Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

Директор высшей школы

_____ А.М. Кривцов

« 3 » февраля 2020 г.

.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Тестирование методики определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня путем решения задачи о статическом изгибе стержня в форме плоской спирали

по направлению 01.03.03 Механика и математическое моделирование

по образовательной программе

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой

Выполнил

студент гр. 3630103/60101 Н.А. Пальчиковская

Руководитель

д.ф.-м.н., профессор Е.А. Иванова

Санкт-Петербург

2020

Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ

Директор высшей школы

_____ А.М. Кривцов

« 3 » февраля 2020 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Пальчиковской Наталии Александровне

1. Тема работы: тестирование методики определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня путем решения задачи о статическом изгибе стержня в форме плоской спирали

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 15 июня 2020 г.

3. Исходные данные по работе:

основные уравнения статики стержней, конфигурация стержня и граничные условия в теории стержней и в трехмерной модели, несколько методов определения неизвестного модуля;

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):

1. построение модели в пакете прикладных программ ANSYS, вывод необходимых данных;

2. обработка полученных данных, определение компонент перемещений и поворота теории стержней по результатам расчетов в рамках трехмерной теории;

3. нахождение упругого модуля с помощью вычисленных компонент тремя способами;

4. определение оптимального метода расчета на основе анализа полученных результатов.

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): рисунки конфигурации стержня и прикладываемых граничных условий в теории стержней и в используемом прикладном пакете, распределение напряжений и разбиение на сетку рассматриваемой модели, графики сеточной сходимости и графики перемещений, деформаций, построенные для различных значений искомого упругого модуля.

6. Консультанты по работе: нет

7. Дата выдачи задания: 3 февраля 2020 г.

Руководитель ВКР Е.А. Иванова

Задание принял к исполнению 3 февраля 2020 г.

Студент Н.А.Пальчиковская

РЕФЕРАТ

На 53 с., 30 рисунков, 24 таблицы

ПЛОСКИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕРЖНИ, УПРУГИЙ МОДУЛЬ, ТЕОРИЯ СТЕРЖНЕЙ, ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ, МЕТОД РАСЧЕТА

В данной работе рассматривается плоский криволинейный стержень, для которого необходимо определить модуль упругости, то есть компоненту тензора жесткости $\underline{\underline{B}} - B_{32}$. Представлено три метода для нахождения упругого модуля, каждый из которых основан на связи перемещений и поворотов, полученных с применением теории стержней, и результатов расчетов в рамках трехмерной теории. При вычислении искомого модуля упругости используются компоненты перемещений и поворотов, найденных в нескольких сечениях. Итогом работы стало определение оптимального метода для вычисления неизвестного упругого модуля.

THE ABSTRACT

53 pages, 30 pictures, 24 tables

PLANE CURVILINEAR RODS, ELASTIC MODULUS, THE ROD THEORY, THREE-DIMENSIONAL THEORY, COMPUTING METHOD

In this paper we consider the plane curvilinear rod for which it is necessary to determine the elastic modulus i.e. the component of stiffness tensor $\underline{\underline{B}} - B_{32}$. Three methods for determining B_{32} are suggested each of which is based on connection between translations and rotations in the rod theory and translations in the three-dimensional theory. During calculations of the required modulus, the components of displacements and rotations determined in several cross-sections are used. The result of the work is determination of the most suitable method of calculation of the required modulus.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5
Глава 1. Общая теория 7
1.1 Геометрия стержня 7
1.2 Основные уравнения линейной теории стержней 12
1.3 Связь теории стержней и трехмерной теории 14
Глава 2. Постановка задачи 17
2.1 Постановка задачи теории стержней 17
2.2 Трехмерная постановка задачи 19
Глава 3. Методика определения дополнительного модуля упругости 20
3.1 Общая идея 20
3.2 Численный эксперимент 21
3.3 Определение модуля упругости 26
Глава 4. Анализ результатов 29
4.1 Определение наиболее точного метода расчета 29
4.2 Влияние модуля упругости B_{32} на решение 33
4.3 Сравнение результатов с ранее полученными выводами 43
Глава 5. Дополнительные исследования для уточнения результата 46
5.1 Получение решения в дополнительных сечениях 46
5.2 Определение упругих модулей 49
Заключение 52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 56

Введение

Модель стержня играет важную роль в механике и широко применяется в различных отраслях промышленности. Однако несмотря на то что теория стержней зародилась еще в XVII в. [4, стр.3], до сих пор остается множество нерешенных вопросов, в частности исследование статики, динамики, устойчивости криволинейных стержней является одним из самых важных направлений для изучения.

Существует два основных метода вывода уравнений теории стержней: асимптотический и прямой. Если рассматривать асимптотический подход, выражения для модулей упругости получаются путем асимптотических преобразований над фундаментальными законами механики [5], в этом состоит преимущество данного подхода. С другой стороны, если стержень обладает сложной конфигурацией, микроструктурой, то использование асимптотического метода становится довольно проблематичным.

Для прямого подхода сложность конфигурации стержня и наличие микроструктуры не влияет на формулировку основных уравнений, но в таком случае определение упругих модулей требует дополнительных исследований. Для прямолинейных стержней вычисление модулей упругости не вызывает трудностей, так как для таких стержней проведено множество экспериментов и расчетов, по результатам которых написана соответствующая теория [10,11]. Если рассматривать криволинейный стержень, наряду с модулями, которые есть у прямолинейного стержня, необходимо учитывать несколько дополнительных модулей упругости, отражающих связь между угловыми и трансляционными деформациями стержня.

Для стержней с естественной кривизной опытов по определению модулей упругости практически не проводилось, не установлены оптимальные способы его вычисления, поэтому вопрос об определении

модуля упругости криволинейного стержня является актуальным на сегодняшний день.

В данной работе было протестировано три метода определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня путем решения задачи о статическом изгибе стержня в форме плоской спирали, проведен сравнительный анализ полученных результатов и выявлен наиболее оптимальный и точный способ вычисления искомого модуля.

Глава 1. Общая теория

1.1 Геометрия стержня

Модель стержня представляет собой оснащенную кривую, каждая точка которой может обладать как трансляционными, так и вращательными степенями свободы. Для определения кривой в пространстве вводится вектор-функция скалярного аргумента [4]:

$$\underline{R} = \underline{R}(s), s \in [0, l] \tag{1.1}$$

где s – координата вдоль кривой, l- длина кривой.

Зададим несущую кривую плоской спирали следующим уравнением в полярной системе координат:

$$\underline{R} = R_0 e^{k\theta} \underline{e_R} \tag{1.2}$$

где $\theta -$ полярный угол, $\underline{e_R}$- орт полярной системы координат. (рис.1.1)

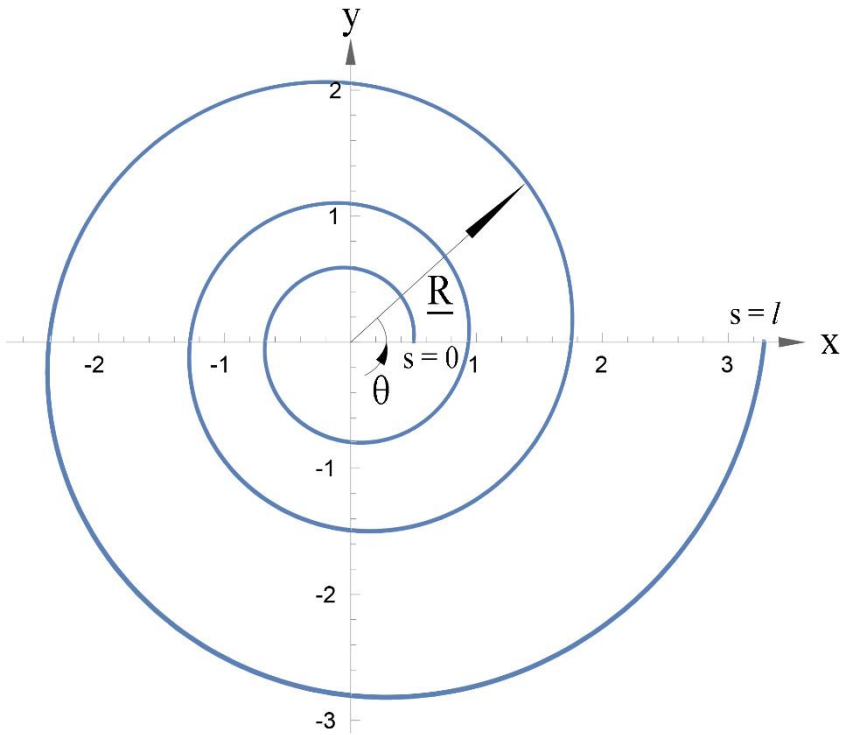

Рис.1.1 Несущая кривая

Примем $R_0 = 0{,}5$ м , $k = 0{,}1$.

Полярный угол θ связан с координатой вдоль кривой s соотношением (1.3):

$$s(\theta) = \frac{R_0\sqrt{1+k^2}}{k}\left(e^{k\theta} - 1\right) \tag{1.3}$$

Определим для несущей кривой естественный трехгранник Френе $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$, где $\underline{t}$- единичный вектор касательной к кривой, $\underline{n}$-вектор главной нормали и $\underline{b}$- бинормаль (рис.1.2).

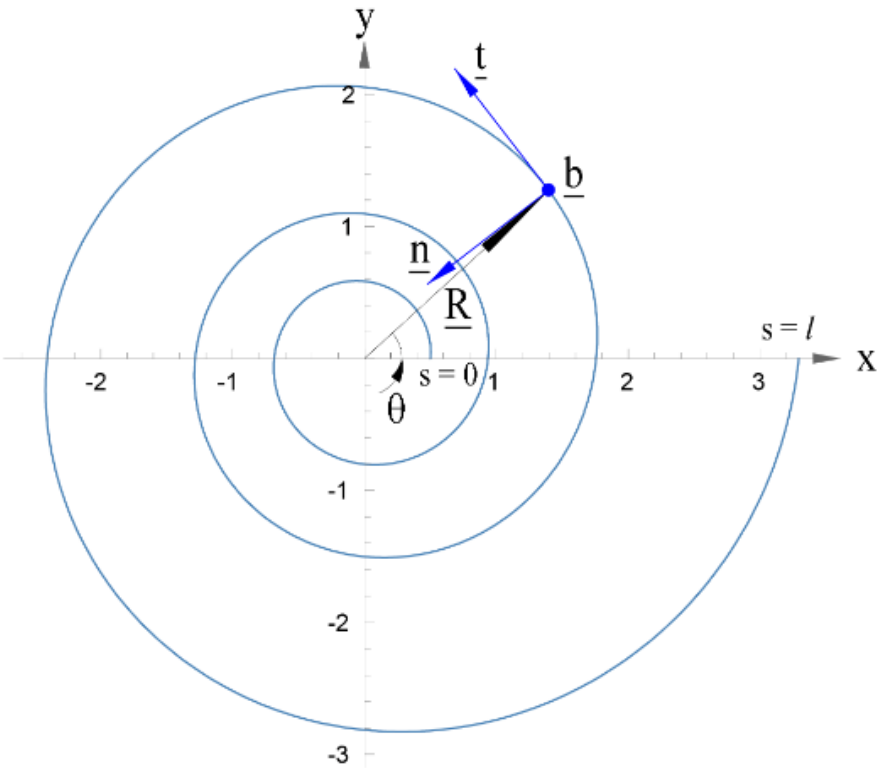

Рис.1.2 Трехгранник Френе, определенный для несущей кривой

Установим связь между трехгранником Френе и глобальной декартовой системой координат.

Единичные векторы $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$ имеют следующее представление в цилиндрической системе координат:

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(\underline{e_\theta} + k\underline{e_R}) \tag{1.4}$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-\underline{e_R} + k\underline{e_\theta}) \tag{1.5}$$

$$\underline{b} = \underline{e_z} \tag{1.6}$$

Орты цилиндрической системы координат могут быть выражены через базисные векторы декартовой системы:

$$\underline{e_R} = cos\theta\, \underline{i} + sin\theta \underline{j} \tag{1.7}$$

$$\underline{e_\theta} = -sin\theta\, \underline{i} + cos\theta \underline{j} \tag{1.8}$$

$$\underline{e_z} = \underline{k} \tag{1.9}$$

Таким образом, пользуясь соотношениями (1.4) - (1.9), можем легко перейти от глобальной декартовой системы координат к естественному трехграннику Френе.

Заметим, что

$$\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}R(s)}\underline{n} \tag{1.10}$$

По определению:

$$\frac{d\underline{t}}{ds} = -\frac{1}{R_c}\underline{n} \tag{1.11}$$

где R_c- радиус кривизны. Следовательно, радиус кривизны представляет собой следующую функцию:

$$R_c(s) = -\sqrt{1+k^2}R(s) \tag{1.12}$$

Также введем базис, связанный с сечением стержня, $\left\{\underline{d_1}, \underline{d_2}, \underline{d_3}\right\}$ такой, что $\underline{d_3}$ совпадает с направлением вектора $\underline{t}$, а $\underline{d_1}$ и $\underline{d_2}$ лежат в плоскости сечения (рис.1.3).

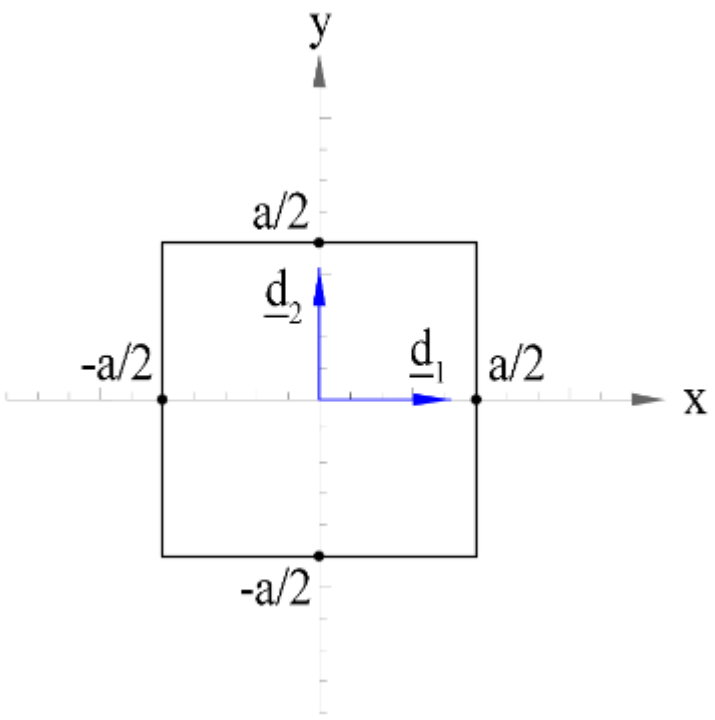

Рис.1.3 Квадратное сечение стержня со стороной a

Определим переход от глобальной системы координат к локальной системе, связанной с сечением.

