МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф.
_____ А. М. Кривцов
« » _____ 2017 г.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени

МАГИСТРА

Тема: Исследование зависимости коэффициента сдвига от параметров сечения стержня

Направление: 01.04.03 - Механика и математическое моделирование

Выполнила: студентка гр. 63604/1 _____ А. Н. Прокопенко

Руководитель: д-р ф.-м.н. _____ Е. А. Иванова

Санкт-Петербург
2017

Содержание

1 Введение **3**

2 Сводка основных уравнений теории стержней **5**

3 Методы определения упругих модулей **5**

4 Постановка задачи для определения коэффициента сдвига **7**

5 Результаты для сплошных форм сечений **9**

6 Сравнение решений задачи для балки Бернулли-Эйлера и Тимошенко **15**

7 Влияние отверстий в сечении на коэффициент сдвига ($J_x = J_y$) **17**

8 Влияние изменения коэффициента Пуассона на коэффициент сдвига **23**

8.1 Коэффициент сдвига при изменении коэффициента Пуассона и модуля сдвига 23

8.2 Коэффициент сдвига при изменении коэффициента Пуассона и модуля Юнга 25

9 Влияние отверстий в сечении на коэффициент сдвига ($J_x \neq J_y$) **30**

10 Основные результаты **33**

1 Введение

Модули жёсткости на растяжение, изгиб и кручение хорошо известны и приведены во всех справочниках [1]. Интерес представляет модуль жёсткости на поперечный сдвиг. Существует формула для коэффициента сдвига $A = kGS$. Зависимость от G и S вопроса не вызывает, интерес представляет значение k и его нахождение. Существует два метода вывода основных уравнений тонких стержней: асимптотический и прямой. Асимптотический метод основан на уравнениях трехмерной теории и ряде априорных предположений относительно внутренней структуры стержня и характера поведения решения. Если коэффициент k выводится асимптотическим методом, то он получается равным единице. Прямой метод основан на непосредственном использовании фундаментальных законов механики. Этот метод имеет более широкую область применимости, поскольку при выводе основных уравнений не делается никаких предположений о характере поведения решения, а все особенности внутренней структуры стержня содержатся в тензорах жесткости. При прямом методе коэффициент k может принимать различные значения.

Были предложены различные искусственные приемы отыскания корректирующего коэффициента k в уточненных теориях, основанных на сдвиговой модели Тимошенко. Все эти приемы являются приближенными. При построении уточненных уравнений, как математических аппроксимаций краевой задачи динамической теории упругости, не требуется введения каких–либо искусственных величин. Поэтому из сравнения математических аппроксимаций с соответствующими уточненными теориями, содержащими искусственные величины, можно найти формулы для корректирующих коэффициентов, иногда в явном виде.

В работах Ю. М. Гаврилива (1960-1968) [2] изучается влияние деформаций сдвига на прогибы балок при статических нагрузках. Это влияние можно характеризовать коэффициентом сдвига, который зависит от формы поперечного сечения, коэффициента Пуассона и вида нагружения (сюда можно отнести и граничные условия). Для стержня прямоугольного поперечного сечения конечной длины, нагруженной сосредоточенной силой, следует формула для коэффициента сдвига:

$$k = \frac{2.4 + 1.5\nu}{2(1+\nu)} \tag{1}$$

Здесь ν — число Пуассона. Д. Гросс (1969) построил точное решение в рамках плоского напряженного состояния для балки–стенки со свободно поворачивающимися концами. С помощью этого решения вычислен коэффициент сдвига k по следующей формуле:

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12 + 11\nu} \tag{2}$$

В следующей работе Д. Гросс (1971) на основе уравнений плоского напряженного состояния построил точные решения для гармонических колебаний бесконечной ортотропной балки-стенки, характеризуемой продольным E_x, поперечным E_y и сдвиговым G_{xy} модулями упругости. В случае несимметричных относительно срединной поверхности колебаний выведено и исследуется дисперсионной уравнение в предельных случая длинных волн и коротких (волны Релея). Показано,

что дисперсия волн сильно зависит от отношения $\frac{E_x}{G_{xy}}$. Коэффициент сдвига k определяется по формуле (при больших длинах волн):

$$k = \frac{5}{6 - \frac{\nu_{xy} G_{xy}}{E}} \tag{3}$$

Из формулы (4) при $\frac{E_x}{E_y} = 1$, $\frac{E_x}{G_{xy}} = 2(1+\nu)$, $\nu_{xy} = \nu$ (изотропный материал) следует формула (3).

В 1951 году в теории оболочек для коэффициента сдвига было получено значение:

$$k = \frac{\pi^2}{12}, \tag{4}$$

которое впервые было предложено Р. Миндлиным [3] и мало отличается от известного значения Э. Рейсснера:

$$k = \frac{5}{6} \tag{5}$$

Также в теории оболочек П.А.Жилиным в [4] было получено следующее значение для коэффициента сдвига:

$$k = \frac{5}{6 - \nu} \tag{6}$$

2 Сводка основных уравнений теории стержней

Уравнения движения прямолинейных стержней имеют вид:

$$\mathbf{T}' + \rho_0 \mathbf{f}(s) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \rho_0 \mathbf{m}(s) = \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{T}$ — сила в сечении стержня , $\mathbf{M}$ — момент в сечении стержня, ρ_0 — удельная плотность стержня, $\mathbf{t}$ — орт касательной к оси стержня, $\mathbf{f}(s)$ — распределенная внешняя сила, $\mathbf{m}(s)$ — распределенный внешний момент, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\boldsymbol{\psi}$ — вектор углов поворота, $\boldsymbol{\Theta}_2$ — тензор инерции.

Соотношения упругости имеют вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\kappa}, \tag{8}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ — тензоры упругости, которые имеют вид:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{ii} + A_y \mathbf{jj} + A_z \mathbf{kk}, \qquad \mathbf{C} = C_x \mathbf{ii} + C_y \mathbf{jj} + C_z \mathbf{kk} \tag{9}$$

Линейные векторы деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ имеют вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\psi}, \qquad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\psi}' \tag{10}$$

3 Методы определения упругих модулей

Существует два метода определения упругих модулей стержней. Оба эти метода основаны на сравнении результатов решения трехмерных задач с результатами решения соответствующих задач теории стержней. Первый метод основан на использовании динамических тестовых задач и заключается в сравнении собственных частот. Второй метод основан на решении статических задач. При этом сравниваются величины, характеризующие напряженно-деформируемое состояние. Далее будем сравнивать кинематические характеристики. В результате решения трехмерной задачи получаем распределение перемещений по сечению стержня. Существуют различные подходы к определению соотношений между перемещениями трехмерного тела и перемещением и поворотом сечения стержня. Далее будет использоваться подход, принятый в работе [5], согласно которому считается, что количество движения и кинетический момент стержня и трехмерного тела (прообраза) совпадают между собой. Проинтегрировав данное соотношение по времени, придем к следующим уравнениям:

$$\rho_0 \mathbf{u} = \int_S \rho \mathbf{u}^{(3)} dxdy, \qquad \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \boldsymbol{\psi} = \int_S \rho \mathbf{a} \times \mathbf{u}^{(3)} dxdy, \tag{11}$$

где ρ — объемная плотность массы материала стержня, $\mathbf{u}^{(3)}$ — вектор смещений точек трехмерной среды, $\mathbf{a}$ — вектор положения точек поперечного сечения, S — площадь поперечного сечения.

Для оценки точности данного метода рассмотрим тестовую задачу — определение модуля на растяжение.

