



УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Антонов И.Д., выпуск 2017 года

Научный руководитель, д. ф.-м. н., проф. А.В. Порубов

Данная работа посвящена изучению и разработке современных методов распределенного управления локализованными нелинейными волнами в механических системах

- Механика: постановка задачи, в которой реализуется механизм управления с обратной связью;
- Математическое моделирование: исследование работы алгоритма управления.

Исследованные уравнения:

- Уравнение синус-Гордона (модель Ф-К):

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) = 0$$

- Двойное уравнение синус-Гордона:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) + q \sin(2W) = 0$$

- Дисперсионное уравнение синус-Гордона:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) + b W_{xxxx} = 0$$

- Связанные уравнения (двухатомные кристаллы):

$$v_{tt} - c_L^2 v_{xx} = \frac{S}{\rho} (\cos u)_{xx}$$

$$u_{tt} - c_I^2 u_{xx} = \frac{1}{\mu} (Sv - P) \sin u$$

Метод управления:

Применение *метода скоростного градиента* — один из способов управления процессами, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Применим его для уравнения синус-Гордона:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) + w(x, t) = 0$$

$$w(x, t) = \alpha_1 (W - W^*) + \alpha_2 (W_t - W_t^*),$$

где W^* — целевая функция, α_1 и α_2 — параметры управления.

Существует ли механическая задача, описываемая уравнением данного вида?

Постановка механической задачи:

Рассмотрим нелинейный упругий изотропный слой (x, y) , нижняя граница $y = -h$ которого контактирует с морозным грунтом (модель Керра), а на верхнюю границу $y = h$ действуют нормальные и касательные напряжения f_N и f_T .

$$y = -h : \begin{cases} \sigma_y = \alpha_1 w + \alpha_2 w_t, \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases},$$

где w — поперечная компонента вектора смещений.

$$y = h : \begin{cases} \sigma_y = f_N, \\ \tau_{xy} = f_T \end{cases}.$$

Асимптотическое решение:

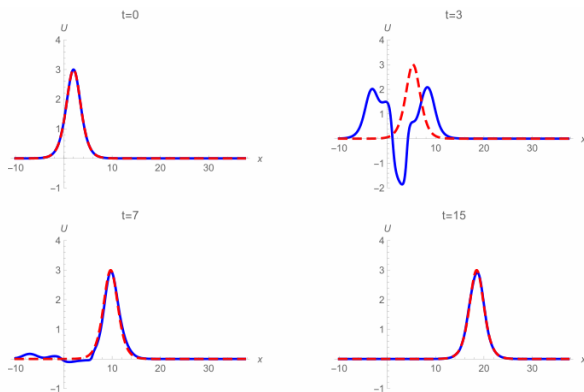
$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) = f_N - (\alpha_1 W + \alpha_2 W_t),$$

$$f_N = \alpha_1 W^* + \alpha_2 W_t^*.$$

Выбирая f_N следующим образом, задача сводится к решению уравнения синус-Гордона с управлением.

Пример результата расчета:

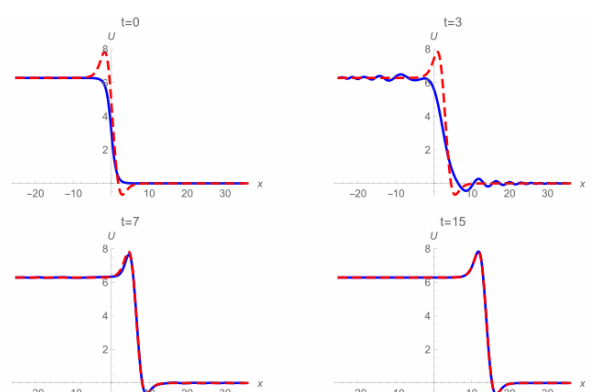
Красным цветом — цель управления, синим — численное решение



Генерация солитона для двойного уравнения синус-Гордона при $q = 2$

Пример результата расчета:

Красным цветом — цель управления, синим — численное решение



Генерация кинка для дисперсионного уравнения синус-Гордона при $b = 3$