Курсовой проект

Исследования колебаний балки

Выполнил

Студент группы 33604

Марков Николай

Проверил:

Ле-Захаров С.А

Часть1. Собственные колебания

Постановка задачи.

Решить двумерную задачу нахождения собственных частот и собственных форм упругого стержня, прикрепленного к параллельно соединенным пружине и демпферу, которые крепятся к неподвижной стенке.

Материал балки, коэффициент жесткости пружины и демпфера имеют следующие свойства:

Плотность, Кг/м^3	Модуль Юнга, Па	Коэфф. Пуассона	Коэфф. жесткости пружины, Н/м	Коэфф. демпфирования
2690	7e10	0.34	1e7	100

Решение задачи.

Для решения данной задачи была создана модель балки

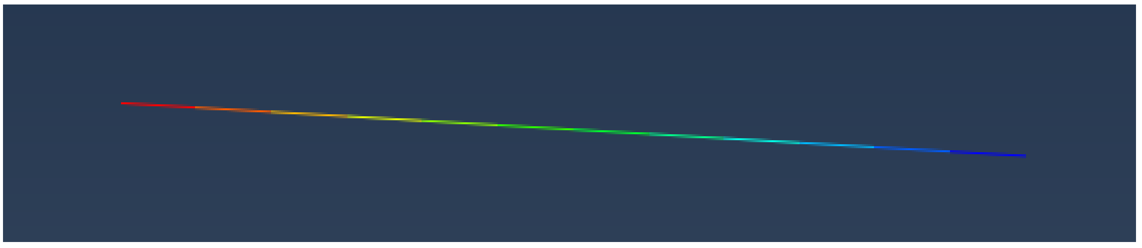
Рисунок 1. Форма балки

Рисунок 2

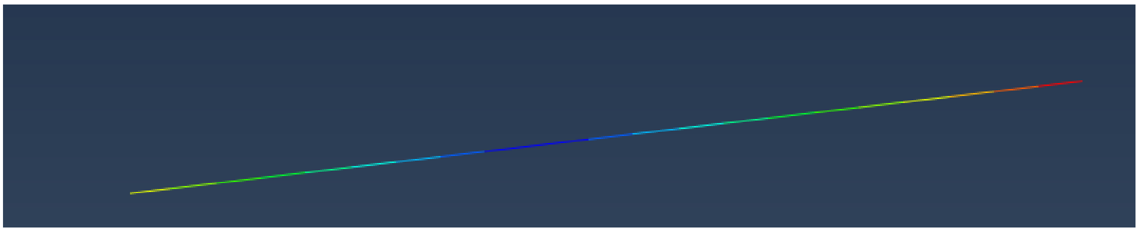
При создании шага выбран пункт для нахождения собственных частот и собственных форм и выбраны параметры для получения результатов с частотой до 2e8 (CYCLES/TIME).

Результаты.

В результате решения данной задачи было получено 153 различных результата. Ниже представлены некоторые из них:



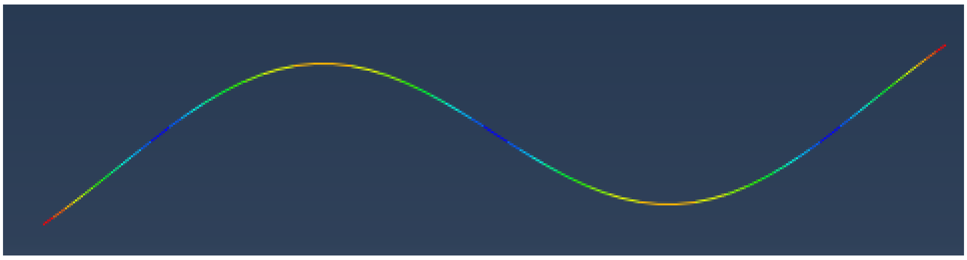
форма 1. Риунок 2.



форма 2. Риунок 3.

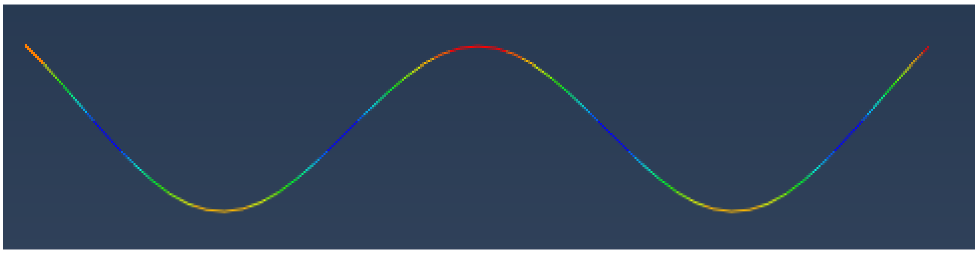
форма 3. Рирунок 4.