Рис. 1: Растяжение срежня

Рассматривается стержень длиной l. Один конец стержня жестко закреплен. На другой конец стержня действует продольная сила $\mathbf{N} = N_0\mathbf{k}$. Решение этой задачи имеет вид:

$$\mathbf{u}(z) = \frac{N_0 z}{A_z}\mathbf{k} \tag{12}$$

Решение соответствующей задачи по трехмерной теории строилось в пакете Abaqus. Рассматривался стержень длиной $l = 1$м. Поперечное сечение стержня — квадрат площадью $S = 0,0036$м^2. Материал стержня — сталь (модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па). Приложенная сила $N = 72$Н. Вычисления проводились при количестве элементов $n = 2758$. В результате решения было найденно $\mathbf{u}^{(3)}(x, y, z) \approx u^3(z)\mathbf{k}$. С учетом того, что $\rho_0 = \rho S$ из формулы (11) и (12) получаем

$$A_z = \frac{N_0 z}{u^{(3)}(z)} \tag{13}$$

Хорошо известна формула для модуля жесткости [6]:

$$A_{z_0} = ES \tag{14}$$

Сравним результаты вычислений модуля жесткости по известной формуле (14) и по полученной (13). Для этого введем относительную погрешность измерений δ:

$$\delta = \frac{A_z - A_{z_0}}{A_{z_0}} \cdot 100\% \tag{15}$$

На Рис. 2 представлен график относительной погрешности как функция от безразмерной координаты сечения стержня $\xi = z/l$:

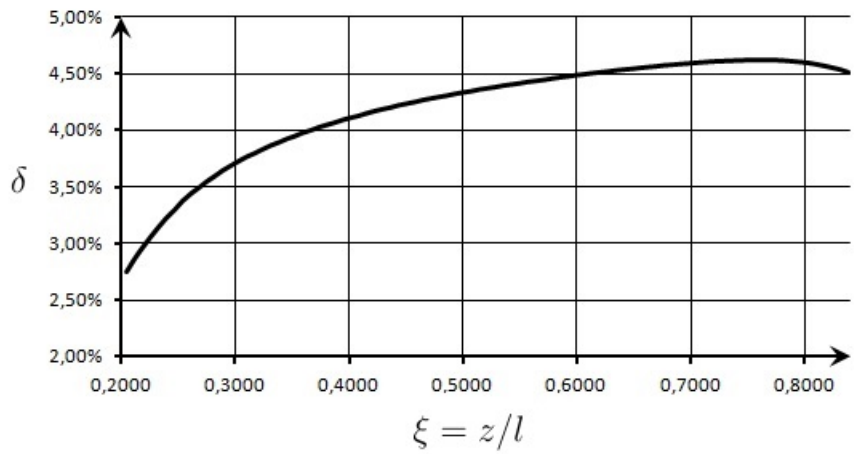


Рис. 2: Относительная погрешность величин A_z и A_{z_0}.

Согласно принципу Сен-Венана [7] не будем учитывать погрешность измерений на концах стержня. Тогда видим, что кривая, характеризующая относительную погрешность, меняет своё значение в пределах одного процента.

4 Постановка задачи для определения коэффициента сдвига

Рассматривается задача изгиба стерженя длинной l (см. Рис. 3). Один конец жестко закреплен, на втором конце действует поперечная сила $\mathbf{N} = N_0\mathbf{i}$. Решение будем искать в виде: $\mathbf{u} = -u\mathbf{i}, \boldsymbol{\psi} = \psi\mathbf{j}$. Имеем:

$$\psi_1 = \frac{N_0}{C_y} z \left(l - \frac{z}{2}\right), \qquad u_1 = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y}\left(z^2 l - \frac{z^3}{3}\right) \tag{16}$$

Здесь u_1 — перемещение стержня со свободным концом, ψ_1 — угол поворота сечения стержня со свободным концом, A_x — модуль жесткости на поперечный сдвиг, C_y — модуль жесткости на изгиб [8].

Решение (16) содержит два неизвестных модуля упругости. Для их нахождения существует следующие способы:

1. Считаем изгибную жесткость известной величиной. Подставляем перемещение в первую формулу (11) и находим жесткость на сдвиг.

2. Подставляем выражения (16) в уравнения (11) и получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными. В результате находятся жесткость на сдвиг и изгибная жесткость.

Но при вычислении может возникнуть проблема. В формуле для перемещения слагаемое содержащее жесткость на сдвиг является поправочным. Поэтому для его определения задача должна быть решена с высокой точность. Формула (11) содержит интегралы от перемещений, которые находятся в результате решения трехмерной задачи. В конечно-элементном пакете мы находим набор дискретных величин. Значит в формуле (11) нужно вычислять римановы суммы, а это вносит

погрешность. Модуль жесткости на кручение C_y также вычисляется с погрешностью.

При решении этой задачи нужно раскрыть векторное произведение в правой части формулы (11). Из-за большого количества узлов погрешность будет большой. Чтобы избежать эту проблему нужно решить две задачи: изгиб стержня со свободным концом и с заделкой, как показано на Рис 3.

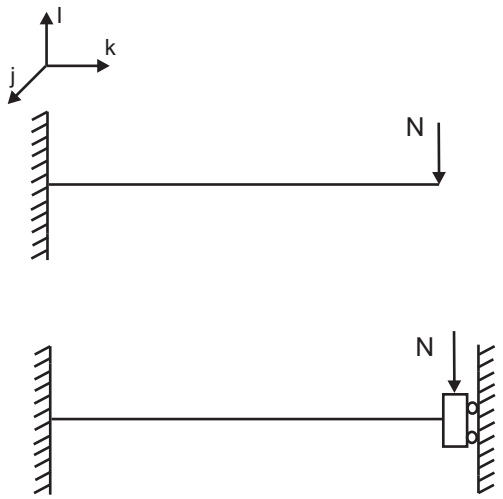


Рис. 3: Постановка задачи для изгиба стержня

Угол поворота сечения и перемещение для стержня с двумя заделками:

$$\psi_2 = \frac{N_0 z}{2C_y}(z - l) \qquad u_2 = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y}\left(\frac{z^2 l}{2} - \frac{z^3}{3}\right), \tag{17}$$

где u_2 — перемещение стержня с заделкой с двух сторон, ψ_2 — угол закручивания стержня с заделкой с двух сторон.

Переходим к относительной координате сечения, делая замену $\xi = z/l$. Получаем итоговую формулу для модуля жесткости на поперечный сдвиг:

$$A_x = \frac{3\xi l N_0}{2u_2(3 - \xi) - u_1(3 - 2\xi)} \tag{18}$$

Перейдем от найденного модуля жесткости на поперечный сдвиг к коэффициенту сдвига:

$$k = \frac{A_x}{GS} \tag{19}$$

Здесь G — модуль сдвига, S — площадь поперечного сечения.

5 Результаты для сплошных форм сечений

Задача была смоделирована в программном конечно-элементном комплексе Abaqus для нахождения численных значений коэффициента сдвига.

Рассматривается стержени длины $l = 1$м с одинаковой площадью сечения для всех форм равной 0,1м^2. Общее количество элементов, когда в сечении квадрат: $n = 90000$, когда прямоугольники: $n = 96000$, когда эллипсы $n = 115000$. Материал стержня: модуль Юнга $E = 1,14 \cdot 10^{11}$ Па, число Пуассона равно 0,31. Приложенная сила $N = 1$МН.

Введём в рассмотрение следующие величины: ξ — это позиция сечения от жесткого закрепления, $a = u_1(3 - 2r)$, $b = 2u_2(3 - r)$, c — это весь знаменатель в формуле (18) для A_y.

Площадь сечения, м^2	ξ, м	Коэф. сдвига	a $\cdot 10^3$	b $\cdot 10^3$	c $\cdot 10^3$
0,01	0,4	0,9139	160,554	163,572	3,0175
	0,6	0,9525	272,684	277,027	4,3429
	0,9	1,0298	357,799	363,825	6,0258
0,04	0,4	0,8895	10,3555	11,1306	0,7751
	0,6	0,9067	17,4290	18,5696	1,1407
	0,9	0,9406	22,7438	24,3931	1,6492
0,1	0,4	0,8838	1,7777	2,0897	0,3120
	0,6	0,8928	2,9348	3,3981	0,4633
	0,9	0,9132	3,7839	4,4635	0,6795
0,25	0,4	0,8839	0,3361	0,4609	0,1248
	0,6	0,8869	0,5324	0,7189	0,1866
	0,9	0,8991	0,6682	0,9442	0,2761

Таблица 1: Зависимость коэффициента сдвига от площади сечения для квадрата.

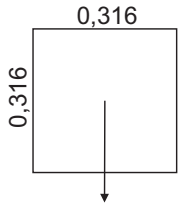
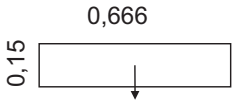
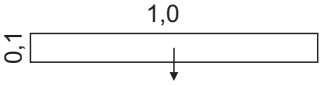
Форма сечения, м	ξ, м	Коэф. сдвига	a $\cdot 10^3$	b $\cdot 10^3$	c $\cdot 10^3$
	0,4	0,8838	1,7777	2,0897	0,3121
	0,6	0,8928	2,9348	3,3981	0,46334
	0,9	0,9132	3,7839	4,4635	0,6795
	0,4	0,9612	6,9004	7,1873	0,2869
	0,6	1,1042	11,7320	12,1067	0,3747
	0,9	1,3446	15,4402	15,9017	0,4615
	0,4	0,8825	0,5831	0,8957	0,3125
	0,6	0,8778	0,8852	1,3565	0,4713
	0,9	0,8803	1,0779	1,7828	0,7049
	0,4	0,9868	14,9952	15,2747	0,2795
	0,6	1,3677	25,5789	25,8814	0,3025
	0,9	2,6138	33,7516	33,9890	0,2374
	0,4	0,8926	0,3864	0,6954	0,3089
	0,6	0,8840	0,5509	1,0189	0,4679
	0,9	0,8864	0,6399	1,3400	0,7001

Таблица 2: Зависимость коэффициента сдвига от формы сечения.

