ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОТЧЕТ

о выполнении лабораторной работы по вычислительной механике

«Расчет процесса распространения продольной волны в балке»

Выполнил
Поцелуев П. А.

Руководитель работы
Ле-Захаров С. А.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2014

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана балка длиной L = 1 км, левый конец которой жестко заделан (см. Рисунок 1). Задана скорость V правого конца балки в начальный момент времени.

Рисунок 1. Балка (изображены граничные и начальные условия)

Балка сделана из материала с модулем Юнга $E = 2e11$ Па и плотностью $\rho = 7860$ кг/м^3.

Требуется провести конечно-элементный расчет в системе Abaqus, найти закон колебаний крайней правой точки балки, период этих колебаний и сравнить значение периода с полученным аналитически.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть ось x направлена вдоль оси балки, начало координат x=0 совпадает с точкой заделки. Функцию, описывающую продольную волну, обозначим $u(x,t)$.

Поставленная задача описывается уравнением продольных колебаний

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$\begin{cases} u\,|_{x=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\,|_{x=L} = 0 \\ u\,|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,|_{t=0} = \begin{cases} 0, x < L-\varepsilon \\ \dfrac{p}{\rho\varepsilon S}, x \ge L-\varepsilon \end{cases} \end{cases}$$

Здесь $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ – фазовая скорость распространения продольных волн в упругой среде, p – импульс, сообщенный правому концу балки в начальный момент времени, ε – элемент длины, на который распределен импульс p.

Решая данное уравнение методом Фурье и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, находим

$$u(x,t) = \frac{4p}{\pi v\rho S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2L}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2L}vt\right)}{2n+1}$$

Для правого конца балки получаем искомый закон колебаний

$$u(t) = \frac{4p}{\pi v\rho S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2L}vt\right)}{2n+1}$$

Так как в данной работе нас не интересует амплитуда колебаний, будем считать $u(t) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi(2n+1)tv}{2L}\right)}{2n+1} = \frac{1}{2}\,i\left(\tanh^{-1}\left(e^{-\frac{i\pi t v}{2L}}\right) - \tanh^{-1}\left(e^{\frac{i\pi t v}{2L}}\right)\right)$$

Учитывая, что экспонента имеет период $2\pi i$, находим искомый период колебаний

$$T = \frac{4L}{v} = 4L\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

При этом время распространения волны от точки x = L до точки x = 0 равно $\frac{L}{v}$ (в 4 раза меньше найденного периода T).

Для данной задачи получаем T = 0.793 с.

На рисунках 2 – 4 приведены графики зависимости перемещения u(t) для различных промежутков времени.

