

УДК 539.3:539.4

Локализованные тепловые возмущения в одномерном гармоническом кристалле: решения уравнения аномальной теплопроводности

А.А. Соколов¹, А.М. Кривцов^{1,2}, W.H. Müller³¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Россия² Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Россия³ Институт механики, Берлинский технический университет, Берлин, 10587, Германия

В работе найдены точные аналитические решения уравнения, описывающего аномальное распространение тепла в одномерном гармоническом кристалле. Рассмотрены случаи начального теплового возмущения прямоугольной, треугольной и пилообразной формы. Подробно исследовано решение для прямоугольного начального теплового возмущения. Показано, что затухание вблизи волнового фронта пропорционально $1/\sqrt{t}$. В месте приложения начального возмущения затухание пропорционально $1/t$. Таким образом, решение затухает медленнее вблизи волнового фронта, наблюдаются ярко выраженные максимумы, которые могут быть обнаружены экспериментально.

Ключевые слова: теплопроводность, гармонический кристалл, одномерный кристалл, локализованные возмущения, аномальная теплопроводность

Localized heat perturbation in harmonic 1D crystals: solutions for an equation of anomalous heat conduction

A.A. Sokolov¹, A.M. Krivtsov^{1,2}, and W.H. Müller³¹ Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251, Russia² Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, 199178, Russia³ Institute of Mechanics, Chair of Continuum Mechanics and Constitutive Theory, Technische Universität Berlin, Berlin, 10587, Germany

In this paper exact analytical solutions for the equation that describes anomalous heat propagation in a harmonic 1D lattices are obtained. Rectangular, triangular and sawtooth initial perturbations of the temperature field are considered. The solution for an initially rectangular temperature profile is investigated in detail. It is shown that the decay of the solution near the wavefront is proportional to $1/\sqrt{t}$. In the center of the perturbation zone the decay is proportional to $1/t$. Thus, the solution decays slower near the wavefront, leaving clearly visible peaks that can be detected experimentally.

Keywords: heat conduction, harmonic crystals, one dimensional crystals, localized excitations, anomalous heat conduction

1. Введение

В настоящее время изучение нелинейных термомеханических процессов в низкоразмерных структурах привлекает особое внимание в связи с бурным развитием нанoeлектронных устройств, разработанных на основе материалов с микроструктурой [1–4]. Достижения в области нанотехнологий позволили экспериментально подтвердить волновую природу теплопередачи и конечную скорость распространения тепловых возмущений [5, 6]. Результаты исследований подобных явлений могут послужить основой для создания универсальной теории теплопроводности, применимой как на микро-, так и на макромасштабах.

Классическое уравнение теплопроводности — параболическое уравнение в частных производных, которое описывает распределение температуры в заданной области пространства и ее изменение во времени:

$$\dot{T} = \beta T'', \quad (1)$$

где T — температура; β — коэффициент температуропроводности; точка обозначает дифференцирование по времени t ; штрих — дифференцирование по координате x . Классическое уравнение теплопроводности получено на основании закона Фурье [7, 8]:

$$q = -\kappa \nabla T, \quad (2)$$

где q — тепловой поток; κ — теплопроводность. На практике закон Фурье применяется для описания тепло-

вых процессов на макромасштабе. Однако закон Фурье предсказывает бесконечную скорость распространения сигнала, что может быть парадоксально с физической точки зрения. Изучение процессов на микроуровне, когда характерные длины пропорциональны нескольким длинам межатомных связей, выявило необходимость использования более сложных моделей теплопроводности, учитывающих конечную скорость распространения тепловых возмущений. Значительные отклонения от закона Фурье наблюдаются в одномерных кристаллических структурах [9]. Недавние экспериментальные исследования одномерных наноструктур показали зависимость теплопроводности от длины структуры [10]. Сильные отклонения от закона Фурье были экспериментально показаны для нанотрубок C и BN [11]. Тепловые аномалии, наблюдаемые в наноструктурах, могут быть использованы на практике для разработки перспективных устройств, таких как тепловой диод [4].