форма 4. Рирунок 5.



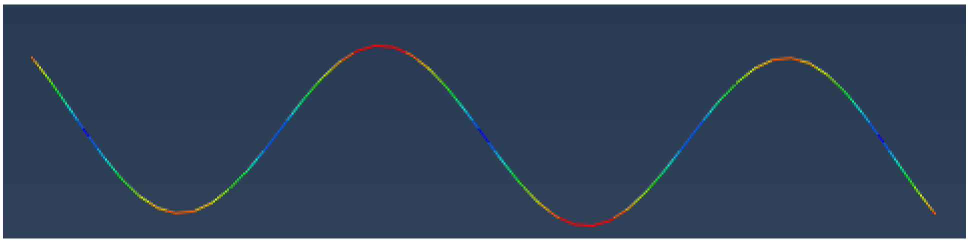
форма 5. Рирунок 6.

форма 6. Рирунок 7.

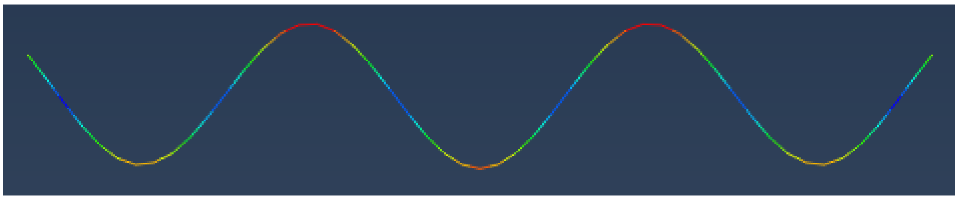


форма 7. Рирунок 8.

форма 8. Рирунок 9.



форма 9. Рирунок 10.



форма 10. Риунок 11.

ФормаNº	Собственное число	Собственная частота (1/секунда)
1	8.14907E-09	1.43673E-05
2	6.62985E-08	4.09800E-05
3	825.93	4.5739
4	1.97179E+06	223.49
5	1.02495E+07	509.53
6	1.26804E+07	566.74
7	2.73690E+07	832.63
8	5.06667E+07	1132.9
9	5.23652E+07	1151.7
10	8.34348E+07	1453.8

Анализ результатов.

Представлены первые 10 собственных форм. С увеличением частоты число собственных форм остается неизменным.

Часть2. Продольные колебания

Постановка задачи.

В данной работе рассматривается колебание упругого стержня, прикрепленного к параллельно соединенным пружине и демпферу, которые крепятся к неподвижной стенке. В недеформированном состоянии балка имеет длину l.

Уравнение колебания стержня:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Имеем два граничных и два начальных условия:

$\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=l} = 0$ (2)

$\frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = -\frac{1}{ES}\left(kU|_{x=0} + \beta\frac{\partial U}{\partial t}|_{x=0}\right)$ (3)

$U|_{t=0} = \frac{\Delta l}{l}x$ (4)

$\frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0$ (5)

Необходимо найти зависимость $U(x, t)$, т.е. зависимость смещения частей балки от времени.

Решение задачи.

Для численного решения данной задачи используется неявный метод Эйлера. Поэтому необходимо записать исходное уравнение и начальные условия в дискретном виде. Для этого разобьем исходный стержень на N-1 часть. Тогда уравнения примут дискретный вид:

$$\frac{U_i^j - 2U_{i-1}^j + U_{i-2}^j}{\Delta x^2} = \frac{U_i^j - 2U_i^{j-1} + U_i^{j-2}}{\Delta t^2} \quad (\tilde{1})$$

$$\frac{U_N^j - U_{N-1}^j}{\Delta x} = 0 \quad (\tilde{2})$$

$$\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta x} = -\frac{1}{ES}\left(kU_0^j + \beta\,\frac{U_1^j - U_0^j}{\Delta t}\right) \quad (\tilde{3})$$

$$U_i^0 = \frac{\Delta l}{l} x \quad (\tilde{4})$$

$$\frac{U_i^1 - U_i^0}{\Delta t} = 0 \quad (\tilde{5})$$

Видим, что при каждом закрепленном t начиная с t_3 имеем СЛАУ вида A*U = B, где

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{k}{ES} + \frac{\beta}{ES\Delta t}\right) & \frac{1}{\Delta x} + \frac{\beta}{ES\Delta t} & 0 & & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^2} & -\frac{2}{\Delta x^2} & & \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta t^2} & & \\ . & \cdots & . & . & & \\ & & . & & & \\ & & . & & & \end{pmatrix} = A$$

