Отчет по проделанной работе за весенний семестр 2014/2015

ВЯЗКОУПРУГАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО - ИЗОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Цель работы:

Роговица глаза является вязкоупругой системой, статический метод не может измерить и учесть ее вязкостные свойства. Большинство имеющихся на данный момент моделей поведения оболочки глаза учитывает только упругие свойства роговицы, что зачастую приводит к некорректным результатам измерения внутриглазного давления (ВГД). В данной работе предлагается рассмотреть модель трансверсально-изотропного сферического слоя, предложенную С.М. Бауэр, Л.А. Замураевым и К.Е. Котляр [1], с учетом вязкости и определить влияние сдвигового коэффициента вязкости на полученное решение.

Актуальность:

Рассмотрение различных математических моделей поведения оболочки глаза, а также их сопоставление необходимо для более качественного диагностирования ряда заболеваний из области офтальмологии и разработки эффективных методов их лечения [2].

Постановка задачи:

Решается вязкоупругая задача о деформации сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, находящегося под действием внутреннего давления P. Необходимо определить изменение внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости. Решение для упругой задачи предложено в работе [1].

Ход решения:

Для решения данной задачи используется реологическая модель Кельвина – Фойгта, согласно которой тензор напряжений можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2\eta \dot{\mathbf{e}}\,, \tag{1.1}$$

Где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, ${}^4\mathbf{C}$ – тензор жесткости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, η – сдвиговой коэффициент вязкости, $\mathbf{e}$ – девиатор тензора деформаций. Тензор жесткости для трансверсально – изотропной среды имеет следующий вид:

$${}^4\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Коэффициенты матрицы, соответствующей тензору жесткости, можно выразить через упругие модули следующим образом:

$$\begin{aligned} &C_{11} = E' + 4\nu'^2 K \\ &C_{12} = 2\nu' K \\ &C_{22} = G + K \\ &C_{23} = -G + K \\ &C_{66} = G' \end{aligned} \tag{1.3}$$

Где E’ –модуль Юнга в направлении оси изотропии, ν’ - коэффициент Пуассона, K – объемный модуль упругости, G,G’ – модули сдвига для поверхности изотропии и для любой плоскости, перпендикулярной к поверхности изотропии, соответственно.

Девиатор тензора деформаций связан с самим тензором деформаций следующим образом:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E} \tag{1.4}$$

Из соображений симметрии положим, что в сферической системе координат справедливы следующие равенства для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \sigma_{\theta\theta}(r), \sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\varphi r} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \tag{1.6}$$

В этом случае уравнения равновесия приводятся к одному уравнению:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \tag{1.7}$$

Предполагается также, что компоненты вектора перемещения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_\varphi = u_\theta = 0, u_r = u_r(r) \tag{1.8}$$

В силу этого компоненты тензора деформаций в сферической системе координат примут следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\varphi r} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0 \tag{1.10}$$

Девиатор тензора деформаций в таком случае принимает следующий вид:

$$\mathbf{e} \sim \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{du_r}{dr} - \frac{2}{3}\frac{u_r}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\frac{u_r}{r} - \frac{1}{3}\frac{du_r}{dr} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\frac{u_r}{r} - \frac{1}{3}\frac{du_r}{dr} \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Выразим компоненты тензора напряжений через компоненты вектора перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= A\frac{u_r}{r} + B\frac{du_r}{dr} + 2\eta\left(\frac{1}{3}\frac{\dot{u}_r}{r} - \frac{1}{3}\frac{d\dot{u}_r}{dr}\right) \\ \sigma_{rr} &= C\frac{u_r}{r} + D\frac{du_r}{dr} + 2\eta\left(\frac{2}{3}\frac{d\dot{u}_r}{dr} - \frac{2}{3}\frac{\dot{u}_r}{r}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Где

$$\begin{aligned} A &= 2K \\ B &= 2\nu' K \\ C &= 4\nu' K \\ D &= E' + 4\nu' K \end{aligned} \tag{1.13}$$

Уравнение равновесия в перемещениях:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} + 2\zeta\frac{u_r}{r^2} + \frac{4}{3}\eta\left(\frac{d^2\dot{u}_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\dot{u}_r}{dr} - 2\frac{\dot{u}_r}{r^2}\right) = 0 \tag{1.14}$$

Где константа $\zeta = \dfrac{2K(\nu'-1)}{E'(1+4\nu' K/E')}$

Для решения уравнения (1.14) используем метод Лапласа:

$$\begin{aligned} u_r(r,t) &\to \int_0^\infty e^{-pt} u_r(r,t)\,dt = \overline{u_r(r,p)} \\ \dot{u}_r(r,t) &\to \int_0^\infty e^{-pt} \dot{u}_r(r,t)\,dt = \overline{p u_r(r,p)} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Уравнение равновесия принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d^2\bar{u}_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\bar{u}_r}{dr}\right)\left(1 + \frac{4}{3}\eta p\right) + 2\frac{\bar{u}_r}{r^2}\left(\xi - \frac{4}{3}\eta p\right) = 0 \tag{1.16}$$

Решение уравнения:

$$\begin{aligned} \overline{u_r(r,p)} &= \overline{F_1(p)}\, r^{\frac{1}{2}\frac{(-3-4\eta p+\sqrt{9+120\eta p+144\eta^2p^2-72\xi-96\xi\eta p})}{3+4\eta p}} \\ &+ \overline{F_2(p)}\,\frac{1}{r^{\frac{1}{2}\frac{(3+4\eta p+\sqrt{9+120\eta p+144\eta^2p^2-72\xi-96\xi\eta p})}{3+4\eta p}}} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для нахождения $\bar{F}_1(p), \bar{F}_2(p)$ используем граничные условия, преобразованные по методу Лапласа:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}\Big|_{r=R_1} &= -P(t) = -P_0 H(t) \to \overline{\sigma_{rr}}\Big|_{r=R_1} = \overline{-P_0 H(t)} = -\frac{P_0}{p} \\ \sigma_{rr}\Big|_{r=R_2} &= 0 \to \overline{\sigma_{rr}}\Big|_{r=R_2} = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

На данный момент затруднением является обратное преобразование Лапласа для функции перемещений.

Дальнейшее развитие событий:

Для дальнейшего нахождения зависимости изменения внутреннего давления от дополнительно введенного объема жидкости необходимо найти обратное преобразование Лапласа от выражения для преобразованных перемещений и затем ввести зависимость изменения объема дополнительной жидкости от полученных перемещений.

Список литературы:

1. С.М. Бауэр, Л.А. Замураев, К.Е. Котляр. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики – 2010 – То 10, №2 – С. 43 – 49.
2. Карамшина Людмила Александровна. Диссертация: модели многослойных оболочек в задачах офтальмологии.
3. Еричев В.П., Еремина М.В., Якубова Л.В., Арефьева Ю.А. Анализатор биомеханических свойств глаза в оценке вязкоэластических свойств роговицы в здоровых глазах // Глаукома – 2007 – № 1. – С. 11 – 15.
4. В. Новацкий. Теория упругости. Пер. с польского – 1975 – Изд. «Мир»
5. Г.Л. Колмогоров, Т.В. Латышева, М.В. Снигирева. Трансверсально изотропные характеристики сверхпроводящих длинномерных композиционных материалов
6. Р. Кристенсен. Введение в механику композитов. Пер. с англ. – 1982 - Изд. «Мир»
7. К. Котляр, С. Бауэр, Н. Планге. Клинические и биомеханические аспекты изменения внутриглазного давления после интравитреальных инъекций.