Аномальная природа тепловых процессов в одномерных кристаллических структурах была показана в работе [12], где рассматривалась задача о тепловом потоке между двумя тепловыми резервуарами. Множество результатов, посвященных аномальной природе распространения тепла в низкоразмерных структурах, приведено в работе [8]. Гиперболическое уравнение теплопроводности [13, 14]

$$\tau \ddot{T} + \dot{T} = \beta T'', \quad (3)$$

где τ — время релаксации, является одной из альтернатив классическому уравнению (1) для описания подобных процессов. Уравнение (3) описывает конечную скорость распространения теплового возмущения, однако возникают сложности в применении его к описанию тепловых процессов в одномерных кристаллах, т.к. не удастся однозначно определить время релаксации [15].

Перспективный подход к описанию нестационарных тепловых процессов в одномерных кристаллах предложен в [16–18]. С использованием корреляционного анализа начальная стохастическая задача для отдельных частиц была сведена к детерминированной задаче для статистических характеристик кристалла. Ее решение дало континуальное уравнение (7), описывающее аномальное распространение тепла в одномерных гармонических решетках [17]. В настоящей работе будут получены точные аналитические решения этого уравнения, в частности, для начальных тепловых возмущений в форме прямоугольного, треугольного и пилообразного импульса. Такие свойства, как затухание и асимптотика теплового фронта, будут исследованы подробно на примере прямоугольного начального возмущения. Эти результаты могут быть использованы для анализа аномального распространения тепла в более сложных структурах, таких как одномерный гармонический кристалл на упругом основании [19], двумер-

ные и трехмерные кристаллы [20]. Понимание процессов аномального распространения тепла особенно важно для анализа экспериментальных данных, которые могут быть получены в ближайшем будущем в связи с активным развитием нанотехнологий.

2. Локализованные тепловые возмущения в одномерном гармоническом кристалле

Одномерный гармонический кристалл — это простая, но очень эффективная модель для изучения аномальных тепловых эффектов. Следуя работе [17], рассмотрим бесконечный гармонический кристалл. Каждая частица массой m соединена с соседней частицей линейной пружиной жесткости C . Уравнения движения частиц:

$$\ddot{u}_k = \omega_e^2 (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}), \quad \omega_e \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{C/m}, \quad (4)$$

где u_k — отклонение от положения равновесия частицы с индексом k . Рассматриваются следующие начальные условия:

$$u_k|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_k|_{t=0} = \sigma(x) \rho_k, \quad (5)$$

где ρ_k — независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; σ — дисперсия начальных скоростей частиц, являющаяся медленно изменяющейся функцией пространственной координаты $x = ka$, где a — начальное расстояние между соседними частицами. Данные начальные условия можно интерпретировать как результат воздействия на кристалл ультракороткого лазерного импульса [21]. Введем кинетическую температуру T :

$$k_B T = m \langle \dot{u}_k \rangle^2, \quad (6)$$

где $\langle \dots \rangle$ — оператор усреднения по реализациям; k_B — постоянная Больцмана. В работе [17] для описания временной эволюции поля температуры T было получено континуальное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\ddot{T} + \dot{T}/t = c^2 T'', \quad (7)$$

где c — скорость звука в одномерном кристалле. Уравнение (7) описывает эволюцию пространственного теплового возмущения во времени. Следующие начальные условия для уравнения (7) соответствуют стохастической начальной задаче (5):

$$\dot{T}|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0(x). \quad (8)$$

Решение задачи (7), (8) может быть получено в интегральной форме [17]:

$$T(t, x) = 1/\pi \int_{-t}^t T_0(x - c\tau) / \sqrt{t^2 - \tau^2} d\tau. \quad (9)$$

Уравнение (7) — частный случай уравнения Дарбу [22]. Данный тип уравнения был исследован в связи с решениями волнового уравнения в цилиндрической системе координат в двумерном и трехмерном случаях. Однако оно не было изучено в связи с явлениями теплопроводности. Уравнение (7) внешне схоже с уравнением

гиперболической теплопроводности (3), однако имеет переменный коэффициент при слагаемом с первой производной по времени. Эта особенность возникает в связи с аномальной природой переноса тепла в одномерных структурах. Из структуры уравнения (7) может показаться, что оно имеет сингулярность. Однако это не так, поскольку уравнение (7) должно использоваться с начальными условиями (8), исключающими сингулярность. Отсутствие особенности подтверждается общим решением (9) и частными решениями, которые будут рассмотрены далее.