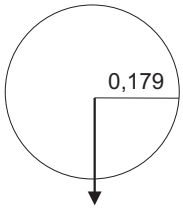
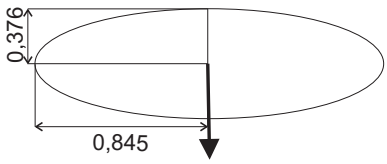
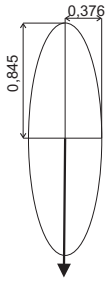
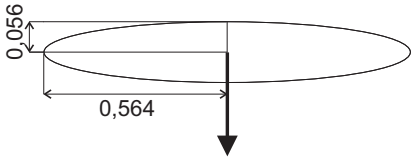
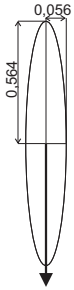
Форма сечения, м	ξ, м	Коэф. сдвига	a $\cdot 10^3$	b $\cdot 10^3$	c $\cdot 10^3$
	0,4	0,9188	1,8242	2,1243	0,3002
	0,6	0,9286	3,0156	3,4611	0,4455
	0,9	0,9471	3,8926	4,5478	0,6552
	0,4	0,7168	7,1942	7,57895	0,3848
	0,6	0,7958	12,3095	12,8293	0,5198
	0,9	0,9775	16,2558	16,8906	0,6348
	0,4	0,9341	0,5896	0,8848	0,2953
	0,6	0,9322	0,9011	1,3449	0,4438
	0,9	0,9357	1,1030	1,7662	0,6631
	0,4	0,4246	15,4172	16,0669	0,6496
	0,6	0,5140	26,6013	27,4061	0,8048
	0,9	0,8520	35,3432	36,0715	0,7283
	0,4	0,9421	0,3825	0,6752	0,2927
	0,6	0,9357	0,5487	0,9899	0,4413
	0,9	0,9404	0,6403	1,3001	0,6598

Таблица 3: Зависимость коэффициента сдвига от формы сечения.

По таблицам видно, что в ряде случаев коэффициент сдвига незначительно зависит от положения сечения, а в некоторых случаях зависит очень существенно. Проанализируем ситуацию подробнее, сравнив значения величин a, b и c, приведенные в последних трех столбцах таблиц. В тех случаях, когда значение коэффициента сдвига слабо зависит от положения сечения, значение величины c сравнимо со значениями величин a и b. В тех случаях, когда коэффициент сдвига существенно зависит от положения сечения, значение величины c оказывается на два порядка меньше значений величин a и b. Получается, что знаменатель формулы (18) содержит малые разности больших чисел, а вследствие этого возникают большие вычислительные погрешности. Поэтому, данные результаты нельзя считать достоверными и их следует исключить из рассмотрения.

Таким образом, при анализе результатов не принимаются во внимание следующие случаи:

1. В таблице 1, когда в сечении стержня квадрат с площадью сечения $0,01$ и $0,04$ м^2.

2. В таблице 2, когда в сечении прямоугольник и поперечная сила приложена вдоль меньшей стороны.

3. В таблице 3, когда в сечении эллипс и поперечная сила приложена вдоль меньшей стороны.

Введем погрешность η [9]:

$$\eta = \frac{k_\xi - k_{med}}{k_{med}} \cdot 100\% \tag{20}$$

Здесь k_ξ — значение коэффициента сдвига для ξ-ой позиции сечения от жесткого закрепления и определенной формы сечения, k_{med} — среднее значение коэффициента сдвига для определенной формы сечения.

Вычислим среднее значение коэффициента сдвига и максимальное значение погрешности η_{max} для соответствующих форм сечения.

Площадь сечения, м^2	0,1	0,25
k_{med}	0,8966	0,8899
η_{max}, %	1,85	1,03

Таблица 4: Средние значения и погрешность изменения коэффициента сдвига для квадратной формы сечения.

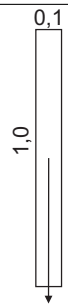
Форма сечения, м		
k_{med}	0,8802	0,8877
η_{max}, %	0,27	0,55

Таблица 5: Средние значения и погрешность изменения коэффициента сдвига для прямоугольной формы сечения.

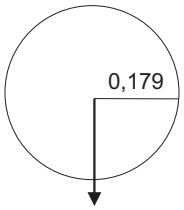
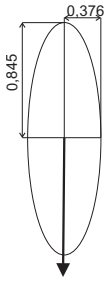
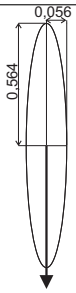
Форма сечения, м			
k_{med}	0,9315	0,9340	0,9394
η_{max}, %	1,68	0,19	0,39

Таблица 6: Средние значения и погрешность изменения коэффициента сдвига для эллипсоидальной формы сечения.

Получается, изменение коэффициента сдвига при изменении положения сечения не превышает 2%.

Посчитаем $k_{med,all}$ — среднее арифметическое всех значений k_{med} из Таблиц 4-6:

$$k_{med,all} = 0,9085 \tag{21}$$

По аналогии с формулой (21), введем формулу для погрешности η_*:

$$\eta_* = \frac{k_{med} - k_{med,all}}{k_{med,all}} \cdot 100\% \tag{22}$$

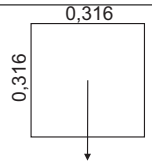
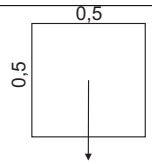
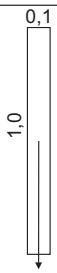
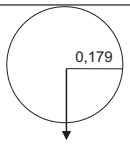
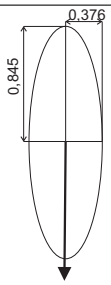
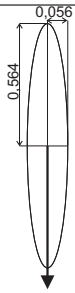
Форма сечения, м	k_{med}	η_*, %
	0,8966	1,31
	0,8899	2,05
	0,8802	3,12
	0,8877	2,29
	0,9315	2,53
	0,9340	2,81
	0,9394	3,40

Таблица 7: Коэффициенты сдвига для разных форм сечения и их отклонение от среднего значения .

По результатам Таблицы 7, получается, что погрешность определения $k_{med,all}$ не превышает 4%.

Поскольку зависимость коэффициента сдвига от формы (площади) сечения сравнима с зависимостью от положения сечения, можно сделать вывод, что в пределах точности численного эксперимента коэффициент сдвига не зависит ни от формы, ни от площади сечения.

Сравним $k_{med,all}$ с значениями для коэффициента сдвига, полученных по формулам приведенным во введении.

Автор	Значение k	Погрешность, %
Ю.М. Гаврилив	1,0935	20,36
Д.Гросс	0,8501	6,43
Р.Миндлин	0,8216	9,57
Э.Рейсснер	0,8333	8,28
П.А. Жилин	0,8787	3,28

Таблица 8: Значение коэффициента сдвига, полученного разными методами

Получается, что согласно таблице 8, наши численные результы лучше всего совпадают с формулой П.А. Жилина (6), которая была получена для теории оболочек. Значит формула (6) будет верна и для стержней.

6 Сравнение решений задачи для балки Бернулли-Эйлера и Тимошенко

Рассматривается задача, изображенная на Рис. 3, когда один конец жестко закреплен, а второй конец свободный и находится под действием поперечной силы. Полученное решение (16) — есть решение задачи в случае балки Тимошенко [10], где $C_y = EJ$.

Для балки Бернулли-Эйлера [11] будем иметь решение:

$$u = \frac{N_0 z^2}{2EJ}\left(l - \frac{z}{3}\right) \tag{23}$$

Вычислим абсолютную погрешность решений μ как разницу решений (16) и (23). Будем иметь:

$$\mu = \frac{N_0}{A_x} z \tag{24}$$

Рассмотрим случай, когда в сечении прямоугольник со сторонами $0,15$ на $0,667$. Результаты численного решения данной задачи представлены в таблице 2. Среднее значение коэффициента сдвига будет равно $0,88$. Тогда модуль жесткости на поперечный сдвиг будет равен, с учетом формулы (19) и что $G = 4,35 \cdot 10^{10}$: $A_x = 3,829 \cdot 10^{10}$.

Изобразим на графиках для данного случая решения Бернулли-Эйлера и Тимошенко, а также погрешность этих решений μ, в зависимости от позиции сечения.