Пусть радиус-вектор, проведенный к некоторой точке сечения с координатой s, имеет вид:

$$\underline{r}_{\text{гл}} = x_{\text{гл}}\underline{i} + y_{\text{гл}}\underline{j} + z_{\text{гл}}\underline{k} \tag{1.13}$$

Радиус-вектор, определяющий положение сечения, задаётся как:

$$\underline{r_s} = R_0 e^{k\theta} cos\theta\ \underline{i} + R_0 e^{k\theta} sin\theta\ \underline{j} \tag{1.14}$$

Для того чтобы получить выражения $x_{\text{гл}}, y_{\text{гл}}, z_{\text{гл}}$ в базисе $\left\{\underline{d_1}, \underline{d_2}, \underline{d_3}\right\}$, выразим вектор, который лежит в рассматриваемом сечении (рис.1.4):

$$\underline{\tilde{r}}_{\text{гл}} = \underline{r}_{\text{гл}} - \underline{r_s} \tag{1.15}$$

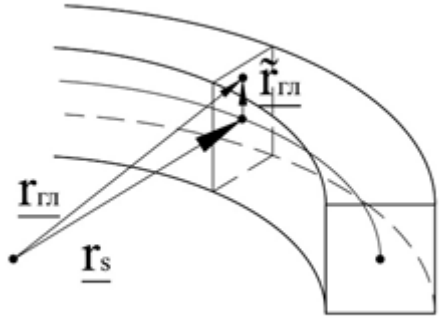

Рис.1.4 Векторы, определяющие положение точек сечения стержня

Искомые координаты x, y представляют собой проекции вектора $\underline{\tilde{r}}_{\text{гл}}$ в системе координат, связанной с сечением:

$$x = \underline{d_1} \cdot \underline{\tilde{r}}_{\text{гл}} \tag{1.16}$$

$$y = \underline{d_2} \cdot \underline{\tilde{r}}_{\text{гл}} \tag{1.17}$$

В данной работе будем предполагать, что угол естественной крутки равен нулю, то есть

$$\underline{d_1} = \underline{n} \tag{1.18}$$

$$\underline{d_2} = \underline{b} \tag{1.19}$$

Тогда, используя выражения (1.4)-(1.9), можем легко представить $\underline{d_1}$, $\underline{d_2}$ в глобальной декартовой системе координат и вычислить скалярные произведения в выражениях (1.16) - (1.17), осуществив переход к локальной системе, связанной с сечением.

1.2 Основные уравнения линейной теории стержней

В линейной теории стержней уравнения движения в локальной форме имеют вид:

$$\underline{T}' + \rho_0 \underline{F} = \rho_0 \underline{\dot{\mathcal{K}}_1} \tag{1.20}$$

$$\underline{\mathrm{M}}' + \underline{t} \times \underline{T} + \rho_0 \underline{L} = \rho_0 (\underline{v} \times \underline{\mathcal{K}_1} + \underline{\dot{\mathcal{K}}_2}) \tag{1.21}$$

где $\underline{T}$ и $\underline{M}$- сила и момент, действующие в сечении стержня, ρ_0 – линейная плотность в отсчетной конфигурации, $\underline{F}$ и $\underline{L}$ – внешние распределенные сила и момент на единицу массы, $\underline{\mathcal{K}_1}$ – массовая плотность количества движения, $\underline{\mathcal{K}_2}$ – массовая плотность собственного кинетического момента, $\underline{v}$ – вектор скорости.

В данной работе моделируется статический изгиб стержня под действием раскручивающего момента, приложенного к концу стержня. В таком случае соотношения (1.20) и (1.21) принимают форму:

$$\underline{T}' = 0 \tag{1.22}$$

$$\underline{\mathrm{M}}' + \underline{t} \times \underline{T} = 0 \tag{1.23}$$

Введем в рассмотрение векторы деформаций: $\underline{\varepsilon}$- вектор деформации растяжения-поперечного сдвига и $\underline{\phi}$ – вектор деформации изгиба-кручения. В линейной теории они определяются формулами:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{u}' + \underline{t} \times \underline{\Psi} \tag{1.24}$$

$$\underline{\phi} = \underline{\Psi}' \tag{1.25}$$

где $\underline{u}$ и $\underline{\Psi}$ – векторы перемещений и поворотов сечения.

Внутренняя энергия представляет собой квадратичную форму векторов деформаций:

$$\rho_0 \mathcal{U} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\phi} + \frac{1}{2} \underline{\phi} \cdot \underline{\underline{\mathrm{C}}} \cdot \underline{\phi} \tag{1.26}$$

где $\mathcal{U}$ – массовая плотность внутренней энергии; $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ – тензоры упругости. $\underline{\underline{A}}$ характеризует жесткость стержня на растяжение и сдвиг, $\underline{\underline{C}}$ – на изгиб и кручение, $\underline{\underline{B}}$ описывает взаимное влияние деформаций растяжения-сдвига и изгиба-кручения. Для криволинейных стержней без естественной крутки $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ имеют следующую структуру:

$$\underline{\underline{A}} = A_1\underline{d_1}\,\underline{d_1} + A_2\underline{d_2}\,\underline{d_2} + A_3\underline{d_3}\,\underline{d_3} \tag{1.27}$$

$$\underline{\underline{C}} = C_1\underline{d_1}\,\underline{d_1} + C_2\underline{d_2}\,\underline{d_2} + C_3\underline{d_3}\,\underline{d_3} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}} = \frac{1}{R_t}\left(B_{11}\underline{d_1}\,\underline{d_1} + B_{22}\underline{d_2}\,\underline{d_2} + B_{33}\underline{d_3}\,\underline{d_3}\right)\\ + \frac{1}{R_c}(\left(B_{13}\underline{d_1}\,\underline{d_3} + B_{31}\underline{d_3}\,\underline{d_1}\right) sin\alpha\\ + \left(B_{23}\underline{d_2}\,\underline{d_3} + B_{32}\underline{d_3}\,\underline{d_2}\right) cos\alpha)\end{aligned} \tag{1.29}$$

где R_t-радиус кручения, R_c- радиус кривизны, α – угол естественной крутки. Компоненты тензоров упругости представляют собой упругие модули: A_1, A_2 – жесткость на сдвиг, A_3 – жесткость на растяжение, C_1, C_2 – изгибные жесткости и C_3 – жесткость на кручение. A_i и C_i определяются путем проведения численных или физических экспериментов над прямолинейными стержнями. Определение B_{ij} требует рассмотрения плоского криволинейного стержня при $i \neq j$ и пространственно-искривленной модели при i=j .

В данной работе проводится эксперимент над стержнем в форме плоской спирали, следовательно, компоненты тензора $\underline{\underline{B}}$, относящиеся к пространственно-искривленным стержням, могут быть исключены, так как $R_t \to \infty$. Как говорилось ранее, будем предполагать, что оси инерции сечения стержня совпадают с векторами естественного базиса $\underline{n}$ и $\underline{b}$, следовательно, угол естественной крутки α равен нулю. Тогда выражение для тензора $\underline{\underline{B}}$ принимает вид:

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{R_c}\left(B_{23}\underline{d_2}\,\underline{d_3} + B_{32}\underline{d_3}\,\underline{d_2}\right) \tag{1.30}$$

Запишем определяющие соотношения, которые потребуются при решении задачи теории стержней:

$$\underline{T} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\phi} \tag{1.31}$$

$$\underline{M} = \frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \underline{\phi}} = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\phi} \tag{1.32}$$

Кинетическая энергия представляет собой квадратичную форму векторов скорости:

$$\rho_0 \mathcal{K} = \frac{1}{2}\underline{v} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{\underline{\theta_1}} \cdot \underline{\omega} + \frac{1}{2}\underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\theta_2}} \cdot \underline{\omega} \tag{1.33}$$

где $\mathcal{K}$ – массовая плотность кинетической энергии, $\underline{v}$ – линейная скорость, $\underline{\omega}$ – угловая скорость, $\underline{\underline{\theta_1}}$, $\underline{\underline{\theta_2}}$ – тензоры инерции.

Заметим, что:

$$\underline{\mathcal{K}_1} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \underline{v}} = \underline{v} + \underline{\underline{\theta_1}} \cdot \underline{\omega} \tag{1.34}$$

$$\underline{\mathcal{K}_2} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \underline{\omega}} = \underline{v} \cdot \underline{\underline{\theta_1}} + \underline{\underline{\theta_2}} \cdot \underline{\omega} \tag{1.35}$$

1.3 Связь теории стержней и трехмерной теории

Сформулируем связь между характеристиками напряженно-деформированного состояния стержня и трехмерного тела. В линейной теории сила и момент, возникающие в сечении стержня, представляют собой интегральные характеристики напряжений в сечении трехмерного тела и определяются следующими общепринятыми формулами:

$$\underline{T} = \int_{(\mathcal{F})} \underline{t} \cdot \underline{\underline{\tau}}\, d\mathcal{F} \tag{1.36}$$

$$\underline{M} = \int_{(\mathcal{F})} \underline{a} \times (\underline{t} \cdot \underline{\underline{\tau}})\, d\mathcal{F} \tag{1.37}$$

где $\underline{\underline{\tau}}$ –тензор напряжений, $\mathcal{F}$- площадь поперечного сечения, $\underline{a}$ – вектор, определяющий положение точки в сечении:

$$\underline{a} = x\underline{d_1} + y\underline{d_2} \tag{1.38}$$

Связь между кинематическими характеристиками различные авторы определяют по-разному. В рассматриваемой теории при сравнении кинематических характеристик будем предполагать, что количество движения, кинетический момент стержня и трехмерного тела совпадают [4]. Тогда выражения для упомянутых характеристик легко интегрируются по времени, и в результате получаем связь между векторами перемещений, поворотов и распределением перемещений трехмерного тела:

$$\rho_0 \left(\underline{u} + \underline{\underline{\theta_1}} \cdot \underline{\Psi} \right) = \int_{(\mathcal{F})} \rho^{(3)} \underline{u}^{(3)} \mu\, d\mathcal{F} \tag{1.39}$$

$$\rho_0 \left(\underline{u} \cdot \underline{\underline{\theta_1}} + \underline{\underline{\theta_2}} \cdot \underline{\Psi} \right) = \int_{(\mathcal{F})} \rho^{(3)} \underline{a} \times \underline{u}^{(3)} \mu\, d\mathcal{F} \tag{1.40}$$

где $\rho^{(3)}$-трехмерная плотность массы, μ – корректирующий множитель:

$$\mu = 1 + \frac{\underline{n} \cdot \underline{a}}{R_c} \tag{1.41}$$

Перейдем к скалярным выражениям для необходимых компонент векторов перемещений и поворота. Рассмотрим прямоугольное сечение стержня со сторонами a и b.

Вектор перемещений, найденный в результате решения трехмерной задачи, имеет вид:

$$\begin{aligned} \underline{u}^{(3)}(x,y,s) = {} & \underline{u}_t^{(3)}(x,y,s)\underline{t}(s) + \underline{u}_n^{(3)}(x,y,s)\underline{n}(s) \\ & + \underline{u}_b^{(3)}(x,y,s)\underline{b}(s) \end{aligned} \tag{1.42}$$

Линейная плотность ρ_0 связана с плотностью трехмерного тела $\rho^{(3)}$ формулой (1.43):

$$\rho_0 = \int_{(\mathcal{F})} \rho^{(3)} \mu \, d\mathcal{F} \tag{1.43}$$

Выражения для тензоров инерции имеют вид:

$$\rho_0 \underline{\underline{\theta_1}} = -\int_{(\mathcal{F})} \rho^{(3)} \mu \, \underline{a} \, d\mathcal{F} \times \underline{\underline{E}} \tag{1.44}$$

$$\rho_0 \underline{\underline{\theta_2}} = \int_{(\mathcal{F})} \rho^{(3)} \left(a^2 \underline{\underline{E}} - \underline{a} \, \underline{a} \right) \mu \, d\mathcal{F} \tag{1.45}$$

Подставляя соотношения (1.41) - (1.45) в формулы (1.39)-(1.40), можем выразить компоненты перемещений и поворотов для стержня, в частности получаем следующие выражения для u_n, u_t, Ψ_b:

$$u_n = \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} u_n^{(3)}(x, y, s) \left(1 + \frac{x}{R_c} \right) dy \tag{1.46}$$

$$u_t = R_c^2 \frac{12}{ab(12R_c^2 - a^2)} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} u_t^{(3)}(x, y, s) \left(1 - \frac{x^2}{R_c^2} \right) dy \tag{1.47}$$

$$\Psi_b = R_c \frac{12}{ab(12R_c^2 - a^2)} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} u_t^{(3)}(x, y, s) \left(1 - \frac{12R_c x}{a^2} \right) (1 + \frac{x}{R_c}) dy \tag{1.48}$$

Глава 2. Постановка задачи

2.1 Постановка задачи теории стержней

Рассматривается однородный стержень в форме плоской спирали, которая задается уравнением (1.2), с квадратным сечением со стороной *a=0,2 м* (рис.1.3). Материал - сталь. Один конец стержня закреплен, ко второму приложен раскручивающий момент $\mathrm{M}_0 = -150\ 000\ \text{Н} \cdot \text{м}$ (рис.2.1).