Данная работа посвящена нахождению точных аналитических решений уравнения (7) для случаев, когда функция начального распределения $T_0(x)$ — локализованная в пространстве функция координат x :

$$T_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -l, \\ \Phi(x), & -l < x < l, \\ 0, & x > l, \end{cases} \quad (10)$$

где $\Phi(x)$ — некоторая функция; l — половина ширины локализованного возмущения. Экспериментально подобное начальное возмущение (10) может быть получено путем сверхбыстрого нагрева лазером локализованного участка кристалла.

3. Прямоугольное возмущение

3.1. Решение

Рассмотрим прямоугольное начальное температурное распределение

$$T_0(x) = A(H(x+l) - H(x-l)), \quad (11)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases} \quad (12)$$

A — амплитуда начального температурного возмущения. Подставляя формулу (11) в решение (9), получаем

$$T(t, x) = \frac{A}{\pi} \int_{-l}^l \frac{H(x+l)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau - \frac{A}{\pi} \int_{-l}^l \frac{H(x-l)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (13)$$

Воспользуемся решением для начального возмущения в виде функции Хевисайда [17]:

$$T(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} T_S(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq -ct, \\ \frac{A}{\pi} \left(\pi - \arccos \frac{x}{ct} \right), & -ct \leq x \leq ct, \\ A, & x \geq ct. \end{cases} \quad (14)$$

Подстановка формулы (14) в интегральное представление (13) дает искомое решение. При положительных x оно имеет вид:

$$t \leq \tau_0: T(x, t) = \begin{cases} 0, & l + ct \leq x, \\ \frac{A}{\pi} \arccos \frac{x-l}{ct}, & l - ct \leq x \leq l + ct, \\ A, & 0 \leq x \leq l - ct, \end{cases} \quad (15)$$

$$t \geq \tau_0: T(x, t) = \begin{cases} 0, & ct + l \leq x, \\ \frac{A}{\pi} \arccos \frac{x-l}{ct}, & ct - l \leq x \leq ct + l, \\ \frac{A}{\pi} \left(-\arccos \frac{x+l}{ct} + \arccos \frac{x-l}{ct} \right), \\ 0 \leq x \leq ct - l, \end{cases} \quad (16)$$

где $\tau_0 = l/c$. Для отрицательных x решение может быть получено из соображений симметрии как $T(x, t) = T(-x, t)$.

Для сравнения рассмотрим решение классического уравнения теплопроводности

$$\dot{T} = \beta T'' \quad (17)$$

при тех же начальных условиях. Решение уравнения (17) для начального распределения температуры в виде функции Хевисайда имеет вид [23]:

$$T(x, t) = 1/2(1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{4\beta t})), \quad (18)$$

где $\operatorname{erf} x$ — функция ошибок Гаусса. Тогда решение задачи (8), (11), (17):

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x+l}{\sqrt{4\beta t}} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x-l}{\sqrt{4\beta t}}. \quad (19)$$

Временная эволюция решений для уравнения аномальной теплопроводности (7) представлена на рис. 1, а, для классического уравнения теплопроводности (17) — на рис. 1, б. Сравним эти решения. У решения классического уравнения наблюдается максимум в точке $x = 0$, который затухает экспоненциально. В случае аномальной теплопроводности решение затухает быстрее вбли-

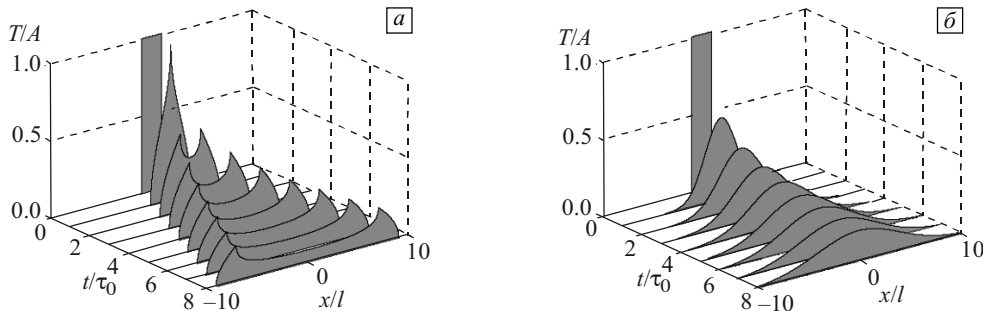


Рис. 1. Временная эволюция решений для прямоугольного теплового возмущения: аномальная (а) и классическая теплопроводность (б)

зи нуля ($x = 0$), формируя два максимума, которые распространяются в положительном и отрицательном направлениях и имеют координаты $x = -l + ct$ и $x = l - ct$.

