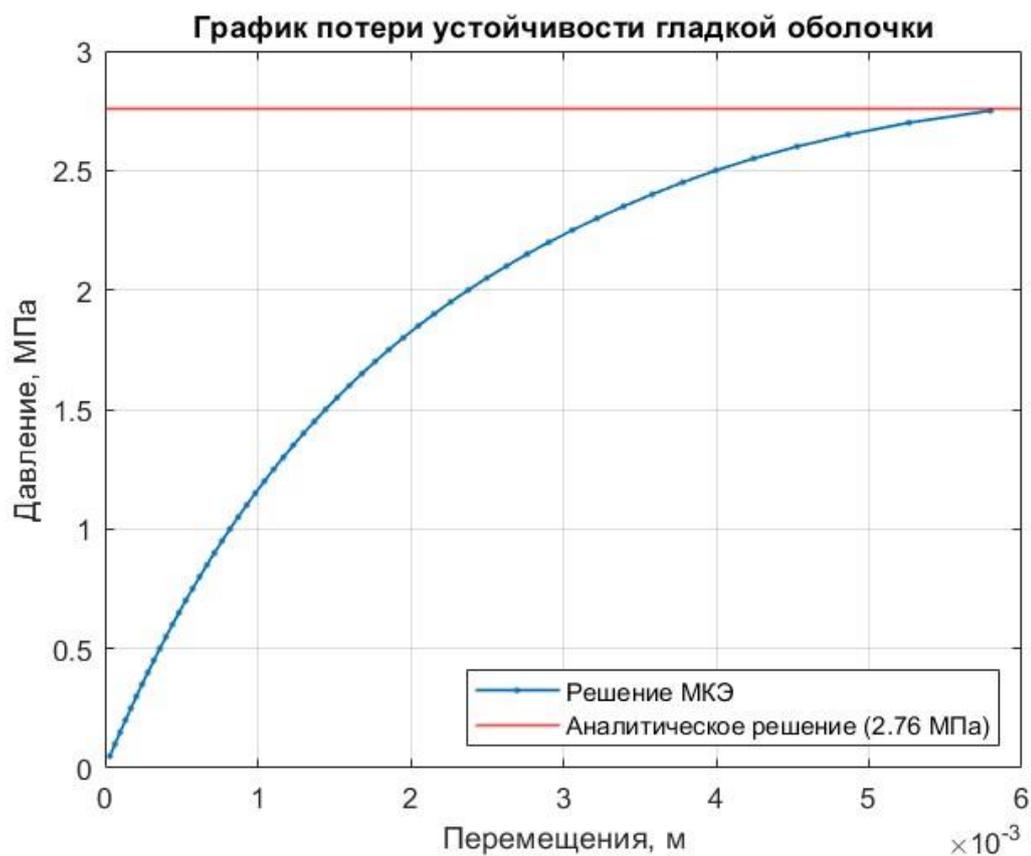


Рисунок 9. График потери устойчивости гладкой оболочки.

По результатам проведенного анализа, видно, что решение методом МКЭ с использованием подхода *Nonlinear Static Analysis* дает хорошее совпадение с аналитическими зависимостями.

ГЛАВА 4. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ ФОРМЫ

При изготовлении подводных аппаратов, несомненно, будет присутствовать отклонение от идеальной круговой формы – так называемая начальная погибь. В данной главе представлен как аналитический подход к проблеме, так и решение методом конечных элементов. Рассмотрена оболочка, оснащенная силовым набором – шпангоутами. Силовой набор значительно увеличивает критическую нагрузку, которую способна выдержать конструкция [2]. Подобная конструкция моделирует реальный корпус аппарата, подверженный всестороннему давлению. Приведено сравнение результатов, полученных при разных подходах решения задачи.

4.1 Аналитическое решение

Решение задачи о потере устойчивости оболочек с начальной погибью представлено в книге «Проектирование конструкций основного корпуса подводных аппаратов» [1]. В данном литературном источнике рассматриваются способы описания нахождения критического давления для обитаемых подводных аппаратов. Методы, которые представлены в источнике, описывают реальные конструкции прочных корпусов, которые отличаются от идеальных как условиями закрепления, так и наличием начальных несовершенств. Для нахождения критического давления, являющегося для конструкции разрушающим, устанавливается определенный подход к решению.

Шпангоуты выполнены из стали марки 09Г2С. Для подкрепленной оболочки использованы параметры, описанные в таблице 5:

Таблица 5. Параметры подкрепленной оболочки

Длина шпации, l	400 мм
Высота шпангоута, h	142,5 мм

Продолжение таблицы 5

Ширина шпангоута, b	10 мм
-----------------------	-------

Рассчитывается теоретическое критическое давление по формуле:

$$p'_{кр} = \frac{1.83 \left(\frac{100\delta}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{100\delta}{l} \right)}{\left(1 - 0.62 \frac{\sqrt{r\delta}}{l} \right)} = 18.14 \quad (4.1)$$

где r – радиус оболочки, δ – толщина оболочки, l – длина шпации.

Действительное критическое давление можно найти следующим образом:

$$p_{кр} = \eta_1 \eta_2 p'_{кр} \quad (4.2)$$

В написанной выше формуле коэффициент η_1 является поправочным коэффициентом, который учитывает отклонение от идеальной формы.