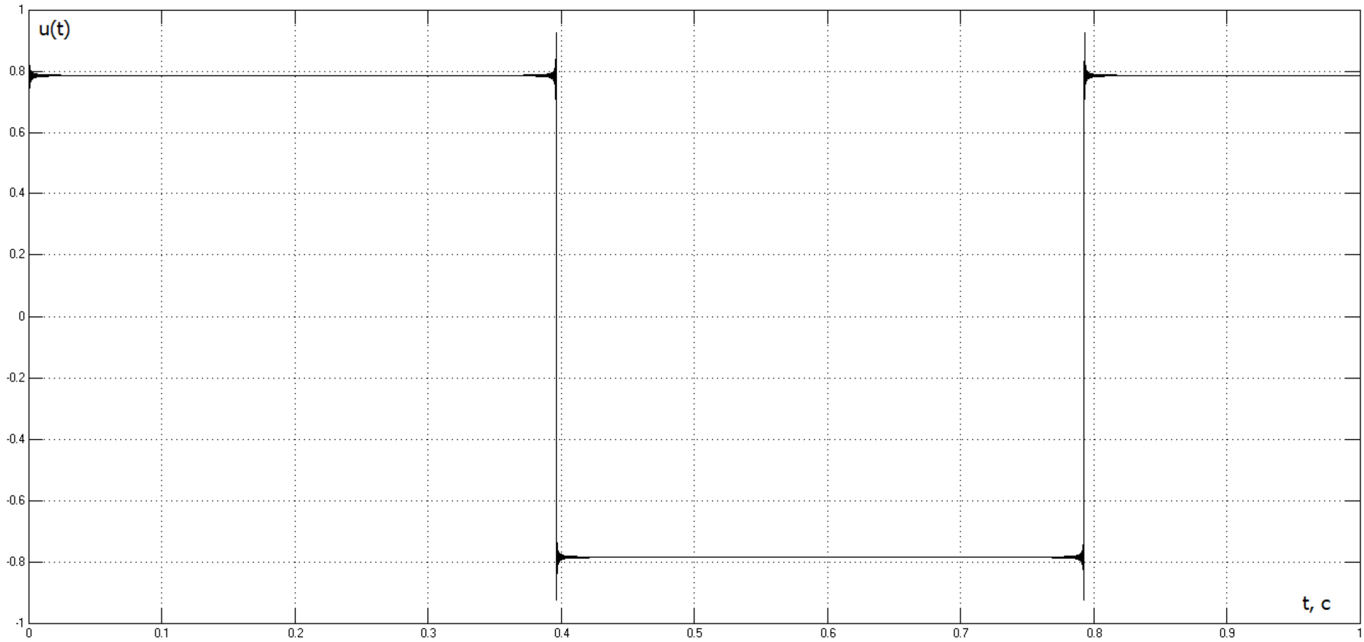

Рисунок 2. График зависимости перемещения u(t)

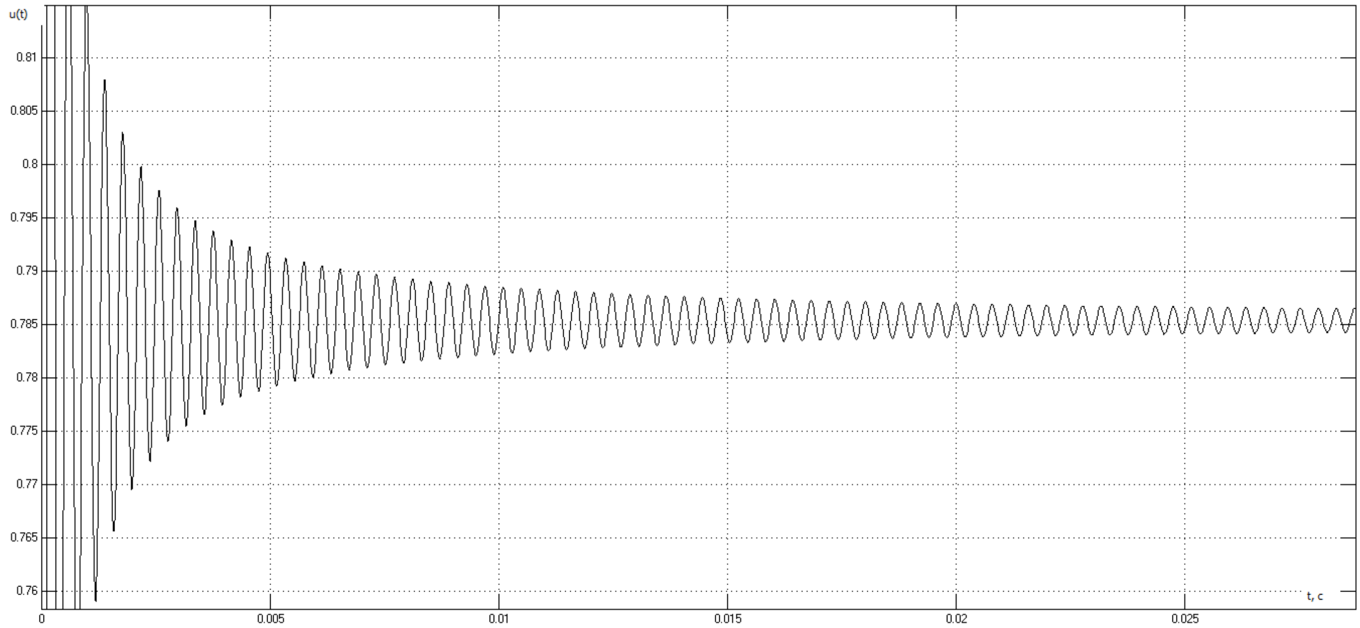

Рисунок 3. График зависимости перемещения u(t)