3.2. Затухание

Рассмотрим затухание решения (16) в точке $x = 0$ при больших временах. Представим решение в виде

$$T(t, 0) = \frac{A}{\pi} \left[\pi - 2 \arccos \frac{l}{ct} \right] = 2\varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad (20)$$

где $\varepsilon = l/(ct)$ — малый параметр.

Теперь рассмотрим затухание максимумов с координатами $x = l - ct$ и $x = -l + ct$. Из формулы (16) следует $T(t, -l + ct) = T(t, l - ct) =$

$$= \frac{A}{\pi} \left[\pi - \arccos \left(\frac{2l}{ct} - 1 \right) \right] = 2\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (21)$$

Обобщая вышесказанное, получаем:

$$T(t, 0) \sim 2\varepsilon \sim 1/t, \quad (22)$$

$$T(t, -l + ct) = T(t, l - ct) \sim 2\sqrt{\varepsilon} \sim 1/\sqrt{t}.$$

Таким образом, решение затухает быстрее в области начального возмущения (пропорционально $1/t$), чем вблизи волнового фронта (пропорционально $1/\sqrt{t}$). Максимумы остаются ярко выраженными при больших временах.

3.3. Огибающая кривая для пиков

Решение (16) имеет два максимума. Они распространяются в положительном и отрицательном направлениях со скоростью c . Поскольку решение симметрично, будем рассматривать только максимум с координатами $x = ct - l$. Найдем кривую, которую описывает точка максимума по мере того, как волна движется в положительном направлении. Подставляя $t = (x+l)/c$ в формулу (21), получаем выражение для огибающей кривой:

$$T_{env}(x) = \frac{A}{\pi} \left[\pi - \arccos \left(\frac{2l}{x+l} - 1 \right) \right]. \quad (23)$$

Для любых x имеем $T(x) \leq T_{env}(|x|)$. Огибающая кривая показана на рис. 2. Выражение (23) убывает как $1/\sqrt{x}$, что согласуется с тем, что решение вблизи волнового фронта затухает со временем как $1/\sqrt{t}$ (волновой фронт движется с постоянной скоростью).

3.4. Асимптотическое поведение вблизи волнового фронта

Рассмотрим решение (16) вблизи волнового фронта при больших временах t . Положим $\xi = (-x + ct)/l$. Для $x \in [-l + ct, l + ct]$ имеем

$$T(\xi, t) = \frac{A}{\pi} \arccos \left[1 - \frac{l}{ct} (\xi + 1) \right] \sim \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{2l}{ct}} \sqrt{\xi + 1}, \quad (24)$$

где $(\xi + 1)/(ct)$ — малый параметр, используемый для разложения. Для $x \in [l - ct, -l + ct]$ имеем

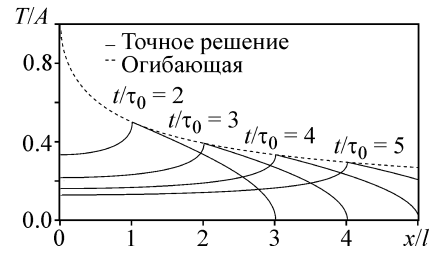


Рис. 2. Огибающая кривая для максимумов решения

$$T(\xi, t) = \frac{A}{\pi} \left(-\arccos \left[1 - \frac{l}{ct} (\xi - 1) \right] + \arccos \left[1 - \frac{l}{ct} (\xi + 1) \right] \right) \sim \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{2l}{ct}} (\sqrt{\xi + 1} - \sqrt{\xi - 1}). \quad (25)$$

Отметим, что функции (24) и (25) имеют вид

$$T = \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{2l}{ct}} F(\xi). \quad (26)$$

Следовательно, решение вблизи фронта сжимается вертикально со временем, но в остальном сохраняет свою форму. Зависимости (16), (24) и (25), соответствующие безразмерному временному параметру $t/\tau_0 = 100$, показаны на рис. 3. Асимптотические решения (24) и (25) достигают максимального значения температуры T в точке $\xi = 1$, при этом $F(\xi) = \sqrt{2}$. Заметим, что решение в этой точке остается непрерывным, но имеет излом (производная по координате терпит разрыв).