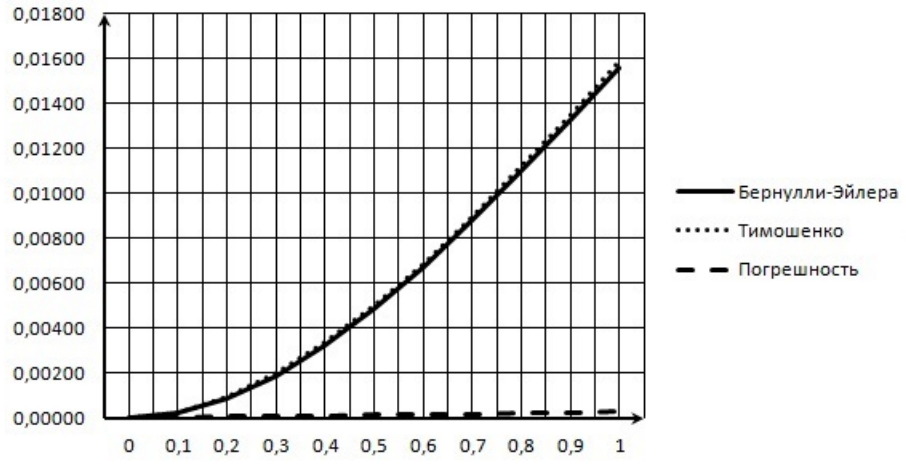


Рис. 4: Сила приложена вдоль меньшей стороны

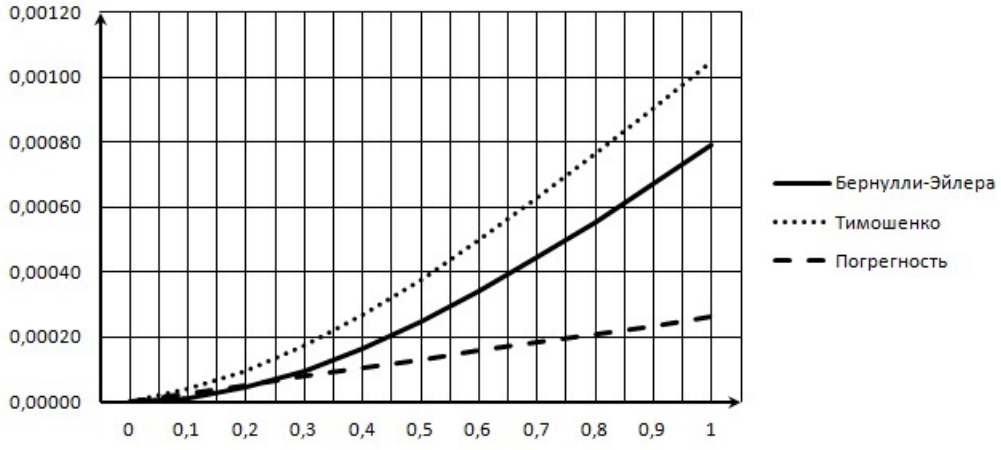


Рис. 5: Сила приложена вдоль большей стороны

При сравнении решений Бернулли-Эйлера и Тимошенко был рассмотрен пример с конкретной формой сечения. Поведение графиков, изображенных на Рис. 4 и 5, будет такое же и для других форм сечения.

По этим графикам видно, что в случае тонкого стержня (Рис. 4) решения Бернулли-Эйлера и Тимошенко практически совпадают и погрешность будет минимальной. Таким образом, сдвиговые эффекты практически не влияют на изгиб тонких стержней. Поэтому при попытке определить коэффициент сдвига путем экспериментов с тонкими стержнями, результаты объективно оказываются недостоверными. С другой стороны, при расчете любых стержней (как толстых, так и тонких) по теории Тимошенко можно использовать значение коэффициента сдвига, найденное путем экспериментов с толстыми стержнями.

7 Влияние отверстий в сечении на коэффициент сдвига ($J_x = J_y$)

Рассматривается стержени длины $l = 1$м с одинаковой площадью сечения для всех форм равной 0,1м^2. Общее количество элементов, когда в сечении квадрат: $n = 100000$. Материал стержня: модуль Юнга $E = 1,14 \cdot 10^{11}$ Па, число Пуассона равно 0,31. Приложенная сила $N = 1$МН.

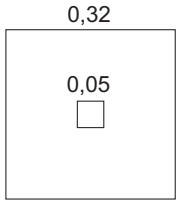
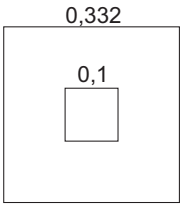
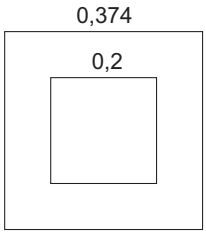
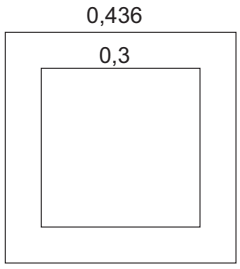
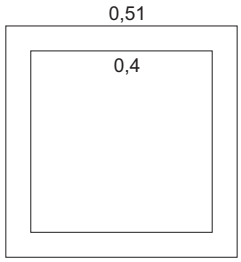
Форма сечения, м	ξ, м	Коэф. сдвига	a $\cdot 10^3$	b $\cdot 10^3$	c $\cdot 10^3$
	0,4	0,8293	1,7299	2,0625	0,3326
	0,6	0,8343	2,8450	3,3409	0,4959
	0,9	0,8489	3,6593	4,3903	0,7310
	0,4	0,7383	1,5697	1,9432	0,3735
	0,6	0,7363	2,5542	3,1160	0,5618
	0,9	0,7431	3,2632	4,0982	0,8350
	0,4	0,5952	1,2211	1,6845	0,4634
	0,6	0,5863	1,9192	2,6247	0,7056
	0,9	0,5828	2,4028	3,4676	1,0648
	0,4	0,5317	0,9579	1,4766	0,5187
	0,6	0,5199	1,4455	2,2412	0,7957
	0,9	0,5112	1,7817	2,9956	1,2139
	0,4	0,5010	0,8001	1,3505	0,5505
	0,6	0,4843	1,1710	2,0262	0,8542
	0,9	0,4738	1,4754	2,7851	1,3097

Таблица 9: Коэффициент сдвига для квадратной формы сечения с отверстиями (часть 1).

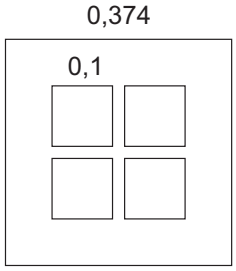
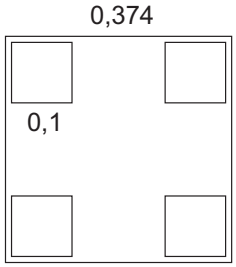
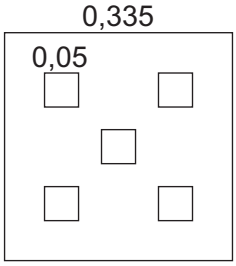
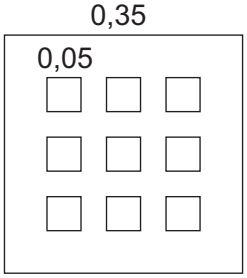
Форма сечения, м	ξ, м	Коэф. сдвига	a $\cdot 10^3$	b $\cdot 10^3$	c $\cdot 10^3$
	0,4	0,6105	1,2367	1,6884	0,4517
	0,6	0,6040	1,9508	2,6346	0,6838
	0,9	0,6028	2,4441	3,4734	1,0293
	0,4	0,7861	1,6182	1,9690	0,3508
	0,6	0,7869	2,6487	3,1744	0,5257
	0,9	0,7977	3,3952	4,1732	0,7770
	0,4	0,7636	1,5814	1,9426	0,3612
	0,6	0,7665	2,5777	3,1174	0,5397
	0,9	0,7757	3,2963	4,0963	0,7999
	0,4	0,7995	1,5234	1,8994	0,3750
	0,6	0,7340	2,4734	3,0363	0,5629
	0,9	0,7436	3,1543	3,9888	0,8345

Таблица 10: Коэффициент сдвига для квадратной формы сечения с отверстиями (часть 2).