Возникает потребность в определении параметра, учитывающего начальную погибь. Он вводится как отношение отклонения поверхности оболочки от правильной формы к толщине оболочки:

$$\bar{f} = \frac{f}{\delta} \quad (4.3)$$

где f – начальная погибь, δ – толщина оболочки.

Начальная погибь f определяется, как $f = 0.0025r$ из опыта российского изготовления прочных корпусов.

После определения параметра \bar{f} находится первый поправочный коэффициент:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + 1.35 \left(\frac{\bar{f}}{1.57\bar{f} + 1} \right)^{\frac{2}{3}}} \quad (4.4)$$

Коэффициент η_2 подбирается исходя из значения $\bar{\sigma}$ – отношение напряжений в оболочке к пределу текучести материала оболочки:

$$\eta_2 = 1 \text{ при } \bar{\sigma} \leq 0.5$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(1.1 - \frac{0.3}{\bar{\sigma}} \right) \text{ при } 0.5 < \bar{\sigma} < 3$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}} \text{ при } \bar{\sigma} \geq 3$$

В свою очередь $\bar{\sigma}$ определяется как:

$$\bar{\sigma} = \frac{p'_{кр} r}{\delta \sigma_T} k_2^0 \eta_1 \quad (4.5)$$

где σ_T – предел текучести материала (здесь $\sigma_T = 285 \text{ МПа}$), k_2^0 – коэффициент, учитывающий влияние шпангоутов на напряженное состояние оболочки. Значение k_2^0 рассчитывается, исходя из некоторых геометрических параметров.

$$u = \frac{0.642l}{\sqrt{r\delta}} \quad (4.6)$$

$$\gamma = \frac{0.827p_p r^2}{E\delta^2} \quad (4.7)$$

где p_p – расчетное давление для оболочки, МПа.

Вычисляются значения функции аргументов u_1 и u_2 :

$$F_0(u_1, u_2) = u_2 \text{sh}(2u_1) + u_1 \text{sh}(2u_2) + u_1 \sin(2u_2) \quad (4.8)$$

$$F_1(u_1, u_2) = \sqrt{1 - \gamma^2} \frac{\text{ch}(2u_1) - \cos(2u_2)}{F_0(u_1, u_2)} \quad (4.9)$$

$$F_4(u_1, u_2) = 1.7 \frac{u_2 \text{sh}(u_1) \cos(u_2) + u_1 \text{ch}(u_1) \sin(u_2)}{F_0(u_1, u_2)} \quad (4.10)$$

где u_1 и u_2 :

$$u_1 = u \sqrt{1 - \gamma} \quad (4.11)$$

$$u_2 = u\sqrt{1 + \gamma} \quad (4.12)$$

Вычисляются параметры ε_1 и ε_4 :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 + \frac{l\delta}{F_{\text{шп}}}\cdot F_1(u_1, u_2)} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_1 F_4(u_1, u_2) \quad (4.14)$$

где $F_{\text{шп}}$ – площадь поперечного сечения шпангоута.

В итоге найден коэффициент k_2^0 :

$$k_2^0 = 1 - \varepsilon_4 \quad (4.15)$$

Используя все известные значения параметров в формулах, определяются поправочные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0.7705 \\ \eta_2 &= 0.3901 \end{aligned}$$

Эти коэффициенты дают нам значение критического давления для подкрепленной цилиндрической оболочки

$$p_{\text{кр}} = 5.45 \text{ МПа}$$

По правилам Морского регистра судоходства [11] рассматривается иной подход к определению критического давления прочного корпуса при потере устойчивости между шпангоутами.

Обобщенный поправочный коэффициент, учитывающий начальные несовершенства оболочки и влияние напряжений на устойчивость:

$$\eta' = \frac{\eta_1}{\sqrt[4]{1 + \frac{2}{3}(\eta_1[1 + \bar{f}]\bar{\sigma}')^4}} \quad (4.16)$$

где η' – обобщенный поправочный коэффициент

Параметр $\bar{\sigma}'$ находится с помощью формулы:

$$\bar{\sigma} = \frac{p_{кр}' r}{\delta \sigma_T} k_2^0 \eta_1 \tag{4.17}$$

И действительное критическое давление рассчитывается следующим образом:

$$p_{кр} = \eta' p_{кр}' = 5.44 \text{ МПа}$$

4.2 Решение МКЭ

Решение в ANSYS состоит из 3 блоков: 2-ух модулей *Static Structural* и 1-го модуля *Eigenvalue Buckling* [14]. С помощью первых двух модулей производится начальный статический анализ, результат которого является начальным условием для последнего модуля.

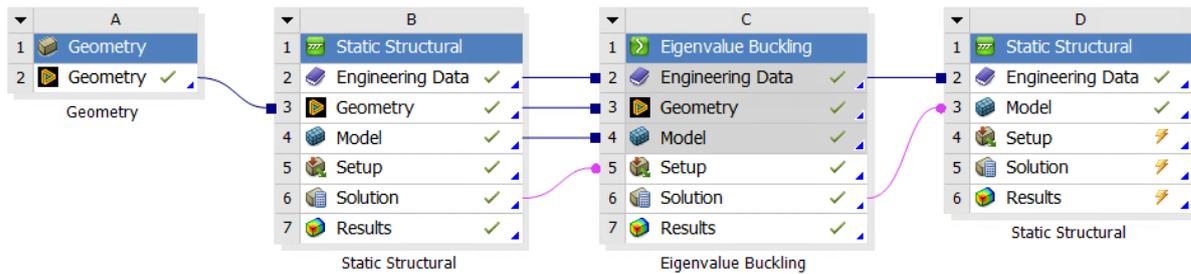


Рисунок 10. Структура метода *Nonlinear Static Analysis*.