4. Треугольное начальное возмущение

Для получения решения в случае треугольного начального возмущения рассмотрим вспомогательную задачу о линейно нагретом полупространстве:

$$T_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Bx, & x \geq 0, \end{cases} \quad (27)$$

где $B = A/l$ — константа пропорциональности. Подставляя (27) в (9), получаем решение для $|x| < ct$:

$$T(x, t) = Bx \left(\frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} \right) + \frac{B}{\pi} \sqrt{t^2 c^2 - x^2} \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \quad (28)$$

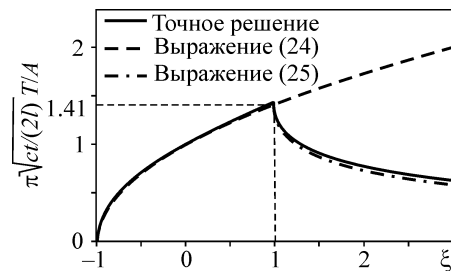


Рис. 3. Точное и приближенное решения вблизи волнового фронта (для прямоугольного теплового возмущения)

для $|x| > ct$ распределение температуры остается неизменным.

Теперь рассмотрим задачу о треугольном начальном тепловом возмущении:

$$T_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -l, \\ (x+l)B, & -l \leq x < 0, \\ (-x+l)B, & 0 \leq x < l, \\ 0, & x \geq l. \end{cases} \quad (29)$$

Очевидно, решение для начальных условий (29) представляет собой линейную комбинацию

$$T(t, x) = T_L(t, x-l) + T_L(t, x+l) - 2T_L(t, x), \quad (30)$$

где T_L — решение для линейно нагретого полупространства. Тогда для положительных x имеем:

$t \leq \tau_0/2$:

$$T(t, x) = \begin{cases} f(x+l) - 2f(x), & 0 \leq x \leq ct, \\ (-x+l)B, & ct \leq x \leq l-ct, \\ (-x+l)B + f(x+l), & l-ct \leq x \leq l+ct, \\ 0, & l+ct \leq x, \end{cases} \quad (31)$$

$\tau_0/2 \leq t \leq \tau_0$:

$$T(t, x) = \begin{cases} (x+l)B - 2f(x), & 0 \leq x \leq l-ct, \\ (x+l)B + f(x-l) - 2f(x), & l-ct \leq x \leq ct, \\ (-x+l)B + f(x-l), & ct \leq x \leq l+ct, \\ 0, & l+ct \leq x, \end{cases} \quad (32)$$

$t \geq \tau_0$:

$$T(t, x) = \begin{cases} f(x+l) + f(x-l) - 2f(x), & 0 \leq x \leq -l+ct, \\ (x+l)B + f(x-l) - 2f(x), & -l+ct \leq x \leq ct, \\ (-x+l)B + f(x-l), & ct \leq x \leq l+ct, \\ 0, & l+ct \leq x. \end{cases} \quad (33)$$

Для отрицательных x решение определяется из условия симметрии: $T(x, t) = T(-x, t)$.

График полученного решения представлен на рис. 4. В отличие от прямоугольного теплового возмущения, для треугольного возмущения решение всюду гладкое: и в начале волнового фронта, и в точке максимума.

5. Пилообразное возмущение

Рассмотрим начальное возмущение, заданное в виде пилообразного импульса:

$$T_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -l, \\ x+l, & -l \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x. \end{cases} \quad (34)$$

Начальное возмущение (34) может быть записано как линейная комбинация линейно нагретого полупространства и функции Хевисайда. Тогда решение для пилообразного возмущения (34) может быть получено как линейная комбинация решений для функции Хевисайда $T_S(x, t)$ и линейно нагретого полупространства $T_L(x, t)$:

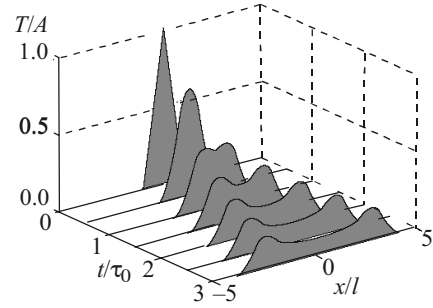


Рис. 4. Эволюция решения для треугольного теплового возмущения

$$T(t, x) = T_L(x+l, t) + T_L(x, t) + T_S(x, t), \quad (35)$$

что дает:
 $t \leq \tau_0$:

$$T(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq -l-ct, \\ f(x+l), & -l-ct \leq x \leq -l+ct, \\ Bx, & -l+ct \leq x \leq -ct, \\ Bx - f(x) - \frac{A}{\pi} \arccos \frac{x}{ct}, & -ct \leq x \leq ct, \\ 0, & x > ct, \end{cases} \quad (36)$$

$t \geq \tau_0$:

$$T(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq -ct-l, \\ f(x+l), & -ct-l \leq x \leq -ct, \\ f(x+l) - f(x) - \frac{A}{\pi} \arccos \frac{x}{ct}, & -ct \leq x \leq ct-l, \\ Bx - f(x) - \frac{A}{\pi} \arccos \frac{x}{ct}, & ct-l \leq x \leq ct, \\ 0, & ct \leq x. \end{cases} \quad (37)$$

График решения представлен на рис. 5. Тепловая волна, распространяющаяся в отрицательном направлении, имеет гладкое начало и излом с бесконечной производной в точке максимума. Напротив, тепловая волна, распространяющаяся в положительном направлении,

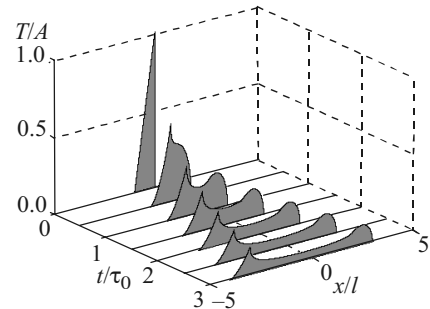


Рис. 5. Эволюция решения для пилообразного теплового возмущения

имеет вертикальную касательную в начале и гладкое поведение в точке максимума.

6. Заключение

В работе рассмотрен процесс распространения тепла в одномерном гармоническом кристалле. Исследована эволюция локализованных тепловых возмущений. Построены решения для уравнения, описывающего аномальное распространение тепла (7), выведенного в работе [17]. Получены точные аналитические решения для прямоугольного, треугольного и пилообразного начального возмущения. Показано, что, в отличие от классического уравнения теплопроводности, решения уравнения (7) имеют четко выраженный волновой фронт. Для прямоугольного теплового возмущения показано, что затухание решения вблизи волнового фронта пропорционально $1/\sqrt{t}$, а вблизи нуля пропорционально $1/t$. Таким образом, решение затухает медленнее вблизи волнового фронта, в результате чего наблюдаются четко выраженные максимумы. Решение вблизи волнового фронта описывается функцией, обратно пропорциональной корню из времени, и имеет вид

$$T = \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{2l}{ct}} F(\xi).$$

Решение для треугольного начального возмущения имеет гладкое начало и гладкое поведение в точке максимума. В случае пилообразного начального возмущения реализуется несимметричное решение: левый волновой фронт имеет гладкое начало и бесконечную производную в точке максимума; правый имеет бесконечную производную в начале, гладкое поведение и горизонтальную касательную в точке максимума.

Полученные решения демонстрируют волновую природу и степенное затухание. Это отличает полученные решения от решений классического уравнения теплопроводности (диффузионный характер, экспоненциальное затухание) и гиперболического уравнения теплопроводности (волновой характер, экспоненциальное затухание). Свойства полученных решений могут быть использованы для анализа экспериментальных данных и выбора подходящей модели описания процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 14-11-00599).

Литература

1. Zhang X., Luo D., Cui G., Wang Y., Huang B. Construction of logic gate based on multi-channel carbon nanotube field-effect transistors // Proc. of III Int. Conf. Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, Aug. 2011. – 2011. – V. 2. – P. 94–97.

2. Chen Ch., Jin T., Wei L., Li Y., Liu X., Wang Y., Zhang L., Liao Ch., Hu N., Song Ch., Zhang Y. High-work-function metal/carbon nanotube/low-work-function metal hybrid-junction photovoltaic device // NPG Asia Mater. – 2015. – V. 7. – P. e220.