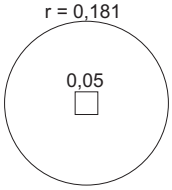
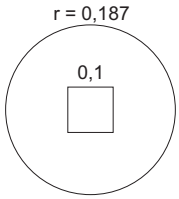
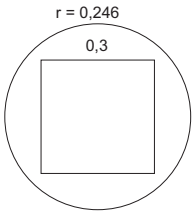
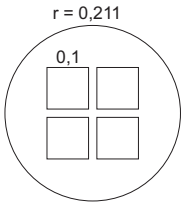
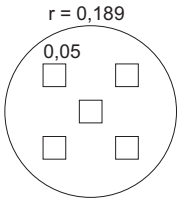
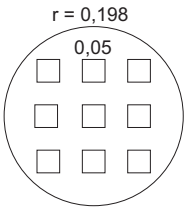
Форма сечения, м	ξ, м	Коэф. сдвига	a $\cdot 10^3$	b $\cdot 10^3$	c $\cdot 10^3$
	0,4	0,8592	1,7908	2,1118	0,3200
	0,6	0,8651	2,9494	3,4276	0,4782
	0,9	0,8793	3,7984	4,5041	0,7057
	0,4	0,7599	1,6342	1,9971	0,3629
	0,6	0,7585	2,6636	3,2080	0,5454
	0,9	0,7649	3,4083	4,2195	0,8112
	0,4	0,5151	1,0139	1,5493	0,5354
	0,6	0,5021	1,5307	2,3547	0,8230
	0,9	0,4968	1,8817	3,1306	1,2489
	0,4	0,6223	1,2816	1,7248	0,4432
	0,6	0,6163	2,0250	2,6972	0,6712
	0,9	0,6148	2,5433	3,5525	1,0093
	0,4	0,7758	1,6563	2,0118	0,3555
	0,6	0,7773	2,7053	3,2375	0,5322
	0,9	0,7860	3,4640	4,2544	0,7895
	0,4	0,7208	1,5395	1,9221	0,3826
	0,6	0,7211	2,4933	3,0660	0,5737
	0,9	0,7260	3,1761	4,0308	0,8547

Таблица 11: Коэффициент сдвига для круглой формы сечения с отверстиями.

Введём безразмерный параметр $\tau = \frac{S^4}{J^2}$, характеризующий геометрическое место отверстий. Этот параметр зависит от расположения и размера отверстий.

Хотим оценить зависимость коэффициента сдвига k от τ для квадратных и

круглых форм сечений сплошных и с отверстиями, когда $J_x = J_y$. Формы таких сечений представлены в таблицах 9-11.

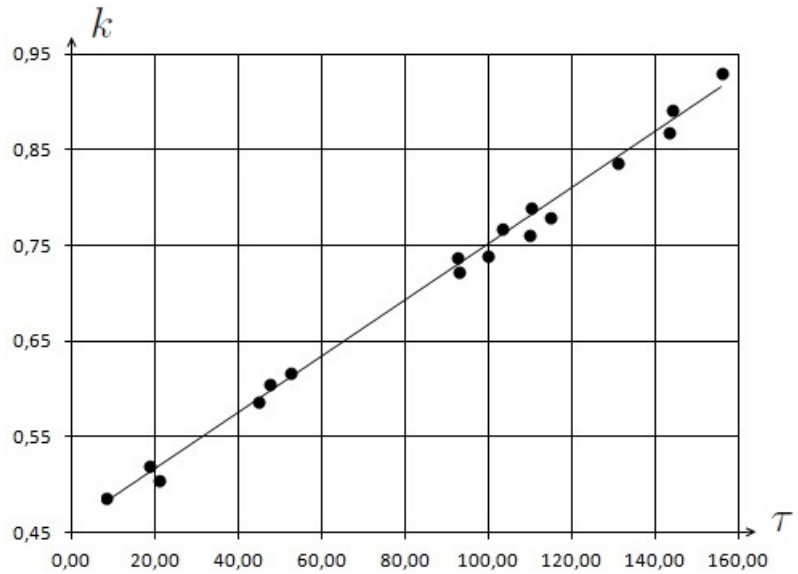


Рис. 6: Зависимость коэффициента сдвига k от τ для квадратных и круглых форм сечений сплошных и с отверстиями,когда $J_x = J_y$

Для этого графика уравнение аппроксимирующей прямой имеет вид: $k = 0,0029\tau + 0,4587$.

Введём обозначения: k_1 — это k, найденный по аппроксимирующему уравнению, k_2 — k, среднее значение для разных форм сечения из таблиц 9-11

τ	k_1	k_2	Погрешность, %
144,0	0,8759	0,8923	1,84
130,75	0,8375	0,8375	0,00
99,65	0,7473	0,7393	1,09
44,51	0,5874	0,5881	0,12
18,36	0,5115	0,5210	1,81
8,16	0,4820	0,4864	0,91
47,25	0,5953	0,6061	1,78
110,14	0,7777	0,7902	1,58
103,19	0,7575	0,7686	1,44
92,22	0,7257	0,7374	1,58
155,84	0,9102	0,9315	2,28
143,12	0,8734	0,8679	0,63
109,72	0,7765	0,7611	2,02
20,70	0,5183	0,5047	2,70
52,32	0,6100	0,6178	1,26
114,62	0,7907	0,7797	1,41
92,52	0,7266	0,7266	0,00

Таблица 12: Погрешность аппроксимации

Видим, что погрешность не превышает 3 %, что говорит о хорошем качестве аппроксимирующей прямой.

8 Влияние изменения коэффициента Пуассона на коэффициент сдвига

На Рис. 6 для экспериментальных точек получилась аппроксимирующая прямая. Для построения прямой достаточно двух точек, поэтому возьмём крайние точки на Рис. 6 и оценим влияние изменения коэффициента Пуассона [12] на коэффициент сдвига.

8.1 Коэффициент сдвига при изменении коэффициента Пуассона и модуля сдвига

Рассмотрим сплошной квадрат (таблица 2), и квадрат со стороной отверстия 0,4 (таблица 9). Модуль Юнга [13] остается не изменным, а меняется число Пуассона от 0,1 до 0,45 с шагом 0,05. Поэтому также у нас буде менятся модуль сдвига. Для каждого значения коэффициента Пуассона получаем зависимости коэффициента сдвига от безразмерного параметра τ.

Зависимость коэффициента сдвига от безразмерного параметра ищем в виде аппроксимирующей линии (Рис. 7): $k = a\tau + b$, где коэффициенты a, b находятся из численных расчётов и представлены в таблице 13.

Число Пуассона	a	b
0,10	0,00283885	0,44244410
0,15	0,00286460	0,44711392
0,20	0,00289717	0,45174875
0,25	0,00293550	0,45638506
0,30	0,00297915	0,46105333
0,35	0,00302746	0,46579427
0,40	0,00308012	0,47065844
0,45	0,00313720	0,47572193

Таблица 13: Коэффициенты для аппроксимирующей прямой, когда считаем модуль Юнга постоянным, при изменяющимся числе Пуассона