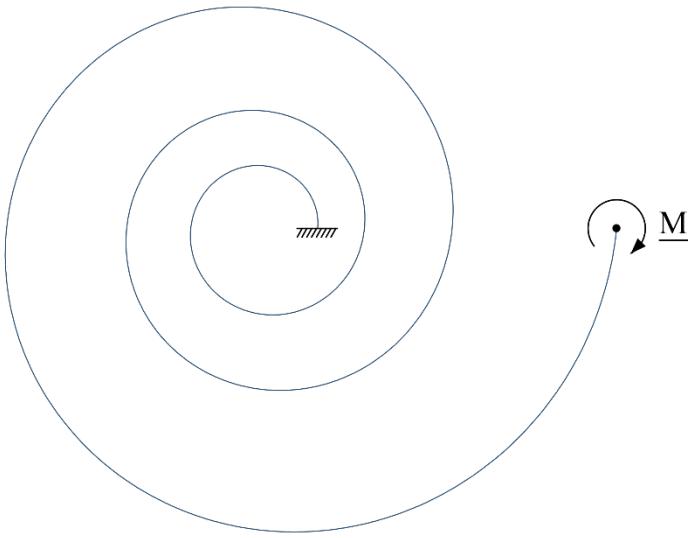

Рис.2.1 Граничные условия для стержня

Тогда граничные условия принимают вид:

$$\underline{u}|_{s=0} = 0 \tag{2.1}$$

$$\underline{T}|_{s=l} = 0 \tag{2.2}$$

$$\underline{\Psi}|_{s=0} = 0 \tag{2.3}$$

$$\underline{M}|_{s=l} = M_0\underline{b} \tag{2.4}$$

Производя преобразования над уравнениями равновесия (1.22)-(1.23) и определяющими соотношениями (1.31)-(1.32), с учетом выражений для деформаций (1.24)-(1.25) и граничных условий (2.1)-(2.4) получаем три скалярных дифференциальных уравнения для Ψ_b, u_t, u_n:

$$\Psi_b{}'(s) = \frac{M_0 A_3 R_c^2(s)}{C_2 A_3 R_c^2(s) - B_{32}^2} \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2u_t}{d\theta^2} + u_t = \frac{B_{32}}{A_3}\frac{d\Phi_b(\theta)}{d\theta} - R_c(\theta)\Psi_b(\theta) \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2u_n}{d\theta^2} + u_n = -kR_c(\theta)\Psi_b(\theta) + (R_c^2(\theta) - \frac{B_{32}}{A_3})\Phi_b(\theta) \tag{2.7}$$

И соответствующие граничные условия:

$$\Psi_b(0) = 0 \tag{2.8}$$

$$u_n(0) = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{du_n}{d\theta}(0) = 0 \tag{2.10}$$

$$u_t(0) = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{du_t}{d\theta}(0) = \frac{M_0B_{32}(1+k^2)R_0^2}{C_2A_3(1+k^2)R_0^2 + B_{32}^2} \tag{2.12}$$

Таким образом, у задачи Коши (2.5)-(2.12) может быть найдено единственное решение, которое зависит от трех упругих модулей: жесткости на растяжение A_3, изгибной жесткости C_2 и дополнительного неизвестного модуля упругости B_{32}. Значения A_3 и C_2 могут быть найдены в специальных справочниках как уже установленные константы, или можно самостоятельно их вычислить по формулам:

$$A_3 = EF \tag{2.13}$$

$$C_2 = EJ = E\frac{a^4}{12} \tag{2.14}$$

где E- модуль Юнга, F –площадь поперечного сечения, J –момент инерции стержня (с учетом того, что профиль сечения –квадрат).

2.2 Трехмерная постановка задачи

Рассмотрим трехмерную постановку задачи в пакете прикладных программ ANSYS [2, 6]. Соответствующая стержню 3d - модель представляет собой спираль с несущей кривой, описываемой уравнением (1.2), проходящей через центры сечений (рис.2.2). Сечение –квадрат со стороной *a=0,2 м*.

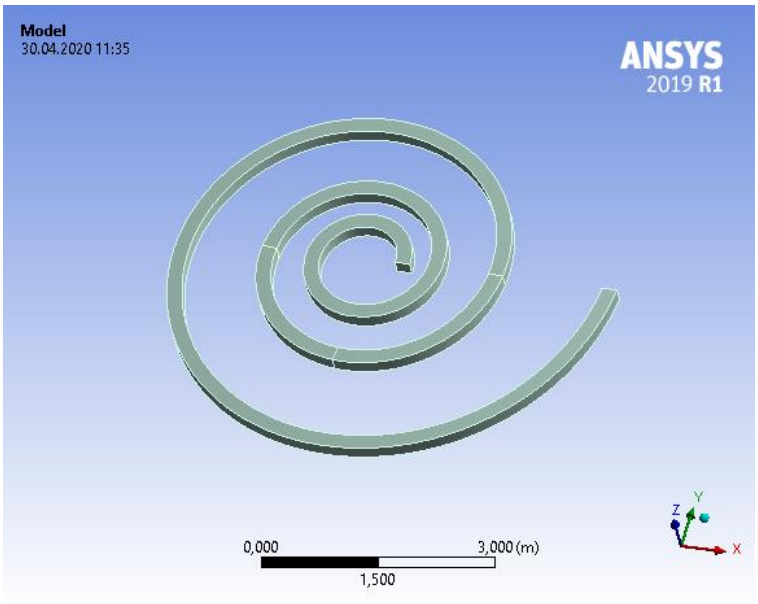

Рис. 2.2 Модель стержня в пакете ANSYS

Трехмерное тело находится под действием раскручивающего момента $M_0 = -150\ 000$ Н · м, второй конец модели закреплен.(рис.2.3)

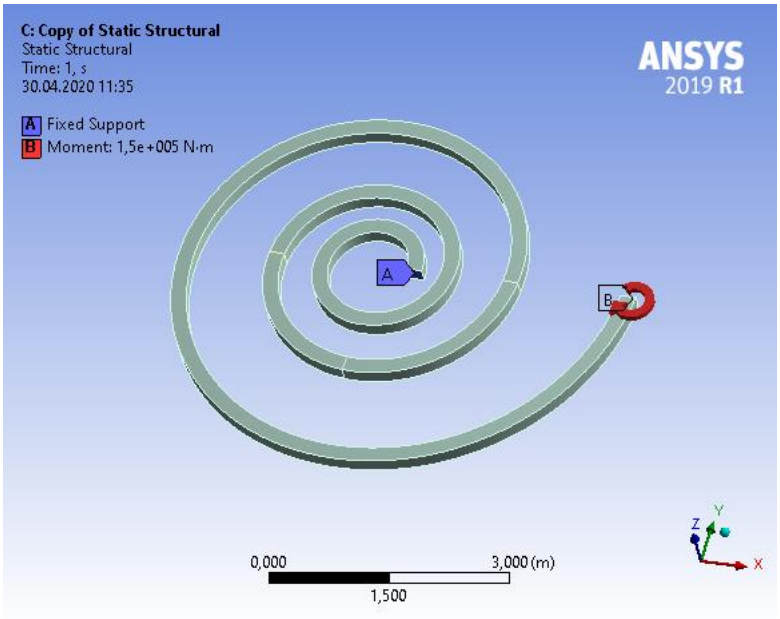

Рис.2.3 Граничные условия в пакете ANSYS

Глава 3. Методика определения дополнительного модуля упругости

3.1 Общая идея

Подведем промежуточный итог рассуждений. Рассматривается статический изгиб стержня, который описывается уравнениями (2.5) - (2.7). В каждое из этих уравнений входит в качестве неизвестного параметра модуль упругости B_{32}. Следовательно, если знать решения уравнений (2.5) - (2.7), возможно вычислить искомый модуль тремя способами:

1) По Ψ_b

Метод заключается в численном решении уравнения (2.5) с граничным условием (2.8) и подборе модуля упругости B_{32} такого, чтобы найденное решение уравнения совпадало с известным решением задачи для любого сечения, то есть для любого s.

2) По u_t

Способ основан на численном решении уравнения (2.6) с граничными условиями (2.11) - (2.12) и подборе модуля упругости B_{32} такого, чтобы найденное решение уравнения совпадало с известным решением задачи для любого сечения, то есть для любого s. Заметим, что в уравнение (2.6) входит неизвестная функция $\Psi_b(\theta)$, поэтому сначала стоит найти аналитическое решение уравнения (2.5) с граничным условием (2.8), затем найденное решение подставить в уравнение (2.6).

3) По u_n

Способ аналогичен методу определения по u_t, только в данном случае рассматривается уравнение (2.7) с граничными условиями (2.9)-(2.10).

Для того чтобы найти решение задачи, которое используется во всех трех методах как известное решение уравнения, необходимо рассмотреть

трехмерную постановку и выполнить численный эксперимент, результатом которого будет распределение перемещений (1.42). Затем с помощью формул перехода (1.46)-(1.48) находим значения Ψ_b, u_t, u_n для заданного сечения стержня.

3.2 Численный эксперимент

В данной работе ставится численный эксперимент в пакете ANSYS. Формулируется трехмерная постановка задачи (параграф 2.1) и для сравнительного анализа в рассмотрение вводятся три сечения при $\theta = 3\pi$, $\theta = \frac{7\pi}{2}$, $\theta = 4\pi$ (рис. 3.1).

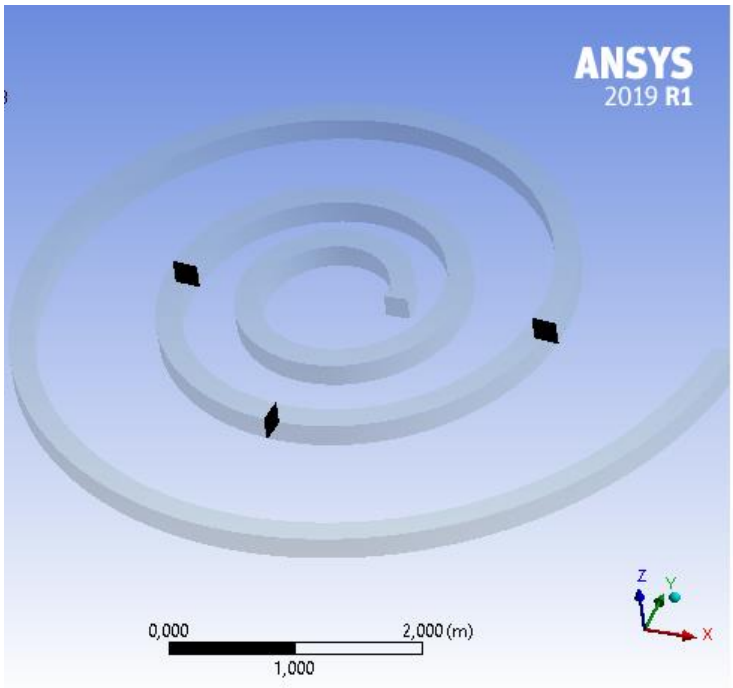

Рис.3.1 Выбранные к рассмотрению сечения модели

Далее необходимо сохранить распределения перемещений в обозначенных сечениях в файл для дальнейшей обработки, которая состоит, во-первых, в переходе от глобальной системы координат к локальной с помощью формул (1.14) - (1.17), во-вторых, в получении решения в рамках теории стержней с использованием выражений (1.46) - (1.48). Обработка данных ведется с помощью языка программирования Python.

В ходе расчетов важно убедиться, что решение сходится, то есть при измельчении расчетной сетки вычисление интегралов, входящих в формулы (1.46)-(1.48), происходит с достаточной точностью и значения Ψ_b, u_t, u_n практически не меняются. С этой целью было проведено исследование сходимости по сетке: выбрано несколько разных размеров элементов и получено решение для каждого из них [3]. Результаты представлены в таблицах (табл.3.1-3.3):

Таблица 3.1

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = 3\pi$

Шаг по сетке, м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,05	-0,022676	-0,077780	-0,128207
0,025	-0,019645	-0,067062	-0,082599
0,01	-0,017370	-0,059317	-0,057937
0,007	-0,016278	-0,055596	-0,052871
0,006	-0,016453	-0,056192	-0,052442
0,0057	-0,016651	-0,056871	-0,052353

Таблица 3.2

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = \frac{7\pi}{2}$

Шаг по сетке, м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,05	-0,030240	-0,119468	-0,178663
0,025	-0,026147	-0,103132	-0,119774
0,01	-0,023122	-0,091213	-0,087248
0,007	-0,021669	-0,085485	-0,078799
0,006	-0,021900	-0,086401	-0,078506
0,0057	-0,022164	-0,087444	-0,078785

Таблица 3.3

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = 4\pi$

Шаг по сетке, м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,05	-0,039839	-0,173735	-0,206736
0,025	-0,034454	-0,156377	-0,136377
0,01	-0,030460	-0,132722	-0,097622
0,007	-0,028546	-0,124383	-0,085964
0,006	-0,028852	-0,125717	-0,087345
0,0057	-0,029200	-0,127235	-0,087467

Для анализа сходимости были построены графики относительной погрешности вычисленных данных в зависимости от числа элементов в сечении (рис. 3.2-3.4):

