

Анализ влияния граничных условий в решении задачи
гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана
Выпускная квалификационная работа бакалавра

Волков Д.С.

Руководитель: к.ф.-м.н., доц. Витохин Е.Ю.

27 июня 2023 г.

Цели и задачи

Цель работы: математическое моделирование импульсного распространения тепла в тонкой пластине при различных граничных условиях

Задачи:

1. Постановка задачи плоского напряжения
2. Численное решение задачи классической термоупругости методом конечных разностей при различных граничных условиях
3. Численное решение задачи термоупругости Лорда-Шульмана методом конечных разностей при различных граничных условиях и значениях времени релаксации
4. Анализ влияния гиперболических эффектов в распределении тепла для каждого вида граничных условий

Введение

Экспериментальные данные (Судьенков Ю.В. Неравновесность процесса движения облучаемой поверхности металлов при воздействии лазерных импульсов субмикросекундной длительности // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, вып.7) \Rightarrow *волновой характер распространения теплового импульса.*

Физическая природа:

- ▶ фонон-фононное и электрон-фононное рассеивание

Предложенные модели:

- ▶ Лорда-Шульмана L-S (время релаксации)
- ▶ Грина — Линдсея G-L

Постановка задачи

Рассматривается задача об импульсном воздействии лазерного луча:

1. в точку, удаленную от границ пластины
2. в точку у границы пластины с краевыми условиями

$$2.1 \quad T|_{\gamma} = 0 \text{ или } \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma} = 0$$

$$2.2 \quad \underline{u}|_{\gamma} = 0 \text{ или } \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}|_{\gamma} = 0$$

Моделируемое тело представляет собой квадрат со стороной $l = 2,0$ мм.

Используемые термомеханические параметры материала:

$$E = 127 \text{ ГПа}, \nu = 0,33, \rho = 8960 \text{ кг/м}^3,$$

$$\lambda = 401 \text{ Вт/(м}^*\text{К)}, \alpha = 49,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}, c_p = 390 \text{ Дж/К}.$$

Математическая модель

1. Закон Фурье \Rightarrow Закон Каттанео-Вернотте

$$\underline{h} = -\lambda \nabla T \Rightarrow \underline{h} + \tau \dot{\underline{h}} = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

2. Закон Дюамеля-Неймана

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon \underline{\underline{E}} + 2G \underline{\underline{e}} - \alpha K \tilde{T} \underline{\underline{E}} \quad (2)$$

3. Модель Лорда-Шульмана

$$\lambda \Delta T - \rho c_v \dot{\tilde{T}} - \alpha K \tilde{T} \dot{\varepsilon} = -\rho q \Rightarrow \quad (3)$$

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_v \left(\dot{\tilde{T}} + \tau \ddot{\tilde{T}} \right) - \alpha K T_0 (\dot{\varepsilon} + \tau \ddot{\varepsilon}) = \rho (q + \tau \dot{q}), \quad (4)$$

Плоское напряжение

Предположения:

- ▶ $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$
- ▶ $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{9KG}{3K+4G} \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \underline{u} + G \tilde{\Delta} \underline{u} - \frac{6\alpha KG}{3K+4G} \tilde{\nabla} \tilde{T} = \rho \ddot{\underline{u}}, \\ \lambda \tilde{\Delta} \tilde{T} - \left(\rho c_v + \frac{3\alpha^2 K^2 T_0}{3K+4G} \right) \left(\dot{\tilde{T}} + \tau \ddot{\tilde{T}} \right) - \\ - \frac{6\alpha K T_0 G}{3K+4G} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial t} + \tau \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial t^2} \right) = \rho(q + \tau \dot{q}) \end{array} \right. \quad (5)$$

Импульсное воздействие

Рассмотрим тонкую пластину, имеющую сторону L и толщину h , малую в сравнении с радиусом:

$$h \ll L$$

$$J(r) = J_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right), \quad (6)$$

$$E(r) = \int_0^\infty J(r, t) dt = \int_0^\infty E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0) dt = E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right)$$

Запишем баланс энергии на малом участке dr :

$$J(r, t) - \rho q(r, t) dr - J(r + dr, t) = 0$$

$$J(r + dr, t) = J(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} J(r, t) dr + O(dr^2) = E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right) \left(1 - \frac{4r}{r_g^2} dr - \dots\right) \delta(t - 0)$$

Тогда для баланса энергии получим:

$$E_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{r_g^2}\right) \delta(t-0) - \rho q(r, t) dr - E_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{r_g^2}\right) \left(1 - \frac{4r}{r_g^2} dr\right) \delta(t-0) = 0$$

$$q(r, t) = \frac{4r}{r_g^2} \frac{E_0}{\rho} \exp\left(-2\frac{r^2}{r_g^2}\right) \delta(t-0)$$

Время релаксации

Для металлов $10^{-12} < \tau < 10^{-8}$.