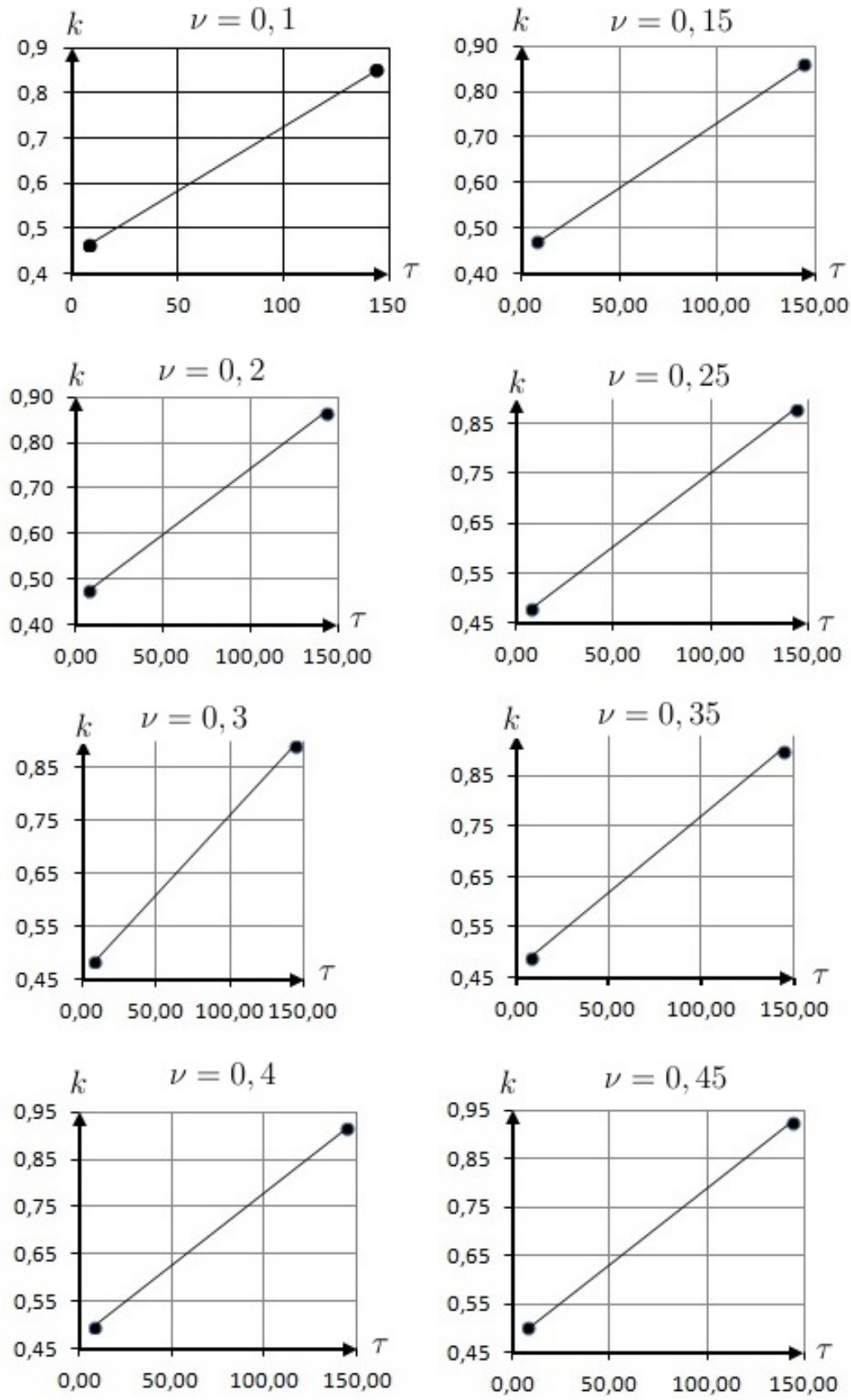


Рис. 7: Зависимость коэффициента сдвига k от τ при изменении коэффициента Пуассона и модуля сдвига

Изобразим графически зависимость коэффициентов a и b от коэффициента Пуассона.

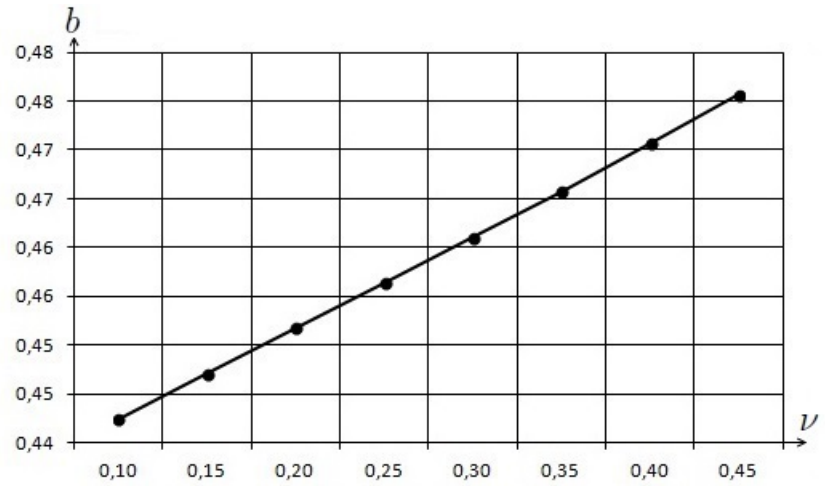


Рис. 8: Зависимость коэффициента b от числа Пуассона

Аппроксимирующая линия в этом случае имеет вид: $b = 0,00473181\nu + 0,43757182$

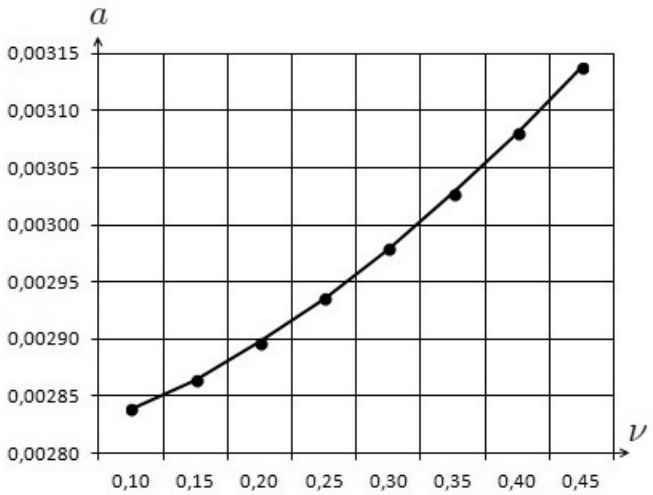


Рис. 9: Зависимость коэффициента a от числа Пуассона

Аппроксимирующая линия: $a = 0,00000256\nu^2 + 0,00001983\nu + 0,00281551$

8.2 Коэффициент сдвига при изменении коэффициента Пуассона и модуля Юнга

Считаем постоянным модуль сдвига [14], меняем число Пуассона от 0,1 до 0,45 с шагом 0,05 и соответственно будет меняться модуль Юнга.

Зависимость коэффициента сдвига от безразмерного параметра также ищем в виде аппроксимирующей линии (Рис. 10): $k = a\tau + b$.

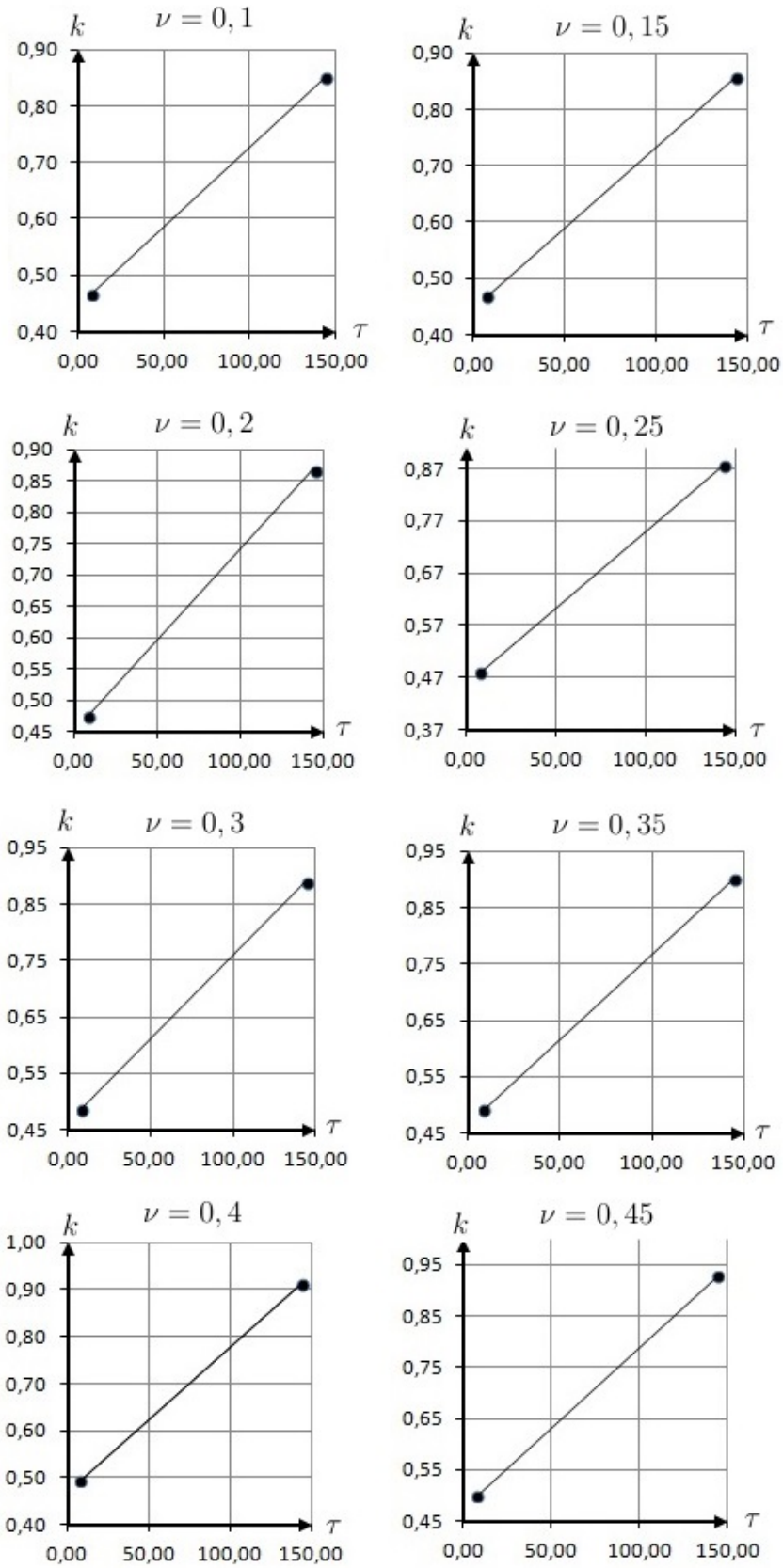


Рис. 10: Зависимость коэффициента сдвига k от τ при изменении коэффициента Пуассона и модуля Юнга

Запишем результаты для этой аппроксимиующей линии в виде таблицы:

Число Пуассона	a	b
0,10	0,00283887	0,44243169
0,15	0,00286472	0,44710148
0,20	0,00289717	0,45173796
0,25	0,00293565	0,45637578
0,30	0,00297927	0,46104263
0,35	0,00302754	0,46578213
0,40	0,00308023	0,47064651
0,45	0,00313720	0,47570841

Таблица 14: Коэффициенты для аппроксимирующей прямой, когда считаем модуль сдвига постоянным, при изменяющимся числе Пуассона и модуле Юнга.