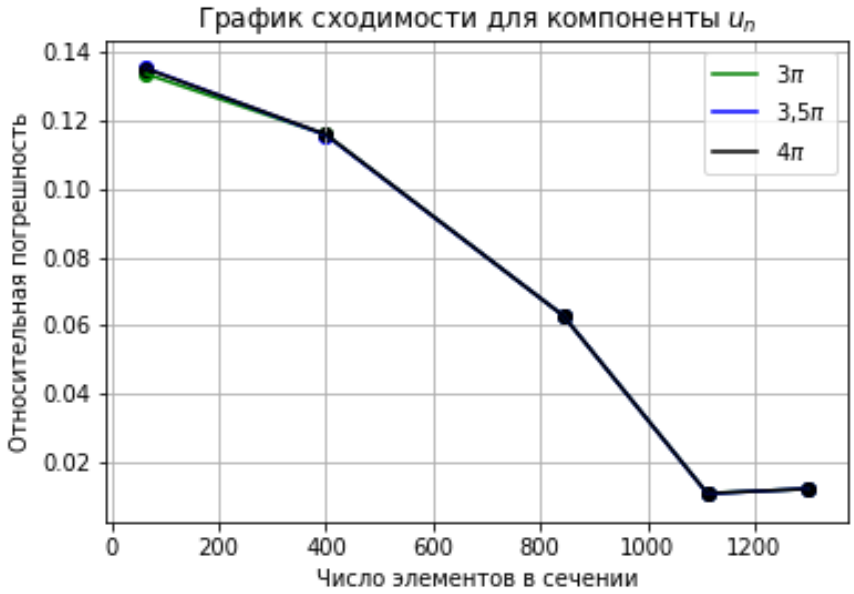

Рис. 3.2 График сходимости для компоненты u_n

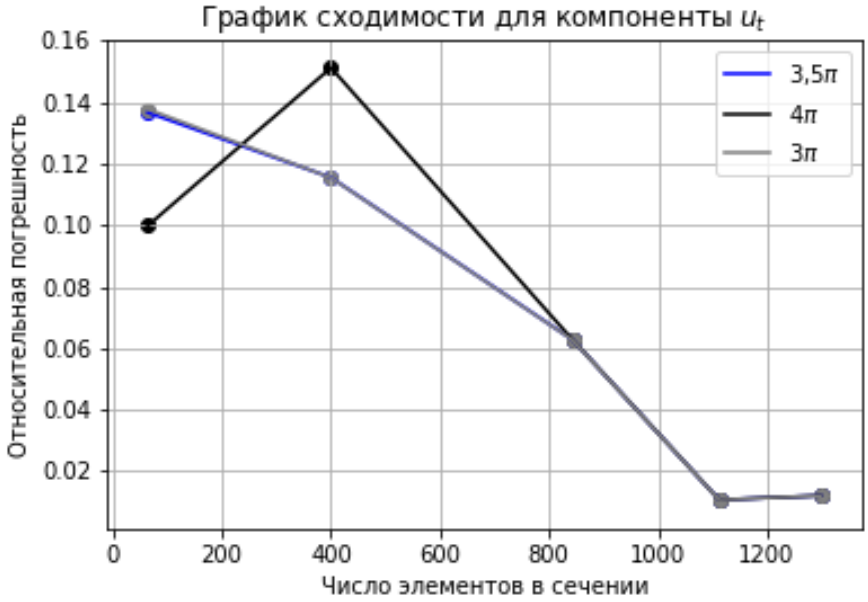

Рис. 3.3 График сходимости для компоненты u_t

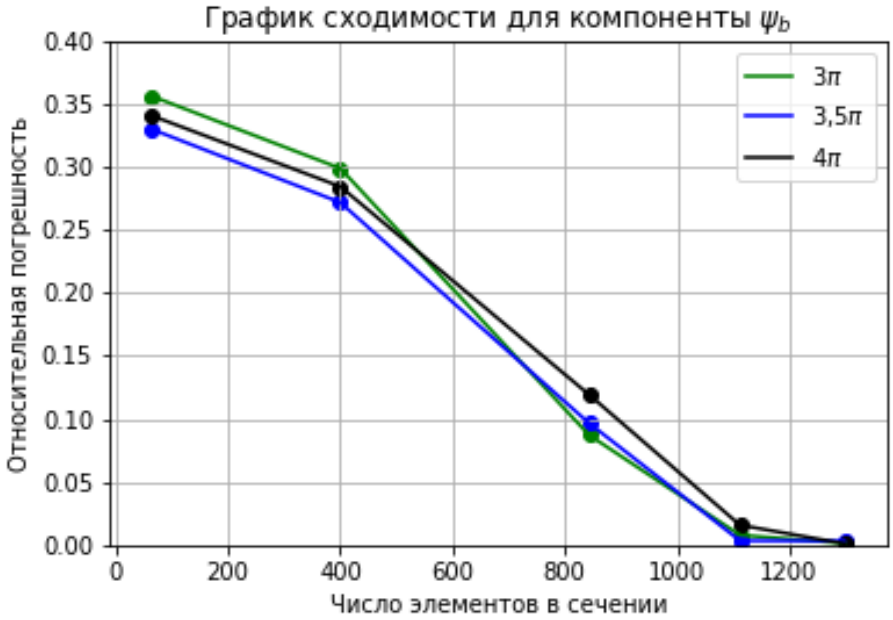

Рис. 3.4 График сходимости для компоненты Ψ_b

Данные таблиц и графики наглядно демонстрируют, что при увеличении числа элементов относительная погрешность результатов становится крайне малой, что говорит о высокой точности полученного решения. Для шага по сетке, равного 5,7 мм, относительная погрешность близка к нулевой, следовательно, дальнейшее измельчение сетки нецелесообразно. Для анализа примем этот наименьший размер элемента (рис. 3.5).

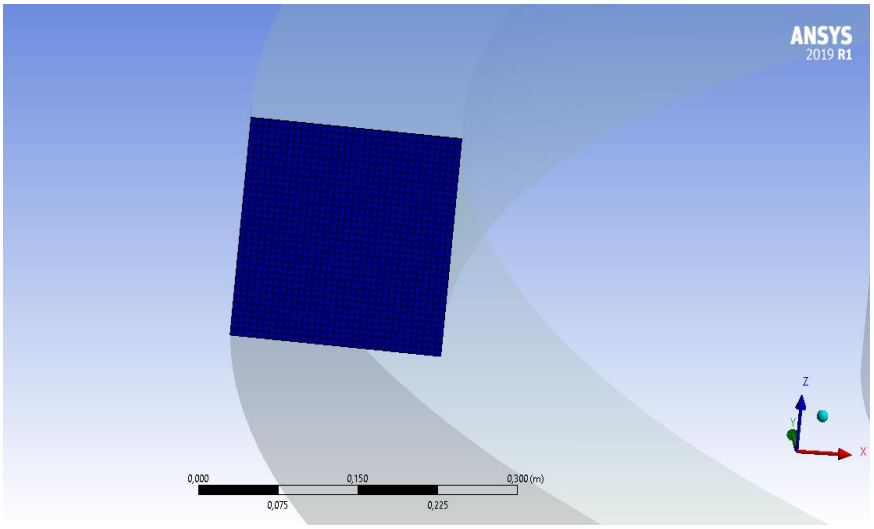

Рис.3.5 Вид сетки в сечении

Также в ходе расчетов важно осуществлять контроль напряжений, возникающих в модели, для предотвращения выхода за рамки линейной теории.

Для выбранного шага по сетке распределение напряжений в теле показано на рисунке 3.6.

Значения напряжений не превосходят 170 МПа. Предел текучести для стали находится в диапазоне 300-400 МПа, следовательно, решение остается в рамках линейной теории.

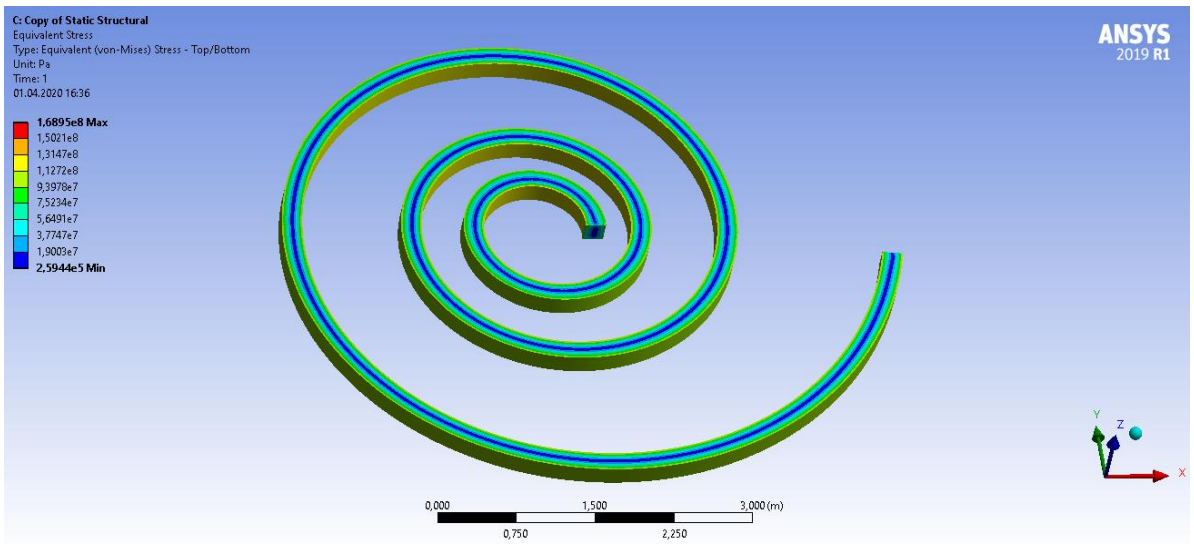

Рис.3.6 Распределение напряжений в модели

3.3 Определение модуля упругости

С помощью численного эксперимента были найдены значения перемещений и поворота для трех выбранных сечений (табл.3.4), которые должны совпадать с решениями уравнений (2.5)-(2.7) при соответствующих аргументах θ или s.

Таблица 3.4

	$Сечение\ 1{:}\ \theta = 3\pi$	$Сечение\ 2{:}\ \theta = \frac{7\pi}{2}$	$Сечение\ 3{:}\ \theta = 4\pi$
$u_{t,}$ м	-0,057	-0,087	-0,13
$u_{n,}$ м	-0,017	-0,022	-0,029
Ψ_{b}	-0,052	-0,079	-0,087

Теперь можем приступить к реализации методов по определению неизвестного модуля упругости B_{32}.

1) По Ψ_b

Подберем B_{32} такой, чтобы повороты Ψ_b, получаемые путем решения уравнения, совпадали с результатами численного эксперимента для каждого сечения. Для определения B_{32} для всего стержня, будем брать среднее значение от модулей, полученных для каждого сечения:

$$B_{32} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} B_{32}^{i} \tag{3.1}$$

B_{32}^{i} – модуль упругости, определенный по i-му сечению

Мерой качества метода будет служить относительное отклонение искомого модуля для каждого сечения от среднего значения:

$$\delta_i = \frac{|B_{32} - B_{32}^{i}|}{B_{32}} \cdot 100\ \% \tag{3.2}$$

Чем меньше δ_i, чем точнее метод, так как дополнительный модуль упругости должен быть одним и тем же для всего стержня.

Результаты представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

B_{32}^{1}	B_{32}^{2}	B_{32}^{3}	B_{32}	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
$14{,}0 \cdot 10^7$	$19{,}5 \cdot 10^7$	$17{,}5 \cdot 10^7$	$17{,}0 \cdot 10^7$	17	15	3

2) По u_t

Теперь будем подбирать модуль упругости такой, чтобы решение уравнения для u_t совпадало с расчетами в ANSYS.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем таблицу результатов 3.6.

Таблица 3.6

B_{32}^{1}	B_{32}^{2}	B_{32}^{3}	B_{32}	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
$9 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$	$12 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^7$	10	10	20

3) По u_n

Метод определения дополнительного модуля упругости B_{32} по u_n дает следующий результат (табл.3.7):

Таблица 3.7

B_{32}^{1}	B_{32}^{2}	B_{32}^{3}	B_{32}	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
$0{,}9 \cdot 10^7$	$0{,}5 \cdot 10^7$	$0{,}5 \cdot 10^7$	$0{,}63 \cdot 10^7$	42	21	21

Глава 4. Анализ результатов

4.1 Определение наиболее точного метода расчета

По результатам тестирования методик определения дополнительного модуля упругости (табл.4.1) выявим наиболее оптимальный и эффективный из них.

Таблица 4.1

	B_{32}^1	B_{32}^2	B_{32}^3	B_{32}	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
По u_t	$9 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^7$	$12 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^7$	10	10	20
По u_n	$0{,}9 \cdot 10^7$	$0{,}5 \cdot 10^7$	$0{,}5 \cdot 10^7$	$0{,}63 \cdot 10^7$	42	21	21
По Ψ_b	$14{,}0 \cdot 10^7$	$19{,}5 \cdot 10^7$	$17{,}5 \cdot 10^7$	$17{,}0 \cdot 10^7$	17	15	3

Исходя из данных таблицы 4.1, очевидно, что метод определения модуля по перемещениям u_n является наихудшим, поскольку относительное отклонение δ_i максимальное и для первого сечения достигает аж 42 % , что говорит о низкой точности определенного модуля упругости B_{32} для стержня.

Сравнение методов определения B_{32} с использованием u_t и Ψ_b по данным таблицы 4.1 вызывает затруднения, так как разница в относительных отклонениях не так очевидна, поэтому рассчитаем средние значения погрешности (табл. 4.2):

Таблица 4.2

	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %	$\overline{\delta}$, %
По u_t	10	10	20	13,3
По Ψ_b	17	15	3	11,7

Таким образом, способ определения по повороту сечения Ψ_b оказался точнее на 1,6 %, чем метод вычисления по перемещению u_t. Следовательно, формально можно считать, что наиболее оптимальным и эффективным способом определения дополнительного упругого модуля B_{32} является способ вычисления по Ψ_b. Тем менее разница в погрешностях незначительна и сделать однозначный выбор наилучшего метода вычисления по полученным результатам нельзя.

В состав тензора $\underline{\underline{B}}$ входит компонента B_{32}/R_c, проанализируем, как она меняется от сечения к сечению. Пусть

$$R_c^i = R_c(s_i) \tag{4.1}$$

где s_i – координата i-го сечения. Тогда пользуясь формулой (1.12) и таблицей 4.1, рассчитаем отношения модулей упругости к радиусу кривизны. (табл. 4.3).

Таблица 4.3

	B_{32}^1/R_c^1	B_{32}^2/R_c^2	B_{32}^3/R_c^3	B_{32}/R_c	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
По u_t	$-6{,}98 \cdot 10^7$	$-5{,}96 \cdot 10^7$	$-6{,}78 \cdot 10^7$	$-6{,}57 \cdot 10^7$	6	9	3
По u_n	$-0{,}70 \cdot 10^7$	$-0{,}33 \cdot 10^7$	$-0{,}28 \cdot 10^7$	$-0{,}44 \cdot 10^7$	59	25	36
По Ψ_b	$-10{,}85 \cdot 10^7$	$-12{,}91 \cdot 10^7$	$-9{,}89 \cdot 10^7$	$-11{,}22 \cdot 10^7$	3	15	12

В уравнении для Ψ_b (1.48) B_{32} в квадрате, поэтому в качестве найденного модуля могут быть 2 значения:

$$B_{32} = \pm const \tag{4.2}$$

Также были рассмотрены отрицательные значения B_{32} при нахождении решения для u_t, u_n. Результаты совпадают с решениями для положительных B_{32} с точностью до 10^{-4}.

В таком случае значения таблицы 4.3 принимают положительные значения (табл.4.4):

Таблица 4.4

	B_{32}^1/R_c^1	B_{32}^2/R_c^2	B_{32}^3/R_c^3	B_{32}/R_c	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
По u_t	$6{,}98 \cdot 10^7$	$5{,}96 \cdot 10^7$	$6{,}78 \cdot 10^7$	$6{,}57 \cdot 10^7$	6	9	3
По u_n	$0{,}70 \cdot 10^7$	$0{,}33 \cdot 10^7$	$0{,}28 \cdot 10^7$	$0{,}44 \cdot 10^7$	59	25	36
По Ψ_b	$10{,}85 \cdot 10^7$	$12{,}91 \cdot 10^7$	$9{,}89 \cdot 10^7$	$11{,}22 \cdot 10^7$	3	15	12

По результатам, представленным в таблице 4.4, можно сделать вывод, что расчеты компоненты тензора жесткости $\underline{\underline{B}}$ по перемещениям u_n дают значения B_{32}/R_c , сильно отличающиеся в разных сечениях, относительное отклонение максимально и достигает 59 %. Следовательно, метод вычисления упругого модуля по u_n по-прежнему остается наихудшим.

Для корректного сравнения результатов, полученных по u_t и Ψ_b, рассчитаем средние значения погрешностей δ_i (табл.4.5):

Таблица 4.5

	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %	$\overline{\delta}$, %
По u_t	6	9	3	6
По Ψ_b	3	15	12	10

В данном случае среднее относительное отклонение, рассчитанное по результатам метода определения по u_t, меньше, чем по Ψ_b всего на 4 %. Такая разница в погрешностях незначительна и не позволяет выбрать оптимальный метод расчета упругого модуля.

Важно отметить, что компонента тензора жесткости B_{32}/R_c ведет себя стабильнее от сечения к сечению, в отличие от B_{32}. Исходя из данных таблиц 4.2 и 4.5, относительное отклонение для B_{32}/R_c меньше, чем для B_{32} на 7,3% при использовании метода расчета по u_t и на 1,7 % при рассмотрении способа определения по Ψ_b.