Именно за счет такой структуры можно смоделировать начальную погибь в оболочке. Во вкладке *Properties* модуля *Eigenvalue Buckling* выбирается мода потери устойчивости. Параметр *Scale Factor* указывается с учетом перемещений, полученных во втором модуле и желаемого значения начальных несовершенств.

Scale Factor	0,019798
Mode	1

Рисунок 11. Коэффициент для учета несовершенств формы.

Перед расчетом была создана геометрия подкрепленной оболочки с параметрам, указанными в таблице 5. Готовый результат представлен на рисунках 12-13.

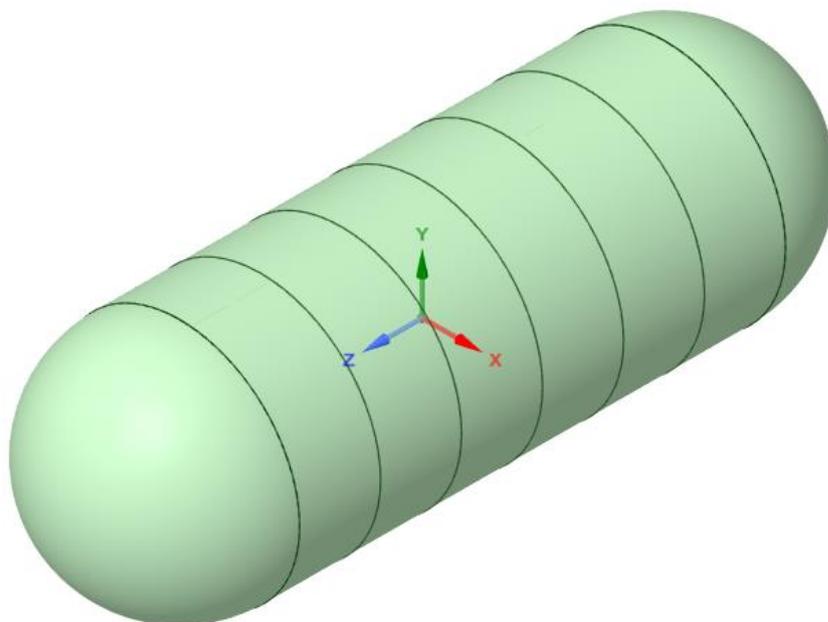


Рисунок 12. Геометрия подкрепленной оболочки.

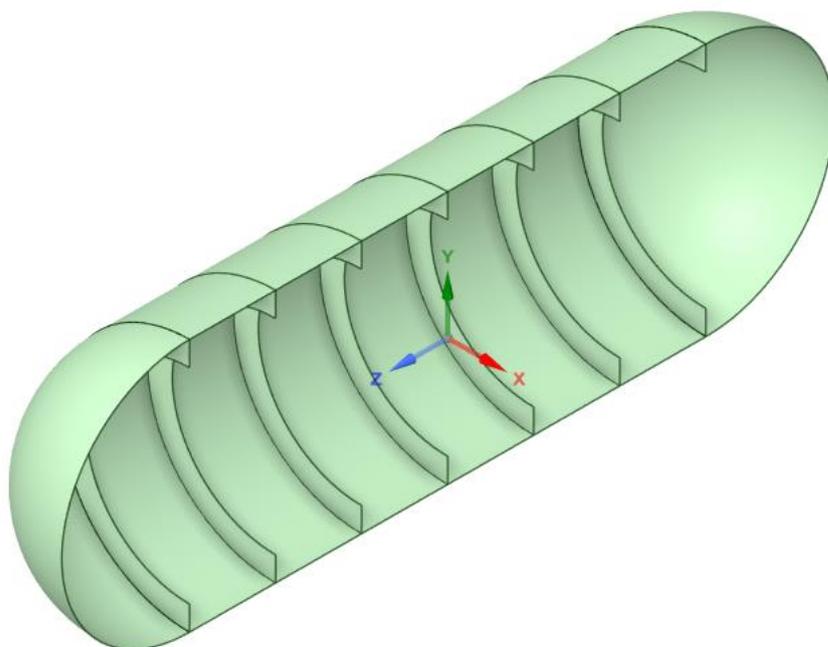


Рисунок 13. Геометрия подкрепленной оболочки в разрезе.

Граничные условия – закрепление граней А и В. Грань А – разрешены перемещения во оси X, грань В – по оси X и Z. Внешняя нагрузка – всесторонне давление, величина которого составляет 2.5 МПа.