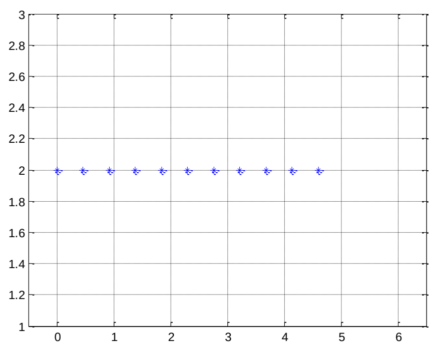
Решение уравнения с трехдиагональной матрицей проводим методом прогонки. Решением уравнения и будет искомая зависимость U(x,t).

Результаты.

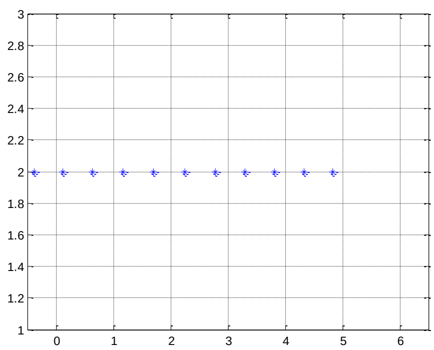
Результаты представлены для балки длинной l=5, и числе разбиений N = 11. Произведение модуля Юнга на площадь поперечного сечения ES = 7e11, коэффициент жесткости пружины k=1e7,

Коэффициент демпфирования b=1e2.

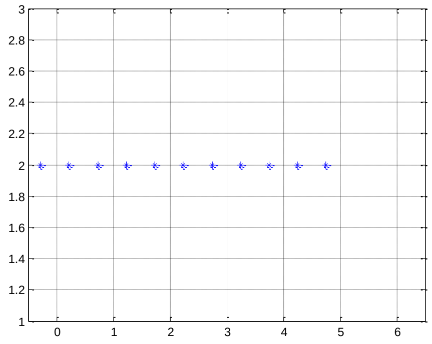
t = 0



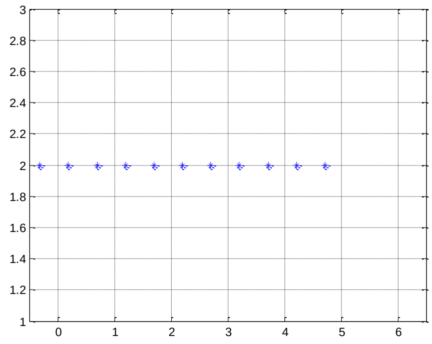
t = 10



t = 15

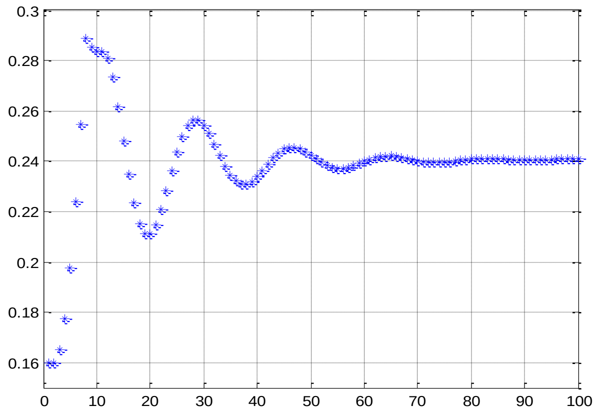


t = 25



Видим, что со временем происходит затухание колебаний, что вызвано наличием демпфера.

Рассмотрим теперь перемещение со временем центральной точки стержня с течением времени.



На данном графики отчетливо видно, что происходит затухание колебания, и точка, находящаяся в в центре в недеформированном состоянии находится в центре.

Выводы.

Колебание данной системы затухает экспоненциально с течением времени, что вызывано наличием демпфирования. При этом система переходит в недеформированное состояние.