Заметим, что отношение B_{32}/R_c не должно быть константой, поскольку при бесконечном радиусе кривизны R_c получаем прямолинейный стержень, для которого это выражение должно быть нулевым. Тогда рассмотрим отношение модуля B_{32} к квадратному корню из модуля радиуса кривизны R_c и проведем аналогичный анализ для данного выражения. Результаты представлены в таблице 4.6.

Таблица 4.6

	$\frac{B_{32}^1}{\sqrt{R_c^1}}$	$\frac{B_{32}^2}{\sqrt{R_c^2}}$	$\frac{B_{32}^3}{\sqrt{R_c^3}}$	$\frac{B_{32}}{\sqrt{R_c}}$	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %
По u_t	$7{,}9 \cdot 10^7$	$7{,}3 \cdot 10^7$	$9{,}0 \cdot 10^7$	$8{,}1 \cdot 10^7$	2	9	12
По u_n	$0{,}79 \cdot 10^7$	$0{,}41 \cdot 10^7$	$0{,}38 \cdot 10^7$	$0{,}53 \cdot 10^7$	51	23	28
По Ψ_b	$12{,}3 \cdot 10^7$	$15{,}9 \cdot 10^7$	$13{,}2 \cdot 10^7$	$13{,}8 \cdot 10^7$	11	15	4

Из данных таблицы 4.6 можно сделать вывод, что метод определения модуля по u_n наихудший, так как относительное отклонение велико и достигает 51 %. Для сравнения остальных метод рассчитаем средние значения отклонений (табл.4.7).

Таблица 4.7

	δ_1, %	δ_2, %	δ_3, %	$\overline{\delta}$, %
По u_t	2	9	12	8
По Ψ_b	11	15	4	10

Таким образом, отношение $B_{32}/\sqrt{R_c}$ меньше меняется от сечения к сечению, чем B_{32}: относительное отклонение для модуля B_{32} больше по сравнению с погрешностью для рассмотренного отношения на 5,3 % при использование метода расчета по u_t и на 1,7 % при использовании метода определения по Ψ_b.

4.2 Влияние модуля упругости B_{32} на решение

Определим, как влияет учет дополнительного модуля упругости B_{32} на общее решение теории стержней. (Дальнейшее построение графиков осуществляется с помощью программного обеспечения для математических вычислений Wolfram Mathematica [15]).

Если не учитывать модуль упругости B_{32}, то есть положить его равным нулю, и получить решение для такого случая, то наблюдается раскручивание стержня, что соответствует ожиданиям (рис.4.1).

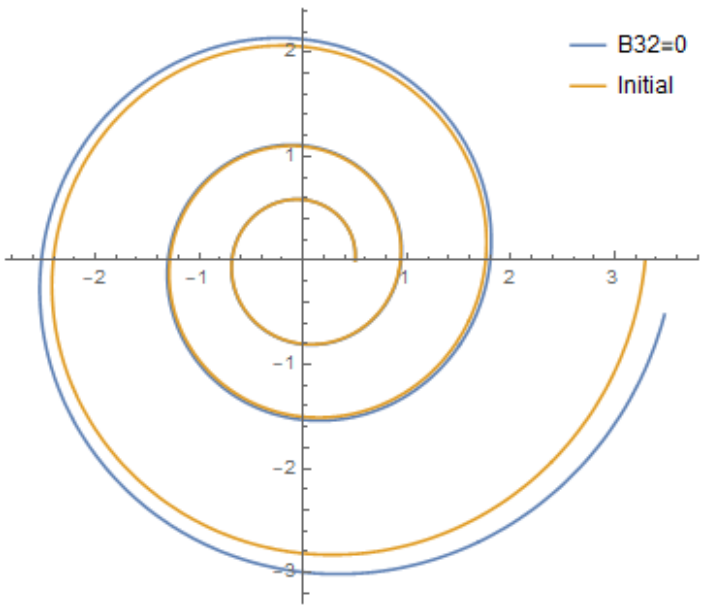

Рис.4.1 Недеформированный стержень и решение теории стержней при B_{32}=0

Сравним решения задачи при B_{32}, найденном каждым из способов, и при B_{32}=0. Определим деформированное состояние стержня для каждого случая (рис.4.2-4.4)

1.Решение с модулем, определенным по u_t

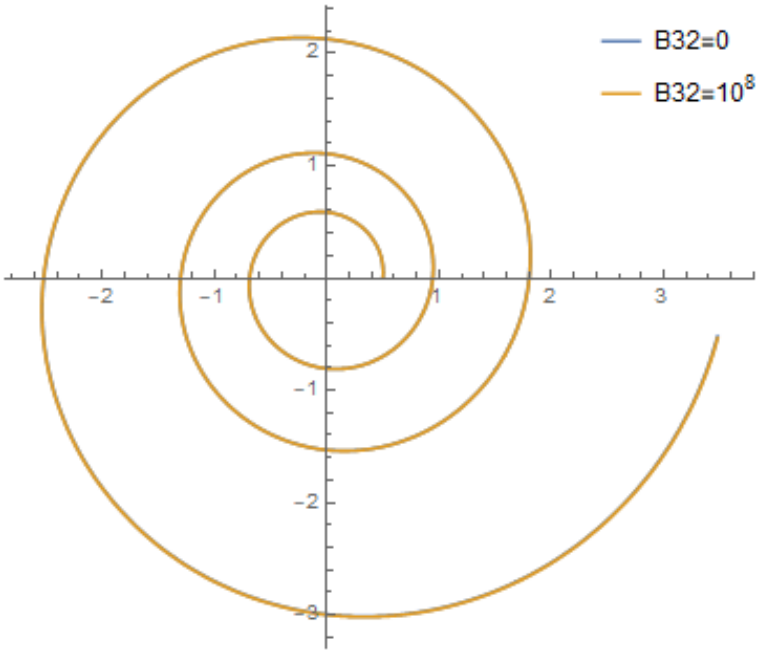

Рис.4.2 Решения теории стержней при B_{32}=0 и B_{32}=10^8

2.Решение с модулем, определенным по u_n

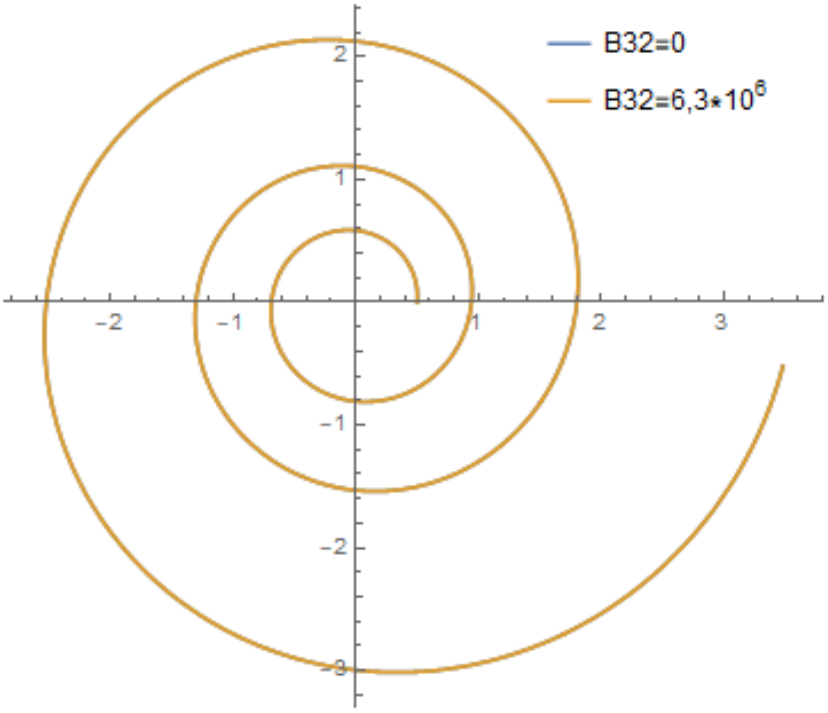

Рис.4.3 Решения теории стержней при B_{32}=0 и B_{32}=6,3 · 10^6

3. Решение с модулем, определенным по Ψ_b

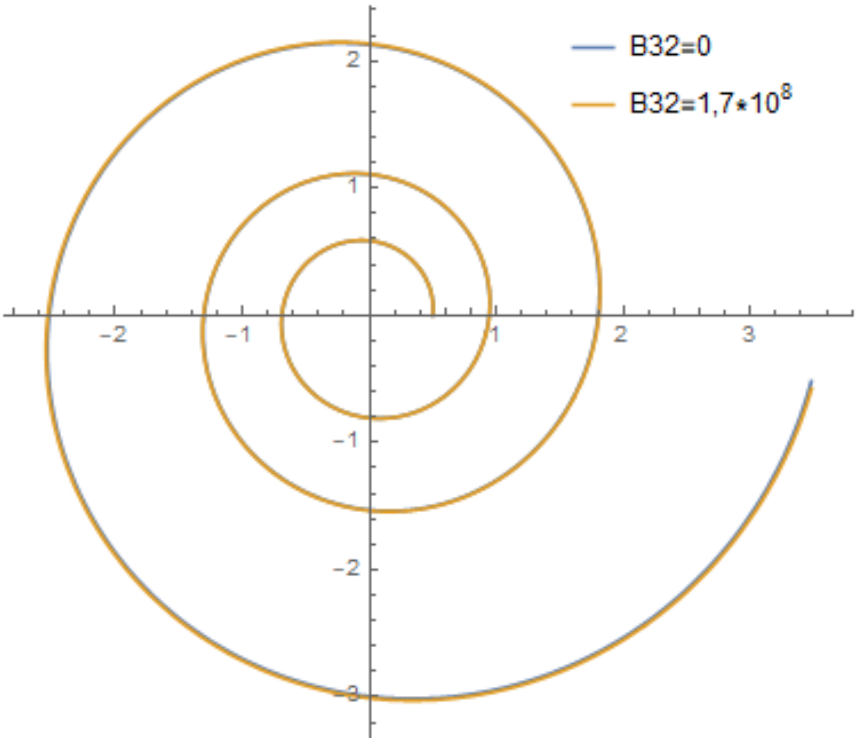

Рис.4.4 Решения теории стержней при B_{32}=0 и B_{32}=1,7 · 10^8

Графики, изображенные на рисунках 4.2-4.3, демонстрируют, что учет дополнительного модуля упругости не оказывает значительного влияния на перемещения, полученные при решении уравнений теории стержней. Поэтому общая картина деформированного состояния стержня остается неизменной.

Для наглядности графиков увеличим момент в 10 раз, сделав его равным $M_0 = -1\,500\,000$ Н · м. Очевидно, что с такой внешней нагрузкой задача выйдет за рамки линейной теории, и стержень просто разрушится. Однако для построения более наглядного графика мы можем это сделать.

Без учета дополнительного модуля упругости снова получаем ожидаемое поведение стержня: он раскручивается еще сильнее (рис.4.5).

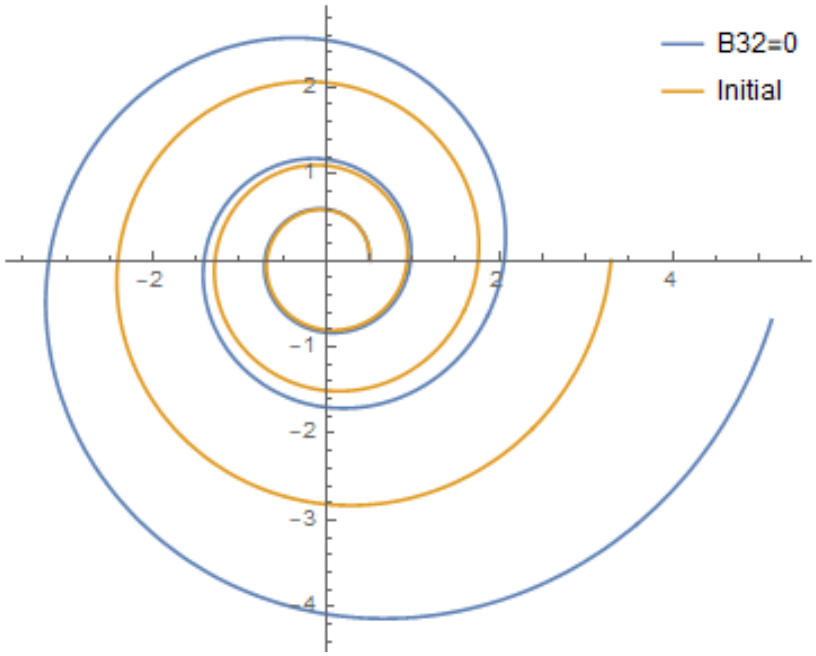

Рис.4.5 Недеформированный стержень и решение теории стержней при B_{32}=0

Если сравнивать решения, полученные с учетом упругого модуля, и при B_{32}=0, то опять наблюдается слабое влияние дополнительного модуля на решение (рис.4.6 - 4.8).