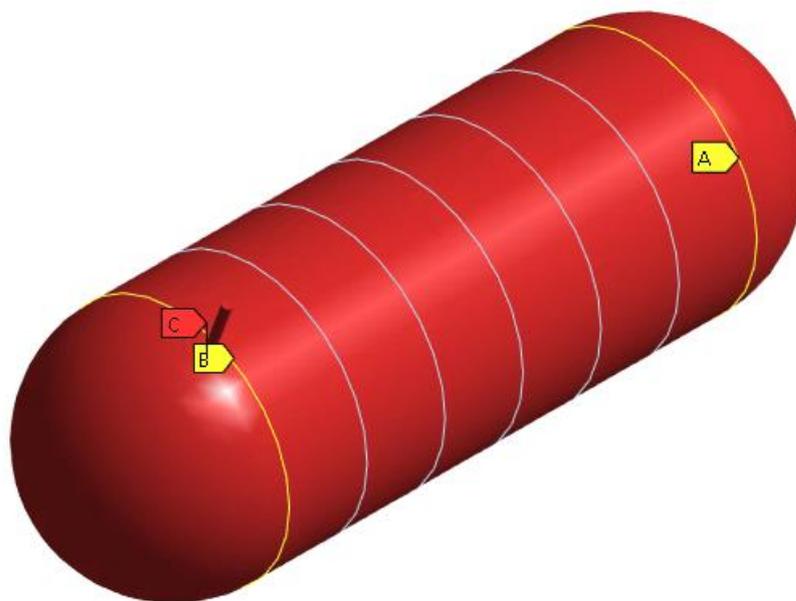


Рисунок 14. Граничные условия подкрепленной оболочки.

Параметры сетки конечных элементов аналогична параметрам, описанным в пункте 3.3.

Результат работы первых двух модулей представлен на рисунке

C: Eigenvalue Buckling

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier (Nonlinear): 6,6948

Unit: m

21.05.2024 0:13

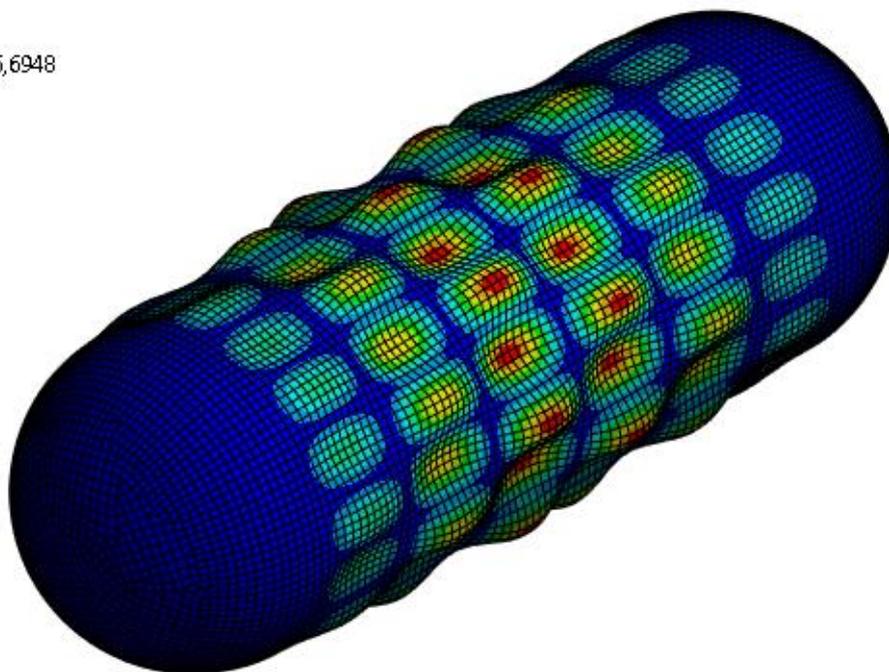
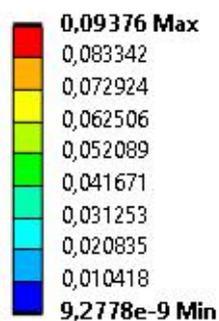


Рисунок 15. Форма потери устойчивости для подкрепленной оболочки.

Данное деформированное состояние, связывается с последним модулем, предварительно указав значение *Scale Factor*, так, чтобы в итоге значение начальной погиби было равно $0.0025r$. Во втором *Static Structural* давление и силы задаются заведомо больше, чем критическое давление оболочки. В данном случае:

$$P = 8 \text{ МПа}$$

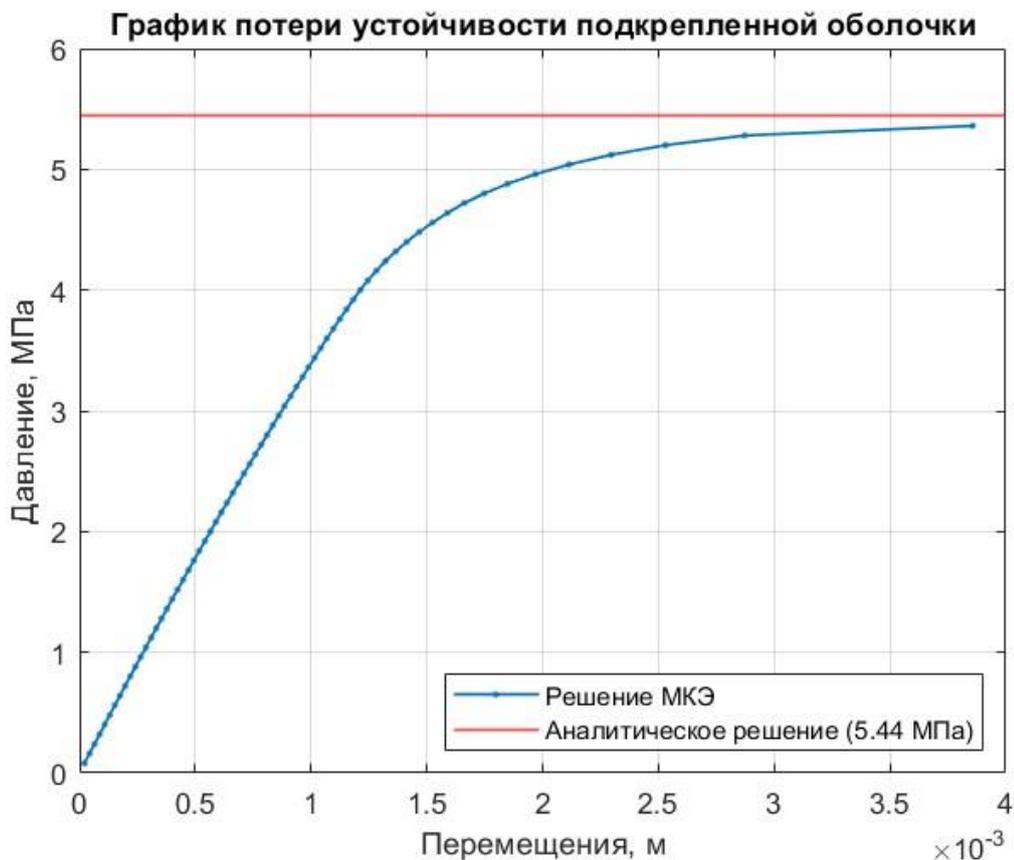


Рисунок 16. График потери устойчивости гладкой оболочки.

Из графика, изображенном на рисунке 16 видно, что при значении давления 5.36 МПа происходит потеря устойчивости цилиндрической оболочки. При последующем увеличении нагрузки можно отметить резкое увеличение перемещений элементов в оболочке.

Значение критического давления, полученного при помощи МКЭ достаточно близко к значению, полученному аналитически. Расхождение в результатах составляет 1 – 2%. Данный факт позволяет считать, что МКЭ дает результаты, близкие к реальным, что позволяет определять критические нагрузки для оболочек, которые имеют некоторые конструкционные особенности.

ГЛАВА 5. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСНАЩЕННОЙ ЛЮКОМ.

После проверки устойчивости подкрепленной оболочки и сравнения результатов, полученных аналитически и с помощью МКЭ, был проведен анализ устойчивости оболочки с люком, выходящим наружу. Подобная конструкция может моделировать люк, с помощью которого экипаж может проникнуть внутрь прочного корпуса, технические отверстия, необходимые для использования оборудования. Конструкция люка может быть выполнена как с разрывом шпангоута, так и без разрыва. В главе рассматриваются оба варианта, для каждого из которых найдено критическое давление.

5.1 Люк с подкреплением выреза

Конструкция люка с подкреплением характеризуется тем, что усиление выреза должно сохранить функцию шпангоута по увеличению жесткости оболочки. Это закономерно сохраняет критическую нагрузку, которую может выдержать конструкция, до потери устойчивости. Готовая геометрия с подкрепленным вырезом представлена на рисунке.

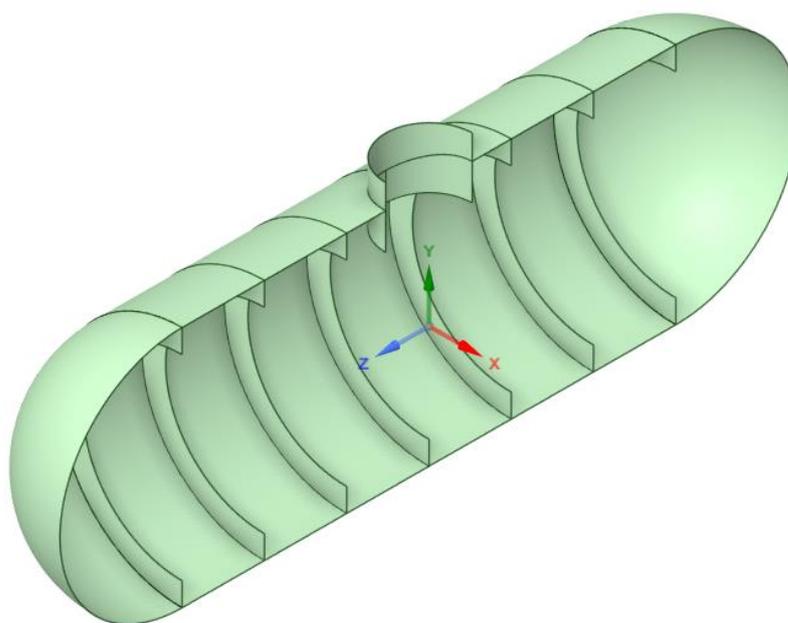


Рисунок 17. Геометрия оболочки с люком в разрезе (подкрепленный вырез).

Геометрические параметры люка приведены в таблице 5.