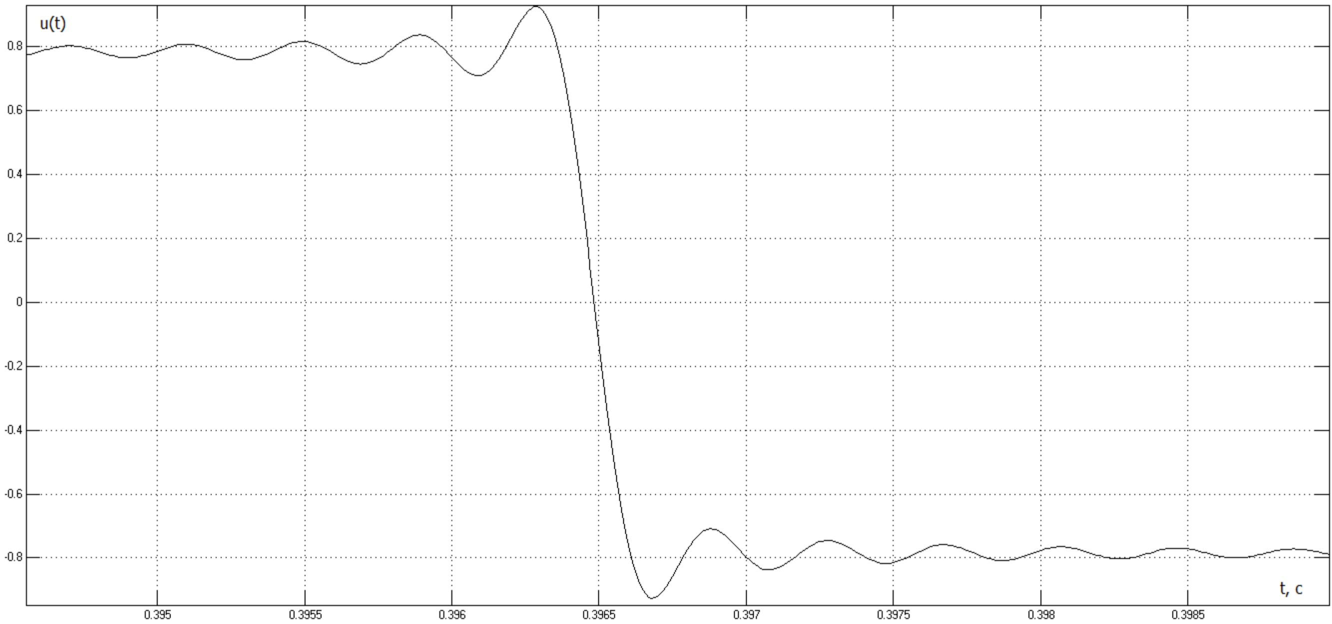

Рисунок 4. График зависимости перемещения u(t)

3. ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТОВ В ABAQUS И РЕЗУЛЬТАТЫ

При реализации в Abaqus балка была представлена как одномерный объект в двумерном пространстве моделирования. Для задания начальных условий был создан статический шаг, для проведения расчетов – динамический шаг (начальный импульс на нем деактивировался).

На рисунках 5, 6 приведены графики зависимости перемещения u(t) для различных промежутков времени.