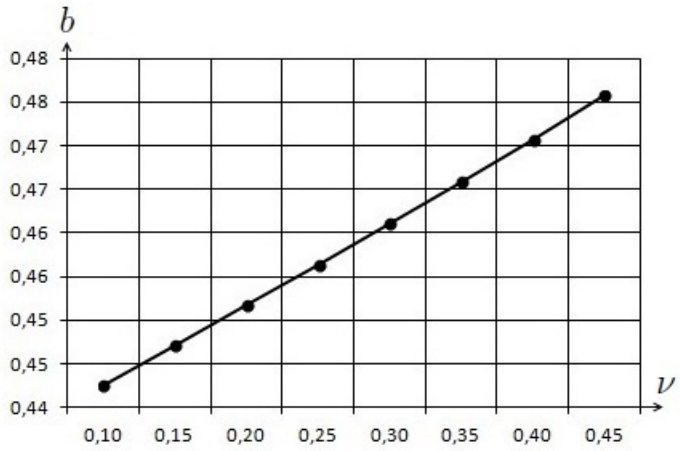


Рис. 11: Зависимость коэффициента b от числа Пуассона

Аппроксимирующая линия (для Рис 9.): $b = 0,00473169\nu + 0,43756074$

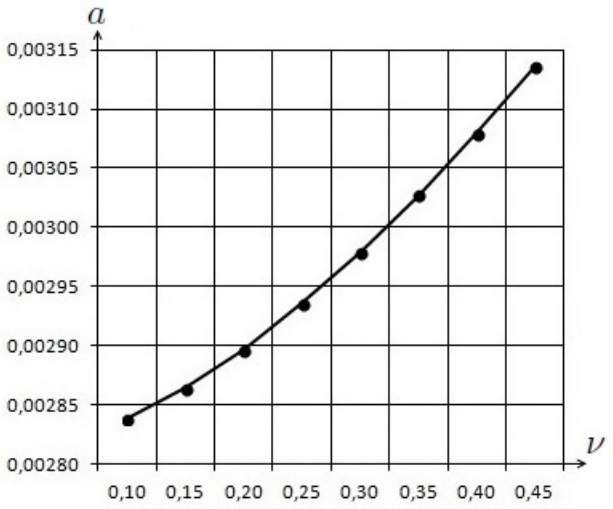


Рис. 12: Зависимость коэффициента a от числа Пуассона

Аппроксимирующая линия (для рис 10) будет иметь вид: $a = 0,00000255\nu^2 + 0,00001990\nu + 0,00281547$

Получаем, что аппроксимирующие линии для случая, когда изменяется коэффициент Пуассон и при этом меняется модуль сдвига, и для случая, когда изменяется коэффициент Пуассона и меняется модуль Юнга, практически совпадают (погрешность находится в пределах 1 %).

Таким образом, получается, что зависимость коэффициента сдвига от коэффициента Пуассона находится в пределах погрешности эксперимента. Коэффициенты a и b не зависят от коэффициента Пуассона, поэтому для них можно использовать среднее значения:

$$a = \frac{\pi + 3}{12}, \qquad b = \frac{1}{333} \tag{25}$$

Тогда зависимость коэффициента сдвига от безразмерного параметра можно записать в виде:

$$k = \frac{\pi + 3}{12} + \frac{1}{333}\frac{S^4}{J^2} \tag{26}$$

Вычислим погрешность значений коэффициента сдвига (k_f) полученные по формуле (26) со значениями полученными в результате эксперимента (k_e). Результаты представлены в таблице 15.

Видим, что в таблице 15, погрешность не превышает 3 %, что говорит о хорошем качестве формулы (26).

Безразмерный параметр	k_f	k_e	Погрешность, %
144,00	0,8759	0,8923	1,84
130,75	0,8375	0,8375	0,00
99,65	0,7473	0,7393	1,09
44,51	0,5874	0,5881	0,12
18,36	0,5115	0,5210	1,81
8,16	0,4820	0,4864	0,91
47,25	0,5953	0,6061	1,78
110,14	0,7777	0,7902	1,58
110,14	0,7777	0,7902	1,58
130,75	0,8375	0,8375	0,00
99,65	0,7473	0,7393	1,09
44,51	0,5874	0,5881	0,12
18,36	0,5115	0,5210	1,81
8,16	0,4820	0,4864	0,91
47,25	0,5953	0,6061	1,78
110,14	0,7777	0,7902	1,58
103,19	0,7575	0,7686	1,44
92,22	0,7257	0,7374	1,58
155,84	0,9102	0,9315	2,28
143,12	0,8734	0,8679	0,63
109,72	0,7765	0,7611	2,02
20,70	0,5183	0,5047	2,70
52,32	0,6100	0,6178	1,26
114,62	0,7907	0,7797	1,41
92,52	0,7266	0,7226	0,56

Таблица 15: Погрешность для коэффициента сдвига, найденного по формуле (26) и полученного в результате эксперимента.

9 Влияние отверстий в сечении на коэффициент сдвига ($J_x \neq J_y$)

Постановка задачи такая же, как в главе 7, только в этом случай, когда моменты инерции не равны: $J_x \neq J_y$. Рассмотрим такие формы сечений (Рис 13.):

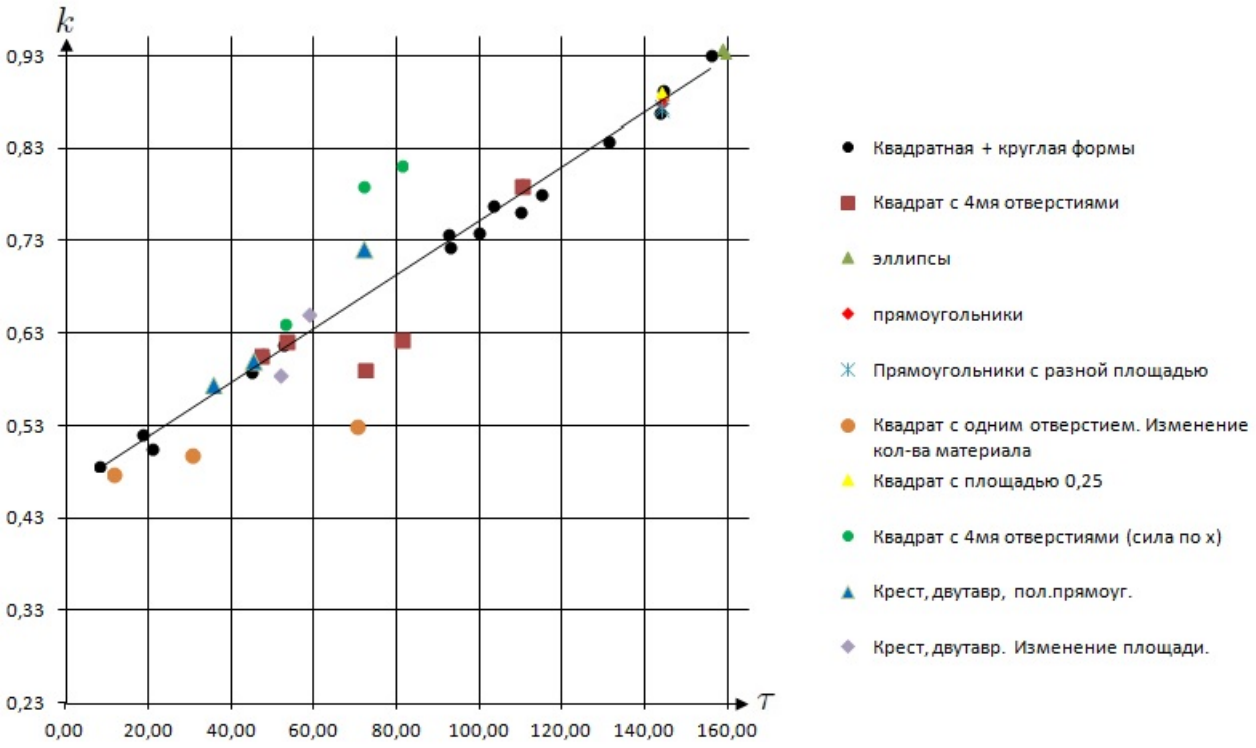


Рис. 13: Зависимость коэффициента сдвига от безразмерного параметра τ.