Таблица 5. Параметры люка

Диаметр	500 мм
Толщина	25 мм
Высота	150 мм
Глубина	172 мм

Граничные условия аналогичны условиям из пункта 4.2. При добавлении люка в конструкцию необходимо учитывать влияние всестороннего давления на этот люк. Чтобы это учесть, было добавлено боковое давление, равное всестороннему давлению на саму оболочку, а так же учтена сила, действующая на торец люка. Так как люк имеет форму кольца с внешним и внутренним радиусами, величина силы рассчитывается по следующей формуле:

$$F = P\pi(r_1^2 - r_2^2) \quad (5.1)$$

где P – внешнее давление, r_1 – внешний радиус кольца, r_2 – внутренний радиус кольца.

C: Eigenvalue Buckling
Total Deformation
Type: Total Deformation
Load Multiplier (Nonlinear): 18,32
Unit: m
15.05.2024 18:56

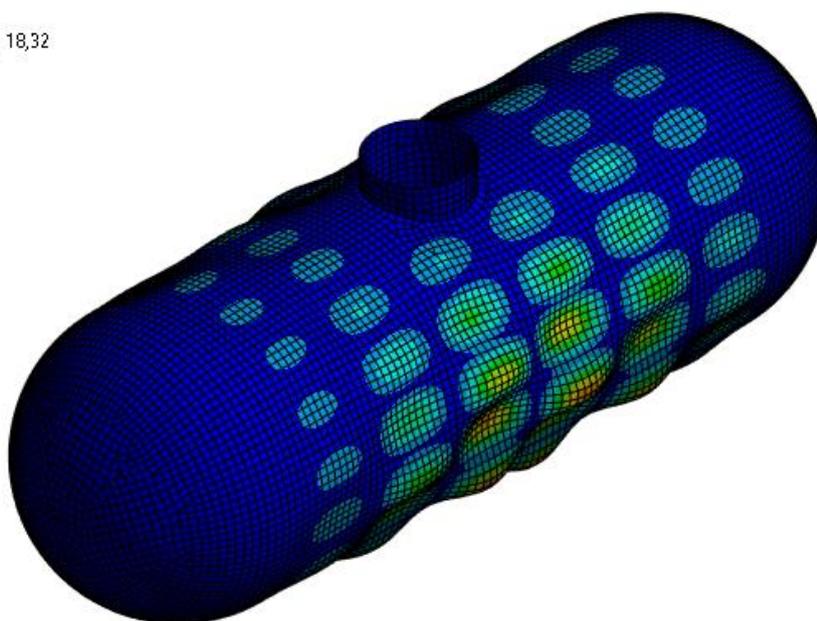
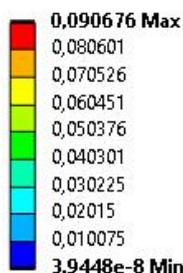


Рисунок 18. Форма потери устойчивости оболочки с подкрепленным люком.

На рисунке изображена форма потери устойчивости, по которой будет рассчитано критическое давление. Так же учтено начальное несовершенство оболочки, подобно пункту 4.2.

5.2 Люк, допускающий разрыв шпангоута

Для сравнения важности подкрепления люка, рассмотрена ситуация, в которой в оболочке выполнен люк, причем выполнен разрыв шпангоута. Данное состояние в силовом наборе крайне не желательно, так как приводит к снижению критической нагрузки. Потеря устойчивости между шпангоутами происходит при меньшем внешнем давлении. Геометрия, описывающая подобную структуру, представлена на рисунке 19.

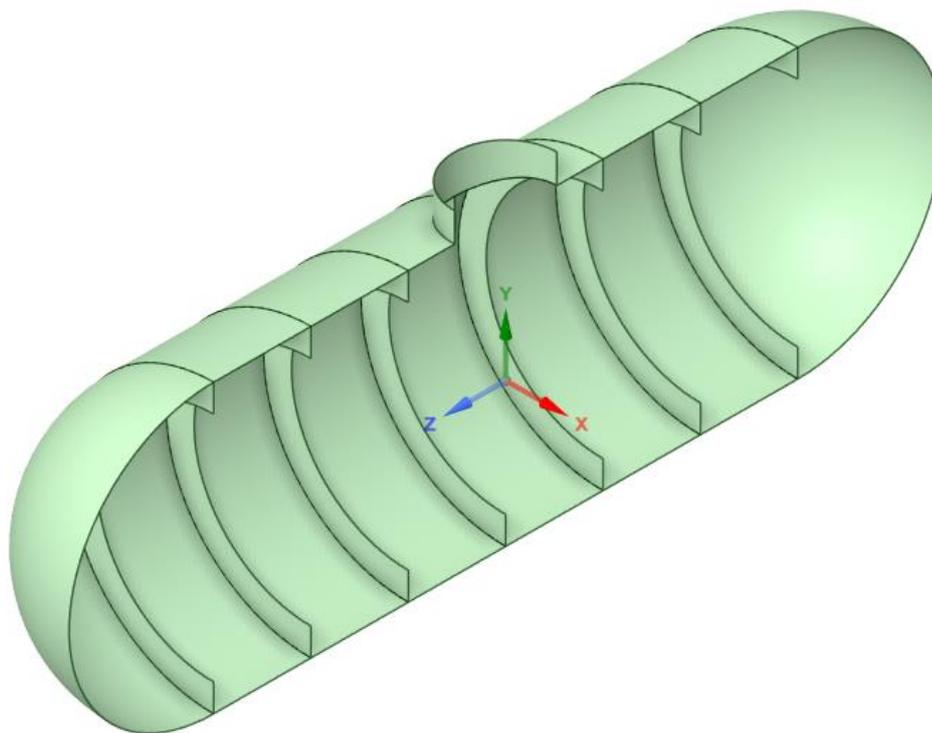


Рисунок 19. Геометрия оболочки с люком в разрезе (неподкрепленный вырез).