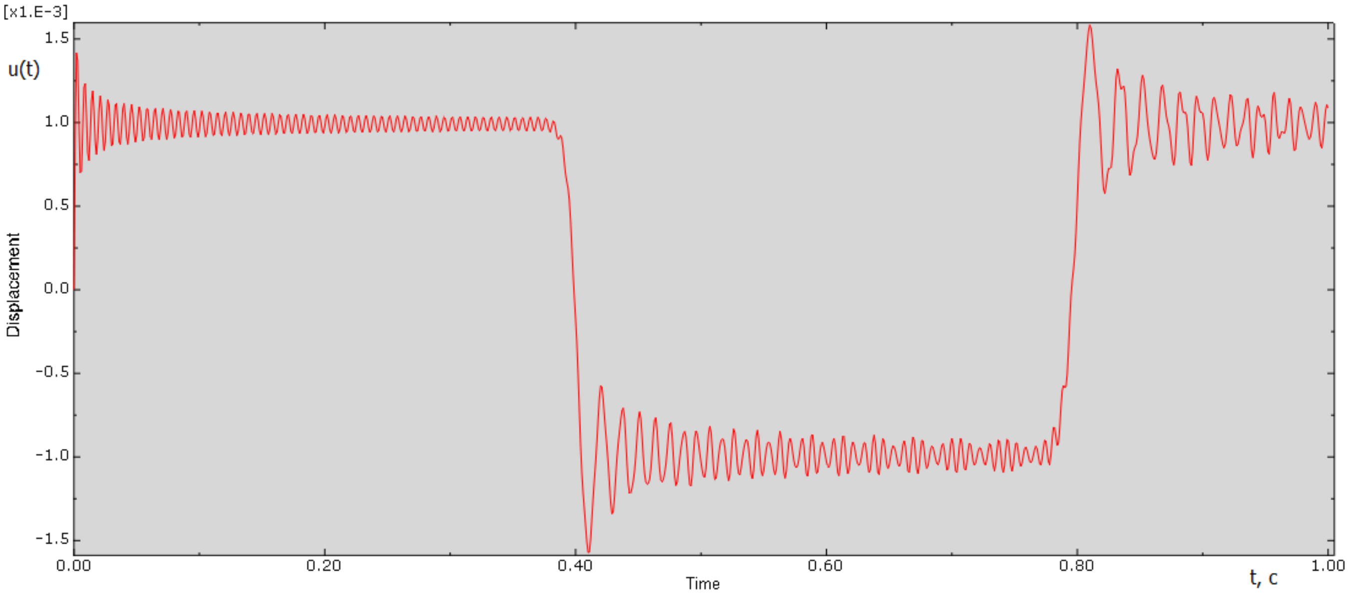

Рисунок 5. График зависимости перемещения u(t)

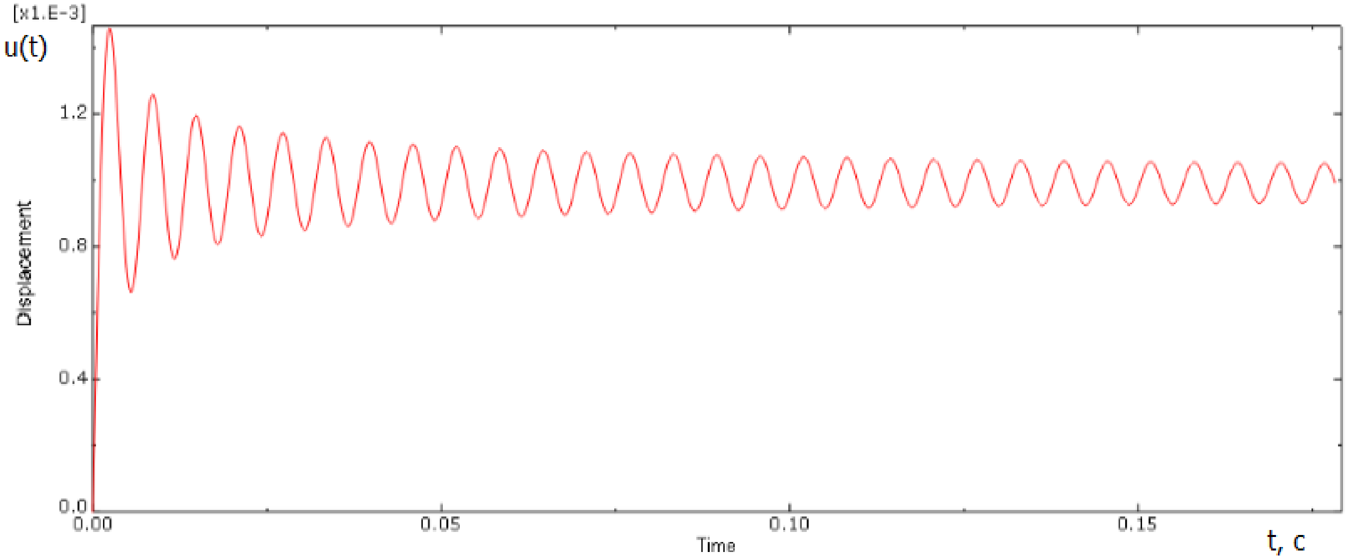

Рисунок 6. График зависимости перемещения u(t)

Значение периода T, полученное с помощью Abaqus: T=0.795 с.

4. ВЫВОДЫ

В данной работе был проведен конечно-элементный расчет продольной волны в системе Abaqus, численно и аналитически найден период колебаний крайней правой точки балки, а также время пробега волны по балке.

Анализируя графики 2 – 6, можно прийти к выводу, что для получения более корректного результата u(t) с помощью Abaqus нужно брать более мелкий шаг при динамическом расчете. Однако для нахождения периода T выбранного шага вполне достаточно: относительная погрешность составила 0.25%, такой результат считаем удовлетворительным.