Расчеты производились для $\tau = 10^{-11}$, $\tau = 10^{-10}$, $\tau = 10^{-9}$ с

Обезразмеривание

Вводим безразмерные величины:

$$\begin{cases} \phi = k_1 u_x, \psi = k_1 u_y, a = k_1 x, b = k_1 y \\ \Theta = k_2 t \\ \Omega = k_3 \tilde{T} \end{cases} \quad (7)$$

где

$$k_1 = \frac{c_p}{\lambda} \sqrt{\rho G}, k_2 = \frac{c_p}{\lambda} G, k_3 = \alpha, d = k_2 \tau$$

В новых величинах система примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial a^2} + \frac{9}{4} A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b} - \frac{2}{3} A_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial b^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Theta^2} \\ A_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} + \frac{9}{4} A_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial b} - \frac{2}{3} A_2 \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - A_3 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Theta} + A_5 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \Theta^2} \right) - \\ 6A_4 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial \Theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial b \partial \Theta} + A_5 \frac{\partial^3 \phi}{\partial a \partial \Theta^2} + A_5 \frac{\partial^3 \psi}{\partial b \partial \Theta^2} \right) = q^* + A_5 \frac{\partial q^*}{\partial \Theta} \end{array} \right. \quad (8)$$

где

$$q^* = 4 \frac{\alpha \lambda}{c_p^2 G} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{k_1 r_g^2} \frac{E_0}{\rho} \exp \left(-2 \frac{a^2 + b^2}{k_1^2 r_g^2} \right) \frac{1}{k_2} \delta \left(\frac{\Theta}{k_2} \right)$$

Метод конечных разностей

Используется явная схема МКР. Для приближения производных по времени и координатам используются центральные разности.

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_{i-1,j}^k - 2\Omega_{i,j}^k + \Omega_{i+1,j}^k}{h^2} + \frac{\Omega_{i,j-1}^k - 2\Omega_{i,j}^k + \Omega_{i,j+1}^k}{h^2} - \frac{\Omega_{i,j}^{k+1} - \Omega_{i,j}^{k-1}}{2\Delta t} \\ + A_4 & \left(\frac{\phi_{i-1,j}^{k-1} + \phi_{i+1,j}^{k+1} - \phi_{i+1,j}^{k-1} - \phi_{i-1,j}^{k+1}}{4h\Delta t} + \frac{\psi_{i,j-1}^{k-1} + \psi_{i,j+1}^{k+1} - \psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k+1}}{4h\Delta t} \right) \\ & + A_5 \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{k+1} - \phi_{i-1,j}^{k+1} - 2\phi_{i+1,j}^k + 2\phi_{i-1,j}^k + \phi_{i+1,j}^{k-1} - \phi_{i-1,j}^{k-1}}{2h\Delta t^2} \right. \\ & \left. + \frac{\psi_{i,j+1}^{k+1} - \psi_{i,j-1}^{k+1} - 2\psi_{i,j+1}^k + 2\psi_{i,j-1}^k + \psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h\Delta t^2} \right) = q^* \end{aligned}$$

где h – шаг сетки по пространству, Δt – шаг по времени

Метод конечных разностей

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_{i-1,j}^k - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i+1,j}^k}{h^2} + A_1 \frac{\phi_{i+1,j+1}^k + \phi_{i-1,j-1}^k - \phi_{i-1,j+1}^k - \phi_{i+1,j-1}^k}{4h^2} \\ & + A_2 \frac{\psi_{i,j-1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j+1}^k}{h^2} - A_3 \frac{\Omega_{i,j+1}^k - \Omega_{i,j-1}^k}{2h} \\ & - \frac{\psi_{i,j}^{k-1} - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i,j}^{k+1}}{\Delta t^2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Метод конечных разностей

Критерий Куранта:

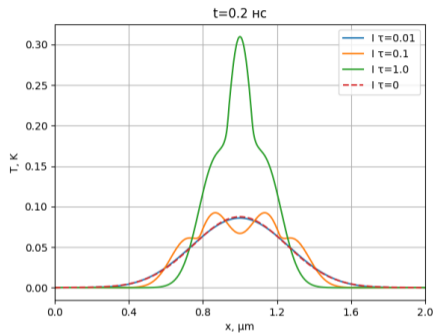
$$\Delta t \ll \frac{h}{c_{ac}}, \quad (10)$$

где c_{ac} – скорость звука в среде. Скорость звука в постановке плоского напряжения с:

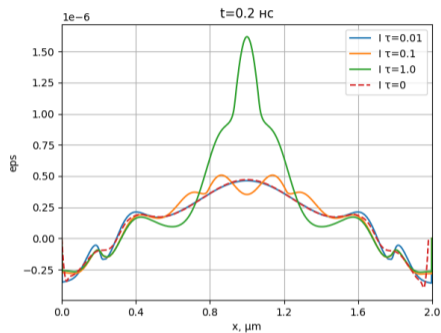
$$c_{ac} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (11)$$

До $\tau = 10^{-11}$ с скорость квазитеплового фронта L-S не превышает скорость звука в среде (медь)

Импульсное воздействие в центре



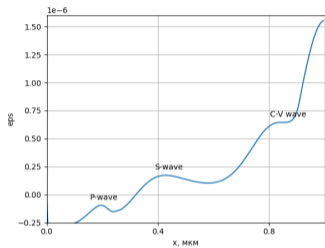
(a) $T(x), y = 0.5$



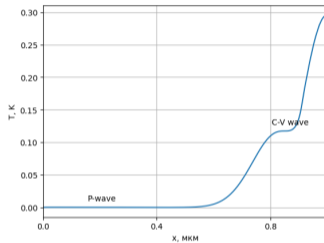
(b) $\epsilon_{zz}(x), y = 0.5$

Рис. 1: Распределение температур и деформаций при $t = 0.2$ нс

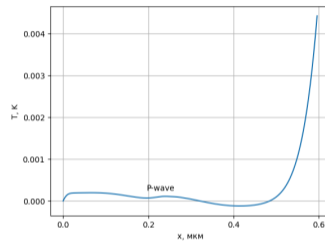
Скорости волновых фронтов



(a) $\varepsilon_{zz}(x)$



(b) $T(x)$, К



(c) $T(x)$, К

Рис. 2: Термоупругие волны в пластине, $t = 0.2$ нс, $\tau = 0.5$ нс

Скорости волновых фронтов

τ , нс	V_P , м/с	V_S , м/с	V_{C-V} , м/с
0,1	4019	2259	1420
0,5	4019	2259	780
1,0	4019	2259	460

Таблица 1: Скорости волн при значениях времени релаксации τ

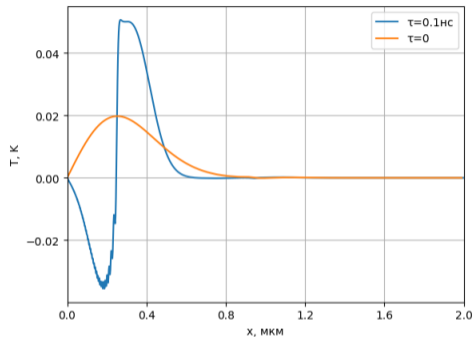
$$V_p^a = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} = 3988 \text{ м/с}$$

Отклонение, вызванное влиянием температурных составляющих, составило:

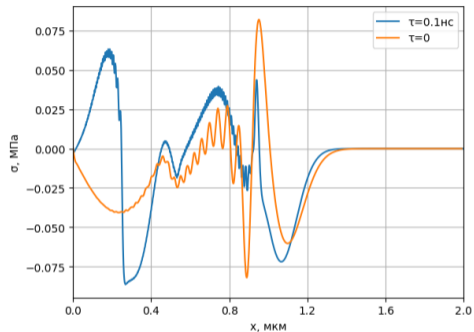
$$\epsilon = \frac{V_p^a - V_p}{V_p^a} = 0.77\%$$