C: Eigenvalue Buckling

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier (Nonlinear): 18,303

Unit: m

20.05.2024 23:46

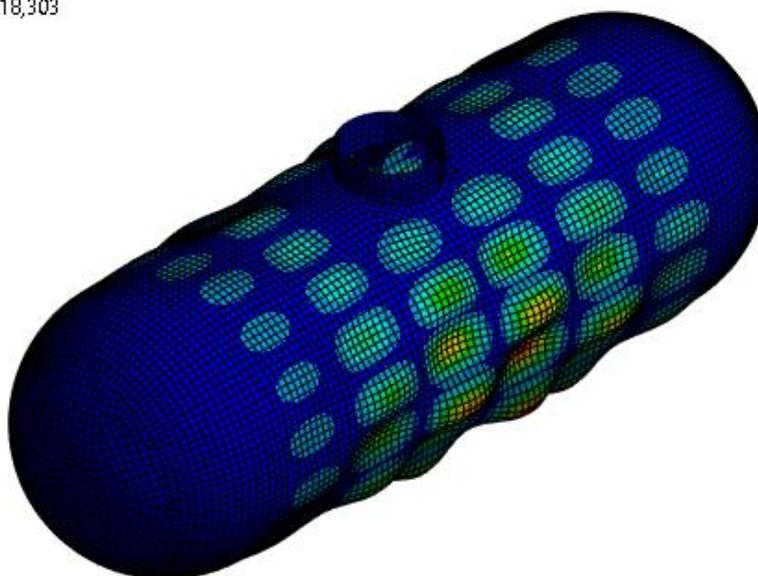
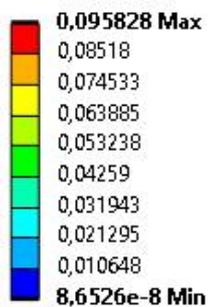


Рисунок 20. Форма потери устойчивости оболочки с неподкрепленным люком.

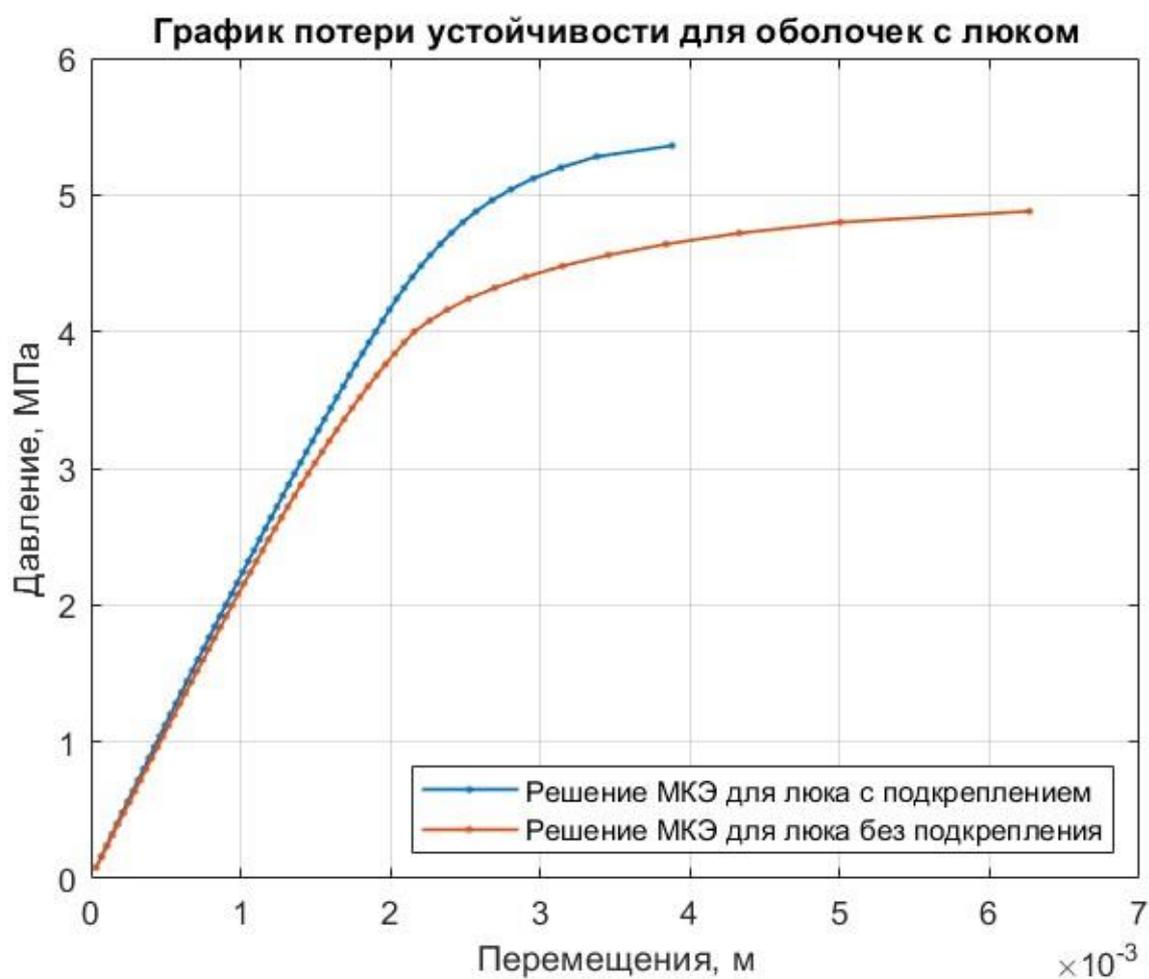


Рисунок 21. График потери устойчивости оболочек с конструктивной особенностью.