1. Решение с модулем, определенным по u_t

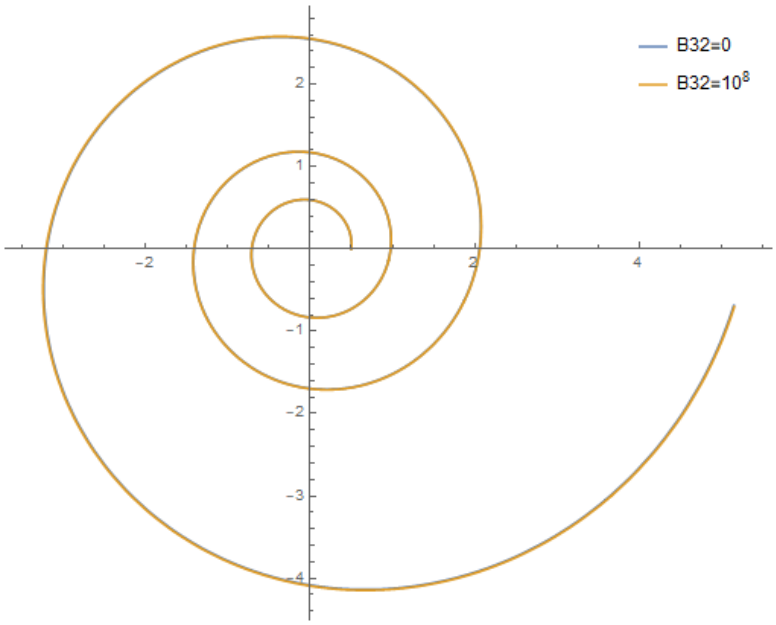

Рис.4.6 Решения теории стержней при B_{32}=0 и B_{32}=10^8

2.Решение с модулем, определенным по u_n

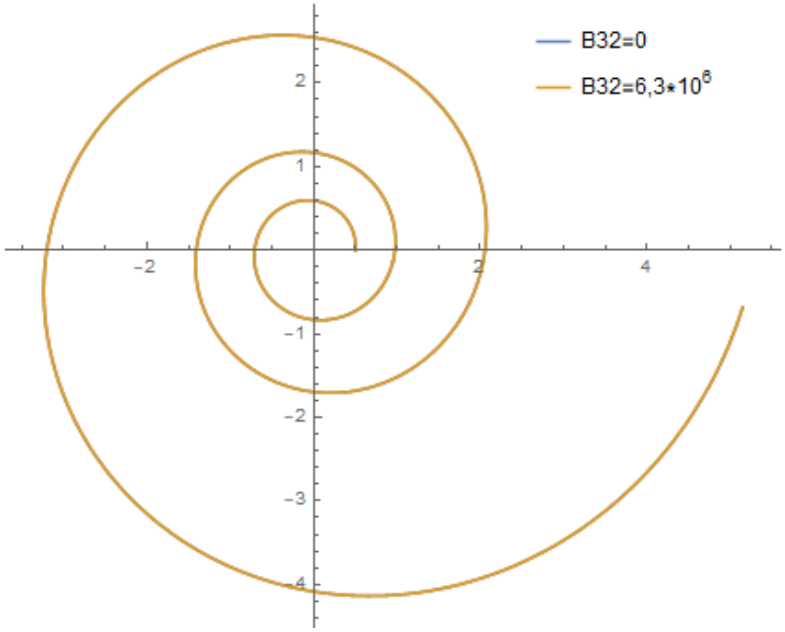

Рис.4.7 Решения теории стержней при B_{32}=0 и B_{32}=$6{,}3 \cdot 10^6$

3. Решение с модулем, определенным по Ψ_b

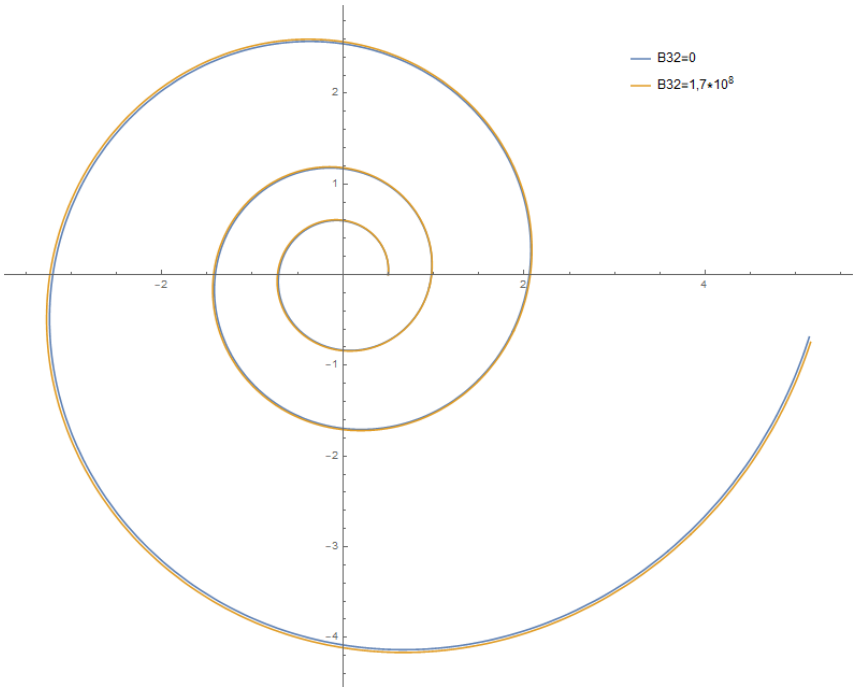

Рис.4.8 Решения теории стержней при B_{32}=0 и B_{32}=1,7 · 10^8

Таким образом, даже при увеличении нагрузки значительных различий в решениях не было обнаружено.

Определим влияние дополнительного модуля упругости стержня на вектор деформации растяжения-поперечного сдвига $\underline{\varepsilon}$, который в рамках рассматриваемой постановки задачи выражается как:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_t(s)\underline{t}(s) \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_t(s) = -\frac{M_0 B_{32} R_c(s)}{C_2 A_3 R_c^2(s) - B_{32}^2} \tag{4.4}$$

В данном случае учет B_{32} существенен, так как если принять его равным нулю, то деформации будут нулевыми для любого сечения стержня. Построим графики зависимости $\varepsilon_t(s)$ при определенных модулях упругости (рис.4.9-4.11).

1.Решение с модулем, определенным по u_t

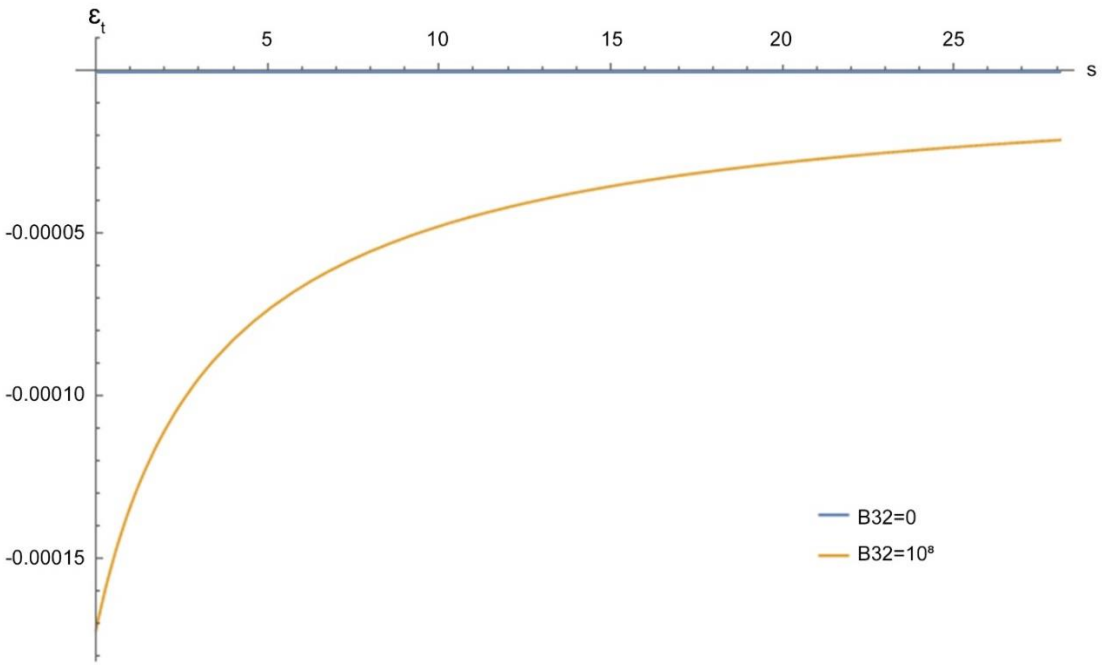

Рис.4.9 $\varepsilon_t(s)$ при B_{32}=0 и B_{32}=10^8

2. Решение с модулем, определенным по u_n

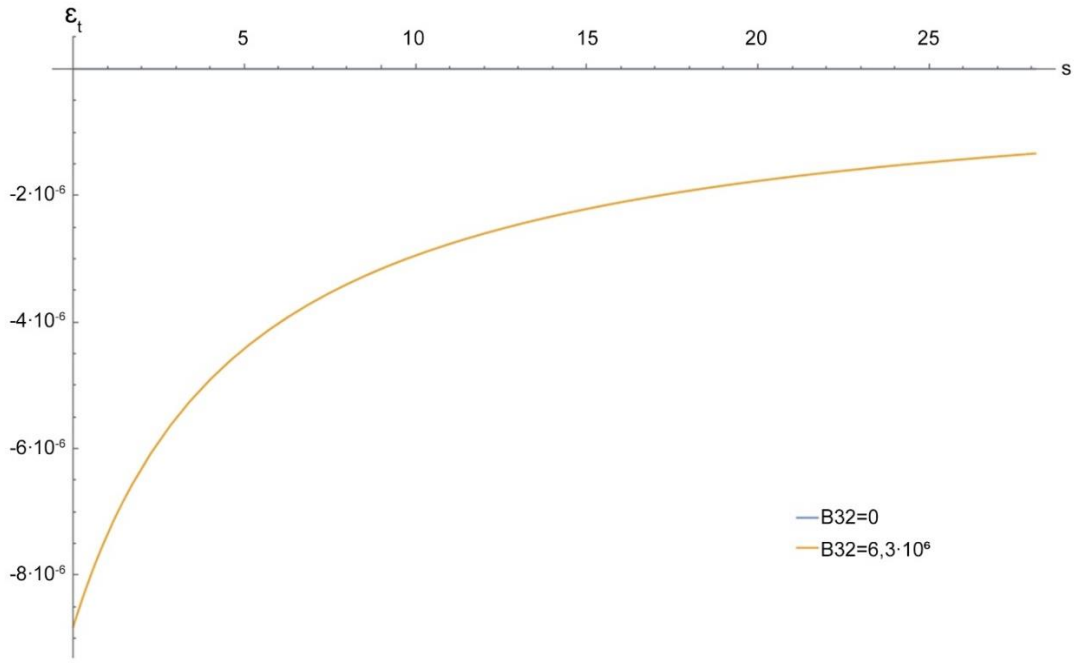

Рис.4.10 $\varepsilon_t(s)$ при B_{32}=0 и B_{32}=$6{,}3 \cdot 10^6$

3. Решение с модулем, определенным по Ψ_b

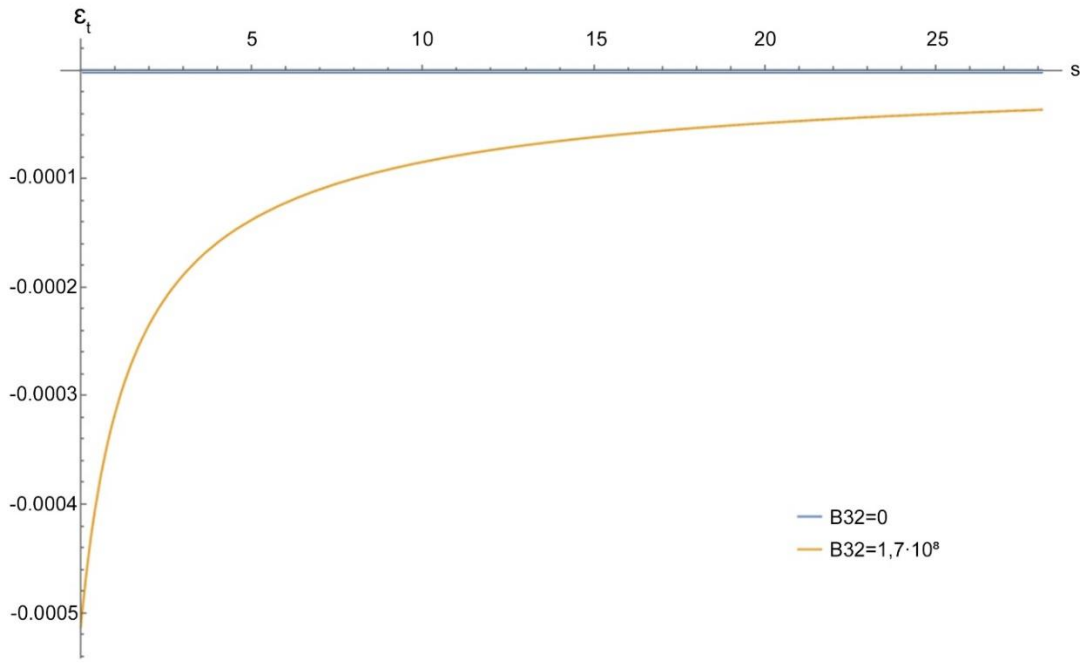

Рис.4.11 $\varepsilon_t(s)$ при B_{32}=0 и B_{32}=$1{,}7 \cdot 10^8$

Во всех трех случаях наибольшее влияние дополнительного модуля упругости наблюдается в точке закрепления стержня, то есть при $s = 0$. Если использовать B_{32}, определенный по u_n, то ε_t принимает значения порядка 10^{-6} и меньше, следовательно, такое решение практически не отличается от результата без учета модуля упругости. Этот факт в очередной раз подтверждает неэффективность данного метода.

Рассматривая B_{32}, вычисленные по u_t и Ψ_b, получаем ненулевые деформации, причем зависимость $\varepsilon_t(s)$ представляет собой именно функцию, асимптотически стремящуюся к нулю. То есть если бы стержень был бесконечной длины, то учет дополнительного модуля упругости при $s \to \infty$ не оказывал бы никакого влияния на деформации растяжения-поперечного сдвига.

Деформации при B_{32}, определенном по Ψ_b, больше, чем деформации при B_{32}, вычисленном по u_t, в нулевом сечении. Таким

образом, дополнительные модули упругости, найденные по поворотам сечения, оказывают большее влияние на значения деформаций.

Сравним теперь деформации изгиба-кручения $\underline{\phi}$. В данной постановке задачи вектор $\underline{\phi}$ имеет следующее представление:

$$\underline{\phi} = \phi_b \underline{b}(s) \tag{4.5}$$

$$\phi_b = \frac{M_0 A_3 R_c^2(s)}{C_2 A_3 R_c^2(s) - B_{32}^2} \tag{4.6}$$

Здесь учет дополнительного модуля упругости имеет существенное значение, так как если положить B_{32}=0, деформации будут постоянны на протяжении всего стержня, в то время как в общем случае (при B_{32}, отличном от нуля) ϕ_b представляет собой функцию, зависящую от координаты вдоль стержня. Рассмотрим графики зависимости $\phi_b(s)$ (рис.4.12-4.14) при определенных модулях упругости:

1. Решение с модулем, определенным по u_t.