3. Гольдштейн П.В., Морозов Н.Ф. Механика деформирования и разрушения наноматериалов и нанотехнологии // Физ. мезомех. – 2007. – Т. 10. – № 5. – С. 17–30.

4. Li B., Wang L., Casati G. Thermal diode: Rectification of heat flux // Phys. Rev. Lett. – 2004. – V. 93. – P. 184301.

5. Brown E., Hao L., Gallop J.C., Macfarlane J.C. Ballistic thermal and electrical conductance measurements on individual multiwall carbon nanotubes // Appl. Phys. Lett. – 2005. – V. 87. – No. 2. – P. 023107.

6. Wang Zh., Carter J.A., Lagutchev A., KanKoh Y., Seong N.-H., Cahill D.G., Dlott D.D. Ultrafast flash thermal conductance of molecular chains // Science. – 2007. – V. 317. – No. 5839. – P. 787–790.

7. Cannon J.R. The One-Dimensional Heat Equation. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

8. Lepri S., Livi R., Politi A. Thermal Conduction in Classical Low-Dimensional Lattices // Phys. Rep. – 2003. – P. 1–80.

9. Hsiao T.-K., Chang H.-K., Liou Sz-Ch., Chu M.-W., Lee Si-Ch., Chang Ch.-W. Observation of room-temperature ballistic thermal conduction persisting over 8.3 μm in SiGe nanowires // Nat. Nano. – 2013. – V. 8. – No. 7. – P. 534–538.

10. Zhang H., Hua Ch., Ding D., Minnich A.J. Length dependent thermal conductivity measurements yield phonon mean free path spectra in nanostructures // Sci. Rep. – 2015. – V. 5. – P. 9121.

11. Chang C.W., Okawa D., Garcia H., Majumdar A., Zettl A. Breakdown of Fourier's law in nanotube thermal conductors // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 101. – P. 075903.

12. Rieder Z., Lebowitz J.L., Lieb E. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state // J. Math. Phys. – 1967. – V. 8. – No. 5. – P. 1073–1078.

13. Cattaneo C. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee // Comptes Rendus. – 1958. – V. 247. – P. 431–433.

14. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // Comp. Rendus. – 1958. – V. 246. – P. 3154–3155.

15. Gendelman O.V., Savin A.V. Nonstationary heat conduction in one-dimensional chains with conserved momentum // Phys. Rev. E. – 2010. – V. 81. – P. 020103.

16. Кривцов А.М. Колебания энергий в одномерном кристалле // ДАН. – 2014. – Т. 458. – № 3. – С. 279–281.

17. Кривцов А.М. Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле // ДАН. – 2015. – Т. 464. – № 2. – С. 162–166.

18. Krivtsov A.M. On unsteady heat conduction in a harmonic crystal // ArXiv preprint. – 2015. – P. 1509.02506.

19. Бабенков М.Б., Кривцов А.М., Цветков Д.В. Колебания энергий в одномерном гармоническом кристалле на упругом основании // Физ. мезомех. – 2016. – Т. 19. – № 1. – С. 60–67.

20. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. An analytical description of transient thermal processes in harmonic crystals // Phys. Solid State. – 2017. – V. 59. – No. 5. – P. 1051–1062.

21. Poletkin K.V., Gurzadyan G.G., Shang J., Kulish V. Ultrafast heat transfer on nanoscale in thin gold films // Appl. Phys. B. – 2012. – V. 107. – No. 1. – P. 13–143.

22. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. – Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2016.

23. Muller I., Muller W.H. Fundamentals of Thermodynamics and Applications with Historical Annotations and Many Citations from Avogadro to Zermelo. – Berlin: Springer, 2011.

Поступила в редакцию
14.02.2017 г.

Сведения об авторах

Соколов Алексей Андреевич, студ. СПбПУ, sokolovalexey1@gmail.com
Кривцов Антон Мирославович, д.ф.-м.н., зав. каф. СПбПУ, зав. каф. ИПМаш РАН, akrivtsov@bk.ru
Müller Wolfgang H., Prof. Dr., Berlin University of Technology, whmueller1000@gmail.com