Из рисунка 21 видно, что при значении нагрузки 4.88 МПа решение прерывается, что говорит о том, что было достигнуто критическое давление для оболочки с неподкрепленным люком. Результат расчета подтверждает предположение о том, что при данном способе установки люка произойдет снижение (примерно на 10%) нагрузки, которую способна выдержать оболочка.

Как можно заметить из графика на рисунке 21, потеря устойчивости оболочки с люком происходит на при такой же величине нагрузки, при каком теряет устойчивость оболочка без люка. Объясняется это тем, что оболочка теряет устойчивость в пролетах между шпангоутами, а так как люк выполняет функцию разорванного шпангоута, то можно судить о сохранении величины критической нагрузки в данном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе проведен анализ конструкций на устойчивость. Была рассмотрена цилиндрическая оболочка как с силовым набором – шпангоутами, так и без. Целью работы является нахождение метода расчета оболочек на устойчивость при помощи конечно-элементного пакета *ANSYS*, а так же сравнение с аналитическими расчетами.

В результате работы были сделаны следующие выводы:

а) Был проведен анализ литературных источников с целью отыскания математического аппарата, с помощью которого можно получить критическую нагрузку для оболочки. Найдены формулы, позволяющие произвести расчет на устойчивость, как гладких оболочек, так и подкрепленных силовым набором с учетом начальных несовершенств формы;

б) Расчет при помощи *Nonlinear Static Analysis*, который учитывает начальные несовершенства формы, дал результаты, совпадающие с аналитическими методами, что говорит об эффективности данного подхода;

в) На основе расчета устойчивости при помощи *Nonlinear Static Analysis*, была рассмотрена потеря устойчивости оболочки, допускающая конструкционные особенности, такие как люки. Анализ был выполнен для двух видов отверстий – с подкреплением и без. Расчет показал, что используемый метод подходит для исследования подобных конструкций, а так же подтвердить ожидания результатов для разных исполнений люка в прочном корпусе.

Стоит отметить, что данный расчет выполнен в предположении идеальных условий, что не в полной мере может соответствовать реальным конструкциям и их особенностям. Для получения более точных результатов исследований рекомендуется проведение реальных опытов с целью

уточнения данных, полученных в ходе данной работы. Обобщение реальных опытов и выводов представленных выше, поможет точнее определить методологию исследования оболочек с начальными несовершенствами формы для определения потери устойчивости.

Таким образом, результаты работы представляют собой вклад в исследование устойчивости конструкций при помощи МКЭ и могут использоваться для дальнейших исследований в этой области.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.Л., Глозман, М.К., Ростовцев Д.М., Сиверс Н.Л. Проектирование конструкций основного корпуса подводных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1994. – 128 с.
2. Болдырев А.В., Комаров В.А. Автоматизированное проектирование силовых шпангоутов. – М.: Издательство СГАУ, 2007. – 4-5с.
3. Витохин Е.Ю. Вычислительная механика: учебное пособие. – СПб.: Издательство НИУ ВШЭ, 2022. – 18-21 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 545-551 с.
5. Гайджуров П.П. Методы, алгоритмы и программы расчета стержневых систем на устойчивость и колебания. – Ростов-на-Дону: Издательство ЮРГТУ, 2010. – 67-69 с
6. Гохфельд Д.А., Гецов Л.Б., Кононов К.М., и др. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. – Екатеринбург: Издательство УрО РАН, 1996. – 277 с.
7. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 317-321 с.
8. Дьяков И.Ф., Чернов С.А., Черный А.Н. Метод конечных элементов в расчётах стержневых систем. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 23 с.
9. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1976. – 83 с
10. Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 370 с.
11. Правила классификации и постройки необитаемых подводных аппаратов. – М.: Российский морской регистр судоходства, 2023. – 27 с

12. Суфияров В.Ш., Орлов А.В., Борисов Е.В. и др. Конечно-элементное моделирование одноосного растяжения образцов из функционально-градиентного материала с использованием мультилинейной модели пластичности. – М.: Издательство МФТИ, 2021. – 26-27 с.

13. Маврин А.С. Типы расчетных сеток и способы хранения информации о них [Электронный ресурс] // Научное обозрение. – 2018. – 2-4 с.

14. Нелинейный анализ потери устойчивости. [Электронный ресурс]. URL: <https://cae-club.ru/publications/nelineynyy-analiz-poteri-ustoychivosti?ysclid=1wqv5t6i4160320563>

15. Eigenvalue Buckling and Post-buckling Analysis in ANSYS Mechanical. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.padtinc.com/2018/09/10/eigenvalue-buckling-and-post-buckling-analysis-in-ansys-mechanical/>