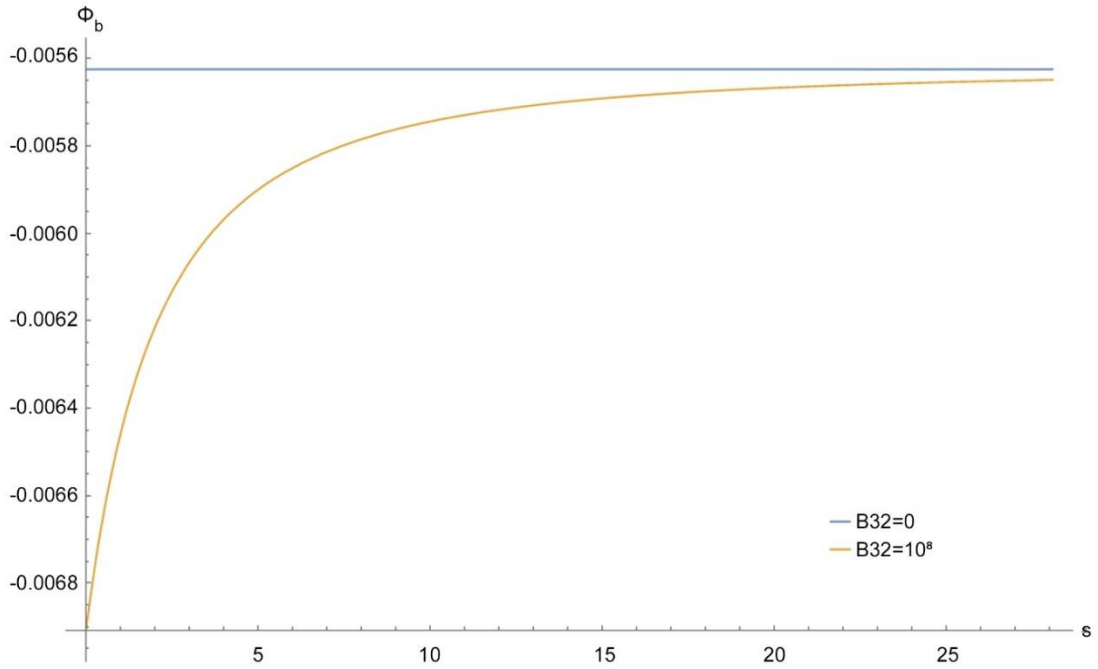

Рис.4.12 $\phi_b(s)$ при B_{32}=0 и B_{32}=10^8

2. Решение с модулем, определенным по u_n.

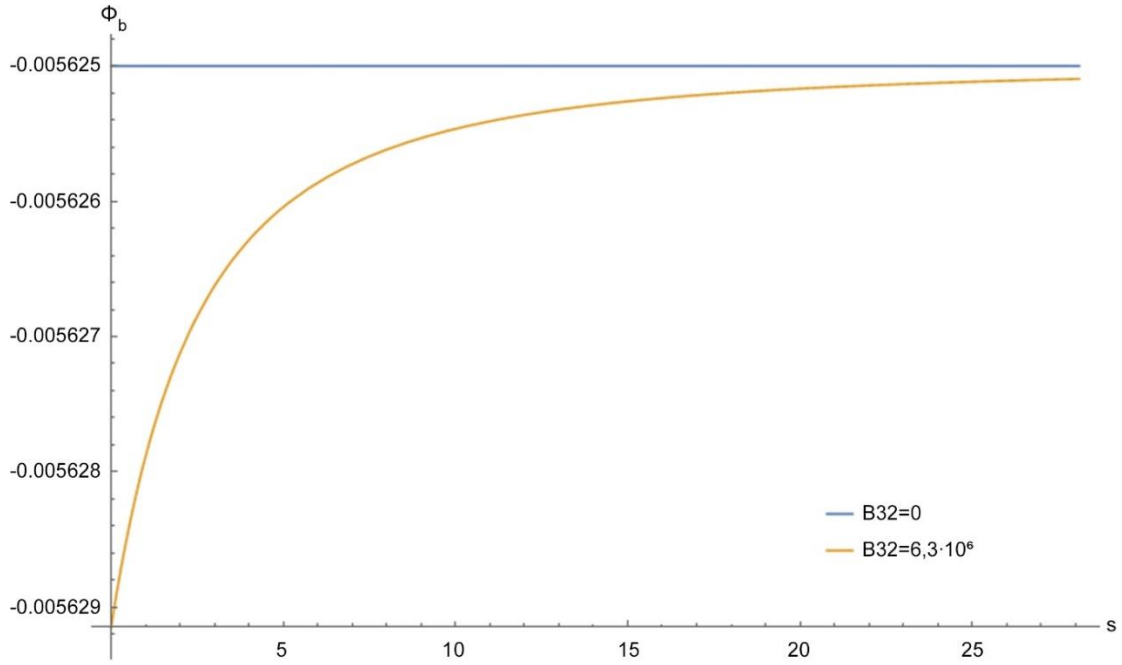

Рис.4.13 $\phi_b(s)$ при B_{32}=0 и B_{32}=6,3 $\cdot$ 10^6

3. Решение с модулем, определенным по Ψ_b

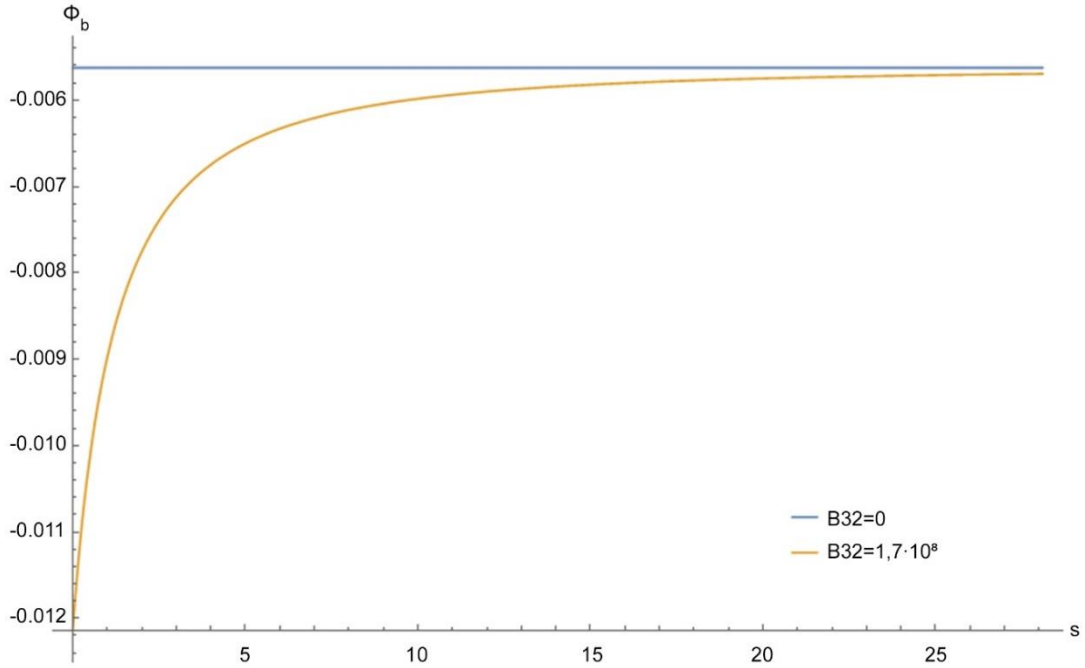

Рис.4.14 $\phi_b(s)$ при B_{32}=0 и B_{32}=1,7 $\cdot$ 10^8

Графики (рис. 4.12-4.14) иллюстрируют тот же характер влияния упругого модуля B_{32} , как и при деформациях растяжения-сдвига: при $s = 0$ наблюдаются наибольшие расхождения между решениями с учетом дополнительного модуля упругости и без.

Если использовать B_{32}, определенный по u_n, то значения ϕ_b при $s = 0$ отличается всего на $4 \cdot 10^{-6}$ от решения при B_{32}=0, и это максимальная разность, так как график для деформаций с учетом упругого модуля асимптотически стремится к константе, соответствующей решению при B_{32}=0. Таким образом, расчет деформаций с использованием B_{32}, определенного по u_n, дает результат практически не отличающийся от решения, полученного без учета упругого модуля.

Рассматривая B_{32}, вычисленные по u_t и Ψ_b, получаем деформации ϕ_b, зависящие от координаты сечения стержня, которые при $s \to \infty$ стремятся к значениям решения без учета дополнительного модуля упругости.

Максимальные деформации при B_{32}, определенном по Ψ_b, больше деформаций при B_{32}, определенном по u_t, почти в два раза. Следовательно, дополнительные модули упругости, найденные по поворотам сечения, оказывают большее влияние на значения деформаций.

4.3 Сравнение результатов с ранее полученными выводами

Ранее были протестированы методики определения модуля упругости путем рассмотрения изгиба стального стержня в форме кольца с квадратным сечением. Параметры сечения такие же, как и в данной работе. Несущая кривая представляет собой ¾ окружности. Радиус кривизны равен радиусу несущей кривой и составляет 0,5 м.

Отметим различие постановок задач. Для применения модели стержня необходимо, чтобы характерный размер сечения трехмерного тела был много меньше длины и радиуса кривизны тела. При рассмотрении логарифмической спирали это условие выполнено достаточно хорошо, так как сторона квадратного сечения равна 0,2 м, а длина стержня 28,1 м. В ранее рассмотренной задаче стержень обладал длиной 1,2 м. По модулю радиус кривизны спирали возрастает, а у кольца остается константой, равной 0,5 м. Таким образом, применение модели стержня при описании напряженно-деформированного состояния спирали более корректно.

При рассмотрении кольца были вычислены следующие модули упругости (табл.4.8):

Таблица 4.8

	B_{32}	B_{32}/R_c	$B_{32}/\sqrt{R_c}$
по u_t	$1{,}19 \cdot 10^7$	$2{,}38 \cdot 10^7$	$1{,}68 \cdot 10^7$
по Ψ_b	$6{,}98 \cdot 10^7$	$13{,}96 \cdot 10^7$	$9{,}83 \cdot 10^7$

Таким образом, общая тенденция получаемых результатов сохранилась: метод с использованием u_t дает модуль, существенно меньший по значению в сравнении с результатом вычислений по Ψ_b.

Различие итогов двух исследований заключается в относительных погрешностях: в предыдущей работе был однозначно определен метод вычисления упругого модуля по Ψ_b как самый оптимальный, так как относительная погрешность не превосходила 6 % и в среднем составляла 4 %, а в данной работе относительные погрешности для методов вычисления по u_t и Ψ_b принимают приблизительно равные значения.

В ранее полученных результатах нельзя было определить, какая именно величина не будет изменяться в зависимости от координаты s

(B_{32}, B_{32}/R_c или другая комбинация этих величин), так как радиус кривизны был постоянным. Но в данной работе удалось выявить по результатам таблиц 4.2, 4.5 и 4.7, что отношения B_{32}/R_c, $B_{32}/\sqrt{R_c}$ обладают меньшим отклонением от своих средних значений по сравнению с погрешностями для B_{32}. В таком случае можно предположить, что упругий модуль B_{32} зависит от радиуса кривизны.

Также стоит отметить, что B_{32}/R_c, $B_{32}/\sqrt{R_c}$, вычисленные по Ψ_b в двух исследованиях, близки по значениям. Если для определенности вычислить относительное отклонение результата данной работы от ранее полученного, то оно составит около 20 % для B_{32}/R_c и 41 % для $B_{32}/\sqrt{R_c}$. Таким образом, после учета радиуса кривизны, главного отличия двух постановок задач, получаем приближенно равные значения отношений B_{32}/R_c.

Глава 5. Дополнительные исследования для уточнения результата

5.1 Получение решения в дополнительных сечениях

Осуществим весь алгоритм нахождения модуля упругости для четырех дополнительных сечений: рассмотрим ту же постановку задачи (см. Глава 2) и получим распределения перемещений в сечениях при θ, равном $\pi/2$, $3\pi/4$, π и $5\pi/4$, с помощью численного эксперимента в пакете прикладных программ ANSYS. Затем по формулам перехода (1.46) – (1.48) определяем перемещения и поворот обозначенных сечений стержня. Чтобы убедиться в сходимости решения и достаточной точности вычисленных интегралов, входящих в состав формул, необходимо провести исследование сходимости по сетке. Результаты исследования отражены в таблицах 5.1-5.4, по данным которых построены графики зависимости относительной погрешности полученных перемещений, поворотов в зависимости от числа элементов в сечении (рис.5.1-5.3).

Таблица 5.1

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = \pi/2$

Шаг по сетке,м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,1	-0,002652	-0,001479	-0,017822
0,05	-0,002382	-0,001331	-0,011264
0,025	-0,002074	-0,001159	-0,007796
0,01	-0,001844	-0,001032	-0,005860
0,0075	-0,001781	-0,000997	-0,005529
0,007	-0,001727	-0,000966	-0,005281

Таблица 5.2

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = 3\pi/4$

Шаг по сетке ,м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,1	-0,005157	-0,004575	-0,030838
0,05	-0,004624	-0,004101	-0,019011
0,025	-0,004020	-0,003569	-0,012777
0,01	-0,003570	-0,003175	-0,009324
0,0075	-0,003445	-0,003063	-0,008769
0,007	-0,003343	-0,002974	-0,008404

Таблица 5.3

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = \pi$

Шаг по сетке, м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,1	-0,007201	-0,009511	-0,047149
0,05	-0,006478	-0,008532	-0,028656
0,025	-0,005624	-0,007422	-0,018910
0,01	-0,004990	-0,006597	-0,013579
0,0075	-0,004816	-0,006367	-0,012693
0,007	-0,004672	-0,006178	-0,012163

Таблица 5.4

Значения перемещений и поворотов в сечении $\theta = 5\pi/4$

Шаг по сетке, м	u_n, м	u_t, м	Ψ_b
0,1	-0,008213	-0,015650	-0,066237
0,05	-0,007399	-0,001406	-0,040084
0,025	-0,006413	-0,012221	-0,026424
0,01	-0,005687	-0,010856	-0,019001
0,0075	-0,005492	-0,010485	-0,017708
0,007	-0,005323	-0,010164	-0,016809