Видим, что некоторые точки плохо ложатся на прямую. Поэтому формулу (26) нужно модифицировать. В дипломной работе Филимонова Александра "Исследование зависимости коэффициента сдвига от параметров сечения стержня" была получена формула для коэффициента сдвига в случае тонкостенных конструкций:

$$k = \sqrt{\frac{J_y}{J_x}}(0,0831\frac{J_x}{J_y} + 0,5556\sqrt{\frac{J_x}{J_y}} - 0,0862) \tag{27}$$

Добавим к этой формуле слагаемое $0,0029\tau$, полученное для аппроксимирующей прямой для случая $J_x = J_y$, будем иметь:

$$k_* = 0,0831\sqrt{\frac{J_x}{J_y}} + 0,5556 - 0,0862\sqrt{\frac{J_y}{J_x}} + 0,0029\tau \tag{28}$$

Построим зависимость коэффициента сдвига k от k_* (Рис 14.). В этом случае получается, что некоторые точки не ложатся на прямую, поэтому введём слудующую величину:

$$h = (J_x - J_y)\frac{S^2}{J_x J_y} \tag{29}$$

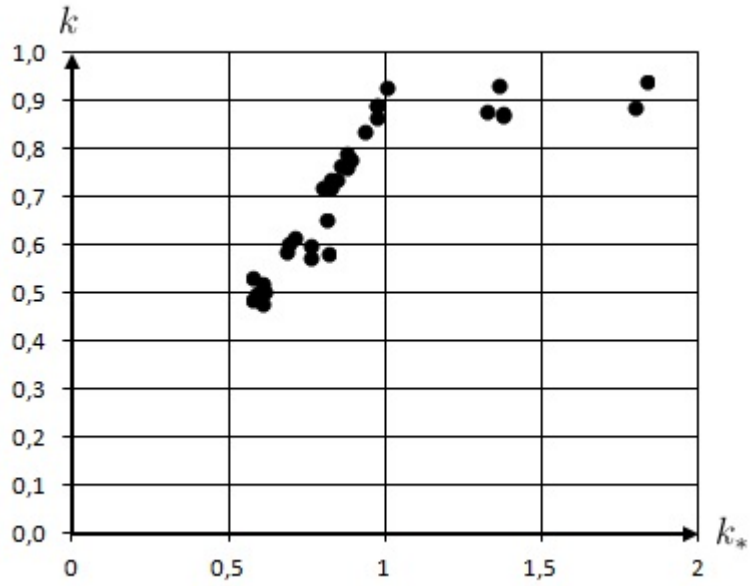


Рис. 14: Зависимость k от k_*.

Рассмотрим зависимость разницы $k_* - k$ от h (Рис 15.):

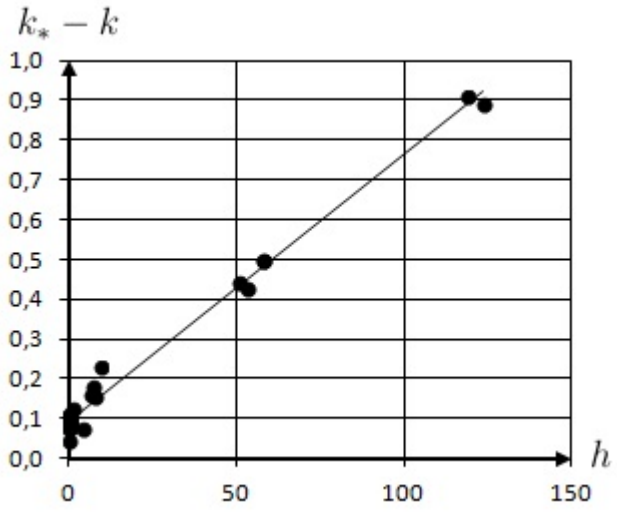


Рис. 15: Зависимость h от $k_* - k$.

Из Рис.15 видим, что зависимость получается линейная с такими коэффициентами, поэтому:

$$k_* - k = 0,0067\frac{(J_x - J_y)S^2}{J_x J_y} + 0,099 \tag{30}$$

Тогда получаем, что для случая, когда $J_x \neq J_y$, коэффициент сдвига будет иметь вид:

$$k = k_* - 0,0067\frac{(J_x - J_y)S^2}{J_x J_y} - 0,099 \tag{31}$$

Проверим это, построив зависимость коэффициента сдвига коэффициента сдвига $k_{experiment}$, полученного входе эксперимента, и $k_{formula}$, найденного по формуле (31). Имеем (Рис. 16.):

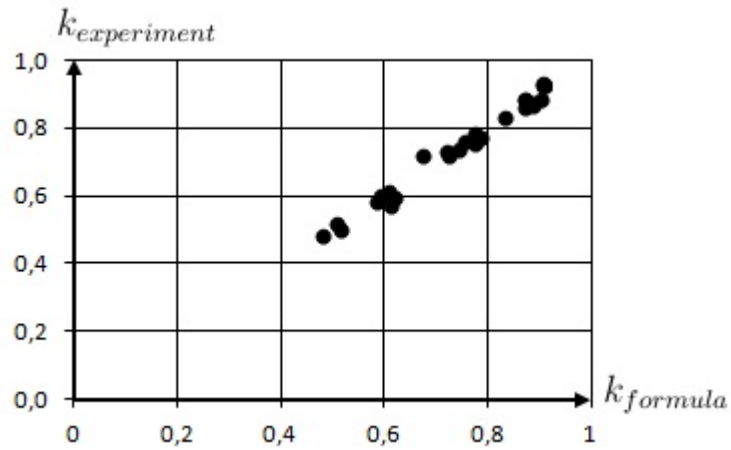


Рис. 16: Зависимость $k_{experiment}$ от $k_{formula}$.

Видим, что точки образуют прямую, причем $k_{experiment} = k_{formula}$, значит формула (31) действительно является формулой для определения коэффициента сдвига в случае $J_x \neq J_y$. Перепишем в полном виде:

$$k = 0,4566 + 0,0029\frac{S^4}{J_x J_y} - 0,0067\frac{(J_x - J_y)S^2}{J_x J_y} + 0,0831\sqrt{\frac{J_x}{J_y}} - 0,8862\sqrt{\frac{J_y}{J_x}} \quad (32)$$

10 Основные результаты

Напишем основные результаты полученные в данной работе.

Была определена зависимость коэффициента сдвига от момента инерции, когда моменты инерции совпадают, т.е. ($Jx = Jy$)

Определена зависимость коэффициента сдвига от коэффициента Пуассона для случаев:

1)когда модуль Юнга постоянен, а модуль сдвига изменяется при изменении коэффициента Пуассона в диапозоне от 0,1 до 0,45.

2)когда модуль сдвига постоянен, а модуль Юнга изменяется при изменении коэффициента Пуассона в диапозоне от 0,1 до 0,45.

Удалось получить формулу для определения зависимости коэффициента сдвига от моментов инерции, когда моменты инерции не совпадают, т.е. ($Jx \neq Jy$).

Список литературы

[1] В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев. Курс сопротивления материалов с примера и задачами. Учебное пособие, 2012.

[2] Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. Механика твердых деформируемых тел. Том 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.

[3] Mindlin R.D. influence of rotatory inertia and shear on flexural vibrations of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. 18. P. 31–38.

[4] П. А. Жилин. Прикладная механика. Основы теории оболочек. Издательство Политехнического университета, 2006

[5] П. А. Жилин. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Издательство Политехнического университета, 2007

[6] В. К. Манжосов. Сопротивление материалов. Определение внутренних силовых факторов. - Учебное пособие. Ульяновск, УлГТУ.

[7] Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999

[8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости: Учеб. пособие. — 4-е изд., испр. и доп. — М.; Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 248 с.

[9] С. Г. Рабинович. Погрешности измерений. - Л.:Энергия. 1978.

[10] Erasmo Carrera, Gaetano Giunta, Marco Petrolo. Beam Structures: Classical and Advanced Theories.

[11] O. A. Bauchau, J. I. Craig. Euler-Bernoulli beam theory. Springer Netherlands, 2009.

[12] R. K. Bansal. A text book of strength of materials. Laxmi publications (p) ltd. 1996.

[13] M. Spittel, T. Spittel. Young's modulus of steel. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[14] David Roylance. Mechanical properties of materials. MIT 2008.