Жесткая заделка, постоянная температура на границе

Жесткая заделка, постоянная температура на границе



(a) $T(x), y = 0.5l$

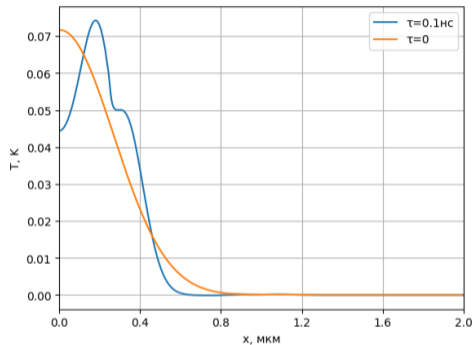


(b) $\sigma_{xx}(x), y = 0.5l$

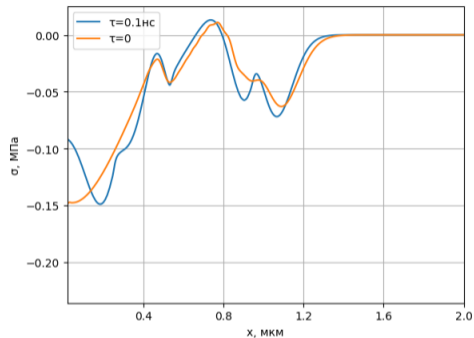
Рис. 3: Распределение температур и напряжений при $t = 0.2 \text{ нс}$

Жесткая заделка, теплоизолированные стенки

Жесткая заделка, теплоизолированные стенки



(a) $T(x), y = 0.5l$

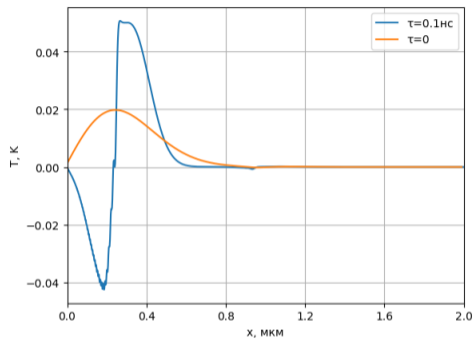


(b) $\sigma_{xx}(x), y = 0.5l$

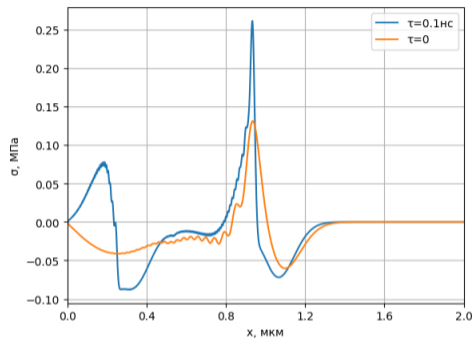
Рис. 4: Распределение температур и напряжений при $t = 0.2$ нс

Свободные границы, постоянная температура на стенках

Свободные границы, постоянная температура на стенках



(a) $T(x), y = 0.5l$

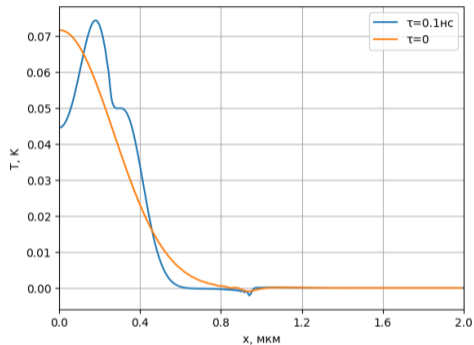


(b) $\sigma_{xx}(x), y = 0.5l$

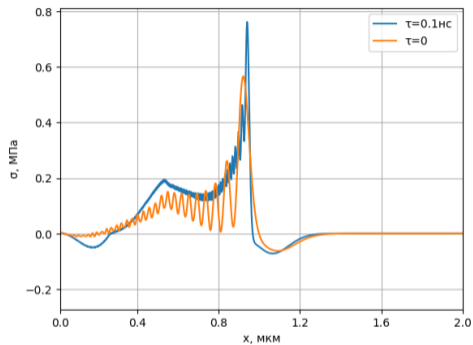
Рис. 5: Распределение температур и напряжений при $t = 0.2$ ns

Теплоизолированные стенки, свободные границы

Теплоизолированные стенки, свободные границы



(a) $T(x), y = 0.5l$



(b) $\sigma_{xx}(x), y = 0.5l$

Рис. 6: Распределение температур и напряжений при $t = 0.2 \text{ нс}$

Заключение

1. Наибольшее влияние гиперболических эффектов на распространение тепла наблюдается для случая пластины с закрепленными стенками, на которых поддерживается постоянная температура
2. Наибольшие различия возникают в окрестности квазitemпературного фронта
3. С уменьшением величины времени релаксации τ вносимые волновой природой распространения тепла эффекты сходят на нет.

Полученные результаты позволяют исследовать процесс распространения тепла в тонкой пластине на малых интервалах времени и малых масштабах по пространству.