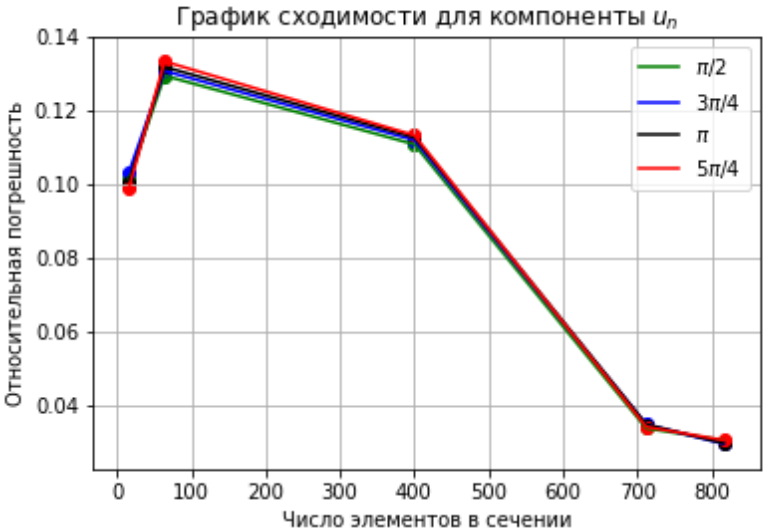

Рис. 5.1 График сходимости для компоненты u_n

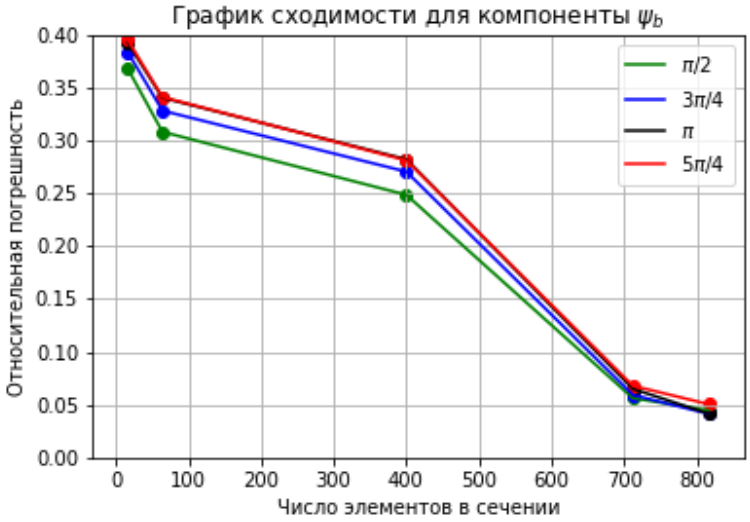

Рис. 5.2 График сходимости для компоненты Ψ_b

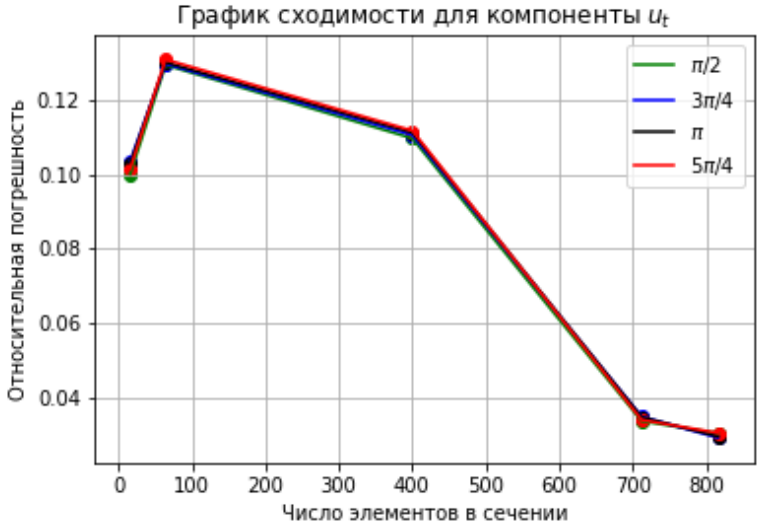

Рис. 5.3 График сходимости для компоненты u_t

Данные таблиц и графики подтверждают сходимость задачи, так как при увеличении числа элементов в сечении относительная погрешность становится крайней малой, что говорит о высокой точности полученного решения.

Результирующие перемещения и повороты сечений представлены в таблице 5.5.

Таблица 5.5

	Сечение 4: $\theta = \frac{\pi}{2}$	*Сечение 5:* $\theta = \frac{3\pi}{4}$	*Сечение 6:* $\theta = \pi$	*Сечение 7:* $\theta = \frac{5\pi}{4}$
$u_{t,}$ м	-0,001	-0,003	-0,006	-0,010
$u_{n,}$ м	-0,0017	-0,003	-0,005	-0,005
Ψ_{b}	-0,005	-0,008	-0,012	-0,017

5.2 Определение упругих модулей

После вычисления поворотов и перемещений можно приступить к реализации методов, описанных в параграфе 3.1. В результате получаем следующие значения упругих модулей (табл. 5.6).

Таблица 5.6

	B_{32}^{4}	B_{32}^{5}	B_{32}^{6}	B_{32}^{7}	B_{32}	δ_4, %	δ_5, %	δ_6, %	δ_7, %
По u_t	$5{,}5 \cdot 10^7$	$5{,}5 \cdot 10^7$	$3{,}0 \cdot 10^7$	$5{,}5 \cdot 10^7$	$4{,}9 \cdot 10^7$	13	13	38	13
По u_n	$17{,}0 \cdot 10^7$	$16{,}0 \cdot 10^7$	$18{,}0 \cdot 10^7$	$15{,}5 \cdot 10^7$	$16{,}6 \cdot 10^7$	3	4	8	7
По Ψ_b	$6{,}0 \cdot 10^7$	$6{,}5 \cdot 10^7$	$10{,}0 \cdot 10^7$	$13{,}0 \cdot 10^7$	$8{,}9 \cdot 10^7$	33	27	12	46

Рассчитаем среднее отклонение $\overline{\delta}$ для каждого метода (табл.5.7).

Таблица 5.7

	По u_t	По u_n	По Ψ_b
$\overline{\delta}, \%$	19	6	30

При меньших радиусах кривизны, которым соответствуют эти четыре дополнительных сечения, метод вычисления дополнительного модуля упругости по u_n дает результат, наименее отличающийся от сечения к сечению.

В ходе поиска модуля по u_t при варьировании B_{32} и его подстановке в уравнение наблюдалось постоянство решений в широком диапазоне значений искомого модуля, то есть не было возможности единственным образом определить B_{32}. Аналогичная ситуация наблюдалась и для метода вычисления по u_n при больших радиусах кривизны. Этот факт является серьезным недостатком способов определения модуля по перемещениям.

Несмотря на то что относительная погрешность для метода определения модуля по Ψ_b составляет 30 % , это способ дает для 4-го и 5-го сечения результат, близкий к решению задачи о статическом изгибе кольца. Это можно объяснить тем, что радиусы кривизны 4-го, 5-го сечений и кольца близки по значению. Также прослеживается зависимость от радиуса кривизны, в связи с этим проанализируем отношение B_{32}/R_c (табл.5.8).

Таблица 5.8

	$\frac{B_{32}^4}{R_c^4}$	$\frac{B_{32}^5}{R_c^5}$	$\frac{B_{32}^6}{R_c^6}$	$\frac{B_{32}^7}{R_c^7}$	$\frac{B_{32}}{R_c}$
По Ψ_b	$10{,}17 \cdot 10^7$	$10{,}17 \cdot 10^7$	$14{,}49 \cdot 10^7$	$17{,}57 \cdot 10^7$	$13{,}1 \cdot 10^7$

Сравним значения этого выражения, вычисленные во всех рассмотренных опытах.

Таблица 5.9

	При больших радиусах кривизны спирали	При малых радиусах кривизны спирали	При постоянном радиусе кривизны (кольцо)
$\frac{B_{32}}{R_c}$ по Ψ_b	$11{,}22 \cdot 10^7$	$13{,}1 \cdot 10^7$	$13{,}96 \cdot 10^7$

Получаем, что величины B_{32}/R_c , рассчитанные при различных радиусах кривизны, близки по значению и могут служить оценкой упругого модуля для стержня с квадратным сечением, заданным материалом, радиусом кривизны. Однако следует учитывать, что эта оценка может быть верна лишь в некотором интервале значений R_c, так как для прямолинейного стержня, когда $R_c \to \infty$, отношение B_{32}/R_c не может оставаться константой, ведь в таком случае компоненты тензора жесткости $\underline{\underline{B}}$ нулевые.

Таким образом, метод определения по Ψ_b может дать оценку упругому модулю в ограниченном интервале значений R_c. Это способ позволил выявить зависимость B_{32} от радиуса кривизны. Значительные относительные отклонения могут быть вызваны недостаточно хорошей точностью вычисленных перемещений и поворотов сечений. Также, возможно, оказывают влияние на решение жесткость на растяжение A_3 и изгибная жесткость C_2, которые были определены из справочника, а не опытном путем в контексте данной задачи. Помимо этого, рассматриваемый стержень является тонким, то есть отношение характерного размера сечения к длине стержня много меньше единицы ($0{,}007 \ll 1$), поэтому влияние модулей мало, и это вызывает затруднение при точном вычислении искомого модуля.

Заключение

В данной работе было протестировано три метода определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня B_{32} путем решения задачи о статическом изгибе стержня в форме плоской спирали.

По результатам проведенных исследований было определено, что возможно рассмотрение численного эксперимента, заключающегося в моделировании статического изгиба стержня в форме спирали, для определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня. При этом постановка задачи корректна, так как характерный размер сечения соответствующего трехмерного тела много меньше длины тела и радиуса кривизны, то есть выполнено условие, при котором использование модели стержня возможно. Данный опыт может быть описан с помощью трех дифференциальных уравнений теории стержней (2.5) - (2.7). В каждое уравнение в качестве параметра входит искомый модуль B_{32}, который можно вычислить, используя результаты численного эксперимента.

Первый метод заключается в определении упругого модуля из уравнения относительно u_n. Этот способ дает результат, наиболее изменяющийся от сечения к сечению, относительное отклонение упругого модуля, определенного для всего стержня, от значений для выбранного сечения достигает 42%. Анализ влияния модуля на решение для перемещений, деформаций растяжения-сдвига и кручения-изгиба показал, что значения перечисленных характеристик практически не отличаются от решения без учета дополнительного модуля.

Второй и третий методы заключаются в вычислении упругого модуля из уравнений относительно Ψ_b и u_t. Способ определения по повороту сечения оказался точнее на 1,6 %, чем метод вычисления по перемещению в направлении касательного вектора $\underline{t}$ при больших радиусах кривизны.

Также в ходе исследования выявлено значительное влияние дополнительного модуля упругости, вычисленного по Ψ_b и u_t, на деформации: с учетом B_{32} деформации растяжения-сдвига и изгиба-кручения представляют собой функции, зависящие от координаты вдоль стержня s. Причем при $s \to \infty$ значения функций стремятся к решению без учета дополнительного модуля упругости.

Анализ влияния модуля упругости на перемещения показал, что учет модуля B_{32} никак не изменяет общий вид деформированного стержня.

Также было проведено дополнительное исследование компоненты тензора жесткости $\underline{\underline{B}}$, которое показало, что B_{32}/R_c ведет себя стабильнее от сечения к сечению, в отличие от B_{32}. Однако это отношение не может быть константой при любом R_c , так как при бесконечном радиусе кривизны получаем прямолинейный стержень, для которого в данном случае компоненты тензора $\underline{\underline{B}}$ нулевые. Тогда было рассмотрено отношение $B_{32}/\sqrt{R_c}$, которое не дало принципиальных улучшений точности, так как значения выражения сильно изменяются от сечения к сечению.

При сравнении с ранее полученным выводами было выявлено, что общая тенденция получаемых результатов сохранилась: метод с использованием u_t дает модуль меньший по значению в сравнении с результатом вычислений по Ψ_b. Различие итогов двух исследований заключается в относительных погрешностях: в предыдущей работе был однозначно определен метод вычисления упругого модуля по Ψ_b как самый оптимальный ввиду малых относительных отклонений, а в данной работе погрешности для методов определения по u_t и Ψ_b принимают приблизительно равные значения, поэтому для установления самого эффективного способа расчета упругого модуля требуются дополнительные исследования.

Также было проведено тестирование методик при малых радиусах кривизны, по результатам которого определено, что метод вычисления дополнительного модуля упругости по u_n дает результат, наименее отличающийся от сечения к сечению; несмотря на большую относительную погрешность, метод определения модуля по Ψ_b дает для 4-го и 5-го сечения результат, близкий к решению задачи о статическом изгибе кольца, прослеживается некоторая зависимость от радиуса кривизны.

В предыдущей работе рассматривался стержень с постоянным радиусом кривизны, поэтому нельзя было определить, какая именно величина не будет зависеть от сечения: B_{32} , B_{32}/R_c или другая комбинация B_{32} и R_c. Стержень в виде логарифмической спирали с непостоянным радиусом кривизны позволяет обнаружить зависимость от R_c. По данным таблицы 5.9, можно сделать вывод, что именно отношение значения B_{32} к радиусу кривизны R_c остается приближенно постоянным вдоль стержня в определенном интервале значений R_c.

В ходе поиска модуля по u_t при малых радиусах кривизны и расчета по u_n при больших радиусах кривизны наблюдалось постоянство решений в широком диапазоне значений искомого модуля, то есть не было возможности единственным образом определить B_{32}. Этот факт является серьезным недостатком способов определения модуля по перемещениям.

Таким образом, наиболее оптимальным методом вычисления дополнительного модуля криволинейного стержня является способ вычисления по поворотам сечения Ψ_b. Значительные относительные отклонения определенных величин могут быть вызваны, во-первых, недостаточно хорошей точностью вычисленных перемещений и поворотов сечений. Во-вторых, возможно, оказывают влияние на решение жесткость на растяжение A_3 и изгибная жесткость C_2, которые были определены из справочника, а не опытном путем в контексте данной задачи. В-третьих,

рассматриваемый стержень является тонким, то есть отношение характерного размера сечения к длине стержня много меньше единицы ($0{,}007 \ll 1$), поэтому влияние модулей мало, и это вызывает затруднение при точном вычислении искомого модуля.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Сопротивление материалов: учебник для вузов/ Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П., под редакцией Александрова А.В. – 3-е издание, испр. – М.: Высш.шк., 2003 – 560 с.

2. Бруяка В.А., Инженерный анализ в ANSYS Workbench: учебное пособие. – Самар. гос. техн. ун-т, 2010 – 271 с.

3. Верхотуркин Е.Ю., Пащенко В.Н., Пясецкий В.Б., Интерфейс и генерирование сетки в ANSYS WORKBENCH: учебное пособие. — М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013 – 64 с.

4. Жилин П.А., Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: учебное пособие. – СПб: Изд-во Политехнического университета, 2007 – 101 с.

5. Жилин П.А., Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: учебное пособие. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2003 – 340 с.

6. Иванов Д.В., Доль А.В., Введение в ANSYS WORKBENCH – учебно-методическое пособие – Саратов: Амирит, 2016 – 56 с.

7. Лойцянский Л.Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики. – Дрофа, 2006 – 719 с.

8. Лукьянов А.М., Лукьянов М.А., Расчет стержней на изгиб и кручение: методические указания. – М.: МИИТ, 2005

9. Мухтаров Р.А., Резунов А.В., Расчет стержня на кручение: методические указания. – Воронеж, 2013 – 23 с.

10. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е. Шерстнев В.А., Сопротивление материалов: учебное пособие/ под редакцией Б.Е. Мельникова, 2-е издание, испр. и доп. – СПб: Изд-во «Лань», 2007 – 560 с.

11. Работнов Ю.Н., Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1963. — 456 с.

12. Светлицкий В.А., Механика стержней: учебник для втузов в 2-х ч. — М.: Высш. шк, 1987 -320 с.

13. Феодосьев В.И., Сопротивление материалов: учебное пособие. — М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999 – 592 с.

14. Щербакова Ю.В., Сопротивление материалов: шпаргалка, учебное издание. – Ростов н/Д.: Феникс, 2014 – 126 с.

15. Wolfram S., An Elementary Introduction to the Wolfram Language, second edition. Wolfram Media, 2017 – 339 pages